JEAN-PAUL ALLOUCHE
MICHEL MENDÈS FRANCE

# Suite de Rudin-Shapiro et modèle d'Ising

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 113 (1985), p. 273-283
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__273_0>

*Bull. Soc. math. France,*
113, 1985, p. 273-283.

# SUITE DE RUDIN-SHAPIRO ET MODÈLE D'ISING

PAR

JEAN-PAUL ALLOUCHE et MICHEL MENDÈS FRANCE (*)

RÉSUMÉ. — Quitte à admettre des températures imaginaires pures, le modèle d'Ising linéaire s'identifie à la suite de Rudin-Shapiro.

ABSTRACT. — The one-dimensional Ising model is identified to the Rudin-Shapiro sequence, provided purely imaginary temperatures are allowed.

## 1. Le modèle d'Ising à une dimension

On sait que le modèle d'Ising est une tentative d'explication des propriétés des substances magnétiques. On imagine que les particules constitutives sont situées aux nœuds d'un réseau infini régulier. Seules interagissent les particules mitoyennes, c'est-à-dire voisines immédiates. On notera $\pm J$ cette interaction, le signe $-$ correspondant au cas où les spins sont parallèles et le signe $+$ au cas des spins opposés. A cela s'ajoute un éventuel champ externe $H$.

Nous nous intéresserons au cas le plus simple de l'espace unidimensionnel cyclique. On suppose qu'il y a $N$ sites ($N$ tendra vers l'infini : limite thermodynamique). Dans le modèle cyclique, on identifie le site de rang $q+N$, pour $q$ valant $0, 1, 2, \ldots, N-1$, avec le site $q$. Les quantités thermodynamiques du système (énergie libre, magnétisation,...) s'obtiennent à partir de la fonction de partition $Z$ :

$$Z(N, \beta J, \beta H) = \sum_{\mu} \exp \beta \left( J \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q \mu_{q+1} + H \sum_{q=0}^{N-1} \mu_q \right),$$

(*) Texte reçu le 8 octobre 1984, révisé le 20 mars 1985.

J.-P. ALLOUCHE, M. MENDÈS FRANCE, Université de Bordeaux-I, L.A. 226, U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.

où $\beta=(k\,T)^{-1}$, $T>0$ est la température absolue, $k>0$ est la constante de Boltzmann, $\mu_q=\pm 1$ suivant le signe du spin de la particule $q$. La somme sur $\mu=(\mu_0, \mu_1, \ldots \mu_{N-1})$ est étendue aux $2^N$ positions distinctes du vecteur $\mu$ dans $\{-1, 1\}^N$, chaque position correspondant à une configuration du système.

Nous rappellerons au paragraphe 3 comment on calcule explicitement la fonction $Z$ suivant la méthode de KRAMERS et WANNIER [5]. Pour une discussion détaillée du modèle d'Ising on pourra aussi consulter le récent ouvrage de BAXTER [1] ou les livres classiques de HUANG [4], de McCOY et WU [6], de THOMPSON [10], etc.

## 2. La suite de Rudin-Shapiro

On considère la double suite de polynômes récurrents $P_n(X)$ et $Q_n(X)$ :

$$P_0(X)=Q_0(X)=X,$$
$$P_{n+1}(X)=P_n(X)+X^{2^n}Q_n(X),$$
$$Q_{n+1}(X)=P_n(X)-X^{2^n}Q_n(X).$$

On voit aisément que $P_n$ et $Q_n$ sont de degré $2^n$, que les coefficients de $P_n$ et $Q_n$ valent $\pm 1$ sauf le terme constant qui est nul et qu'enfin la limite $X$-adique $P$ de $P_n$ existe quand $n$ croît indéfiniment

$$P(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon(n-1)X^n.$$

La suite infinie des coefficients $(\varepsilon(0), \varepsilon(1), \ldots)$ à valeurs $\pm 1$ s'appelle la suite de RUDIN-SHAPIRO ([8] et [9]).

Nous aurons besoin d'une autre définition de la suite de Rudin-Shapiro découverte par BRILHART et CARLITZ [2] : soit $n$ un entier positif ou nul, son développement binaire s'écrit

$$n=\sum_{q=0}^{\infty}e_q(n)\,2^q, \qquad e_q(n)=0 \text{ ou } 1,$$

on pose

$$u(n)=\sum_{q=0}^{\infty}e_q(n)\,e_{q+1}(n).$$

On vérifiera sans peine que :

$$\varepsilon(n)=(-1)^{u(n)}.$$

On notera que $u(n)$ compte le nombre d'apparitions du mot 11 dans l'écriture binaire de $n$ (*voir* [3]).

Le but de notre article est de faire voir le lien étroit entre le modèle d'Ising d'une part et la suite de Rudin-Shapiro d'autre part. Il n'a pas d'autre prétention. Comme conséquence de notre observation nous montrerons le théorème suivant (que l'on pourra comparer par exemple au résultat de MAUDUIT [7]) :

THÉORÈME. — *Si $x$ est un nombre réel non entier, alors*

$$\sum_{n<N} \exp(2i\pi xu(n)) = O(N^{\alpha}),$$

*où $\alpha=\alpha(x)$ est strictement inférieur à* 1. *En particulier, la suite $(xu(n))$ est équirépartie modulo* 1 *pour tout $x$ irrationnel.*

Dans un premier temps nous étudierons une suite de Rudin-Shapiro modifiée. Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1 et soit $n$ dans $\{0, 1, 2, \ldots, 2^N-1\}$. L'écriture binaire de $n$ est un mot de longueur $N$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ (on complète l'écriture binaire de $n$ par autant de 0 que nécessaire à gauche; par exemple le *nombre* 0 est le mot constitué par $N$ *chiffres* 0). On écrit les lettres successives du mot $n$ sur les sommets d'un polygone convexe à $N$ côtés. On note $u(n, N)$ le nombre d'apparitions du mot 11 dans le mot « cyclique » $n$.

Ainsi :

$$u(n, N) = \begin{cases} u(n) & \text{si } 0 \leqslant n < 2^{N-1}, \\ u(n)+(1-(-1)^n)/2 & \text{si } 2^{N-1} \leqslant n < 2^N \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\lim_{N\to\infty} u(n, N) = u(n).$$

Nous nous proposons d'étudier la suite de Rudin-Shapiro cyclique :

$$\varepsilon(n, N) = (-1)^{u(n, N)}.$$

et plus généralement $\exp(2i\pi xu(n, N))$. Il est clair que les deux sommes

$$S(N, x) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \exp(2i\pi xu(n, N)),$$
$$R(N, x) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \exp(2i\pi xu(n)),$$

sont liées. Cette relation sera précisée ultérieurement. Pour l'instant nous allons calculer $S(N, x)$ en soulignant le rapport avec le modèle d'Ising cyclique.

### 3. Températures imaginaires

Soient $e_0(n), e_1(n), \ldots, e_{N-1}(n)$ les chiffres binaires de $n<2^N$. On définit :

$$\tilde{e}_q(n)=\begin{cases} e_q(n) \text{ si } q \text{ est inférieur ou égal à } N-1, \\ e_0(n) \text{ si } q \text{ est égal à } N. \end{cases}$$

Alors :

$$u(n, N)=\sum_{q=0}^{N-1} \tilde{e}_q(n)\,\tilde{e}_{q+1}(n).$$

Posons :

$$\tilde{e}_q(n)=(1-\mu_q(n))/2, \text{ où } \mu_q(n) \text{ est égal à } \pm 1.$$

Un calcul immédiat donne :

$$u(n, N)=\frac{N}{4}-\frac{1}{2}\left(\sum_{q=0}^{N-1}\mu_q(n)\right)+\frac{1}{4}\left(\sum_{q=0}^{N-1}\mu_q(n)\,\mu_{q+1}(n)\right).$$

Et, comme il y a une bijection entre l'ensemble $\{-1, +1\}^N$ des configurations et les entiers de $[0, 2^N-1]$, on a :

$$\begin{aligned} S(N, x) &= \sum_{n=0}^{2^N-1}\exp(2i\pi x u(n, N)) \\ &= \exp\left(\frac{i\pi N x}{2}\right)\sum_{n=0}^{2^N-1}\exp i\pi x\left(\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{N-1}\mu_q(n)\,\mu_{q+1}(n)-\sum_{q=0}^{N-1}\mu_q(n)\right) \\ &= \exp\left(\frac{i\pi N x}{2}\right) Z(N, i\pi x/2, -i\pi x). \end{aligned}$$

Ainsi, la somme $S(N, x)$ s'exprime en termes de la fonction de partition du modèle d'Ising cyclique où la température $T$ est imaginaire pure.

Nous calculons maintenant la fonction $Z$ par la méthode de Kramers et Wannier : pour $\delta$ et $\delta'$ à valeurs $\pm 1$, on pose

$$L(\delta, \delta')=\exp\left(-\frac{i\pi x}{2}\right)\exp\left(\frac{i\pi x}{2}(\delta-1)(\delta'-1)\right),$$

Soit $L$ la matrice (dite de transition) :

$$L = \begin{pmatrix} L(+1, +1) & L(+1, -1) \\ L(-1, +1) & L(-1, -1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\dfrac{i\pi x}{2}\right) & \exp\left(-\dfrac{i\pi x}{2}\right) \\ \exp\left(-\dfrac{i\pi x}{2}\right) & \exp\left(\dfrac{3i\pi x}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} Z = Z\,(N, i\,\pi\,x/2, -i\,\pi\,x) &= \textstyle\sum_{\mu} L(\mu_0, \mu_1)\, L(\mu_1, \mu_2) \ldots L(\mu_{N-2}, \mu_{N-1})\, L(\mu_{N-1}, \mu_0) \\ &= \textstyle\sum_{\mu_0 = \pm 1} L^{(N)}(\mu_0, \mu_0) \end{aligned}$$

où $L^{(N)}(\delta, \delta')$ est l'élément $(\delta, \delta')$ de la matrice $L^N$.

Par suite,

$$Z = \operatorname{Trace}(L^N) = \lambda_1^N + \lambda_2^N,$$

où $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les valeurs propres de la matrice $L$ :

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix}\right\} = \exp(i\,\pi\,x/2)\,[\cos \pi\,x \pm (-\sin^2 \pi\,x + \exp(-2\,i\,\pi\,x))^{1/2}]$$

(l'expression $U^{1/2}$ représente une racine carrée de $U$).

On en déduit :

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned} S(N, x) = e^{i\pi N x}[&(\cos \pi\,x + (-\sin^2 \pi\,x + e^{-2i\pi x})^{1/2})^N \\ &+ (\cos \pi\,x - (-\sin^2 \pi\,x + e^{-2i\pi x})^{1/2})^N]. \end{aligned}$$

Il reste à comparer $\lambda_1$ et $\lambda_2$ pour pouvoir estimer $S(N, x)$ quand $N$ tend vers l'infini.

LEMME 1. — *Pour $x$ congru à $1/2$ modulo 1, on a :*

$$S(N, x) = (1 + (-1)^N)\, 2^{N/2},$$

*pour $x$ non congru à $1/2$ modulo 1, $|\lambda_1|$ est différent de $|\lambda_2|$ et on a :*

$$S(N, x) \sim (e^{i\pi x}\gamma)^N,$$

*où $\gamma$ est la plus grande (en module) des deux quantités* $(\cos\pi x \pm (-\sin^2\pi x + e^{-2i\pi x})^{1/2})$.

*De plus :*

$$|\gamma|^2 = (1+(1+4T^4)^{1/2} + \sqrt{2}(1-2T^2+(1+4T^4)^{1/2})^{1/2})/(1+T^2)$$

*où* $T = \mathrm{tg}\,\pi x$,

*de sorte que* $\sqrt{2} \leqslant |\gamma| \leqslant 2$, *l'égalité* $|\gamma| = \sqrt{2}$ *n'ayant lieu que pour $x$ congru à* $1/2$ *modulo* 1, *c'est-à-dire $T$ égal à* $+\infty$, *et* $|\gamma| = 2$ *n'ayant lieu que pour $x$ congru à* 0 *modulo* 1.

*Démonstration.* — En posant $x = 1/2$ dans la formule (2), on obtient immédiatement la valeur de $S(N, 1/2)$.

Posons provisoirement

$$(-\sin^2\pi x + e^{-2i\pi x})^{1/2} = u + iv,$$

alors $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ont même module si et seulement si on a $(\cos\pi x + u)^2 = (\cos\pi x - u)^2$, autrement dit si et seulement si $u = 0$ ou $x$ congru à 1/2 modulo 1. Or si $u$ est nul, on a $0 = 2uv = -\sin^2\pi x$ donc $x$ est congru à 0 ou 1/2 modulo 1, mais $x$ n'est certainement pas congru à 0, car on aurait alors

$$(-\sin^2\pi x + e^{-2i\pi x})^{1/2} = \pm 1;$$

ainsi $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont de même module si et seulement si $x$ est congru à 1/2 modulo 1.

Il est alors clair que pour $x$ non congru à 1/2, on a :

$$S(N, x) = \exp(i\pi Nx/2)(\lambda_1^N + \lambda_2^N) \sim (e^{i\pi x}\gamma)^N,$$

où $\gamma$ est le plus grand en module des nombres $\cos\pi x \pm (u+iv)$.

On en tire :

$$\begin{aligned}|\gamma|^2 &= \sup((\cos\pi x + u)^2 + v^2, (\cos\pi x - u)^2 + v^2)\\ &= \cos^2\pi x + u^2 + v^2 + 2|u\cos\pi x|\end{aligned}$$

Mais :

$$u^2 + v^2 = |-\sin^2\pi x + e^{2i\pi x}| = \sqrt{\cos^4\pi x + 4\sin^4\pi x},$$

et

$$u^2 - v^2 = -\sin^2\pi x + \cos 2\pi x = 3\cos^2\pi x - 2,$$

d'où, en posant $T=\operatorname{tg}\pi x$ :

$$|\gamma|^2=(1+T^2)^{-1}[1+(1+4T^4)^{1/2}+2^{1/2}(1-2T^2+(1+4T^4)^{1/2})^{1/2}].$$

La majoration $|\gamma|^2\leqslant 4$ résulte par exemple de la majoration triviale $|R(N, x)|\leqslant 2^N$, la minoration $|\gamma|^2\geqslant 2$ est laissée en exercice au lecteur qui pourra par exemple montrer que sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction

$$u\to(1+u)^{-1}[1+(1+4u^2)^{1/2}+\sqrt{2}(1-2u+(1+4u^2)^{1/2})^{1/2}]$$

est injective, (d'inverse

$$y\to(2-y)^{-1}(2+y)^{-2}y(2(5y^2+4y+4)^{1/2}+(y^2+4))$$

et continue, donc monotone et conclure en remarquant que pour $T=0$, $|\gamma|^2$ vaut 4 et que $\lim_{T\to+\infty}|\gamma|^2=2$.

## 4. Retour à la suite de Rudin-Shapiro

Définissons :

$$R(N, x)=\sum_{n=0}^{2^N-1}\exp(2i\pi x.u(n)),$$
$$S(N, x)=\sum_{n=0}^{2^N-1}\exp(2i\pi x.u(n, N)).$$

D'après la formule (1), on a :

$$S(N, x)-R(N, x)=\sum_{n=2^{N-1}}^{2^N-1}\exp(2i\pi xu(n))\exp\left(2i\pi x\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)-1\right)$$
$$=\sum_{m=2^{N-2}}^{2^{N-1}-1}\exp(2i\pi xu(2m+1)).(\exp 2i\pi x-1).$$

Or :

$$u(2m+1)=\sum_{q=0}^{\infty}e_q(2m+1)e_{q+1}(2m+1)$$
$$=e_0(2m+1)e_1(2m+1)+\sum_{q=1}^{\infty}e_q(2m+1)e_{q+1}(2m+1).$$

Mais $e_0(2m+1)=1$ et $e_q(2m+1)=e_{q-1}(m)$ pour $q$ supérieur ou égal à 1, donc :

$$u(2m+1)=e_0(m)+\sum_{q=0}^{\infty}e_q(m)e_{q+1}(m)=\frac{1-(-1)^m}{2}+u(m).$$

Par suite :

$$S(N, x)-R(N, x) = (\exp 2 i\pi x - 1)\sum_{m=2^{N-2}}^{2^{N-1}-1} \exp(2 i\pi x . u(m, N-1)) = (\exp 2 i \pi x - 1)(S(N-1, x) - R(N-2, x)).$$

D'où le lemme suivant :

LEMME 2. — *On a l'équation de récurrence :*

$$R(N, x)-(\exp 2 i \pi x - 1) R(N-2, x) = S(N, x) - (\exp 2 i \pi x - 1) S(N-1, x).$$

LEMME 3. — *On a l'égalité :*

$$R(N, x) = (y_1^2 - E)^{-1}(y_1 - E) y_1^{N+1} + (y_2^2 - E)^{-1}(y_2 - E) y_2^{N+1},$$

*où*

$$y_j = \lambda_j \exp(i \pi x/2) \text{ et } E = \exp(2 i \pi x) - 1.$$

*En particulier,*

$$R(0, x) = 1, \qquad R(1, x) = 2 \qquad \text{et} \qquad R(N, 1/2) = 2^{[(N+1)/2]}.$$

*Démonstration.* — Définissons $y_1$ et $y_2$ comme indiqué dans l'énoncé du lemme, et remarquons que $y_1 . y_2 = \exp(2 i\pi x) - 1 = E$. On supposera que $y_1 . y_2$ n'est pas nul et que $E$ est différent de $y_1^2$ et de $y_2^2$, ce qui est assuré si $x$ n'est pas congru à 0 modulo 1 (le cas où $x$ est congru à 0 modulo 1 est trivial).

D'après le lemme 2, on a :

$$R(N, x) - E . R(N-2, x) = y_1^{N-1}(y_1 - E) + y_2^{N-1}(y_2 - E);$$

d'où :

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{[N/2]-1} (R(N-2k, x) - E R(N-2k-2, x)) E^k = \Big(\sum_{k=0}^{[N/2]-1} y_1^{N-2k-1} E^k\Big)(y_1 - E) + \Big(\sum_{k=0}^{[N/2]-1} y_2^{N-2k-1} E^k\Big)(y_2 - E).$$

Le premier membre de (3) vaut : $R(N, x) - E^{[N/2]} R(N - 2[N/2], x)$; le second membre vaut, en utilisant l'hypothèse $E \neq y_1^2$ et $E \neq y_2^2$ :

$$(y_1^2 - E)^{-1}(y_1 - E) y_1^{N+1} + (y_2^2 - E)^{-1}(y_2 - E) y_2^{N+1} - W . E^{[N/2]},$$

avec

$$W = \frac{y_1 - E}{y_1^2 - E} y_1^{N+1-2[N/2]} + \frac{y_2 - E}{y_2^2 - E} y_2^{N+1-2[N/2]}.$$

Pour calculer $W$ on utilise d'une part la relation $y_1 . y_2 = E$, d'autre part la relation $y_1 + y_2 = \exp(i\pi x/2).(\lambda_1 + \lambda_2) = E + 2$, et on trouve :

si $N$ est pair, $W = 1$,

si $N$ est impair, $W = 2$.

Il ne reste plus qu'à constater directement que $R(0, x)$ vaut 1 et que $R(1, x)$ vaut 2 pour conclure.

LEMME 4. — *Pour $x$ non congru à 1/2 modulo 1, il existe une constante non nulle $c = c(x)$ telle que, lorsque $N$ tend vers l'infini, on ait :*

$$R(N, x) \sim c(\gamma e^{i\pi x})^N \qquad (\gamma \textit{ est définie au lemme } 1).$$

*Pour tout $x$, on a : $R(N, x) = O(|\gamma|^N)$.*

La démonstration est immédiate grâce aux lemmes 1 et 3.

Pour achever de démontrer le théorème, il suffit d'exprimer la somme :

$$T(N, x) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2i\pi x . u(n)),$$

en fonction de sommes du type $R(M, x)$. L'idée est classique et est la suivante :

Soit

$$N = 2^{M_0} + 2^{M_1} + 2^{M_2} + \ldots \qquad \text{où} \quad M_0 > M_1 > M_2 > \ldots,$$

le développement binaire de $N$. Alors :

$$T(N, x) = \sum\nolimits_1 \exp(2i\pi x . u(n)) + \sum\nolimits_2 \exp(2i\pi x . u(n)) + \sum\nolimits_3 \ldots + \ldots$$

où $\sum_1$ porte sur les $n$ compris entre 0 et $2^{M_0} - 1$, $\sum_2$ sur les $n$ compris entre $2^{M_0}$ et $2^{M_0} + 2^{M_1} - 1$, $\sum_3$ sur les $n$ compris entre $2^{M_0} + 2^{M_1}$ et $2^{M_0} + 2^{M_1} + 2^{M_2} - 1$, etc.

Chacune de ces sommes est de la forme $\sum_{n=K}^{K+2^M-1} \exp(2 i \pi x . u(n))$ où $2^{M+1}$ divise $K$.

Dans ces conditions, on a :

$$u(n+K)=u(n)+u(K) \quad \text{pour } n<2^M,$$

et par conséquent :

$$\sum_{n=K}^{K+2^M-1} \exp(2 i \pi x . u(n))=\exp(2 i \pi x . u(K)) R(M, x).$$

Par suite :

$$\begin{aligned} |T(N, x)| &\leqslant |R(M_0, x)|+|R(M_1, x)|+|R(M_2, x)|+\ldots \\ &\leqslant c_1(|\gamma|^{M_0}+|\gamma|^{M_1}+|\gamma|^{M_2}+\ldots) \quad \text{(d'après le lemme 4).} \end{aligned}$$

Donc :

$$|T(N, x)| \leqslant c_1(|\gamma|^{M_0}+|\gamma|^{M_0-1}+|\gamma|^{M_0-2}+\ldots) \leqslant c'|\gamma|^{M_0}.$$

Nous observons alors que $M_0 \leqslant (\operatorname{Log} N)/(\operatorname{Log} 2)$, ce qui entraîne :

$$|T(N, x)| \leqslant c' N^\alpha \qquad \text{où} \quad \alpha=(\operatorname{Log}|\gamma|)/\operatorname{Log} 2),$$

et

$$|\gamma|=\max_{\pm}|\cos \pi x \pm(-\sin^2 \pi x+e^{-2 i \pi x})^{1/2}|.$$

Dès que $x$ est différent de 0 modulo 1, nous avons vu que $|\gamma|$ est strictement inférieur à 2, et donc $\alpha$ est strictement inférieur à 1.

Le théorème est donc démontré avec un exposant $\alpha=\alpha(x)$ explicite et optimal. ■

*Remarque.* — La même méthode permet d'évaluer la somme $\Sigma \exp(2 i \pi(x u(n)+y s(n)))$ où $s(n)$ représente la somme des chiffres de $n$ écrit en base 2, il suffit pour cela de modifier le champ extérieur $H$ dans la fonction de partition $Z$. Énonçons le résultat :

*La somme*

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp(2 i \pi(x u(n)+y s(n)))=T_1(N, x, y)$$

*vérifie :*

$$|T_1(N, x, y)| \leqslant c'' N^\alpha+1 \qquad \textit{où} \quad \alpha=(\operatorname{Log}|\gamma|)/(\operatorname{Log} 2),$$

*et*

$$|\gamma|=\sup_{\pm}|\cos(\pi x+\pi y) \pm(-\sin^2(\pi x+\pi y)+e^{-2 i \pi x})^{1/2}|.$$

*En particulier pour x égal à* 1/2, *on obtient :*

$$|\gamma| = \sqrt{2},$$

*indépendant de y, ce qui implique :*

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^{u(n)}\exp(2i\pi y s(n))\right| \leqslant c''\sqrt{N}.$$

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BAXTER (R. J.). — *Exactly solved models in statistical Mechanics*, 1982, Academic Press.

[2] BRILHART (J.) and CARLITZ (L.). — Note on the Shapiro polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 25, 1970, p. 114-118.

[3] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDES FRANCE (M.) et RAUZY (G.). — Suite algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 108, 1980, p. 401-419.

[4] HUANG (K.). — *Statistical mechanics*, 1963, John Wiley and sons.

[5] KRAMERS (H. A.) and WANNIER (G. H.). — Statistics on the two-dimensional ferromagnet, I et II, *Physic Rev.*, vol. 60, 1941, p. 252-262, 263.

[6] MCCOY (B. M.) and WU (T. T.). — *The two-dimensional Ising model*, 1973, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts.

[7] MAUDUIT (C.). — Automates finis et équirépartition modulo 1, *C.R. Acad. Sc.*, t. 299, série I, n° 5, 1984.

[8] RUDIN (W.). — Some theorems on Fourier coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 10, 1959, p. 855-859.

[9] SHAPIRO (H. S.). — Extremal problems for polynomials and power series, *Thesis M.I.T.*, 1951.

[10] THOMPSON (C. J.). — *Mathematical Statistical Mechanics*, 1979, Princeton University Press.

*Note ajoutée* (octobre 1985). — En rapprochant la lecture du livre de N. L. BIGGS [*Interaction Models*, Cambridge University Press, 1977] de ce qui précède, nous obtenons une triple identité entre les notions *a priori* distinctes : suite de Rudin-Shapiro, modèle d'Ising et polynôme chromatique d'un graphe.