BULLETIN DE LA S. M. F.

ANNIE HERSANT

Formes harmoniques et cohomologie relative des algèbres de Lie

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 359-377
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__359_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p.359-377.

FORMES HARMONIQUES ET COHOMOLOGIE RELATIVE DES ALGÈBRES DE LIE

PAR

ANNIE HERSANT (*)

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe de Lie unimodulaire, K un sous-groupe Ad-compact, et $\mathfrak{G}$ une sous-algèbre totalement complexe et K-invariante de l'algèbre de Lie complexe de G. Je montre ici que, pour toute représentation traçable de G, les deux espaces de $(\mathfrak{G}, K)$-cohomologie relative à valeurs vecteurs C^∞ d'une part, et vecteurs distributions d'autre part, coïncident et sont de dimension finie. J'en déduis la dualité de Poincaré, et j'indique sa signification dans l'optique de la méthode des orbites.

ABSTRACT. — Let G be a unimodular Lie group, K an Ad-compact subgroup, and $\mathfrak{G}$ a totally complex K-invariant subalgebra of the complex Lie algebra of G. It is proven here that, for any traceable representation of G, the two spaces of $(\mathfrak{G}, K)$-relative cohomology with values in the C^∞-vectors on one hand, and in the distributions-vectors on the other hand, coincide and are finite-dimensional. This result yields Poincaré duality, the meaning of which *I* explain in the orbit method context.

L'induction harmonique est l'une des méthodes de construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie. Ces représentations ont été étudiées en particulier pour les groupes nilpotents ([10] et [12]) et pour les groupes réductifs [14].

Nous considérons ces représentations pour un groupe G unimodulaire, lorsque sont satisfaites les hypothèses nécessaires à la construction de la représentation, à savoir :

(a) il existe un sous-groupe K compact modulo le centre Z;

(*) Texte reçu le 4 octobre 1984, révisé le 17 septembre 1985.

A. HERSANT, U.E.R. de Mathématiques, Université Paris-VII, Tour 45/55, 5^e *étage*, 2, *place Jussieu*, 75251 *Paris Cedex* 05.

(*b*) il existe une sous-algèbre complexe $\mathfrak{G}$ de l'algèbre de Lie complexifiée $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}$ de G, qui est K-invariante et totalement complexe, c'est-à-dire vérifiant

$$\mathfrak{G}+\bar{\mathfrak{G}}=\mathscr{G}_{\mathbf{C}} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{G}\cap\bar{\mathfrak{G}}=\mathscr{K}_{\mathbf{C}}$$

(où $-$ désigne la conjugaison relativement à $\mathscr{G}$)

(*c*) l'algèbre $\mathfrak{G}$ et le groupe K agissent dans $\mathbf{C}$ par des caractères compatibles qui définissent sur $\mathbf{C}$ une structure de $(\mathfrak{G}, K)$-module, que nous noterons V; en outre, l'action de K est unitaire.

Rappelons brièvement la construction : on considère le fibré $\mathscr{L}_\chi$ induit par le caractère de K, que nous noterons χ. On munit ce fibré d'une structure complexe G-invariante déterminée par la donnée de $\mathfrak{G}$, et d'une métrique hermitienne G-invariante (l'existence en est assurée par la condition a, et on en choisit une, fixée dans ce qui suit).

Dans ces conditions, on considère l'espace $H^q(\chi, \mathfrak{G})$ constitué des $(0, q)$-formes à valeurs dans le fibré $\mathscr{L}_\chi$ qui sont annulées par l'opérateur de Dolbeault d et son adjoint formel d^*. Cet espace est complet, en raison de l'ellipticité du complexe de Dolbeault, et muni d'une action unitaire de G, que nous noterons $\pi^q(\chi, \mathfrak{G})$. Nous avons montré dans [7] que la classe d'équivalence de la représentation $\pi^q(\chi, \mathfrak{G})$ ne dépend pas du choix de la métrique hermitienne sur $\mathscr{L}_\chi$.

Supposons G de type I; suivant Schmid [14], nous pouvons appliquer la formule de Plancherel.

D'où

$$H^q(\chi, \mathfrak{G})=\int_{\hat{G}_\chi}^{\otimes} \mathscr{H}_\pi\otimes H^q(\check{\pi}, \chi, \mathfrak{G})\, d\mu(\pi)$$

et

$$\pi^q(\chi, \mathfrak{G})=\int_{\hat{G}_\chi}^{\otimes} (\pi\otimes 1)\, d\mu(\pi),$$

avec les notations suivantes : $\hat{G}_\chi$ est l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G dans lesquelles le centre Z agit par le caractère χ/Z. Les éléments de $\hat{G}_\chi$ (ou plutôt un représentant) sont notés $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$, et $(\check{\pi}, \mathscr{H}_{\check{\pi}})$ désigne la représentation contragrédiente à $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$. Enfin, l'espace $H^q(\check{\pi}, \chi, \mathfrak{G})$ est un certain espace de formes harmoniques formelles. Sans entrer dans les détails, rappelons que $H^q(\check{\pi}, \chi, \mathfrak{G})$ est égal à l'espace de cohomologie relative $H^q(\mathfrak{G}, K, (\mathscr{H}_{\check{\pi}})^\infty\otimes V)$ lorsque cet espace de cohomologie est de dimension finie (*voir* [7]).

Ayant supposé G unimodulaire et de type I, nous pouvons nous restreindre dans la désintégration précédente aux représentations $(\pi, \mathscr{H}_\pi)$ traçables, puisqu'elles supportent la mesure $d\mu$.

Le résultat principal de cet article est le suivant : sous les hypothèses précédentes, et pour toute représentation unitaire $(\pi, \mathscr{H})$ qui est traçable, les espaces de cohomologie relative

$$H^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes V) \qquad \text{et} \qquad H^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^{-\infty} \otimes V)$$

sont égaux et de dimension finie (en notant $\mathscr{H}^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ dans $\mathscr{H}$, et $\mathscr{H}^\infty$ son anti-dual topologique). Nous démontrons ce résultat en utilisant une paramétrix, suivant Connes-Moscovici [2]. En outre, comme dans [1], ceci entraîne que ces espaces $H^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^{\pm\infty} \otimes V)$ satisfont à la dualité de Poincaré. Nous expliquerons l'intérêt de ce résultat dans le cadre de la « méthode des orbites ».

Les espaces $H^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes V)$ ont été déterminés par Schmid dans le cas réductif, et par Penney et Rosenberg dans le cas nilpotent. Cependant, la présentation de ces auteurs est différente : comme dans ces cas l'algèbre $\mathscr{K}_{\mathbf{C}}$ admet une sous-algèbre supplémentaire $\mathscr{N}$ dans $\mathfrak{G}$, les résultats s'expriment en termes de cohomologie de $\mathscr{N}$. Notons aussi que notre méthode de démonstration est différente et plus simple, mais que les résultats obtenus sont moins complets que ceux de ces auteurs.

Le plan de cet article est le suivant : la partie I comporte une étude des opérateurs différentiels G-invariants sur des G-fibrés homogènes et hermitiens (d'après [6] et [8]), et une application à la théorie des représentations traçables du théorème de régularité elliptique dans ce contexte. La partie II est consacrée à l'égalité des $(\mathfrak{G}, K)$-cohomologies à valeurs vecteurs C^∞ et à valeurs vecteurs-distributions. Enfin, dans le paragraphe III, je démontre la dualité de Poincaré pour ce type de cohomologie relative et j'explique sa signification pour la méthode des orbites.

Je tiens à remercier ici Michel Duflo pour avoir attiré mon attention sur ces problèmes. Je remercie également le referee qui a suggéré quelques modifications dans la rédaction de cet article.

I. Opérateurs différentiels invariants sur un espace homogène

Soient G un groupe de Lie réel unimodulaire, et K un sous-groupe de G compact modulo le centre de G. Supposons données deux représentations unitaires (ρ_1, E_1) et (ρ_2, E_2) de K de dimension finie. Considérons les deux fibrés $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ induits par ces représentations; on a $\mathscr{E}_i = G \underset{K}{\times} E_i$, pour l'action de K

$$(g, v) \mapsto (gk^{-1}, \rho_i(k)v).$$

L'espace $C^\infty(\mathscr{E}_i)$ des sections du fibré $\mathscr{E}_i$ s'identifie naturellement à l'espace $(C^\infty(G) \otimes E_i)^K$ des fonctions C^∞ sur G à valeurs dans E_i, invariantes par la représentation $R \otimes \rho_i$ de K, où R est la représentation régulière droite.

Nous allons étudier l'algèbre $\mathrm{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ des opérateurs différentiels G-invariants (à gauche) de $\mathscr{E}_1$ dans $\mathscr{E}_2$.

Soient $\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$ l'algèbre enveloppante de $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}$ ($\mathscr{G}_{\mathbf{C}}$ = complexifiée de $\mathscr{G}$). L'identification habituelle de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$ avec l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G permet de faire agir les éléments de

$$\mathscr{A} = \mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}}) \otimes \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$$

en tant qu'opérateurs différentiels de $C^\infty(G) \otimes E_1$ dans $C^\infty(G) \otimes E_2$, par

$$(u \otimes A).(\varphi \otimes e) = u\varphi \otimes Ae,$$

$$(u\varphi : \text{action à droite de } u \text{ sur } \varphi).$$

Définissons une action à droite de l'algèbre de Lie $\mathscr{K}$ de K sur $\mathscr{A}$ par

$$(u \otimes A).X = uX \otimes A + u \otimes A\,\rho_1(X)$$

et posons $\mathscr{J} = \mathscr{A}.\mathscr{K}$.

LEMME 1.1. — *L'ensemble $\mathscr{J}$ est l'annulateur de $(C^\infty(G) \otimes E_1)^K$ dans $\mathscr{A}$.*

Démonstration. — Une inclusion est claire, du fait des égalités

$$\begin{aligned}((u \otimes A)X).(\varphi \otimes e) &= (uX \otimes A + u \otimes A.\rho_1(X)).(\varphi \otimes e)\\ &= (u \otimes A).(X\varphi \otimes e + \varphi \otimes \rho_1(X).e)\\ &= (u \otimes A).((R \otimes \rho_1)(X).(\varphi \otimes e)).\end{aligned}$$

Pour prouver l'inclusion inverse, on part de la décomposition

$$\mathscr{U}(\mathscr{K}_{\mathbf{C}}) = \mathbf{C} \oplus \mathscr{U}(\mathscr{K}_{\mathbf{C}}).\mathscr{K}.$$

Ayant noté $(\mathscr{U}_n(\mathscr{K}_C))_{n\geq 0}$ la graduation usuelle de $\mathscr{U}(\mathscr{K}_C)$, on vérifie ensuite par récurrence sur n l'égalité

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(E_1, E_2)&\oplus(\mathscr{U}_n(\mathscr{K}_C).\otimes\operatorname{Hom}(E_1, E_2))\\ &=\operatorname{Hom}(E_1, E_2)\oplus(\mathscr{U}_n(\mathscr{K}_C)\otimes\operatorname{Hom}(E_1, E_2)).\mathscr{K}.\end{aligned}$$

Si on appelle $\mathscr{S}$ un sous-espace supplémentaire de $\mathscr{K}$ dans $\mathscr{G}$, et β : $S(\mathscr{G}_C)\to\mathscr{U}(\mathscr{G}_C)$ la symétrisation, on a un isomorphisme (défini par le produit) entre

$$\beta(S(\mathscr{S}_C))\otimes\mathscr{U}(\mathscr{K}_C) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{U}(\mathscr{G}_C).$$

D'où les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}&=\beta(S(\mathscr{S}_C))\otimes\mathscr{U}(\mathscr{K}_C)\otimes\operatorname{Hom}(E_1, E_2)\\ &=(\beta(S(\mathscr{S}_C))\otimes\operatorname{Hom}(E_1, E_2))\oplus(\beta(S(\mathscr{S}_C))\\ &\qquad\otimes(\mathscr{U}(\mathscr{K}_C)\otimes\operatorname{Hom}(E_1, E_2)).\mathscr{K})\\ &=(\beta(S(\mathscr{S}_C))\otimes\operatorname{Hom}(E_1, E_2))\oplus\mathscr{J}.\end{aligned}$$

Et on vérifie en coordonnées locales que si D est non nul dans $\beta(S(\mathscr{S}_C))\otimes\operatorname{Hom}(E_1, E_2)$, il existe $f\in((C^\infty(G)\otimes E_1)^K$ tel que $D.f$ soit non nul au voisinage de l'origine $e.K$.

Ceci prouve que l'annulateur de $(C^\infty(G)\otimes E_1)^K$ dans $\mathscr{A}$ est égal à $\mathscr{J}$.

Faisons agir K dans $\mathscr{A}=\mathscr{U}(\mathscr{G}_C)\otimes\operatorname{Hom}(E_1, E_2)$ par :

$${}^k(u\otimes A)=(Ad\,k.u)\otimes\rho_2(k)\,A\,\rho_1(k)^{-1},$$

Définissons $\tilde{\mathscr{A}}=\{D\in\mathscr{A}\mid\forall k\in K, ({}^kD-D)\in\mathscr{J}\}$.

L'égalité ${}^k((u\otimes A).X)=({}^k(u\otimes A)).(Ad\,k.X)$ prouve que $\tilde{\mathscr{A}}$ contient $\mathscr{J}$.

PROPOSITION 1.2. — $\operatorname{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)=\tilde{\mathscr{A}}\mid\mathscr{J}$.

Démonstration. — Partons des égalités

$$\begin{aligned}(R\otimes\rho_2)(k)((u\otimes A)(\varphi\otimes e))&=R(k).(u\,\varphi)\otimes\rho_2(k)\,Ae\\ &={}^k(u\otimes A).((R\otimes\rho_1)(k).(\varphi\otimes e)).\end{aligned}$$

Donc les éléments de $\tilde{\mathscr{A}}$ agissent comme des opérateurs différentiels G-invariants de $(C^\infty(G)\otimes E_1)^K$ dans $(C^\infty(G)\otimes E_2)^K$, et l'action de $\mathscr{J}$ est nulle. Vérifions qu'on obtient ainsi tout $\operatorname{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$: en prenant au point $e.K$ une carte exponentielle de $\mathscr{S}$ dans $G\mid K$, on voit que tout élément de $\mathrm{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ coïncide au point $e.K$ avec l'action d'un élément D de $\beta(S(\mathscr{S}_\mathbf{C})\otimes\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$, et aussi en tout point de $G|K$ par invariance.

Par construction, ${}^kD$ et D définissent pour tout $k\in K$ le même opérateur sur $(C^\infty(G)\otimes E_1)^K$, ce qui, d'après le lemme 1.1, montre que $D\in\tilde{\mathscr{A}}$.

Remarque. — Dans ce qui précède, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que K est Ad-compact.

COROLLAIRE 1.3. — *Si on suppose que K est Ad-compact, on a*

$$\mathrm{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)=\mathscr{A}^K/\mathscr{A}^K\cap\mathscr{J}$$

avec

$$\mathscr{A}^K=\{D\in\mathscr{A}\,|\,\forall\, k\in K,\ {}^kD=D\}.$$

Démonstration. — Dans ce cas, il existe un supplémentaire $\mathscr{S}$ qui est K-invariant. Or nous avons trouvé une décomposition

$$\mathscr{A}=(\beta(S(\mathscr{S}_\mathbf{C}))\otimes\mathrm{Hom}(E_1, E_2))\oplus\mathscr{J},$$

qui entraîne que

$$\tilde{\mathscr{A}}/\mathscr{J}=(\beta(S(\mathscr{S}_\mathbf{C}))\otimes\mathrm{Hom}(E_1, E_2))\cap\tilde{\mathscr{A}}=(\beta(S(\mathscr{S}_\mathbf{C}))\otimes\mathrm{Hom}(E_1, E_2))^K$$

du fait de l'invariance de $\mathscr{S}$ par Ad K.

D'où l'égalité cherchée.

NOTATIONS. — (1) Nous noterons $D\mapsto\tilde{D}$ la projection de $\mathscr{A}^K$ sur

$$\mathscr{A}^K/\mathscr{A}^K\cap\mathscr{J}=\mathrm{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2).$$

(2) Soit $u\mapsto u^*$ l'anti-automorphisme anti-linéaire de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbf{C})$ qui prolonge $X\mapsto-\bar{X}$, pour $X\in\mathscr{G}_\mathbf{C}$. Si $D=\Sigma\, u_i\otimes A_i$ est élément de $\mathscr{A}^K=(\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbf{C})\otimes\mathrm{Hom}(E_1, E_2))^K$, nous noterons D^* l'élément $\sum u_i^*\otimes A_i^*$ de $(\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbf{C})\otimes\mathrm{Hom}(E_2, E_1))^K$.

Soit π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ (dans ce qui suit, unitaire signifiera toujours continue unitaire). L'algèbre $\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbf{C})$ agit continûment dans l'espace $\mathscr{H}^\infty$ des vecteurs de classe C^∞ par la représentation π_∞ obtenue par dérivation de π; elle agit aussi par la représentation $\pi_{-\infty}$ contragrédiente à π_∞, dans l'anti-dual topologique $\mathscr{H}^{-\infty}$ de $\mathscr{H}^\infty$. Du fait de l'inarité, si on considère $\mathscr{H}^\infty$ comme inclus dans $\mathscr{H}^{-\infty}$ via le produit scalaire de $\mathscr{H}$, $\pi_{-\infty}(u)$ prolonge $\pi_\infty(u)$ pour tout $u\in\mathscr{U}(\mathscr{G}_\mathbf{C})$.

Pour tout $D \in (\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}}) \otimes \mathrm{Hom}(E_1, E_2))^K$, nous allons définir deux opérateurs

$$D_{\pi_{\pm\infty}}: \quad (\mathscr{H}^{\pm\infty} \otimes E_1)^K \mapsto (\mathscr{H}^{\pm\infty} \otimes E_2)^K,$$

par la formule : si

$$D = \sum u_i \otimes A_i, \qquad D_{\pi_{\pm\infty}} = \sum \pi_{\pm\infty}(u_i) \otimes A_i$$

(l'invariance de D sous K assure que $D_{\pi_{\pm\infty}}$ respecte les propriétés de K-invariance).

Un calcul facile montre que si D est dans $\mathscr{A}^K \cap \mathscr{J}$, alors $D_{\pi_{\pm\infty}} = 0$. De ce fait, $D_{\pi_{\pm\infty}}$ dépend seulement de l'élément $\tilde{D} \in \mathrm{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$, et non du représentant $D \in \mathscr{A}^K$ choisi.

Remarque. — Pour tout D dans $\mathscr{A}^K$, $D_{\pi_{\pm\infty}}$ est l'adjoint de $D^*_{\pi_{\mp\infty}}$.

Rappelons brièvement la description de la topologie de $\mathscr{H}^\infty$ qu'a donnée Goodman dans [5]. L'espace $\mathscr{H}^\infty$ est la limite projective de la chaîne d'espaces hibertiens $(\mathscr{H}^k)_{k \in \mathbf{N}}$, où $\mathscr{H}^k$ est l'espace des vecteurs k-fois différentiables; cette topologie sur $\mathscr{H}^\infty$ est de Fréchet. On l'appelle topologie canonique. Nous munirons l'espace $\mathscr{H}^{-\infty}$ de la topologie de dual fort de $\mathscr{H}^\infty$, qui coïncide avec celle de limite inductive de la chaîne d'espaces hilbertiens $(\mathscr{H}^{-k})_{k \in \mathbf{N}}$ formée des anti-duaux des $\mathscr{H}^k$. Pour cette topologie, $\mathscr{H}^{-\infty}$ est un espace localement convexe séparé et complet, dont l'anti-dual est exactement $\mathscr{H}^\infty$.

Définissons maintenant ce que nous appellerons une représentation tracée de G : la représentation unitaire $(\pi, \mathscr{H})$ du groupe unimodulaire G sera dite *tracée* s'il existe sur l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(L^1(G))$ une trace t non triviale telle que :

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(G), \quad t(\pi(\varphi^* * \varphi)) < +\infty,$$

où

$$\varphi^* \text{ est la fonction } \varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^{-1})}$$

(pour toutes ces questions, *voir* [3]).

Dans le cas où la trace t est la trace usuelle de $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, nous dirons que la représentation est *ordinairement tracée*.

La donnée d'une trace t sur une algèbre de von Neumann $\mathscr{A}$ incluse dans un certain $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ permet de définir la *dimension relative à la trace t* de certains sous-espaces fermés de $\mathscr{H}$: pour tout sous-espace fermé $\mathscr{S}$ qui est stable sous l'action du commutant de $\mathscr{A}$, le projecteur orthogonal $P_{\mathscr{L}}$ de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{L}$ est un élément positif de $\mathscr{A}$, si bien qu'on peut définir le nombre $\dim_t \mathscr{L} = t(P_{\mathscr{L}}) \in [0, +\infty]$.

Soit $(\pi, \mathscr{H}, t)$ une représentation unitaire tracée de G. Considérons pour $i=1, 2$ l'algèbre de von Neumann $\mathscr{A}_i$ engendrée par $\pi(L^1(G)) \otimes \operatorname{End} E_i$. Si on note χ_i le projecteur orthogonal de $\mathscr{H} \otimes E_i$ sur $(\mathscr{H} \otimes E_i)^K$, il est facile de voir que $\chi_i \in \mathscr{A}_i$, si bien qu'on peut construire l'algèbre de von Neumann $\mathscr{B}_i$ réduite de $\mathscr{A}_i$ correspondante : l'algèbre $\mathscr{B}_i$ est formée des restrictions à l'espace $(\mathscr{H} \otimes E_i)^K$ des éléments de $\mathscr{A}_i$ qui laissent stable $(\mathscr{H} \otimes E_i)^K$ et son orthogonal. Munissons $\mathscr{A}_i$ (et $\mathscr{B}_i$) de la trace $\hat{t_i}$ produit tensoriel de la trace t et de la trace naturelle sur $\operatorname{End} E_i$.

Le résultat principal de cette section peut maintenant être énoncé.

THÉORÈME 1.4. — *Soit D un élément de $(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}}) \otimes \operatorname{Hom}(E_1, E_2))^K$ tel que l'opérateur $\tilde{D} \in \operatorname{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ associé à D soit elliptique: pour toute représentation unitaire tracée $(\pi, \mathscr{H}, t)$, on a*

(i) $\operatorname{Ker} D_{\pi-\infty} = \operatorname{Ker} D_{\pi+\infty}$ *et* $\dim_{\hat{t_1}} (\operatorname{Ker} D_{\pi\pm\infty}) < +\infty$,

(ii) $\operatorname{Ker} D^*_{\pi-\infty} = \operatorname{Ker} D^*_{\pi+\infty}$ *et* $\dim_{\hat{t_2}} (\operatorname{Ker} D^*_{\pi\pm\infty}) < +\infty$,

(iii) *Si en outre la représentation est ordinairement tracée,* $\operatorname{Im} D_{\pi-\infty}$ *est un sous-espace fermée de* $(\mathscr{H}^{-\infty} \otimes E_2)^K$.

Remarques. — (1) Dans les énoncés (i) et (ii), il est sous-entendu que $\operatorname{Ker} D_{\pi\pm\infty}$ (resp. $\operatorname{Ker} D^*_{\pi\pm\infty}$) est dans le domaine de la trace $\hat{t_1}$ (resp. $\hat{t_2}$), c'est-à-dire fermé et stable sous l'action du commutant de $\mathscr{B}_1$ (resp. $\mathscr{B}_2$), ce qui est clair.

(2) Le cas où $\mathscr{H}$ est l'espace $L^2(G)$ muni de la représentation régulière droite a été étudié par CONNES et MOSCOVICI dans [2]; nous reprenons en partie leur raisonnement.

Démonstration. — (i) Par définition, si $D = \sum u_i \otimes A_i$, $D_{\pi-\infty}$ est la restriction à $(\mathscr{H}^{-\infty} \otimes E_1)^K$ de l'opérateur $\Sigma \pi_{-\infty}(u_i) \otimes A_i$ défini sur $\mathscr{H}^{-\infty} \otimes E_1$.

Soit $w = \sum \xi_j \otimes e_j$ un élément de $\operatorname{Ker} D_{\pi-\infty}$; il s'agit de montrer que $w \in (\mathscr{H}^{\infty} \otimes E_1)^K$, ce qui entraînera que $w \in \operatorname{Ker} D_{\pi+\infty}$. Pour cela, fixons η dans $\mathscr{H}^{\infty}$ et considérons le « coefficient matriciel » associé $\Phi_\eta : G \to E_1$ défini par

$$\Phi_\eta(x) = \sum \langle \pi_{-\infty}(x) \xi_j, \eta \rangle e_j = \sum \langle \xi_j, \pi_{\infty}(x)^{-1} \eta \rangle e_j.$$

Comme on sait que l'application $x \mapsto \pi_{\infty}(x).\eta$ est C^{∞} de G à valeurs dans $\mathcal{H}^{\infty}$ pour tout $\eta \in \mathcal{H}^{\infty}$ (*voir* POULSEN [11]), la fonction Φ_{η} est de classe C^{∞} sur G; elle est également invariante par l'action $R \otimes \rho_1$ du sous-groupe K. Elle définit donc une section C^{∞} du fibré $\mathscr{E}_1$. Un calcul facile montre qu'elle est annulée par $\tilde{D}$.

Introduisons maintenant une parametrix pour $\tilde{D}$, en reprenant les techniques et les notations de [2]. D'après leur proporisition 1.3, pour tout élément $\tilde{D}$ elliptique dans $\mathrm{Diff}^G(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ il existe un opérateur pseudo-différentiel G-invariant, soit Q, du fibré $\mathscr{E}_2$ dans le fibré $\mathscr{E}_1$, tel que : $(1-Q\tilde{D})$ est un opérateur de convolution de la forme

$$(1-Q\tilde{D})\Phi(x)=\int_G \psi(x^{-1}y)\Phi(y)\,dy,$$

où ψ est une certaine fonction de $(C_c^{\infty}(G)\otimes \mathrm{End}\, E_1)^{K\times K}$ (par définition, une fonction est biinvariante par K si elle vérifie la relation

$$\psi(x)=\rho_1(k_1)\psi(k_1^{-1}xk_2)\rho_1(k_2)^{-1} \qquad \forall x\in G,\ \forall k_1,\ k_2\in K).$$

Si nous appliquons $(1-Q\tilde{D})$ à la fonction Φ_{η} construite précédemment, la relation $\tilde{D}\Phi_{\eta}=0$ entraîne que

$$\forall x\in G,\quad \Phi_{\eta}(x)=\int_G \Psi(x^{-1}y)\Phi_{\eta}(y)\,dy.$$

Au point $x=e$, cette égalité s'écrit encore, en remplaçant Φ_{η} par sa valeur

$$\Sigma_j\langle \xi_j,\ \eta\rangle e_j=\int_G \Sigma_j\langle \pi_{-\infty}(y)\xi_j,\ \eta\rangle\psi(y)e_j\,dy$$

et ceci doit être vérifié (dans E_1) pour tout $\eta\in\mathcal{H}^{\infty}$; on en déduit que, dans $\mathcal{H}^{-\infty}\otimes E_1$, on a

$$\Sigma_j\xi_j\otimes e_j=\sum_j\int_G(\pi_{-\infty}(y).\xi_j\otimes\psi(y)e_j)\,dy,$$

c'est-à-dire $w=\hat{\pi}_{-\infty}(\psi).w$, si on convient, pour $f\in(C_c(G)\otimes \mathrm{End}\, E_1)^{K\times K}$, de noter $\hat{\pi}_{-\infty}(f)$ l'opérateur continu de $(\mathcal{H}^{-\infty}\otimes E_1)^K$ dans lui-même défini par

$$\hat{\pi}_{-\infty}(f)=\int_G(\pi_{-\infty}(y)\otimes f(y))\,dy.$$

On vérifie comme dans le cas classique de l'espace de Gärding que si f est dans $(C_c^\infty(G)\otimes \mathrm{End}\, E_1)^{K\times K}$, $\pi^\wedge_{-\infty}(f)$ envoie $(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E_1)^K$ dans $(\mathscr{H}^\infty\otimes E_1)^K$.

L'égalité $w=\pi^\wedge_{-\infty}(\psi)^\sim$ $_{\pi-\infty}$
$\mathrm{Ker}\, D_{\pi-\infty}$ est inclus dans $(\mathscr{H}^\infty\otimes E_1)^K$, ce qui était la première assertion à démontrer. D'autre part, cette égalité prouve que $\mathrm{Ker}\, D_{\pi-\infty}$ est aussi dans $\mathrm{Ker}(\pi^\wedge_{-\infty}(\psi)-1)$, donc *a fortiori* dans le noyau de $\pi^\wedge(\psi)-1$ dans l'espace de Hilbert $(\mathscr{H}\otimes E_1)^K$ (la définition de $\pi^\wedge(\psi)$ est la même que celle de $\pi^\wedge_{-\infty}(\psi)$, en remplaçant l'espace $\mathscr{H}^{-\infty}$ par $\mathscr{H}$). La représentation π étant traçable, les opérateurs de la forme $\pi^\wedge(f)$ avec $f\in(C_c^\infty(G)\otimes \mathrm{End}\, E_1)^{K\times K}$ sont à trace relativement à la trace produit tensoriel $t_1^\wedge$; les sous-espaces propres dans $(\mathscr{H}\otimes E_1)^K$ d'un tel $\pi^\wedge(f)$ associés à une valeur propre non nulle sont alors de dimension finie (relativement à $t_1^\wedge$). On en déduit

$$\dim_{t_1^\wedge} \mathrm{Ker}\, D_{\pi\pm\infty} \leqslant \dim_{t_1^\wedge} \mathrm{Ker}(\pi^\wedge(\psi)-1) < +\infty.$$

(ii) On remarque que, pour tout $D\in(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbb{C}})\otimes \mathrm{Hom}(E_1, E_2))^K$, $\tilde{D}$ et $(D^*)^\sim$ sont deux opérateurs différentiels adjoints : c'est une conséquence facile de l'hypothèse d'unimodularité, une fois qu'on sait que la forme hermitienne sur l'espace des sections C^∞ à support compact du fibré $\mathscr{E}_i$ s'obtient en faisant le produit scalaire des sections dans chaque fibre, puis en intégrant sur G/K la fonction obtenue. Donc $(D^*)^\sim$ est elliptique si et seulement si D l'est, et on raisonne comme dans le (i).

(iii) On suppose maintenant que π est ordinairement tracée; il découle de ce qui précède que $\mathrm{Ker}\, \mathrm{D}_{\pi\pm\infty}$ et $\mathrm{Ker}\, \mathrm{D}^*_{\pi\pm\infty}$ sont deux sous-espaces de dimension (ordinaire) finie de $(\mathscr{H}^\infty\otimes E_1)^K$ et $(\mathscr{H}^\infty\otimes E_2)^K$.

La relation d'orthogonalité $\mathrm{Ker}\, D^*_{\pi\infty}=(\mathrm{Im}\, D_{\pi-\infty})^\perp$ montre que $\mathrm{Im}\, D_{\pi-\infty}$ est de codimension finie dans $(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E_2)^K$; soit W un supplémentaire (algébrique et topologique) de $\mathrm{Im}\, D_{\pi-\infty}$ dans $(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E_2)^K$.

Considérons l'application

$$T=D_{\pi-\infty}\oplus \mathrm{id}_W:\quad ((\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E_1)^K/\mathrm{Ker}\, D_{\pi-\infty})\oplus W\to(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E_2)^K.$$

Cette application est continue et bijective, d'un espace localement convexe séparé complet qui est une limite inductive d'espaces de Fréchet dans un espace du même type. Le théorème du graphe fermé s'applique à cette situation (Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques I, § 3), et permet de conclure que T est bicontinue. Il s'ensuit que $\mathrm{Im}\, D_{\pi-\infty}$, qui est l'image par T du fermé $(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E_1)^K/\mathrm{Ker}\, D_{\pi-\infty}$, est fermé dans $(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E_2)^K$.

On démontrerait de la même façon que, sous les mêmes hypothèses, l'image de $D_{\pi+\infty}$ est fermée dans $(\mathscr{H}^{\infty} \otimes E_2)^K$.

II. Application à la cohomologie relative d'algèbres de Lie des méthodes de régularité d'opérateurs différentiels

Nous nous placerons dans les hypothèses de mon papier [7], que nous allons rappeler : on suppose donnée une sous-algèbre complexe $\mathfrak{G}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}$, qui est stable sous l'action de K, et vérifie

$$\begin{cases} \mathfrak{G}+\overline{\mathfrak{G}}=\mathscr{G}_{\mathbf{C}}, \\ \mathfrak{G}\cap\overline{\mathfrak{G}}=\mathscr{K}_{\mathbf{C}}, \end{cases}$$

($-$: conjugaison relative à la forme réelle $\mathscr{G}$).

Soit $(\pi, \mathscr{H})$ une représentation unitaire de G, comme plus haut. Soit d'autre part V un $(\mathfrak{G}, K)$-module de dimension finie, qui est K-unitaire.

On fait l'hypothèse que le centre de G agit dans $\mathscr{H}$ et V par deux caractères (unitaires) conjugués, ce qui assure que son action dans $\mathscr{H} \otimes V$ est triviale.

Considérons l'espace $\mathscr{H}^{-\infty} \otimes V$: c'est à la fois un $\mathfrak{G}$-module et un K-module, dans lequel tout vecteur est indéfiniment différentiable sous K, et où les relations suivantes sont vérifiées :

(i) $\displaystyle \frac{d}{dt}_{t=0} (\exp tX).v=X.v, \qquad \forall X\in\mathscr{K}, \quad \forall v\in\mathscr{H}^{-\infty}\otimes V,$

(ii) $(\mathrm{Ad}\,k.X).v=kXk^{-1}.v, \qquad \forall X\in\mathfrak{G}, \quad \forall k\in K, \quad \forall v.$

On peut donc former le complexe standard de $(\mathfrak{G}, K)$-cohomologie relative à valeur dans $\mathscr{H}^{-\infty} \otimes V$; il s'écrit

$$\ldots \xrightarrow{\partial} (\Lambda^i(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^{-\infty} \otimes V)^K$$

$$\xrightarrow{\partial} (\Lambda^{i+1}(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^{-\infty} \otimes V)^K \xrightarrow{\partial} \ldots$$

où ∂ est donné par la formule de Koszul (*voir* [9]).

Munissons l'algèbre $\mathscr{G}$ d'un produit scalaire K-invariant, fixé dans ce qui suit.

De la même manière que dans [7], on peut, à partir de la formule de Koszul, construire un opérateur

$$\partial^*: \quad (\Lambda^{i+1}(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^{-\infty} \otimes V)^K \to (\Lambda^i(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^{-\infty} \otimes V)^K,$$

qui « est » l'adjoint de ∂ dans le sens suivant :

$$\forall v,\ w \in (\Lambda(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^{\infty} \otimes V)^K, \quad (\partial v, w) = (v, \partial^* w),$$

en notant $(\,,)$ le produit hermitien produit tensoriel sur

$$\Lambda(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H} \otimes V.$$

Notons E l'espace $\Lambda(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes V$, et ρ la représentation de K dans E obtenue en tensorisant l'action coadjointe par l'action dans V donnée. Comme plus haut, on construit le fibré induit $\mathscr{E} = G \times_K E$.

Nous allons appliquer ce qui précède à l'opérateur $(\partial + \partial^*)$, qui envoie $(\mathscr{H}^{-\infty} \otimes E)^K$ dans lui-même.

LEMME 2.1. — *Il existe un élément D de $(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}}) \otimes \operatorname{End} E)^{\mathrm{K}}$ vérifiant :*

(i) $D_{\pi_{-\infty}} = \partial + \partial^*$,

(ii) *l'opérateur $\tilde{D} \in \operatorname{Diff}^G \mathscr{E}$ associé à D est elliptique.*

Démonstration. — Elle est semblable à celle donnée dans [7] pour prouver la proposition 1, et découle de la formule de Koszul. Précisément, si on choisit une base orthonormée $Z_1, \ldots, Z_n$ de $\mathfrak{G}$, et si on appelle $\omega^1, \ldots, \omega^n$ la base duale, on vérifie que $\partial = T_{\pi_{-\infty}}$, où T est l'élément suivant de $(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}}) \otimes \operatorname{End} E)^{\mathrm{K}}$:

$$T = \textstyle\sum_{j=1}^n \Big[Z_j \otimes (p \,.\, e(\omega^j) \,.\, p^* \otimes 1_V) + 1 \otimes (p \,.\, e(\omega^j) \,.\, p^* \otimes (Z_j)_V) + 1 \otimes \left(\frac{1}{2} p \,.\, e(\omega^j) \,.\, Z_j \,.\, p^* \otimes 1_V \right) \Big].$$

en notant :

- $e(\omega^j)$ le produit extérieur à gauche par ω^j dans $\Lambda\,\mathfrak{G}^*$;
- p le projecteur orthogonal de $\Lambda\,\mathfrak{G}^*$ sur $\Lambda(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^*$, et p^* son adjoint hilbertien, qui envoie $\Lambda(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^*$ dans $\Lambda\,\mathfrak{G}^*$;
- et Z_j l'action coadjointe de Z_j dans $\Lambda\,\mathfrak{G}^*$.

(L'expression de T montre qu'il ne dépend pas du choix de la base $Z_1, \ldots, Z_n$, ce qui assure son invariance sous K.) Comme nous l'avons remarqué plus haut, on a aussitôt $\partial^* = (T^*)_{\pi_{-\infty}}$, où $X \mapsto X^*$ est l'anti-automorphisme de $(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}}) \otimes \operatorname{End} E)^{\mathrm{K}}$ déjà défini.

Nous avons donc $\partial+\partial^*=D_{\pi-\infty}$, où $D=T+T^*$ est un élément de $(\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})\otimes \operatorname{End} E)^K$. Vérifions l'ellipticité de $\tilde{D}$; il suffit de le faire au point $e.K$ de G/K, puisque $\tilde{D}$ est invariant à gauche.

L'opérateur différentiel $\tilde{D}$ étant de degré 1, son symbole principal au point $e.K$, que nous noterons $\sigma(\tilde{D})(e.K,.)$, est une application linéaire qui envoie les éléments de $T^*_{e.K}(G/K)=(\mathscr{G}/\mathscr{K})^*=\mathscr{K}^\perp\subseteq\mathscr{G}^*$ dans End E, et qui vaut sur $\xi\in\mathscr{K}^\perp$

$$\sigma(\tilde{D})(e.K,\xi)=\textstyle\sum_{j=1}^n\langle Z_j,\xi\rangle(pe(\omega^j)p^*\otimes 1_V)$$
$$-\textstyle\sum_{j=1}^n\langle \bar{Z}_j,\xi\rangle(pi(Z_j)p^*\otimes 1_V),$$

où $i(Z_j)$ est le produit intérieur par Z_j (c'est aussi l'adjoint de $e(\omega^j)$ relativement au produit scalaire sur $\Lambda\,\mathfrak{G}^*$).

Si on choisit la base $Z_1,\ldots,Z_n$ de façon que les $(n-r)$ derniers vecteurs $Z_{r+1},\ldots,Z_n$ forment une base réelle de $\mathscr{K}$, on peut facilement simplifier l'expression précédente, et la mettre sous la forme

$$\sigma(\tilde{D})(e.K,\xi)=[\textstyle\sum_{j=1}^r\langle Z_j,\xi\rangle e(\omega^j)-\sum_{j=1}^r\langle\bar{Z}_j,\xi\rangle i(Z_j)]\otimes 1_V.$$

Notons $B_\xi\otimes 1_V$ cet endomorphisme; il s'agit de montrer que pour $\xi\neq 0$, B_ξ est inversible dans End$[\Lambda(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^*]$. Or on peut facilement calculer son carré, à partir des relations

$$e(\omega^j)\,i(Z_k)+i(Z_k)\,e(\omega^j)=\delta_{jk}.\,\mathrm{id};$$

on trouve

$$B_\xi^2=(-\textstyle\sum_{j=1}^r\langle Z_j,\xi\rangle\langle\bar{Z}_j,\xi\rangle)\,\mathrm{id}=-\|\xi\|^2\,\mathrm{id},$$

avec $\|\ \|$ = norme hilbertienne sur $\mathscr{K}^\perp$.

On en déduit que $\sigma(\tilde{D})(e.K,\xi)$ est bien inversible dans End E si $\xi\neq 0$, ce qui prouve l'ellipticité de $\tilde{\mathscr{D}}$.

PROPOSITION 2.2. — *Sous les hypothèses précédentes, supposons en outre la représentation* π *ordinairement tracée; on a alors*

(i) $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)$ *est un sous-espace de dimension finie de* $(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E)^K$, *et qui est inclus dans* $(\mathscr{H}^\infty\otimes E)^K$.

(ii) $\operatorname{Ker}\partial$ *est somme directe (algébrique et topologique) de* $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)$ *et de* $\operatorname{Im}\partial$.

Démonstration. — Nous venons de voir que $(\partial+\partial^*)$ est de la forme $D_{\pi-\infty}$, pour un élément D associé à un opérateur $\tilde{D}$ elliptique. L'assertion (i) découle donc du théorème 1.4. D'autre part, on déduit du même théorème que $\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$ est fermé dans $(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E)^K$.

Montrons que $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)\cap\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$ est réduit à $\{0\}$. Soit $w=(\partial+\partial^*)v$ un élément annulé par $(\partial+\partial^*)$; alors w est dans $(\mathscr{H}^{\infty}\otimes E)^K$, et on peut calculer sa norme hilbertienne dans $(\mathscr{H}\otimes E)^K$:

$$\|w\|^2=(w,\,(\partial+\partial^*)v)=((\partial^*+\partial)w,\,v)=0,\quad \text{d'où}\quad w=0.$$

Nous en sommes à :

$$\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)\cap\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)=\{0\},$$

ou encore $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)=\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)^2$.

Une fois remarqué que $\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$ est l'orthogonal, au sens faible, du sous-espace de dimension finie $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)$ de $(\mathscr{H}^{\infty}\otimes E)^K$, on en déduit que $(\mathscr{H}^{-\infty}\otimes E)^K$ est somme directe des deux sous-espaces fermés $\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$ et $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)$, somme directe aussi bien topologique qu'algébrique.

Nous pouvons donc, par restriction, considérer $(\partial+\partial^*)$ comme une bijection continue du sous-espace fermé $\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$ sur lui-même, et définir son inverse $\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)\xrightarrow{(\partial+\partial^*)^{-1}}\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$, qui est continu (théorème du graphe fermé).

Remarquons que $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)$ est inclus dans $\operatorname{Ker}\partial$ et $\operatorname{Ker}\partial^*$: ceci résulte en effet des égalités, pour $v\in(\mathscr{H}^{\infty}\otimes E)^K$,

$$((\partial+\partial^*)v,\,(\partial+\partial^*)v)=((\partial+\partial^*)^2v,\,v)=((\partial\partial^*+\partial^*\partial)v,\,v)=\|\partial v\|^2+\|\partial^*v\|^2.$$

Ayant prouvé la décomposition

$$\operatorname{Ker}\partial=\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)\oplus(\operatorname{Ker}\partial\cap\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)),$$

il nous reste à montrer que $\operatorname{Ker}\partial\cap\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)=\operatorname{Im}\partial$.

Soit $u\in\operatorname{Ker}\partial\cap\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$; on a

$$\begin{aligned}u=(\partial+\partial^*)^{-2}(\partial+\partial^*)^2\,u&=(\partial+\partial^*)^{-2}(\partial\partial^*+\partial^*\partial)\,u\\&=(\partial+\partial^*)^{-2}\,\partial\partial^*\,u=\partial\partial^*(\partial+\partial^*)^{-2}\,u,\end{aligned}$$

car $(\partial+\partial^*)^2$ commute à ∂ et ∂^*.

Donc $\operatorname{Ker}\partial \cap \operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$ est inclus dans $\operatorname{Im}\partial$. D'autre part, l'inclusion de $\operatorname{Im}\partial$ dans $\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$ est claire, puisque $\operatorname{Im}\partial$ est inclus dans l'orthogonal (au sens faible) de $\operatorname{Ker}\partial^* \cap (\mathscr{H}^\infty \otimes E)^K$, et ce dernier espace contient $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)$, dont l'orthogonal est $\operatorname{Im}(\partial+\partial^*)$.

Nous avons donc montré un théorème de Hodge dans $(\mathscr{H}^{-\infty} \otimes E)^K$, qui s'exprime sous la forme suivante : chaque classe de $(\mathfrak{G}, K)$-cohomologie relative à valeurs dans $\mathscr{H}^{-\infty} \otimes V$ contient un élément harmonique et un seul (harmonique = élément de $\operatorname{Ker}(\partial+\partial^*)$).

THÉORÈME 2.3. — *Toujours sous l'hypothèse que la représentation π est ordinairement tracée, les espaces de cohomologie relative* $\mathrm{H}^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes V)$ *et* $\mathrm{H}^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^{-\infty} \otimes V)$ *sont égaux et de dimension finie.*

Démonstration. — Cela découle en effet du théorème de Hodge précédent, et du résultat similaire pour la cohomologie à valeurs dans $\mathscr{H}^\infty \otimes V$ (*voir* [7], théorème 1 et corollaire 2).

Contre-exemples 2.4. — (1) Le théorème 2.3 cesse d'être vrai lorsque la sous-algèbre $\mathfrak{G}$ n'est pas « totalement complexe », c'est-à-dire quand la condition $\mathfrak{G}+\bar{\mathfrak{G}}=\mathscr{G}_{\mathbb{C}}$ n'est plus réalisée. Prenons par exemple pour $\mathscr{G}$ l'algèbre de Heisenberg engendrée par X, Y, Z avec $[X, Y]=Z$, et pour G le groupe simplement connexe associé. Soit $(\pi, \mathscr{H})$ la représentation de Schrödinger associée à l'orbite $G(\alpha Z^*)$, avec $\alpha \neq 0$((X^*, Y^*, Z^*) étant la base duale à (X, Y, Z)).

Soit $\mathfrak{G}=\mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Z$ une polarisation « réelle » en αZ^*, et $K=\exp(\mathbb{R}Z)$ le stabilisateur de l'élément (αZ^*) dans G. Prenons pour V l'espace $\mathbb{C}$ muni du caractère $(-i\alpha Z^*)$ de $\mathfrak{G}$ et du caractère unitaire $e^{-i\alpha Z^*}$ de K. Alors, un calcul facile montre que $\mathrm{H}^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes V)$ est de dimension

$$\begin{cases} 0 \text{ en degré } 0, \\ 1 \text{ en degré } 1, \end{cases}$$

tandis que $H^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^{-\infty} \otimes V)$ est de dimension

$$\begin{cases} 1 \text{ en degré } 0, \\ 0 \text{ en degré } 1. \end{cases}$$

(2) Dans [13], J. ROSENBERG et M. VERGNE ont calculé un exemple où la cohomologie $H^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes V)$ n'est pas de dimension finie, ni séparée pour la topologie quotient de la topologie de Fréchet. Les hypothèses en défaut dans ce cas sont l'unimodularité de G et la traçabilité de la représentation.

III. Dualité de Poincaré et application

Notre point de départ dans ce paragraphe sera la conclusion de la section II : l'espace $H^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^{\pm\infty} \otimes V)$ est de dimension finie, et isomorphe à l'espace harmonique. Observons que, toujours sous l'hypothèse que $(\pi, \mathscr{H})$ est ordinairement tracée, le même résultat est valide pour la sous-algèbre conjuguée : $H^*(\bar{\mathfrak{G}}, K, \mathscr{H}^{\pm\infty} \otimes W)$ est de dimension finie et isomorphe à l'espace harmonique pour tout $(\bar{\mathfrak{G}}, K)$-module de dimension finie W qui a même caractère central que V, et qui est K-unitaire.

Munissons par conjugaison l'espace V d'une structure de $(\bar{\mathfrak{G}}, K)$-module par la relation

$$\forall X \in \bar{\mathfrak{G}}, \quad \forall v, w \in V \qquad (Xv, w) = -(v, \bar{X}w).$$

NOTATIONS. — (1) Nous appelerons ζ le $(\bar{\mathfrak{G}}, K)$-caractère unitaire suivant :

$$\forall X \in \bar{\mathfrak{G}}, \quad \zeta(X) = -\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\bar{\mathfrak{G}}} X,$$

$$\forall k \in K, \quad \zeta(k) = (\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\bar{\mathfrak{G}}} k)^{-1} = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{G}} k$$
$$= \det(\operatorname{Ad}_{\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}}} k)^{-1}.$$

(2) Nous noterons W le $(\bar{\mathfrak{G}}, K)$-module $V \otimes \mathbf{C}_\zeta$, et nous identifierons systématiquement W à V comme espace vectoriel.

(3) Soit $n = \dim(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})$. Choississons un élément Ω de $\Lambda^n(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^*$, de longueur 1 pour la norme associée au produit scalaire K-invariant (,) sur $\Lambda\,\mathfrak{G}^*$.

THÉORÈME 3.1. — *Supposons la représentation $(\pi, \mathscr{H})$ ordinairement tracée, la sous-algèbre $\mathfrak{G}$ totalement complexe et K Ad-compact; alors les deux espaces de dimension finie* $H^*(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes V)$ *et* $H^{n-*}(\bar{\mathfrak{G}}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes W)$ *sont en dualité hermitienne non dégénérée (cela signifie qu'ils sont mutuellement antiduaux).*

Démonstration. — Pour tout $p = 0, 1, \ldots, n$, on munit l'espace produit

$$(\Lambda^p(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^\infty \otimes V) \times (\Lambda^{n-p}(\bar{\mathfrak{G}}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^\infty \otimes W)$$

d'un crochet de dualité sesquilinéaire à valeurs dans $\mathbf{C}$ par la formule

$$\langle \omega_1 \otimes x_1 \otimes v_1, \omega_2 \otimes x_2 \otimes v_2 \rangle = (\omega_1 \wedge \bar{\omega}_2, \Omega)(x_1, x_2)(v_1, v_2),$$

et on vérifie que l'antidualité sépare les deux espaces. D'autre part, le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ est invariant sous K. Il n'est pas difficile de démontrer la formule

$$\langle \partial\Phi, \Psi \rangle = (-1)^{p+1} \langle \Phi, \partial\Psi \rangle,$$

quand Φ est dans $\Lambda^p(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^\infty \otimes \mathrm{V}$, et Ψ dans $\Lambda^{n-p-1}(\bar{\mathfrak{G}}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})^* \otimes \mathscr{H}^\infty \otimes \mathrm{V}$ (la démonstration se fait à partir de la formule de Koszul, et la situation est semblable à celle de la proposition 1.5 de [1]).

On en déduit la relation

$$\langle (\partial\partial^* + \partial^* \partial)\Phi, \Psi \rangle = (-1)^n \langle \Phi, (\partial\partial^* + \partial^* \partial)\Psi \rangle.$$

On a donc, par passage au quotient, une forme sesquilinéaire sur

$$H^p(\mathfrak{G}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes V) \times H^{n-p}(\bar{\mathfrak{G}}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes W);$$

il reste à montrer que l'antidualité est séparante.

Soit donc une classe non nulle de $(\mathfrak{G}, K)$-cohomologie, qui contient d'après la proposition 2.2 un élément harmonique non nul Φ et un seul. Il est clair d'après la définition du crochet $\langle\ ,\ \rangle$ qu'il existe une unique $(\bar{\mathfrak{G}}, K)$-cochaîne $*\Phi$ telle que $\langle \Phi, \Psi \rangle$ soit égal au produit scalaire $(*\Phi, \Psi)$ dans $\Lambda^{n-p}(\bar{\mathfrak{G}}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}} \otimes \mathscr{H}^\infty \otimes W)^K$ pour tout Ψ de cet espace. On en déduit que $*\Phi$ est harmonique, et définit donc une classe de $(\bar{\mathfrak{G}}, K)$-cohomologie dont le produit $\langle\ ,\ \rangle$ avec la classe de Φ vaut $\langle \Phi, *\Phi \rangle = (*\Phi, *\Phi)$ strictement positif.

De même, le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ sépare les éléments de $H^{n-p}(\bar{\mathfrak{G}}, K, \mathscr{H}^\infty \otimes W)$.

Nous allons maintenant replacer ce résultat de dualité dans l'optique de la méthode des orbites décrite par Duflo dans [4]. Supposons que $\mathfrak{G}$ est une polarisation totalement complexe en un point $f \in \mathscr{G}^*$, que le stabilisateur $G(f) = K$ de f dans G est toujours Ad-compact, et qu'il stabilise $\mathfrak{G}$.

Considérons sur $\mathfrak{G}$ la forme hermitienne $H_f(X, Y) = if([X, \bar{Y}])$, et notons $q_f(\mathfrak{G})$ le nombre de signes moins dans la signature de H_f sur $\mathfrak{G}$.

Nous prendrons pour $(\pi, \mathscr{H})$ l'une des représentations $(T_{f,\tau}, \mathscr{H}_{f,\tau})$ associées à f par la méthode de Duflo. Quant au $(\mathfrak{G}, K)$-module V, il est défini par le caractère $(-if + \rho_{\mathfrak{G}})$ de $\mathfrak{G}$, avec

$$\rho_{\mathfrak{G}}(X) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{G}}(X),$$

caractère qu'on suppose s'intégrer à $G(f) = K$.

Penney et Rosenberg dans le cas nilpotent connexe, et Schmid dans le cas réductif connexe, ont montré que les espaces $H^q(\mathfrak{G}, G(f), \mathcal{H}_{f,\tau}^{\infty} \otimes V)$ sont nuls pour $q = q_f(\mathfrak{G})$, et de dimension un quand $q = q_f(\mathfrak{G})$.

Ceci, ainsi que les résultats obtenus pas Lipsman, Guinzburg et Duflo, suggère la conjecture suivante.

CONJECTURE (C). — Pour tout G, éventuellement non unimodulaire, et pour une classe « convenable » de polarisations, si la polarisation $\mathfrak{G}$ en f est à la fois « convenable » et totalement complexe, on a

$$H^q(\mathfrak{G}, G(f), \mathcal{H}_{f,\tau}^{-\infty} \otimes V) = 0, \qquad \forall q \neq q_f(\mathfrak{G}),$$

pour tout $(\mathfrak{G}, G(f))$-module de dimension finie V ayant un caractère central conjugué avec celui de $\mathcal{H}_{f,\tau}$.

Selon Michel Duflo, « convenable » signifierait, par exemple lorsque G est algébrique, qu'on a $\mathfrak{G} = \mathcal{G}(f)_{\mathbf{C}} + \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est le radical nilpotent de $\mathfrak{G}$.

En fait, pour démonter ce type de conjecture, on peut être amené à supprimer l'hypothèse que $\mathfrak{G}$ est totalement complexe, qui n'est pas stable par récurrence. Dans ce cas, comme le montrent les exemples, il peut arriver qu'il existe plusieurs degrés de cohomologie non triviale. On peut néanmoins espérer avoir le résultat partiel suivant.

CONJECTURE (C′). — Pour tout groupe G, éventuellement non unimodulaire, et toute polarisation « convenable » $\mathfrak{G}$ en f, on a

$$H^q(\mathfrak{G}, G(f), \mathcal{H}_{f,\tau}^{-\infty} \otimes V) = 0, \qquad \forall q < q_f(\mathfrak{G}),$$

pour tout $(\mathfrak{G}, K)$-module de dimension finie V ayant le bon caractère central.

Il est clair que, lorsque $\mathfrak{G}$ est totalement complexe, la conjecture (C') apporte moins d'informations que la conjecture (C), mais semble d'autre part plus accessible. Néanmoins, nous allons montrer, à l'aide de la dualité de Poincaré, qu'il suffit de démonter (C') pour entraîner la validité de (C).

COROLLAIRE 3.2. — *Dans l'hypothèse où G est unimodulaire, la polarisation $\mathfrak{G}$ « convenable », $G(f)$-stable et totalement complexe, le groupe $G(f)$ Ad-compact et la représentation $T_{f,\tau}$ ordinairement tracée, si la conjecture (C') est vérifiée pour $\mathfrak{G}$ et $\bar{\mathfrak{G}}$, alors la conjecture (C) l'est également.*

Démonstration. — Si l'on applique l'hypothèse à $\bar{\mathfrak{G}}$, il vient

$$H^q(\bar{\mathfrak{G}}, G(f), \mathcal{H}_{f,\tau}^{\pm\infty} \otimes W) = 0, \qquad \forall q < q_f(\bar{\mathfrak{G}}),$$

avec W défini comme précédemment (noter que si V est le $(\mathfrak{G}, K)$-module de dimension 1 correspondant aux caractères $(-if+\rho_{\mathfrak{G}})$ et χ de $\mathfrak{G}$ et K, alors W correspond aux caractères $(-if+\rho_{\bar{\mathfrak{G}}})$ et χ de $\bar{\mathfrak{G}}$ et K).

Or on a $q_f(\mathfrak{G})+q_f(\bar{\mathfrak{G}})=\dim(\mathfrak{G}/\mathscr{K}_{\mathbf{C}})=n$, car le passage de $\mathfrak{G}$ à $\bar{\mathfrak{G}}$ échange les signes plus et les signes moins dans la signature de H_f.

D'où par dualité

$$H^{n-q}(\mathfrak{G}, G(f), \mathscr{H}^{\pm\infty}_{f,\tau} \otimes V)=0, \qquad \forall q < n-q_f(\mathfrak{G}),$$

ce qui démontre l'assertion.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) and WALLACH (N.). — *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Study n° 94, Princeton, 1980.

[2] CONNES (A.) and MOSCOVICI (H.). — The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups, *Ann. of Math.*, vol. 115, 1982, p. 291-330.

[3] DIXMIER (J.). — *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[4] DUFLO (M.). — *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, dans *Harmonic Analysis and Group Representations*, Liguoni, Napoli, 1982.

[5] GOODMAN (R.). — One parameter-groups generated by operators in an enveloping algebra, *J. Funct. Anal.*, vol. 6, 1970, p. 218-236.

[6] HELGASON (S.). — *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[7] HERSANT (A.). — Formes harmoniques et cohomologie relative des algèbres de Lie, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 344, 1983, p. 71-86.

[8] KOORNWINDER (T. H.). — Invariant differential operators on non-reductive homogeneous spaces, Preprint, *Mathematisch Centrum*, Amsterdam, 1981.

[9] KOSZUL (J. L.). — Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bull. SMF*, vol. 78, 1950, p. 65-127.

[10] PENNEY (R.). — Harmonically induced representations on nilpotent Lie groups and automorphic forms on nilmanifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 260, 1980, p. 123-145.

[11] N. S. POULSEN. — On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.*, vol. 9, 1972, p. 87-120.

[12] ROSENBERG (J.). — Realization of square-integrable representations of unimodular Lie groups on L^2-cohomology spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 261, 1980, p. 1-32.

[13] ROSENBERG (J.) and VERGNE (M.). — *Harmonically induced representations of solvable Lie groups*, Preprint I.H.E.S., 1984.

[14] SCHMID (W.). — On a conjecture of Langlands, *Ann. of Math.*, vol. 93, 1971, p. 1-42.