BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD BESSON

Comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien dans un domaine avec un trou

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 211-230

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__211_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 211-230.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN DANS UN DOMAINE AVEC UN TROU

PAR

GÉRARD BESSON (*)

RÉSUMÉ. — Nous décrivons le comportement des valeurs propres du laplacien sur une variété riemannienne à laquelle on retire le voisinage tubulaire (de rayon tendant vers zéro) d'une sous-variété fermée, en basse codimension (2, 3 ou 4).

ABSTRACT. — We describe the behaviour of the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on a compact manifold from which a tubular neighbourhood (of radius going to zero) of a closed submanifold is excised, in low codimension (2, 3 or 4).

0. Introduction

Sur une variété riemannienne compacte M avec ou sans bord, considérons les deux problèmes suivants :

Si w désigne un point de M, $B(\varepsilon)$ la boule de rayon ε (petit) autour de w et Δ le Laplacien de M.

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta u = \lambda u \quad \text{sur } M, \\ \text{conditions aux bords de } M \, (\text{si } \partial M \neq \varnothing) \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta u = \lambda u \quad \text{sur } M_\varepsilon = M \setminus B(\varepsilon), \\ u \equiv 0 \quad \text{sur } \partial B_\varepsilon, \\ \text{conditions aux bords de } M. \end{cases}$$

Les conditions aux bords de M sont de type Dirichlet ou Neumann.

(*) Texte reçu le 20 septembre 1984, révisé le 6 mars 1985.

Gérard BESSON, Institut Fourier, B. P. n° 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex (France).

On range les valeurs propres de ces deux problèmes par ordre croissant :

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \qquad \text{et} \qquad \lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) \leqslant \ldots$$

D'après [C-F] et [R-T] on sait que $\lambda_i(\varepsilon)$ converge vers λ_i lorsque ε tend vers zéro.

On s'intéresse ici à l'étude plus précise de cette convergence. S. Ozawa [01-06] a obtenu les premiers résultats en ce sens en dimension 2, 3 et 4, pour les domaines bornés euclidiens et la condition de Dirichlet.

Le travail qui suit a été motivé par un essai de simplification des démonstrations contenues dans les articles précités. Il repose de manière essentielle sur une idée de Y. Colin de Verdière [CV].

Le paragraphe 1 est consacré à la dimension 2 où tout un développement asymptotique en puissances de $(\operatorname{Log}\varepsilon)^{-1}$ est obtenu pour $\lambda_i(\varepsilon)$ au voisinage de la valeur propre λ_i, celle-ci étant supposée simple.

Le paragraphe 2 concerne les dimensions 3 et 4 où seuls le premier terme de développement de $\lambda_i(\varepsilon)-\lambda_i$ (λ_i simple) ainsi que le reste sont calculés.

Le paragraphe 3 étend les résultats précédents au cas où l'on considère un nombre fini de points w_i distincts.

Enfin, dans le paragraphe 4 le cas des variétés auxquelles on retire un voisinage tubulaire d'une sous-variété de codimension 2 est traité.

Signalons que P. Bérard et S. Gallot [B-G] ont obtenu un équivalent de $\lambda_1(\varepsilon)-\lambda_1$ en toute dimension.

L'auteur tient à remercier vivement, pour de nombreuses conversations et suggestions, Y. Colin de Verdière qui l'a encouragé à étudier ce problème et P. Bérard pour l'aide apportée dans la rédaction de ce texte.

1. Le cas de la dimension 2

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ n'est pas une valeur propre du Laplacien sur M, l'opérateur $(\Delta-\alpha)^{-1}$ existe et est un opérateur compact à noyau; ce dernier est une fonction $R(\alpha;\, x, y)$ définie sur $M \times M$ à l'exception de la diagonale, vérifiant :

$$\begin{cases} (\Delta_1-\alpha)\, R(\alpha;\, .\,, y)=\delta_{(y)}, \\ \text{conditions au bord de } M \end{cases}$$

où Δ_1 désigne l'opérateur Laplacien agissant sur la première variable. On vérifie aisément en utilisant le théorème de Sobolev, en dim 2, que $R(\alpha;\ .,\ y)$ est dans $L^2(M)$.

Par ailleurs $R(\alpha;\ .,\ .)$, a une singularité sur la diagonale identique à celle de la fonction de Green.

Enfin R est méromorphe en α et admet un pôle simple en chaque point du spectre de Δ avec pour résidu le noyau du projecteur spectral correspondant. (Pour les propriétés de la résolvante du Laplacien sur une variété riemannienne *voir* [A], chapitre 4.)

On peut donc écrire, si λ est une valeur propre de (I) :

$$R(\alpha;\ x,\ y) = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Log}(r) + \frac{\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x)\,\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda-\alpha} + F(\alpha;\ x,\ y),$$

où r est la distance de x à y, $(\varphi_i)_{i=1,\ \dots,\ k}$ une base orthonormée de l'espace propre associé à la valeur propre λ et F une fonction hermitienne en $(x,\ y)$ analytique en α au voisinage de $\alpha=\lambda$.

LEMME 1.1. — *Sous les hypothèses de ce paragraphe* (dim $M=2$) *$F(.;\ .,\ y_0)$ est C^1 en $(\alpha,\ x)$ au voisinage de $(\lambda,\ y_0)$ pour tout y_0 dans M.*

Preuve. — On a l'égalité

$$(\Delta_1-\alpha)\,F = \delta_{y_0} + H(x, y_0) - \frac{\alpha}{2\pi}\operatorname{Log} r + \frac{1}{2\pi}\Delta(\operatorname{Log} r),$$

où D et C sont des constantes et H une fonction C^∞. Par ailleurs, l'expression du Laplacien en coordonnées polaires autour de y_0 pour une fonction ne dépendant que de la distance est :

$$\Delta_0 = -\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}(1+g(x))\frac{d}{dr}\right) = \Delta_E - \frac{1}{r}g(x)\frac{d}{dr},$$

où Δ_E désigne le Laplacien euclidien en coordonnées polaires et g une fonction C^∞ telle que (*cf.* [K], p. 81-83) :

$$g(x) = N r^2 + r^3 L(x) \quad L \text{ est } C^\infty \text{ et } N \text{ une constante;}$$

en conséquence,

$$-\frac{1}{2\pi}\Delta(\operatorname{Log} r) = \delta_0 + h(r), \qquad h \in H^1(M).$$

La fonction Log r étant dans $H^s(M)$ pour tout $s < 1$:

$$(\Delta-\alpha)\, F \in H^s(M), \qquad s < 1.$$

Par définition de la résolvante $(R(\alpha;\ .,\ y_0)=(\Delta-\alpha)^{-1}(\delta_{y_0}))$ et le fait que l'application $\alpha \mapsto (\Delta-\alpha)^{-1}$ est méromorphe en α à valeurs dans les opérateurs de H^s dans H^{s+2} pour tout s, on a :

$$\alpha \mapsto F(\alpha;\ .,\ y_0)$$

est méromorphe en α à valeurs dans $H^{2+s}(M)$ pour $s < 1$. Il est aisé de vérifier que cette application est en fait analytique au voisinage de $\alpha=\lambda$.

Enfin l'injection $H^{2+s}(M) \hookrightarrow C^1(M)$ permet de conclure.

Convergence des $\lambda_i(\varepsilon)$. — Dans ce qui suit λ désignera une valeur propre *simple* du problème (1) et $\lambda(\varepsilon)$ la valeur propre correspondante de (2) pour ε assez petit.

Nous allons construire une fonction :

$$f_\varepsilon(x)=R(\alpha(\varepsilon));\ x,\ w),$$

en sorte que par un choix convenable de $\alpha(\varepsilon)$, elle soit « très petite » sur le bord de $B(\varepsilon)$.

Soit φ une fonction propre normée correspondant à λ. Supposons d'abord que $\varphi(w)\neq 0$. Soit $\alpha(\varepsilon)$ la solution de l'équation implicite

$$-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Log}\varepsilon+\frac{|\varphi(w)|^2}{\lambda-\alpha(\varepsilon)}+F(\alpha(\varepsilon);\ w,\ w)=0; \qquad \alpha(0)=\lambda.$$

La fonction F étant analytique en α, par le résultat classique d'existence de la série réciproque, il existe une série entière $\sum_{n\geq 1} a_n Z^n$ de rayon de convergence non nul, telle que :

$$\lambda-\alpha(\varepsilon)=\sum\nolimits_{n\geq 1} a_n(-\operatorname{Log}\varepsilon)^{-n} \quad \varepsilon \text{ assez petit},$$
$$a_1=+2\pi|\varphi(w)|^2 \qquad \text{(comparer avec [O4])}.$$

La fonction f_ε ainsi définie vérifie :

$$\begin{cases} (\Delta-\alpha(\varepsilon))\, f_\varepsilon \equiv 0 & \text{sur } M_\varepsilon, \\ f_\varepsilon|_{\partial B_\varepsilon}=R(\alpha(\varepsilon);\ .,\ w) \end{cases}$$

pour x sur le bord de B_ε.

$$R(\alpha(\varepsilon); x, w) = \frac{(\varphi(x)-\varphi(w))\overline{\varphi(w)}}{\lambda-\alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); x, w) - F(\alpha(\varepsilon); w, w),$$

or φ et F étant C^1 :

$$\varphi(x)-\varphi(w) = O(\varepsilon),$$
$$F(\alpha(\varepsilon);\ x,\ w) - F(\alpha(\varepsilon);\ w,\ w) = O(\varepsilon).$$

D'où :

$$f_{\varepsilon\,|\,\partial B_\varepsilon} = O(\varepsilon\,|\operatorname{Log}\varepsilon\,|),$$

$$\begin{cases} (\Delta-\alpha(\varepsilon))\,f_\varepsilon = 0 & \text{sur } M_\varepsilon, \\ f_{\varepsilon\,|\,\partial B_\varepsilon} = O(\varepsilon|\operatorname{Log}\varepsilon\,|), \end{cases}$$

ce qui suggère que $\alpha(\varepsilon)$ est « presque » une valeur propre de (2).

Soit u_ε la fonction harmonique sur M_ε vérifiant les conditions au bord de M et égale à f_ε sur ∂B_ε. Alors u_ε atteignant son maximum sur ∂B_ε :

$$\forall\, x \in M_\varepsilon, \quad u_\varepsilon(x) = O(\varepsilon\,|\operatorname{Log}\varepsilon\,|)$$

(pour l'existence de u_ε dans le cadre des variétés riemanniennes *cf.* [A].)

Posons

$$h_\varepsilon = f_\varepsilon - u_\varepsilon,$$

qui vérifie l'équation

$$\begin{cases} (\Delta-\alpha(\varepsilon))\,h_\varepsilon = \alpha(\varepsilon)\,u_\varepsilon = O(\varepsilon\,|\operatorname{Log}\varepsilon\,|) & \text{sur } M_\varepsilon, \\ h_{\varepsilon\,|\,\partial B_\varepsilon} \equiv 0, \end{cases}$$

pour ε assez petit, $\alpha(\varepsilon)$ est proche de λ; la valeur propre de (2) la plus proche de $\alpha(\varepsilon)$ est donc $\lambda(\varepsilon)$.

Si $\alpha(\varepsilon)$ n'est pas égale à $\lambda(\varepsilon)$, l'opérateur $(\Delta-\alpha(\varepsilon))^{-1}$ compact auto-adjoint est tel que sa norme soit égale à son rayon spectral qui est donc $1/|\lambda(\varepsilon)-\alpha(\varepsilon)|$, d'où :

$$|\lambda(\varepsilon)-\alpha(\varepsilon)| \leqslant \frac{\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)}}{\|h_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)}}.$$

Or,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} = O(\varepsilon\,|\operatorname{Log}\varepsilon\,|),$$
$$\|h_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} \geqslant C\,|\operatorname{Log}\varepsilon\,| \qquad (C \text{ est une constante}).$$

Cette dernière inégalité résultant du comportement (singulier) de la fonction de Green près de la diagonale. Donc

$$\lambda(\varepsilon)-\alpha(\varepsilon)=O(\varepsilon)$$

et

$$\lambda(\varepsilon)-\lambda=\sum_{n\geq 1} a_n(-\operatorname{Log}\varepsilon)^{-n}+O(\varepsilon).$$

Si $\varphi(w)=0$, le même raisonnement avec comme fonction propre approchée φ elle-même et $\alpha(\varepsilon)=\lambda$ donne

$$\lambda(\varepsilon)-\lambda=O(\varepsilon),$$

toutefois chaque terme a_n contenant $|\varphi(w)|^2$ l'expression ci-dessus reste valable. On a donc la :

PROPOSITION 1.2. — *Si* dim $M=2$ *et si* λ *est une valeur propre simple du problème* (1)

$$\lambda(\varepsilon)-\lambda=\sum_{n\geq 1} a_n(-\operatorname{Log}\varepsilon)^{-n}+O(\varepsilon)$$

pour ε *petit, où la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *dépendant de* λ *a un rayon de convergence non nul.*

2. Cas des dimensions 3 et 4

La méthode utilisée dans le paragraphe précédent s'applique également en dimension 3 ou 4.

Dans ce qui suit, les hypothèses seront les mêmes que dans la section précédente. On obtient les résultats suivants :

PROPOSITION 2.1. — *Sous les hypothèses considérées et avec les notations de* 1 *:*

(i) *si* $n=3$, $\lambda(\varepsilon)-\lambda=-4\pi|\varphi(w)|^2\varepsilon+O(\varepsilon^2)$;

(ii) *si* $n=4$, $\lambda(\varepsilon)-\lambda=-2\omega_3|\varphi(w)|^2\varepsilon^2+O(\varepsilon^3|\operatorname{Log}\varepsilon|^{1/2})$ *où* $\omega_3=\operatorname{Vol}(S^3)$.

Remarquons que la partie (i) de la proposition est obtenue dans [O 6], mais que le résultat démontré dans [O 5] en dimension 4 fait apparaître un reste en $O(\varepsilon^{5/2})$.

La démonstration de ces résultats est essentiellement la même que celle de 1.2, elle nécessite toutefois quelques arguments techniques supplémentaires.

Preuve de (i). — On utilise la description suivante de $R(\alpha; x, y)$ en dimension 3

$$R(\alpha; x, y) = \frac{-1}{4\pi r} + \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{\lambda - \alpha} + F(\alpha; x, y).$$

Le même raisonnement que précédemment permet de montrer que $F(.,\ .,\ y_0)$ est continue en (α, x) au voisinage de (λ, y_0) pour tout y_0 dans M et analytique en α.

Si $|\varphi(w)|^2 \neq 0$ on définit $\alpha(\varepsilon)$ par l'équation implicite

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon} + \frac{|\varphi(w)|^2}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); w, w) = 0.$$

La fonction f_ε vérifie donc

$$\begin{cases} (\Delta - \alpha(\varepsilon)) f_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon \\ f_{\varepsilon \mid \partial B_\varepsilon} = O(1), \\ \text{condition au bord } \partial M \end{cases}$$

on définit alors u_ε par l'équation

$$\begin{cases} (\Delta + 1)\, u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon \\ u_{\varepsilon \mid \partial B_\varepsilon} = f_\varepsilon, \\ \text{condition au bord de } M. \end{cases}$$

On a par ailleurs le :

LEMME 2.2. — *Si v_ε vérifie*

$$\begin{cases} (1 + \Delta)\, v_\varepsilon = 0, \\ v_{\varepsilon \mid \partial B_\varepsilon} = 1, \\ \textit{condition sur } \partial M, \end{cases}$$

alors :

$$\| v_\varepsilon \|_{L^2(M_\varepsilon)} = O(\varepsilon).$$

D'où :

$$\| u_\varepsilon \|_{L^2(M_\varepsilon)} = O(\varepsilon).$$

La démonstration se poursuit alors comme dans 1

$$|\lambda(\varepsilon)-\alpha(\varepsilon)| \leqslant \frac{\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)}}{\|h_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)}} \quad \text{et} \quad \|h_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} \geqslant c/\varepsilon.$$

Preuve du lemme. — Il suffit de montrer qu'il existe une constante D strictement positive telle que pour tout x dans M

$$|v_\varepsilon(x)| \leqslant D\frac{\varepsilon}{r},$$

où r est la distance de x à w.

Or, si G désigne la fonction de Green sur M (*cf.* [A], chap. 4) alors :

$$|G(x, w)| \leqslant \frac{A}{r}.$$

Une démonstration analogue permettrait de montrer que

$$|R(-1; x, w)| \leqslant \frac{B}{r}$$

(on peut aussi remarquer que $R(-1; x, w)+(1/4\pi r)$ est continue sur M).

Par ailleurs,

$$R(-1; x, w) \underset{r\to 0}{\sim} -\frac{1}{4\pi r}$$

donc

$$w_\varepsilon(x)_{|\partial B_\varepsilon} = -8\pi\varepsilon R(-1; x, w) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2$$

et par conséquent pour ε assez petit $w_\varepsilon(x)_{|\partial B_\varepsilon} \geqslant 1$ et vérifie l'équation

$$(\Delta+1)\, w_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon.$$

Par le principe du maximum

$$0 \leqslant v_\varepsilon(x) \leqslant w_\varepsilon(x) \quad \text{pour tout } x \text{ dans } M_\varepsilon,$$

d'où le résultat.

Le cas $\varphi(w)=0$ se traite comme précédemment.

Preuve de (ii). — Résumons les étapes :

$$R(\alpha;\, x,\, y) = -\frac{1}{2\omega_3 r^2} + \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{\lambda-\alpha} + F(\alpha;\, x,\, y).$$

Une démonstration analogue à celle donnée dans [A], p. 106-114 montre que :

$$|R(\alpha;\, x,\, y)| \leqslant k_\alpha r^{-2}, \qquad r = \text{distance de } x \text{ à } y, \quad k_\alpha \text{ Cte.}$$

De plus,

$$|(\Delta-\alpha)\, F(\alpha;\, .,\, y_0)| \leqslant \frac{C}{r^2}$$

d'où en appliquant la proposition 4.12 de [A], p. 107-108, on obtient :

$$F(\alpha;\, x,\, y_0) = \int_M R(\alpha;\, x,\, z)\, F(\alpha;\, z,\, y_0)\, dz,$$

$$|F(\alpha;\, x,\, y_0)| \leqslant C'\,(1 + |\operatorname{Log}(d(x,\, y_0))|).$$

Donc :

$$R(\alpha;\, x,\, w) = -\frac{1}{2\omega_3 r^2} + \frac{\varphi(x)\overline{\varphi(w)}}{\lambda-\alpha} + \frac{G(\alpha;\, x,\, w)}{r},$$

où G est continue en $(\alpha,\, x)$ au voisinage de $(\lambda,\, w)$ et analytique en α.

On définit alors $\alpha(\varepsilon)$ par l'équation implicite

$$-\frac{1}{2\omega_3 \varepsilon^2} + \frac{|\varphi(w)|^2}{\lambda-\alpha(\varepsilon)} + \frac{G(\alpha(\varepsilon);\, w,\, w)}{\varepsilon} = 0.$$

La fonction f_ε vérifie :

$$\begin{cases} (\Delta-\alpha(\varepsilon))\, f_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon \\ f_{\varepsilon\,|\,\partial B_\varepsilon} = O\,(1/\varepsilon) \\ \text{condition sur } \partial M. \end{cases}$$

On conclut alors en utilisant le lemme suivant :

LEMME 2.3. — *Si v_ε vérifie*

$$\begin{cases} (1+\Delta)\, v_\varepsilon = 0, \\ v_{\varepsilon\,|\,\partial B_\varepsilon} = 1 \qquad \textit{alors} \quad \|v_\varepsilon\|_{L^2(M_\varepsilon)} = O\,(\varepsilon^2\,|\operatorname{Log}\varepsilon|^{1/2}). \\ \textit{condition sur } \partial M. \end{cases}$$

3. Cas d'un nombre fini de points

Dans les mêmes conditions que précédemment, on suppose donné un nombre fini de points sur M deux à deux distincts, $(w_i)_{i=1, \ldots, k}$ et on considère la variété à bords $M_\varepsilon = M \setminus \bigcup B_i(\varepsilon)$ où $B_i(\varepsilon)$ est la boule de rayon ε autour de w_i, le nombre ε étant supposé suffisamment petit en sorte que les boules $B_i(\varepsilon)$ soient deux à deux disjointes.

Le problème traité est donc celui de la convergence des valeurs propres du Laplacien sur M_ε avec conditions de Dirichlet sur le bord des boules B_i vers celles de M (avec condition aux bords de M s'il y a lieu).

Les résultats sont analogues à ceux des propositions 1.1 et 2.1 à condition de remplacer $|\varphi(w)|^2$ par $\sum_{i=1}^k |\varphi(w_i)|^2$ (avec les mêmes notations et hypothèses).

La méthode de démonstration est la même que précédemment : on cherche une « presque » fonction propre sous la forme

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^k a_i(\varepsilon) R(\alpha(\varepsilon); x, w_i) \qquad \text{pour} \quad x \in M_\varepsilon.$$

En choisissant $a_i(\varepsilon)$ en sorte que la partie principale de f_ε au voisinage de chaque w_j soit nulle on construit une fonction telle que

$$\begin{cases} (\Delta - \alpha(\varepsilon)) f_\varepsilon \equiv 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon, \\ f_{\varepsilon \mid \partial B_\varepsilon} = O(\varepsilon . G_d(\varepsilon)), \end{cases}$$

où $G_d(.)$ est le noyau de Green de $\mathbb{R}^d$ ($d=2$, 3 ou 4); la fin de la démonstration est alors la même que précédemment. La condition sur les $a_i(\varepsilon)$ est donc

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k a_i(\varepsilon) R(\alpha(\varepsilon); w_i, w_j) + a_j(\varepsilon)\left(G_d(\varepsilon) + \frac{|\varphi(w_j)|^2}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); w_j, w_j)\right) = 0,$$

pour tout j ($1 \leqslant j \leqslant k$).

Ce système de k équations à k inconnues $(a_i(\varepsilon))$ n'admet de solution non triviale que si son déterminant est nul.

L'équation

$$\det(b_{ij}(\varepsilon)) = 0,$$

où

$$b_{ij}(\varepsilon) = R(\alpha(\varepsilon); w_i, w_j) \qquad \text{si} \quad i \neq j,$$

$$b_{ii}(\varepsilon) = G_d(\varepsilon) + \frac{|\varphi(w_i)|^2}{\lambda - \alpha(\varepsilon)} + F(\alpha(\varepsilon); w_i, w_i),$$

détermine $\lambda-\alpha(\varepsilon)$ analytiquement en $[G_d(\varepsilon)]^{-1}$ pour ε assez petit.

De plus on vérifie que :

(i) $\lambda-\alpha(\varepsilon)=-\sum_{i=1}^{k}|\varphi(w_i)|^2/G_d(\varepsilon)+O([G_d(\varepsilon)]^{-2})$,

(ii) les $a_i(\varepsilon)$ peuvent être choisis bornés en ε lorsque celui-ci tend vers zéro,

d'où le résultat.

4. Cas d'une sous-variété de codimension 2

Soit Y une sous-variété fermée (éventuellement non connexe) de M, ne rencontrant pas le bord de M, lorsque celui-ci existe, et définissons la variété $M_\varepsilon=M\setminus T_\varepsilon$ où T_ε est un voisinage tubulaire d'épaisseur ε (assez petit) de Y.

On s'intéresse donc à la convergence du spectre du Laplacien sur M_ε avec condition de Dirichlet au bord de T_ε, vers celui de M.

On se propose de montrer :

THÉORÈME 4.1. — *Si Y est de codimension 2 et si λ est une valeur propre simple de M,*

(i) *$\lambda(\varepsilon)-\lambda$ admet un développement asymptotique au voisinage de $\varepsilon=0$, en $|\operatorname{Log}\varepsilon|^{-k}$ $(k\in\mathbb{N})$, à tout ordre. De plus, le premier terme est :*

$$-\frac{(n-2)\,\omega_{n-1}}{\omega_{n-3}}\cdot\frac{1}{\operatorname{Log}\varepsilon}\int_Y|\varphi(y)|^2\,dv(y),$$

où φ est une fonction propre normalisée associée à la valeur propre λ et $\omega_m=\operatorname{vol}(S^{m-1})$.

(ii) *Si φ est identiquement nulle sur Y, alors :*

$$\lambda(\varepsilon)-\lambda=O(\varepsilon).$$

Remarques. — Si le bord de M n'est pas vide, les conditions de Dirichlet ou Neumann sont imposées sur celui-ci. Il n'en sera pas fait mention par la suite.

La technique de démonstration est rigoureusement la même que précédemment. Elle nécessite une description de la singularité du noyau résolvant.

LEMME 4.2 [D]. — *Si α n'appartient pas au spectre de M et (x, y) sont des points de M, alors :*

$$R(\alpha; x, y) = \frac{C_n}{d^{n-2}(x, y)} + \sum \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda - \alpha} + \frac{F(\alpha; x, y)}{d^{n-3}(x, y)},$$

où $C_n = 1/(n-2)\omega_{n-1}$. $d(x, y)$ est la distance entre x et y dans M, λ une valeur propre du Laplacien de M et (φ_i) une base L^2-orthonormée de l'espace propre correspondant.

De plus F vérifie

(i) *$F(\alpha; ., .)$ est C^∞ sur $M \times M \setminus \{\text{diagonale}\}$.*

(ii) *$F(\alpha; ., .)$ est continue au voisinage de la diagonale.*

(iii) *F est analytique en α au voisinage de λ, à valeurs dans les fonctions continues sur $M \times M$.*

Preuve. — Une démonstration de ce lemme est donnée dans [D] utilisant le développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel; nous en esquissons ici une autre utilisant la technique de la preuve de la proposition 4.1.2 [A], p. 107-108.

Le premier terme résulte de la construction de R, posons

$$R(\alpha; x, y) - \frac{C_n}{d^{n-2}(x, y)} = H(\alpha; x, y).$$

$(\Delta - \alpha)[H(\alpha; ., y)] = O(d^{2-n}(x, y))$ lorsque x tend vers y d'où

$$H(\alpha; x, y) = \int_M R(\alpha; x, z)[(\Delta - \alpha)(H(\alpha; z, y))]\, dz$$

et par le résultat mentionné ci-dessus

$$H(\alpha; x, y) = \begin{cases} O(d^{4-n}(x, y)) & \text{si} \quad n > 4, \\ O(1 + |\mathrm{Log}(d(x, y))|) & \text{si} \quad n = 4, \\ O(1) & \text{si } n = 3, \end{cases}$$

d'où le comportement annoncé pour $n \geqslant 4$. En dimension 3, la continuité résulte de l'étude de

$$\int_M \frac{1}{d(x, z)} \times \frac{1}{d(z, y)}\, dz.$$

La mémoromorphie en α provient de résultats classiques sur la résolvante ([R-S]).

Soit alors h une fonction de $C^\infty(Y)$ et $x \in M \setminus Y$, posons

$$T(h)(x) = \int_Y R(\alpha; x, y)\, h(y)\, dv(y),$$

$$T(h)\,(x) = C_n \int_Y \frac{h(y)}{d^{n-2}(x, y)}\, dv(y) + \frac{\varphi(x)}{\lambda-\alpha} \int_Y \bar{\varphi}(y)\, h(y)\, dv(y)$$
$$+ \ldots + \int_Y \frac{h(y)\, F(\alpha; x, y)}{d^{n-3}(x, y)}\, dv(y),$$

$$T(h) = G(h) + \frac{1}{\lambda-\alpha} P(h) + T_\alpha(h).$$

On supposera que x tend vers un point y_0 de Y le long d'une géodésique normale à Y en y_0.

Alors si $r = d(x, y_0)$.

LEMME 4.3. — *On a*

(i) $(\Delta - \alpha)\ T = 0$ *sur* $M \setminus Y$.

(ii) $T(h)\ (x) = -(\omega_{n-3}/(n-2)\,\omega_{n-1}\ \mathrm{Log}\ r)\, h(y_0) + O(1)$.

Preuve. — (*a*) Par continuité de φ, $P(h)(x)$ converge vers $P(h)(y_0)$.

(*b*) La fonction $1/[d\,y,\ z)]^{n-3}$ étant intégrable sur Y et F continue

$$\int_Y \frac{h(y)\, F(\alpha;\ x,\ y)\, dv(y)}{d^{n-3}(x, y)} \underset{x \to y_0}{\longrightarrow} \int_Y \frac{h(y)\, F(\alpha; y_0, y)}{d^{n-3}(y_0, y)}.$$

(*c*) On a l'égalité,

$$\int_Y \frac{h(y)}{d^{n-2}(x, y)}\, dv(y) = \int_Y \frac{h(y) - h(y_0)}{d^{n-2}(x, y)}\, dv(y) + h(y_0) \int_Y \frac{dv(y)}{d^{n-2}(x, y)},$$

comme dans le cas précédent

$$\int_Y \frac{h(y) - h(y_0)}{(d(x, y))^{n-2}}\, dv(y) \underset{x \to y_0}{\longrightarrow} \int_Y \frac{h(y) - h(y_0)}{(d(y_0, y))^{n-2}}\, dv(y).$$

La fonction $(h(y)-h(y_0))/(d(y_0, y))^{n-2}$ étant clairement intégrable sur Y, il suffit donc d'étudier la quantité :

$$\int_Y \frac{dv(y)}{[d(x, y)]^{n-2}},$$

posons $r=d(x, y_0)$ et montrons que

$$\int_Y \left(\frac{1}{[d(x, y)]^{n-2}} - \frac{1}{[r^2+d^2(y_0, y)]^{(n-2)/2}}\right) dv(y) = O(1) \quad \text{lorsque } r \to 0.$$

En effet

$$\left|\int_{d_0 \leqslant 10r} \left(\frac{1}{d^{n-2}} - \frac{1}{d_1^{n-2}}\right) dv(y)\right| = \left|\int_{d_0 \leqslant 10r} \left[\left(\frac{d_1}{d}\right)^{n-2} - 1\right] \frac{dv(y)}{d_1^{n-2}}\right| = I$$

où $d=d(x, y)$, $d_0=d(y_0, y)$ et $d_1=(r^2+d_0^2)^{1/2}$.

$$I \leqslant \int_{d_0 \leqslant 10r} \left[\left(\frac{d_1}{d}\right)^{n-2} + 1\right] \frac{dv(y)}{d_1^{n-2}}$$

or $d \geqslant r \geqslant 1/10\, d_0$, d'où

$$I \leqslant \frac{(101)^{(n-2)/2}+1}{r^{n-2}} \operatorname{Vol}(d_0 \leqslant 10r) = O(1),$$

la variété Y étant de dimension $n-2$.

Par ailleurs

$$J = \left|\int_{d_0 \geqslant 10r} \left(\frac{1}{d^{n-2}} - \frac{1}{d_1^{n-2}}\right) dv(y)\right| \leqslant \int_{d_0 \geqslant 10r} \frac{|d^{n-2} - d_1^{n-2}|}{d^{n-2}\, d_1^{n-2}}\, dv(y),$$

$$J \leqslant \int_{d_0 \geqslant 10r} \frac{|d-d_1|}{d^{n-2}\, d_1^{n-2}} \left(\sum_{p=3}^{n-3} d^{n-p}\, d_1^{p-3}\right) dv(y).$$

Or par l'inégalité triangulaire

$$\frac{q}{10} d_0 \leqslant d_0 - r \leqslant d \leqslant d_0 + r \leqslant \left(\frac{11}{10}\right) d_0,$$

$$d_0 \leqslant d_1 \leqslant \left(\frac{1}{100} + 1\right)^{1/2} d_0$$

et

$$d-d_1 \leqslant r, \qquad d_1-d \leqslant d_1-d_0+r \leqslant 2\, r,$$

d'où

$$J \leqslant \mathrm{Cte}.\, r \int_{d_0 \geqslant 10r} \frac{1}{d_0^{n-1}}\, dv(y)$$

et il est aisé de vérifier que

$$\int_{d_0 \geqslant 10r} \frac{1}{d_0^{n-1}}\, dv(y) = O(1/r).$$

Enfin, si $d_Y(y, z)$ désigne la distance entre deux points y et z de Y associée à la structure riemannienne de Y, on a :

$$\frac{d^2(y, z)}{d_Y^2(y, z)} = 1 + O(d_Y(y, z)) \quad (cf.\ [\mathrm{D}])$$

ce qui conduit à

$$\int_Y \left| \left[\frac{1}{(d(y_0, y))^{n-2}} - \frac{1}{(d_Y(y_0, y))^{n-2}} \right] \right| dv(y) < +\infty.$$

En résumé, il suffit d'étudier la quantité

$$\int_Y \frac{1}{(r^2 + d_Y^2(y_0, y))^{(n-2)/2}}\, dv$$

où si $B_Y(\delta)$ désigne la boule géodésique de Y centrée en y_0 et de rayon δ (assez petit)

$$\int_{B_Y(\delta)} \frac{1}{(r^2 + d_Y^2(y_0, y))^{(n-2)/2}}\, dv(y)$$

l'utilisation de la carte exponentielle sur Y, en y_0 permet de ramener ce calcul à son analogue euclidien, ce qui conduit au résultat annoncé.

L'estimation du lemme 4.3 permet d'appliquer le théorème 3.4 de [M-N-P], que nous rappelons ici :

THÉORÈME 4.4 ([M-N-P]). — *Avec les notations précédentes, on a la représentation asymptotique suivante*

$$T(h)(x) = -\left(\frac{\omega_{n-3}}{(n-2)\,\omega_{n-1}} \right) h(y_0) \operatorname{Log}(r) + \Lambda_\alpha(h)(y_0) + O(r^s)$$

pour tout $s \in (0, 1)$, *et* r *suffisamment petit. Dans cette expression* Λ *est une application linéaire de* $C^\infty(Y)$ *dans lui-même.*

Remarque 1. — Pour des raisons de simplicité la preuve du théorème précédent dans [M-N-P] n'est donner que sous les hypothèses supplémentaires suivantes :

(i) M est un ouvert relativement compacte de $\mathbb{R}^n$;

(ii) l'opérateur considéré vérifie l'inégalité de Garding sur M;

(iii) Y est difféomorphe à une sphère de dimension $n-2$.

Ces hypothèses sont clairement superflues. On peut toutefois ramener la situation qui nous intéresse à celle-ci :

(a) on peut recouvrir Y par un nombre fini d'ouvert du type $Y \cap B(\delta)$ ou $B(\delta)$ est une boule de M, centrée en un point de Y et de rayon δ (petit);

(b) en utilisant une partition de l'unité adaptée, on peut supposer que h est à support dans une boule $B_Y(\delta')$ de Y, centrée au même point que $B(\delta)$ et de rayon $\delta' < \delta$;

(c) de plus δ peut être choisi assez petit de sorte que $(\Delta - \alpha)$ (avec condition de Dirichlet sur $\partial B(\delta)$) vérifie la condition (ii) sur $B(\delta)$;

(d) si

$$T'(h)(x) = \int_{B_Y(\delta')} R'(\alpha; x, y)\, dv(y)$$

où R' est la résolvante du Laplacien avec condition de Dirichlet sur le bord, sur $B(\delta)$, alors

$$U(h)(x) = T(h)(x) - T'(h)(x)$$

vérifie :

$$(\Delta - \alpha)\, U(h) = 0 \quad \text{sur } B(\delta)$$

$U(h)$ est donc une fonction C^∞ sur $B(\delta)$ et

$$U(h)(x) = U(h)(y_0) + O(r) \qquad \text{si} \quad y_0 \in B_Y(\delta')$$

U dépend linéairement de h. Il suffit donc de prouver l'estimation asymptotique pour $T'(h)$;

(e) La carte exponentielle à partir du centre de $B(\delta)$ permet de se ramener au cas où M est une boule de $\mathbb{R}^n$ et Y un ouvert d'une sous-variété. Un argument analogue permet d'appliquer 4.4 à cette situation.

Remarque 2. — Pour la suite de la démonstration, il est nécessaire d'expliciter le comportement de l'expression $O(r^s)$ en α et h.

Ce terme provient des développements $G(h)$, $P(h)$ et $T_\alpha(h)$, or

(a) on a $P(h)(x) \underset{x \to y_0}{\longrightarrow} P(h)(y_0)$ uniformément pour h dans un borné de $C^0(Y)$;

(b) De même $T_\alpha(h)(x) \underset{x \to y_0}{\longrightarrow} T_\alpha(h)(y_0)$, une démonstration en tout point analogue à celle du (c) de la preuve du lemme 4.3, montre que $T_\alpha(h)(x) - T_\alpha(h)(y_0)$ converge vers 0, uniformément pour h borné dans $C^0(Y)$ et α proche de λ;

(c) enfin l'expression $\int_Y (h(y) - h(y_0))\, dv(y)/(d(x, y))^{n-2}$ converge, pour les mêmes raisons, uniformément pour h dans un borné de $C^1(Y)$.

Fin de la preuve de 4.1. — Posons

$$A = -\frac{\omega_{n-3}}{(n-2)\,\omega_{n-1}}, \qquad B_\alpha = -\frac{1}{\lambda - \alpha} P + \Lambda_\alpha$$

$$\gamma = \lambda - \alpha \qquad \text{et} \qquad U_\gamma = P + (\lambda - \alpha)\, B_\alpha.$$

Alors 4.4 devient

$$T(h)(x) = (A \operatorname{Log} r)\, h(y_0) + \frac{1}{\gamma} U_\gamma(h)(y_0) + O(r^s).$$

Comme précédemment on va chercher à annuler le terme principal de ce développement. La remarque 2 précédente montre que U_γ (dont on peut préciser l'expression) est analytique en γ. Soit

$$U_\gamma = \textstyle\sum_{\gamma \geq 0} \gamma^n U_n, \qquad U_0 = P,$$

où chaque U_n est une application linéaire de $C^\infty(Y)$ dans lui-même.

Soit $\Phi(\gamma) = \sum_{\gamma \geq 0} \gamma^n \Phi_n$ et $\mu(\gamma) = \sum_{\gamma \geq 0} \gamma^n \mu_n$ des séries formelles à coefficients dans $C^\infty(Y)$ pour Φ et dans $\mathbb{R}$ pour μ.

LEMME 4.5. — *L'équation suivante est résoluble (formellement)* :

$$U_\gamma(\Phi(\gamma)) = \mu(\gamma)\, \Phi(\gamma),$$

avec,

$$\Phi_0 = \varphi_{|Y} \qquad \textit{et} \qquad \mu_0 = \int_Y |\varphi(y)|^2\, dv(y).$$

Preuve. — Identifions les coefficients de γ^n, il faut donc résoudre :

$$\sum_{k+l=n} U_k(\Phi_l) = \sum_{m+p=n} \mu_m \Phi_p,$$

où

$$(P-\mu_0)(\Phi_n) = \sum_{m+p=n,\ m\neq 0} \mu_m \Phi_p - \sum_{k+l=n,\ k\neq 0} U_k(\Phi_l)$$

(*a*) le cas $n=0$ donne

$$P(\Phi_0) = \mu_0 \Phi_0$$

si $\Phi_0 = \varphi$ et $\mu_0 = \int_Y |\varphi(y)|^2 \, dv(y)$ l'égalité est vérifiée;

(*b*) cas $n=1$, l'égalité devient $(P-\mu_0)\Phi_1 = \mu_1 \Phi_0 - U_1(\Phi_0)$. L'opérateur $(P-\mu_0)$ est, sur l'orthogonale à $\varphi_{|Y}$ dans $L^2(Y)$, la multiplication par $-\mu_0$ (qui est non nul) et donc bijectif. La condition

$$\mu_1 \Phi_0 - U_1(\Phi_0) \text{ orthogonale à } \Phi_0,$$

détermine μ_1 et permet de calculer Φ_1 vérifiant l'équation ci-dessus. Par ailleurs, $U_1(\Phi_0)$ étant C^∞, il en est de même de Φ_1;

(*c*) le cas général s'en déduit par un procédé de récurrence.

Supposons alors que $\varphi_{|Y}$ n'est pas identiquement nulle.

Si

$$\nu_N(\gamma) = \sum_{n=0}^{N} \mu_n \gamma^n, \qquad \psi_N(\gamma) = \sum_{n=0}^{N} \Phi_n \gamma^n$$

on a donc

$$U_\gamma(\psi_N(\gamma)) = \nu_N(\gamma)\,\psi_N(\gamma) + O(\gamma^{N+1}).$$

Par ailleurs, l'équation implicite

$$\nu_N(\gamma) + \gamma A \operatorname{Log} \varepsilon = 0,$$

détermine une fonction analytique L_N telle que

$$\gamma(\varepsilon) = L_N\left(-\frac{1}{\operatorname{Log} \varepsilon}\right), \qquad \gamma(0) = 0,$$

vérifie cette équation. De plus,

$$\gamma(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} -\frac{\mu_0}{A \operatorname{Log} \varepsilon}.$$

Alors la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \int_Y R(\alpha(\varepsilon);\, x, y)\, \psi_N(\gamma(\varepsilon))\, dv(y) \qquad (\lambda - \alpha(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon)),$$

vérifie

$$(\Delta - \alpha(\varepsilon))\, f_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } M_\varepsilon,$$

$$f_{\varepsilon \mid \partial T_\varepsilon} = (A \operatorname{Log} \varepsilon)\, \psi_N(\gamma(\varepsilon)) + \frac{1}{\gamma(\varepsilon)} U_{\gamma(\varepsilon)}(\psi_N(\gamma(\varepsilon))) + O(\varepsilon^s),$$

car $\psi_N(\gamma(\varepsilon))$ est dans un borné de C^1 pour ε assez petit et $\gamma(\varepsilon)$ est proche de zéro.

$$f_{\varepsilon \mid \partial T_\varepsilon} = (A \operatorname{Log} \varepsilon)\, \psi_N(\gamma(\varepsilon)) + \frac{1}{\gamma(\varepsilon)} \nu_N(\gamma(\varepsilon))\, \psi_N(\gamma(\varepsilon)) + O(|\operatorname{Log} \varepsilon|^{-N})$$

car $\gamma(\varepsilon) = O(|\operatorname{Log} \varepsilon|^{-N})$.

Si $\lambda(\varepsilon)$ est la valeur propre du Laplacien (avec condition de Dirichlet sur ∂T_ε) sur M_ε, la plus proche de λ (elle existe et est unique si ε est assez petit), alors un argument analogue à celui utilisé au paragraphe 1 donne :

$$|\lambda(\varepsilon) - \alpha(\varepsilon)| = O(|\operatorname{Log} \varepsilon|^{-(N+1)}).$$

Le théorème s'en déduit donc en négligeant les termes non significatifs dans l'expression

$$\lambda(\varepsilon) - \lambda = -L_N\left(\frac{-1}{\operatorname{Log} \varepsilon}\right) + O(|\operatorname{Log} \varepsilon|^{-(N+1)}).$$

Le cas où $\varphi_{\mid Y} \equiv 0$ se traite comme précédemment.

5. Conclusion

La faiblesse de la méthode apparaît dans l'impossibilité de traiter le cas des valeurs propres multiples ainsi que celui des dimensions plus grandes. Il est toutefois intéressant de noter que le comportement obtenu dans [B-G] pour la première valeur propre ($\lambda_1 = 0$ si M est compacte sans bord) mais en toute dimension permet d'espérer des résultats analogues de manière générale.