BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN CALBRIX

Espaces K_σ et espaces des applications continues

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 183-203
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__183_0>

Bull. Soc. math. France,
113, 1985, p. 183-203.

ESPACES K_σ ET ESPACES DES APPLICATIONS CONTINUES

PAR

JEAN CALBRIX (*)

RÉSUMÉ. — Nous résolvons une conjecture de J. P. R. Christensen faisant l'objet du problème 37 dans *Analytic sets*, [13]. Soit X un espace topologique complètement régulier et soit $C_p(X)$ l'espace de ses fonctions réelles continues, muni de la topologie de la convergence simple. Si $C_p(X)$ est analytique, alors X est un K_σ analytique.

ABSTRACT. — We solve a conjecture of J. P. R. Christensen, problem 37 in *Analytic sets*, [13]. Let X be a completely regular topological space and $C_p(X)$ the space of its continuous real-valued fonctions endoved with the topology of pointwise convergence. If $C_p(X)$ is analytic, then X is an analytic K_σ-set. We discuss about a converse statement.

Introduction

Dans *Topology and borel structure*, [4], J. P. R. CHRISTENSEN prouve le résultat suivant : Soit X un espace topologique métrisable séparable, alors X est un K_σ ssi $C_c(X)$, l'espace de ses applications réelles continues, muni de la topologie de la convergence compacte, est analytique (souslinien au sens de Bourbaki). Dans ce même ouvrage J. P. R. CHRISTENSEN pose la question de savoir si ce résultat demeure pour les espaces analytiques complètement réguliers. Cette question est reprise dans *Analytic sets*, [13], où elle fait l'objet du problème 37, et sous la forme suivante : Un espace complètement régulier tel que $C_p(X)$ soit analytique est-il un K_σ analytique ? Le principal résultat de cet article est de répondre par l'affirmative à cette question. Il est signalé dans *Analytic sets* qu'il existe des espaces K_σ analytiques tels que $C_p(X)$ ne soient pas analytiques. En exploitant les résultats de E. MICHAËL, [11], nous établissons une réciproque : Si X est un k-espace, $\aleph_0$ (donc complètement régulier), K_σ, alors $C_c(X)$ est

(*) Texte reçu le 23 août 1984, révisé le 24 janvier 1985.

Jean CALBRIX, Département de Mathématiques, U.E.R. de Sciences, 76130 Mont-Saint-Aignan, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1985/02 183 21/$ 4.10

analytique. Nous fournissons deux exemples vérifiant les hypothèses de l'énoncé sauf celle d'être un k-espace. Pour l'un, $C_c(X)$ est analytique, pour l'autre, $C_p(X)$ n'est pas analytique.

Pour établir notre résultat, nous avons besoin d'une version d'un résultat d'Hurewicz qui se trouve en corollaire d'un théorème de J. E. JAYNE et C. A. ROGERS [9]. Un espace analytique, complètement régulier, qui n'est pas un K_σ, contient une copie de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ comme fermé. Les démonstrations de J. E. JAYNE et C. A. ROGERS sont longues et complexes. En exploitant une caractérisation des espaces K-analytiques complètement réguliers donnée par Z. FROLIK [7], nous donnons une démonstration du théorème de J. E. JAYNE et C. A. ROGERS plus directe avec une généralisation en un certain sens. Ce dernier résultat a été annoncé dans le séminaire d'initiation à l'analyse (séminaire Choquet) [3].

1. Notations, rappels

Nous noterons les espaces topologiques sous la forme (X, t) où t est la famille des ouverts. Tous les espaces considérés seront séparés.

Nous noterons $\mathbb{F}(X, t)$ la famille des fermés, $\mathbb{K}(X, t)$ la famille des compacts, $\mathbb{B}(X, t)$ la famille des boréliens de (X, t).

On notera $C(X, t)$ l'ensemble des applications réelles, continues, définies sur X et $C^+(X, t)$ le sous-ensemble des applications strictement positives. On notera $C_u(X, t)$ (resp. $C_c(X, t)$, $C_p(X, t)$) l'espace $C(X, t)$ muni de la topologie de la convergence uniforme relativement à la métrique usuelle de $\mathbb{R}$ (resp. de la convergence compacte, de la convergence simple).

Un espace topologique séparé est dit *cosmique* si il est image continue d'un espace métrisable, séparable. Il est dit *analytique* si il est image continue d'un espace polonais. Il est dit *lusinien* si il est image continue injective d'un espace polonais. Il est dit $\aleph_0$, [11], si il est régulier et si il est image semi-propre d'un espace métrisable séparable (une application est dite *semi-propre* si elle est continue et si tout compact de l'espace d'arrivée est image d'un compact de l'espace de départ).

Un sous-ensemble de (X, t) est dit K_σ (resp. F_σ) si il est réunion dénombrable de compacts (resp. de fermés). Il est dit G_δ si il est intersection dénombrable d'ouverts...

Notons que tout espace analytique est cosmique, qu'un espace cosmique régulier est complètement régulier, que les compacts d'un espace cosmique sont métrisables et que par conséquent un espace cosmique K_σ est lusinien (et donc analytique).

2. Analyticité de $C(X)$

2.1. Les résultats de J. P. R. Christensen

THÉORÈME 2.1.1 (J. P. R. CHRISTENSEN). — *Soit (X, t) un espace métrisable séparable. Pour que l'espace $C_c(X, t)$ soit analytique il faut et il suffit que (X, t) soit un K_σ.*

C'est le théorème 3.7 de [4]. En fait J. P. R. CHRISTENSEN montre que $C_c(X, t)$ est automatiquement lusinien. On peut remplacer $C_c(X, t)$ dans l'énoncé par $C_p(X, t)$ car pour (X, t) métrisable séparable, il existe sur $C(X, t)$ une topologie métrisable séparable plus fine que celle de $C_c(X, t)$ et de même structure borélienne que celle de $C_p(X, t)$. Il s'en suit que si $C_p(X, t)$ est analytique, il en est de même de $C_c(X, t)$, (*voir* [4], th. 3.7 et 2.6).

Le théorème de J. P. R. CHRISTENSEN repose sur sa caractérisation des espaces polonais :

THÉORÈME 2.1.2 (J. P. R. CHRISTENSEN, [4], th. 3.3). — *Soit (X, t) un espace métrisable, séparable. L'espace (X, t) est polonais si et seulement si il existe un espace polonais (X', t') et une application ψ de $\mathbb{K}(X', t')$ dans $\mathbb{K}(X, t)$ vérifiant :*

(1) *Si $A \subset B$ alors $\psi(A) \subset \psi(B)$;*

(2) *Pour tout B dans $\mathbb{K}(X, t)$, il existe A dans $\mathbb{K}(X', t')$ tel que $B \subset \psi(A)$.*

On pourra trouver une démonstration intéressante de cette caractérisation dans l'article [14] de J. SAINT RAYMOND.

Dans [4], J. P. R. CHRISTENSEN pose la question de savoir si on peut remplacer dans le théorème 2.1.1, l'hypothèse « (X, t) métrisable, séparable » par l'hypothèse « (X, t) est analytique, complètement régulier ».

La condition reste encore nécessaire, mais elle n'est plus suffisante.

THÉORÈME 2.1.3. — *Soit (X, t) un espace analytique complètement régulier. Si $C_p(X, t)$ est analytique, alors (X, t) est un K_σ.*

Démonstration. — Supposons que (X, t) ne soit pas un K_σ. D'après le corollaire du théorème 5.3.1 (*cf.* le § 5), il existe un fermé F de (X, t) homéomorphe à $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Soit $\psi : C_p(X, t) \to C_p(\mathbb{N}^\mathbb{N})$ définie par $\psi(f) = f_{|\mathbb{N}^\mathbb{N}}$

pour tout f dans $C(X, t)$ et en identifiant F à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Cette application est continue et elle est surjective en vertu du théorème de Tietze ((X, t) est normal). On en conclut que $C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ est analytique, ce qui est contradictoire avec :

LEMME 2.1.4. — (J. P. R. CHRISTENSEN, [4], th. 0.3) *$C_p(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ n'est pas analytique.* ■

Remarque. — Dans la suite, nous allons montrer que si (X, t) est complètement régulier, l'analyticité de $C_p(X, t)$ implique celle de (X, t).

2.2. LES RÉSULTATS DE E. MICHAËL ET H. H. CORSON

THÉORÈME 2.2.1 (E. MICHAËL, [11], th. 10.5). — *Soit (X, t) un espace complètement régulier. L'espace (X, t) est cosmique si et seulement si $C_p(X, t)$ est cosmique.*

THÉORÈME 2.2.2 (E. MICHAËL et H. H. CORSON [11], th. 10.3). — *Soit (X, t) un espace complètement régulier. L'espace (X, t) est $\aleph_0$ si et seulement si $C_c(X, t)$ est cosmique.*

Dans [1], nous avons démontré le résultat suivant (résultat contenu dans la démonstration du théorème 2) :

THÉORÈME 2.2.3. — *Soit (X, t) un espace cosmique régulier. Il existe alors deux topologies métrisables, séparables t' et t'' sur X telles que $t' \subset t \subset t''$ et $\mathbb{B}(X, t') = \mathbb{B}(X, t) = \mathbb{B}(X, t'')$. Si de plus l'une des trois topologies est analytique (resp. lusinienne), les trois topologies sont alors analytiques (resp. lusiniennes).*

En vertu des théorèmes 2.2.1 et 2.2.2, comme un espace analytique est cosmique, on doit restreindre nos investigations aux seuls espaces cosmiques (resp. $\aleph_0$) dans la recherche de conditions pour qu'un espace (X, t) complètement régulier, K_σ, soit tel que $C_p(X, t)$ (resp. $C_c(X, t)$) soit analytique.

2.3. UNE EXTENSION DU THÉORÈME DE J. P. R. CHRISTENSEN

THÉORÈME 2.3.1. — *Soit (X, t) un espace complètement régulier. Si $C_p(X, t)$ est analytique, alors (X, t) est un K_σ analytique (et donc lusinien).*

Démonstration. — L'espace $C_p(X, t)$ étant analytique, il en est de même de $C_p^+(X, t)$. Soit $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to C_p^+(X, t)$ surjective, continue. Soit $\lambda : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{A}^+(X, t)$ définie par $\lambda(\sigma)(x) = \inf\{\varphi(\tau)(x) / \tau \leqslant \sigma\}$ pour tout x

dans X, $\mathbb{A}^+(X, t)$ désignant l'ensemble des applications réelles, strictement positives, définies sur X et $\tau \leqslant \sigma$ signifiant $\tau(n) \leqslant \sigma(n)$ pour tout n avec $\tau = (\tau(1), \tau(2), \ldots)$, $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots)$. L'application λ vérifie $\lambda(\sigma) \geqslant \lambda(\tau)$ si $\sigma \leqslant \tau$, et pour tout f dans $C^+(X, t)$, il existe σ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lambda(\sigma) \leqslant f$.

Soit t' et t'' deux topologies métrisables, séparables telles que :

$$t' \subset t \subset t'' \quad \text{et} \quad \mathbb{B}(X, t') = \mathbb{B}(X, t) = \mathbb{B}(X, t'') \quad (\text{th. } 2.2.3).$$

Plongeons (X, t') dans un espace métrisable, compact $(\hat{X}, \hat{t}')$ où il est dense et soit d une métrique sur $(\hat{X}, \hat{t}')$ induisant $\hat{t}'$. Soit θ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}(\hat{X}, \hat{t}')$ définie par $\theta(\sigma) = \bigcap_{x \in X} (\hat{X} - B(x, \lambda(\sigma)(x)))$ où $B(x, \lambda(\sigma)(x))$ est la boule ouverte de centre x et de rayon $\lambda(\sigma)(x)$ pour la distance d. Soit K un compact de $(\hat{X} - X, \hat{t}'_{|\hat{X}-X})$. L'application $f = d(K, .)$ sur $(\hat{X}, \hat{t}')$ est continue et sa restriction à (X, t') est strictement positive.

Il existe alors σ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lambda(\sigma) \leqslant f_{|X}$ et donc $\theta(\sigma) \supset K$.

Soit $\psi : \mathbb{K}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{K}(\hat{X} - X, t'_{|\hat{X}-X})$ définie par $\psi(\{\tau / \tau \leqslant \sigma\} = \theta(\sigma)$.

L'application ψ vérifie les conditions du théorème 2.1.2. On en déduit que l'espace $(\hat{X} - X, t'_{|\hat{X}-X})$ est polonais. Donc l'espace (X, t') est K_σ et par conséquent lusinien. Il s'en suit que l'espace (X, t) est lusinien en vertu du théorème 2.2.3 et donc il est K_σ en vertu du théorème 2.1.3. ■

Remarque. — La construction de θ reprend une idée de J. P. R. CHRISTENSEN.

Nous allons établir une réciproque partielle à ce théorème.

Un espace (X, t) est dit un *k-espace* si sous-ensemble de traces compactes sur les compacts de (X, t) est un fermé de (X, t).

THÉORÈME 2.3.2. — *Soit* (X, t) *un k-espace,* $\aleph_0$ *(complètement régulier),* K_σ, *alors* $C_c(X, t)$ *est analytique (en fait lusinien).*

Démonstration. — Soit (M, t') un espace métrisable séparable et soit $f : (M, t') \to (X, t)$ une surjection semi-propre (donc quotiente puisque (X, t) est un k-espace, *voir* [11], lemme 11.2). Soit d_1 une métrique sur (M, t') induisant la topologie t' et soit d_2 une métrique sur (X, t) induisant une topologie moins fine que t (th. 2.2.3). Soit (K_n) une suite de compacts sur (X, t) telle que $X = \bigcup_n K_n$. La restriction de la métrique d_2 à chaque K_n induit la topologie de chaque K_n. Soit d la métrique sur (M, t') définie par :

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(f(x), f(y)).$$

La métrique d induit la topologie de (M, t') et elle est telle que f soit (d, d_2)-uniformément continue.

Soit pour tout n, $F_n = f^{-1}(K_n)$. Soit $\hat{f}: C_c(X, t) \to C_c(M, t')$ définie par $\hat{f}(g) = g \circ f$. L'application $\hat{f}$ est un homéomorphisme de $C_c(X, t)$ sur son image car f est semi-propre et $\hat{f}(C_c(X, t))$ est fermé dans $C_c(M, t')$ car f est quotiente.

Soit $S = (s_k)$ une suite de points de M telle que $S \cap F_n$ soit dense dans $(F_n, t'_{|F_n})$ pour tout n et soit $\mathbb{R}^s$ muni de sa topologie produit.

Soit $\varphi : C_c(M, t') \to \mathbb{R}^S$ définie par $\varphi(f) = (f(s_k))$. Cette application définit un isomorphisme borélien de $(C_c(M, t'), \mathbb{B}(C_c(M, t'))$ sur son image munie de la structure borélienne induite par celle de $\mathbb{R}^S$ (*voir* la démonstration du théorème 3.7 de [4]).

Soit :

$$B = \bigcap_n \left\{ (r_{s_k}) \in \mathbb{R}^S / \lim_p \left(\sup \left\{ |r_{s_l} - r_{s_m}| / s_l \in F_n . d(s_l, s_m) < \frac{1}{p} \right\} \right) = 0 \right\}.$$

On vérifie que B est l'image par φ du sous-ensemble A de $C(M, t')$ des applications continues qui sont uniformément continues sur chacun des F_n.

Comme pour tout g dans $C(X, t)$, l'application $g \circ f$ est uniformément continue sur chaque F_n, on a $\hat{f}(C_c(X, t)) \subset A$. Comme B est un borélien de $\mathbb{R}^S$, on en déduit que le sous-espace A de $C_c(M, t')$ est lusinien (on rappelle que $C(M, t')$ possède une topologie métrisable séparable plus fine que celle de $C_c(M, t')$ et de même structure borélienne que celle de $C_p(M, t')$). Comme $\hat{f}(C_c(X, t))$ est fermé dans A et est homéomorphe à $C_c(X, t)$, on en déduit que $C_c(X, t)$ est lusinien. ■

Des résultats antérieurs on tire :

THÉORÈME 2.3.3. — *Soit (X, t) un k-espace complètement régulier. L'espace (X, t) est $\aleph_0$ et K_σ si et seulement si $C_c(X, t)$ est analytique.*

Remarques. — (1) Il existe des k-espaces, $\aleph_0$ et K_σ qui ne sont pas métrisables. Nous en avons un exemple à la remarque (2) du 3. Le théorème 2.3.3, constitue bien une généralisation du résultat de J. P. R. CHRISTENSEN.

(2) Il existe des espaces X non k-espaces, $\aleph_0$ et K_σ, tels que $C_c(X)$ soient analytiques et des espaces X vérifiant les mêmes conditions et tels que $C_p(X)$ ne soient pas analytiques.

Exemple 2.3.1. — Soit $X = \mathbb{N}^2$ muni de la topologie de Arens ([10], 2.E). Tout point autre que (0,0) est ouvert et les voisinages ouverts de

(0,0) sont les ensembles B qui contiennent (0,0) et qui sont tels que, sauf pour un nombre fini de « droites », chaque « droite » $\{n\} \times \mathbb{N}$ est contenu dans B à un ensemble fini de points près. Formellement, si $\mathbb{P}_f$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et si $\mathbb{P}_f^c$ désigne l'ensemble de leurs complémentaires, un voisinage B de (0,0) est tel qu'il existe N dans $\mathbb{P}_f^c$ et une famille $(M_n)_{n \in N}$ d'éléments de $\mathbb{P}_f^c$ tels que :

$$B = \bigcup \{\{n\} \times M_n / n \in N\} \cup \{(0,0)\} \cup A, \qquad \text{avec} \quad A \subset (\mathbb{N} - N) \times \mathbb{N}.$$

Soit t la topologie ainsi définie sur X.

L'espace (X, t) est K_σ, $\aleph_0$ (complètement régulier), mais n'est pas un k-espace (les compacts de (X, t) sont finis). On a :

$$C_c(X, t) = C_p(X, t) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}.$$

Montrons que $C_c(X, t)$ est analytique. Plongeons $\mathbb{P}(X)$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ muni de la topologie produit. Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des voisinages de (0,0).

On a :

$$\mathbb{D} = \bigcup_{N \in \mathbb{P}_f^c} \bigcap_{n \in N} \bigcup_{M \in \mathbb{P}_f^c} \bigcap_{m \in M} \{(x_{nm}) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^2} / x_{nm} = 1,\ x_{00} = 1\}.$$

Soit $g_m : \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ définie par :

$$g_m(f) = \left\{(n, m) / |f(n, m) - f(0,0)| < \frac{1}{m}\right\}$$

pour tout $m > 1$. On vérifie que g_m est de première classe de Baire (l'image réciproque d'un ouvert est un F_σ). Comme $C(X, t) = \bigcap_m g_m^{-1}(\mathbb{D})$, $C(X, t)$ est un borélien de $\mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. En conséquence, $C_c(X, t)$ est lusinien. Cet exemple et ses propriétés boréliennes m'ont été indiqués par A. Louveau.

Contre-exemple 2.3.2. – Soit $X = \mathbb{N} \cup \{p\}$ où $p \in \beta(\mathbb{N}) - \mathbb{N}$, $\beta(\mathbb{N})$ étant le compactifié de stone Čech de $\mathbb{N}$. Soit t la topologie induite par celle de $\beta(\mathbb{N})$ sur X. L'espace (X, t) est $\aleph_0$, K_σ mais n'est pas un k-espace (ses compacts sont finis). Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des voisinages de p sur (X, t). L'ensemble $\hat{\mathbb{D}} = \{V - \{p\} / V \in \mathbb{D}\}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ non trivial. Plongeons $\mathbb{P}(X)$ dans $\{0,1\}^X$. L'ensemble $\hat{\mathbb{D}}$, plongé dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure de pile ou face, n'est pas mesurable d'après un résultat de Sierpinski [16] (en utilisant la loi zéro-un, on montre que la mesure intérieure de $\hat{\mathbb{D}}$ est nulle et sa mesure extérieure est 1). L'ensemble $\mathbb{D}$ n'est donc pas analytique dans $\{0,1\}^X$.

Considérons les indicatrices d'ouverts-fermés de (X, t). Elles sont exactement les indicatrices continues sur (X, t). Or les ouverts-fermés contenant

p sont exactement les voisinages de p. Le sous-ensemble $\mathbb{D}$ avec la topologie induite par $\{0,1\}^X$ s'identifie à un sous-espace fermé de $C_p(X, t)$. En conséquence $C_c(X, t) = C_p(X, t)$ n'est pas analytique.

Le résultat reste vrai pour un espace $\mathbb{N} \cup \{p\}$ où tout point de $\mathbb{N}$ est ouvert et la famille $\mathbb{D}$ des voisinages de p est tel que $\hat{\mathbb{D}} = \{V - \{p\} / V \in \mathbb{D}\}$ soit une intersection dénombrable d'ultrafiltres non triviaux sur $\mathbb{N}$ (*cf.* M. TALAGRAND [16]).

Question. — Est-ce qu'un espace X régulier, cosmique, k-espace, K_σ, est tel que $C_p(X)$ soit analytique ?

3. Cas où $C_c(X)$ est métrisable

DÉFINITION 3.1. — Un espace topologique séparé est dit *hémicompact* si il possède une suite de compacts (K_n) telle que si K est un compact de (X, t), il existe n tel que $K \subset K_n$.

Les énoncés suivants nous ont été communiqués par Ibula Ntantu.

THÉORÈME 3.2. (Ibula Ntantu, [12]). — *Soit (X, t) un espace complètement régulier, alors :*

(1) *(X, t) est hémicompact ssi $C_c(X, t)$ est métrisable* (ARENS [6]).

(2) *(X, t) est un k-espace hémicompact ssi $C_c(X, t)$ est complètement métrisable.*

(3) *(X, t) est cosmique et hémicompact ssi $C_c(X, t)$ est métrisable séparable.*

(4) *(X, t) est k-espace cosmique et hémicompact ssi $C_c(X, t)$ est polonais.*

Par ailleurs, Arens a démontré le résultat suivant ([6]) :

THÉORÈME 3.3. — *Si (X, t) est un espace hémicompact tel que pour tout point possède une base dénombrable de voisinages, alors (X, t) est localement compact.*

Un résultat de E. Michaël permet d'obtenir :

THÉORÈME 3.4. — *Si (X, t) est un espace régulier hémicompact dont les compacts sont métrisables et tel que pour tout point possède une base dénombrable de voisinages alors (X, t) est localement compact métrisable (et donc polonais).*

Démonstration. — On sait déjà que (X, t) est localement compact. Pour montrer qu'il est métrisable, il suffit de constater qu'il est image quotiente de $\Sigma_n K_n$ où (K_n) est une suite de compacts de (X, t) telle que si K est un compact de (X, t), il existe n tel que $K \subset K_n$ et où $\Sigma_n K_n$ est muni de la topologie somme des topologies des K_n.

L'espace (X, t) est $\aleph_0$ comme étant image quotiente d'un espace métrisable séparable et donc il est métrisable puisque chacun de ses points possède une base dénombrable de voisinages (*cf.* [11]).

Remarques. — (1) C. Dellacherie m'a indiqué que si (X, t) est métrisable et hémicompact on pouvait prouver directement que (X, t) est polonais en utilisant le résultat suivant de J. P. R. Christensen et J. Saint Raymond. Si un espace métrisable séparable est tel que l'espace de ses compacts muni de la topologie de Hausdorff soit analytique, alors il est polonais. En effet (X, t) est séparable et $\mathbb{K}(X, t)$ est un K_σ, d'où le résultat.

(2) On ne peut omettre l'hypothèse du premier axome de dénombrabilité dans le théorème 3.4. Il existe des espaces réguliers, cosmiques, hémicompacts, k-espaces, qui ne sont pas métrisables (ils sont néanmoins $\aleph_0$).

Exemple 3.5. — Soit $X_0 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et munissons X_0 de la topologie t_0 définie par : $\{(n, m)\}$ est ouvert pour tout $(n, m) \neq (0,0)$ et un ouvert contenant $(0,0)$ est de la forme $\bigcup_n (\{n\} \times N_n)$ où chaque N_n est le complémentaire d'une partie finie de $\mathbb{N}$. Cet espace est bien régulier, hémicompact, k-espace mais $(0,0)$ ne possède pas de base dénombrable de voisinages.

Par ailleurs, on montre facilement qu'un espace régulier, hémicompact, k-espace n'est pas métrisable ssi il contient une copie de (X_0, t_0) comme fermé.

4. Analyticité de $C_u(X, t)$

Il est connu que si (X, t) est compact alors $C_u(X, t)$ est séparable si et seulement si (X, t) est métrisable. Dans ce cas $C_u(X, t)$ est un espace de Banach séparable donc polonais (*cf.* [10]).

Un résultat de J. P. Troallic permet de remplacer $C_u(X, t)$ par $C_p(X, t)$ dans cet énoncé, la séparabilité de $C_p(X, t)$ impliquant dans ce cas la séparabilité de $C_u(X, t)$ [17].

Rappelons que si (X, t) est un espace topologique quelconque, $C_u(X, t)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme associée à la métrique usuelle de $\mathbb{R}$.

Donnons une démonstration du résultat classique suivant :

Théorème 4. — *Soit (X, t) un espace complètement régulier. L'espace $C_u(X, t)$ est séparable si et seulement si (X, t) est métrisable compact.*

Démonstration. — Soit (X, t) complètement régulier tel que $C_u(X, t)$ soit séparable. Supposons que (X, t) ne soit pas compact. Soit $C_u^b(X, t)$ le sous-espace de $C_u(X, t)$ des applications bornées. Il est séparable. Soit $(\hat{X}, \hat{t})$ le compactifié de Stone-Čech de (X, t). Comme toute fonction continue bornée sur (X, t) se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $(\hat{X}, \hat{t})$, on en déduit que $C_u^b(X, t)$ est homéomorphe à $C_u(\hat{X}, \hat{t})$ (et même isomorphe). Il s'en suit que $(\hat{X}, \hat{t})$ est métrisable, ce qui est impossible, aucun point de $\hat{X}-X$ n'admettant de base dénombrable de voisinages. ■

5. Sur un théorème d'Hurewicz

5.1. Définitions. Rappels

On rappelle que l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est muni de la topologie discrète et que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit, ce qui lui confère une structure d'espace polonais.

Soit (X, t) un espace topologique. Soit $K : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}(X, t)$. On dit que K est semi-continue supérieurement (s. c. s.) si pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et tout ouvert $U \supset K(\sigma)$, il existe un voisinage V de σ tel que pour tout $\tau \in V$, on ait $K(\tau) \subset U$. Si A est une partie de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on note $K(A)$ la réunion des $K(\sigma)$, $\sigma \in A$.

On dit que (X, t) est *K-analytique* [13] si (X, t) est séparé et si il existe $K : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}(X, t)$ s. c. s. tel que $K(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = X$. On sait que si A est compact dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $K(A)$ est compact dans (X, t).

La notion d'espaces K-analytiques étend celle d'espace analytique.

On trouvera dans [2] une étude sur des critères pour qu'un espace K-analytique soit analytique.

C'est G. Choquet qui a introduit la notion d'espaces K-analytiques en les définissant comme les images continues séparées de $K_{\sigma\delta}$ d'espaces séparés. C'est J. E. Jayne qui a prouvé l'équivalence de cette définition avec celle de Z. Frolik que nous avons introduite.

On note S l'ensemble des suites finies d'entiers auquel on adjoint $\varnothing$. On note I_s ou $I(s)$, l'ensemble $\{\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} / s \prec \sigma\}$ pour tout s dans S, $s \prec \sigma$ signifiant s commence σ. Pour tout $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\sigma | n$, le n-uple des premières coordonnées de σ.

Rappelons que $\{I_s / s \in S\}$ est une base d'ouverts-fermés de la topologie de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Si s et s' sont dans $\mathbb{N}^n$, on écrit $n = |s| = |s'|$.

Soit X un ensemble et $\mathbb{E}$ une collection de parties de X. On dit que $\mathbb{E}$ est *centrée* si pour toute sous-famille finie $\mathbb{E}'$ de $\mathbb{E}$, on a $\bigcap \{ E/E \in \mathbb{E}' \} \neq \emptyset$.

Rappelons qu'un espace topologique est dit *parfaitement normal* si il est normal et si ses fermés sont des G_δ.

Un espace régulier de Lindelöf est paracompact et donc normal.

Un espace régulier héréditairement de Lindelöf est parfaitement normal.

Un espace (X, t) est dit *réelcompact* si il est complètement régulier et si chaque fois qu'il est plongé dans un espace $(\hat{X}, \hat{t})$ complètement régulier différent de lui et dans lequel il est dense, il existe alors une application continue de (X, t) dans $\mathbb{R}$ qui ne se prolonge pas en une application continue de $(\hat{X}, \hat{t})$ dans $\mathbb{R}$. Un espace est réelcompact ssi il est homéomorphe à un fermé d'un produit cartésien de copies de $\mathbb{R}$. (On pourra consulter [6].)

On dit que $f: (X, t) \to (X', t')$ est *propre* si elle continue, fermée, telle que $f^{-1}(x')$ soit compact pour tout $x' \in X'$. Si f est surjective, on dit que (X', t') est image propre de (X, t).

5.2. La caractérisation des espaces K-analytiques de Z. Frolik

Soit X un ensemble. Soit $(M(s))_{s \in S}$ un schéma de Souslin sur $\mathbb{P}(X)$.

On dit qu'une famille $\mathbb{E}$ de parties de X est $(M(s))$-Cauchy si il existe $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout n, il existe $E_n \in \mathbb{E}$ tel que $E_n \subset M(\sigma | n)$. Le schéma $(M(s))$ est dit *régulier* si $M(s) \supset M(s')$ pour $s \prec s'$. Si (X, t) est un espace topologique séparé et si $(M(s))$ est un schéma de Souslin sur $\mathbb{P}(X)$, on dit que c'est un *système déterminant complet* sur (X, t) si pour toute famille $\mathbb{E}$ de $\mathbb{P}(X)$, centrée, $(M(s))$-Cauchy on a $\bigcap \{ \bar{E}/E \in \mathbb{E} \} \neq \emptyset$, $\bar{E}$ signifiant l'adhérence de E dans (X, t), et si $X = \bigcup_\sigma \bigcap_n M(\sigma | n)$ (*voir* [7]).

THÉORÈME 5.2.1. (Z. FROLIK [7]). — *Soit (X, t) un espace complètement régulier. L'espace (X, t) est K-analytique si et seulement si il possède un système déterminant complet.*

Notons que si $K: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}(X, t)$ est s. c. s. telle que $K(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = X$, $(K(I_s))$ est un système déterminant complet sur (X, t) qui de plus vérifie $K(I_s) = \bigcup_n K(I(s, n))$ pour tout s, (s, n) désignant la suite obtenue en adjoignant n à s.

Tout système déterminant régulier complet $(M(s))$ sur un espace (X, t) complètement régulier est tel que $\bigcap_n \overline{M(\sigma | n)}^X = \bigcap_n \overline{M(\sigma | n)}^Y$ où (Y, t') est un espace complètement régulier dans lequel (X, t) est plongé. Il s'en suit que $\bigcap_n \overline{M(\sigma | n)}^X$ est compact.

5.3. UNE EXTENSION DU THÉORÈME D'HUREWICZ [8]

THÉORÈME 5.3.1. — *Soit* (Y, t') *un espace héréditairement paracompact ou réelcompact et soit* (X, t) *un sous-espace K-analytique parfaitement normal. Pour que le sous-espace* X *de* Y *ne soit pas couvert par un* K_σ *de* Y *il faut et il suffit qu'il contienne un sous-espace* A*, fermé dans* Y*, tel que* $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ *soit image propre de* A.

Si X *est analytique, en particulier si* Y *est métrisable, on peut remplacer « image propre de » par « homéomorphe à ».*

COROLLAIRE 5.3.2. — *Si* X *est un espace K-analytique parfaitement normal (resp. analytique régulier),* X *n'est pas un* K_σ *si et seulement si* $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ *est image propre d'un (resp. homéomorphe à un) fermé de* X.

Remarques. — Ce théorème étend bien la partie (*c*) du théorème 1 [9] de J. E. JAYNE et C. A. ROGERS, la classe des espaces réelcompacts ne recouvrant pas celles des espaces héréditairement paracompacts.

On a déjà mentionné qu'un espace régulier, héréditairement de Lindelöf est héréditairement paracompact et (héréditairement) parfaitement normal. Un espace K-analytique étant de Lindelöf, il est parfaitement normal ssi il est héréditairement de Lindelöf et régulier. Un espace analytique étant héréditairement de Lindelöf, il est automatiquement parfaitement normal si il est régulier.

Démonstration. — La condition est suffisante, l'espace $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ n'étant pas un K_σ.

Montrons que la condition est nécessaire.

Si A est une partie de X non recouvrable par un K_σ dans Y, on dira que A est non Y-rec (K_σ).

On a besoin d'un lemme :

LEMME 5.3.3. — *Soit* (X, t) *un sous-espace héréditairement de Lindelöf d'un espace séparé* (Y, t')*, non* Y-rec (K_σ)*, alors il existe un fermé (non vide)* F *de* (X, t) *tel que tout ouvert non vide du sous-espace* F *ne soit pas* Y-rec (K_σ).

Démonstration. — Soit $A = \bigcup \{ G \in t / G$ est Y-rec $(K_\sigma) \}$. Le sous-espace non vide $X - A$ répond à la question.

Retour sur la démonstration de 5.3.1.

On se donne un système déterminant complet plein $(M(s))$, $(M(s) = \bigcup_n M(s, n)$ pour tout $s)$.

Nous allons construire trois schémas de Souslin :

φ à valeurs dans $\mathbb{P}(X)$, ψ à valeurs dans t et θ à valeurs dans $\{M(s)/s \in S\}$ tels que :

(1) $\varphi(\varnothing)=\psi(\varnothing)=\theta(\varnothing)=X=M(\varnothing)$;

(2) $\overline{\varphi(s)}^X \subset \psi(s)$ et $\varphi(s)$ non Y-rec(K_σ) pour tout s;

(3) pour tout σ il existe τ tel que pour tout n $\varphi(\sigma|n)\subset\theta(\sigma|n)=M(\tau|n)$;

(4) si $|s|=|s'|$, $s\neq s'$ alors $\psi(s)\cap\psi(s')=\varnothing$ et $\overline{\varphi(s)}^Y \cap \overline{\varphi(s')}^Y=\varnothing$;

(5) $(\overline{\varphi(s)}^Y)_{|s|=n}$ est localement finie dans (Y, t') pour tout n;

(6) pour tout s et tout n, $\varphi(s, n)\subset\varphi(s)$ et $\psi(s, n)\subset\psi(s)$.

Pour cela il suffit de démontrer le lemme suivant permettant d'obtenir la construction par récurrence :

LEMME 5.3.4. — *Dans les conditions du théorème, soient G un ouvert de (X, t) et A une partie de X non Y-rec (K_σ) telle que $\bar{A}^X\subset G$ et telle qu'il existe s pour lequel $A\subset M(s)$. Alors il existe une suite (G_n) d'ouverts de G telle que $G_n\cap G_m=\varnothing$ si $m\neq n$ et une suite (A_n) de parties de A non Y-rec (K_σ) avec $\bar{A}^X\subset G_n$ pour tout n, $(\bar{A}_n^Y)$ est localement finie dans Y, $\bar{A}_n^Y\cap\bar{A}_m^Y=\varnothing$ si $n\neq m$ et il existe une suite d'entiers (k_n) telle que $A_n\subset M(s, k_n)$ pour tout n.*

Démonstration du lemme. — On peut supposer que les ouverts non vides de A sont non Y-rec (K_σ) d'après le lemme 5.3.3.

(1) *Cas Y héréditairement paracompact*

Soit $(L_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\bar{A}^Y$ par des ouverts de (Y, t') tel qu'on ne puisse extraire un sous-recouvrement fini ($\bar{A}^Y$ n'est pas K_σ donc n'est pas compact) l'espace $L=\bigcup\{L_i/i\in I\}$ étant paracompact, on peut supposer (L_i) localement fini dans L. Il est facile alors de construire une suite (H_n) d'ouverts de (Y, t') telle que $H_n\cap A\neq\varnothing$ pour tout n,

$$\bar{H}_n^Y\cap\bar{H}_m^Y=\varnothing \quad \text{si } m\neq n, \qquad H_n\neq\varnothing \quad \text{pour tout } n$$

et il existe une sous-suite (L_{i_n}) extraite de (L_i) telle que :

$$L_{i_n}\neq L_{i_m} \quad \text{si } m\neq n \qquad \text{et} \qquad \bar{H}_n^Y\subset L_{i_n} \quad \text{pour tout } n.$$

Il est clair que $(\bar{H}_n^Y)$ est localement finie dans L.

Comme $H_n\cap A$ est non Y-rec(K_σ) et que

$$H_n\cap A=\bigcup_k (H_n\cap A\cap M(s, k)),$$

il existe k_n tel que $H_n\cap A\cap M(s, k_n)$ soit non Y-rec(K_σ).

On pose alors $A_n = H_n \cap A \cap M(s, k_n)$ et $G_n = H_n \cap X$. Les suites (G_n) et (A_n) conviennent. (Pour voir que $(\bar{A}_n^Y)$ est localement finie dans (Y, t'), il suffit de constater qu'elle est localement finie dans $\bar{A}^Y$.)

(2) *Cas Y réelcompact*

Le sous-espace $\bar{A}^Y$ est réelcompact comme sous-espace fermé d'un espace réelcompact. Il est non K_σ donc non pseudo-compact (car un espace réelcompact, pseudo-compact est compact). Il existe alors sur $\bar{A}^Y$ une application continue f à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, non bornée. Soit (B_n) une suite d'ouverts de $\bar{A}^Y$, non vides, de la forme $f^{-1}(]a_n, b_n[)$ où $a_n \uparrow +\infty$ et les intervalles $[a_n, b_n]$ sont disjoints deux à deux. Soit $\hat{f}$ un prolongement de $f_{|\bar{A}^X}$ à tout G (théorème de Tietze). En considérant les $\hat{f}^{-1}(]a_n, b_n[)$, on voit que les ouverts $B_n \cap X$ de $\bar{A}^X$ sont traces d'ouverts G_n de G disjoints deux à deux.

Maintenant, comme :

$$f^{-1}(]a_n, b_n[) = \bigcup_{p \geq 1} f^{-1}\left(\left[a_n + \frac{1}{p}, b_n - \frac{1}{p}\right]\right),$$

on peut trouver dans chaque B_n un fermé C_n de (Y, t') tel que $C_n \cap A$ ne soit pas Y-rec (K_σ) et finalement un k_n tel que $C_n \cap A \cap M(s, k_n)$ ne soit pas Y-rec (K_σ). On pose alors $A_n = C_n \cap A \cap M(s, k_n)$. Les suites (G_n) et (A_n) conviennent. ■

Retour sur la démonstration de 5.3.1.

La construction des schémas de Souslin est alors claire.

Soit $f: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}(X, t)$ définie par $f(\sigma) = \bigcap_n \overline{\varphi(\sigma|n)}^X$.

Comme $(M(s))$ est un système déterminant complet et $(\varphi(s))$ est une famille $(M(s))$-Cauchy, centrée on a bien $f(\sigma) \in \mathbb{K}(X, t)$. De plus $f(\sigma) \neq \varnothing$ et $f(\sigma) = \bigcap_n \overline{\varphi(\sigma|n)}^Y$ (*voir* 5.2).

Toujours en vertu du même argument, f est s. c. s.

Posons :

$$A = f(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \bigcup_\sigma \bigcap_n \overline{\varphi(\sigma|n)}^Y = \bigcap_n \bigcup_{|s|=n} \overline{\varphi(\sigma|n)}^Y.$$

On a donc A fermé dans (Y, t') en vertu de (5).

On montre que l'on a, pour tout s, $f(I_s) = A \cap \overline{\varphi(s)}^X = A \cap \psi(s)$.

On en déduit que f est ouverte sur A.

L'application $g : A \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définie par $g(x) = \sigma$ pour $x \in f(\sigma)$ est propre et surjective, d'où le résultat.

Si (X, t) est analytique, le système déterminant complet peut être choisi tel que $\bigcap_n \overline{M(\sigma|n)}^X$ contienne au plus un point. Dans ce cas g est clairement un homéomorphisme. ■

Remarques. — (1) On vient d'étendre la partie (c) du théorème de J. E. JAYNE et C. A. ROGERS. La partie (a) est une conséquence élémentaire du résultat car si A K-analytique, parfaitement normal, est un sous-espace de X séparé où il n'est pas un F_σ, alors il n'est pas un K_σ. On applique alors le corollaire 5.3.2 pour obtenir un fermé de A admettant une application propre sur $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

(2) L'espace A que l'on a construit dans le théorème est un espace K-lusinien. En fait il est bi-K-analytique (A et $\beta A - A$ sont K-analytiques, βA étant le compactifié de Stone-Čech de A). En effet, d'après Z. Frolik, les bi-K-analytiques se caractérisent par le fait qu'ils admettent une application propre sur un espace lusinien métrisable (*cf.* [8]).

Ce qu'il reste du théorème 1 de [9] peut se démontrer comme suit :

THÉORÈME 5.3.5. — *Soit (Y, t') un espace régulier et soit (X, t) un sous-espace K-analytique parfaitement normal (resp. analytique). Supposons que les points de Y-Xadmettent une base dénombrable de voisinages dans (Y, t'). Alors, X n'est pas un F_σ de (Y, t') si et seulement si il existe une partie compact C de Y telle que $C-X$ soit homéomorphe à $\mathbb{Q}$ et $C \cap X$ admette une application propre (resp. un homéomorphisme) sur $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.*

De plus, dans le cas analytique, C peut être choisi homéomorphe à $\{0,1\}^\mathbb{N}$.

Démonstration. — Supposons que X ne soit pas un F_σ de (Y, t').

Si $A \subset X \subset Y$ est recouvrable par un F_σ de (Y, t') inclus dans X, on écrira qu'il est Y-rec (K_σ) dans X. Si tout ouvert non vide de A est non Y-rec (K_σ) dans X, on écrira que A est non Y-rec. top-(F_σ) dans X.

Commençons par un lemme de démonstration similaire à celle de 5.3.3.

LEMME 5.3.6. — *Soit (X, t) un sous-espace héréditairement de Lindelöf de l'espace (Y, t'). Si A est non Y-rec(F_σ) dans X alors il existe un fermé (non vide) de A non Y-rec. top-(F_σ) dans X.*

On peut supposer que X est non Y-rec. top-(F_σ) dans lui-même.

On se donne un système déterminant complet et plein $(M(s))$.

On va construire quatre schémas de Souslin : φ à valeurs dans $\mathbb{P}(X) - \{\varnothing\}$, θ à valeurs dans $\{M(s)/s \in S\}$, ψ et V à valeurs dans t' et une famille $(z_s)_{s \in S}$ de points dans $Y - X$ vérifiant :

(1) $\varphi(\varnothing) = \theta(\varnothing) = M(\varnothing) = X$; $\psi(\varnothing) = V(\varnothing) = Y$; $z(\varnothing) \in \bar{X}^Y - X$.

(2) $\overline{\varphi(s)}^Y \subset \psi(s)$, $\varphi(s)$ non Y-rec. top-(F_σ) dans X pour tout s.

(3) Pour tout σ, il existe τ tel que pour tout n

$$\varphi(\sigma|n) \subset \theta(\sigma|n) = M(\tau|n).$$

(4) Si $|s| = |s'|$, $s \neq s'$ alors $\overline{\psi(s)}^Y \cap \overline{\psi(s')}^Y = \emptyset$.

(5) Pour tout s et tout n, $\varphi(s, n) \subset \varphi(s)$ et $\overline{\psi(s, n)}^Y \subset \psi(s)$.

(6) $(\overline{\varphi(s)}^X)_{|s|=n}$ est localement finie dans (X, t) pour tout n.

(7) Pour tout s, $z(s) \in \overline{\varphi(s)}^Y$ et $(V(s, n))$ est une base de voisinages ouverts de $z(s)$ telle que $\overline{\psi(s, k)}^Y \subset V(s, n)$ pour tout n et tout $k \geq n$.

On note que (5) se déduit de (2), (4) et (7).

Le lemme suivant fournit les pas de la récurrence.

LEMME 5.3.7. — *Dans les conditions du théorème, soient G un ouvert de (Y, t') et A un sous-espace de (X, t) non Y-rec. top-(F_σ) dans X tel que $\bar{A}^Y \subset G$ et tel qu'il existe s pour lequel $A \subset M(s)$. Soit $z \in \bar{A}^Y - X$.*

Il existe alors une base (V_n) dénombrable de voisinages de z ouverts dans (Y, t') inclus dans G tels que $\bar{V}^Y_{n+1} \subset V_n$ pour tout n et :

(1) une suite (G_n) d'ouverts de (Y, t') vérifiant :

— $\bar{G}^Y_n \subset V_n$ pour tout n,

— $\bar{G}^Y_n \cap \bar{G}^Y_m = \emptyset$ si $n \neq m$;

(2) une suite (A_n) de sous-espaces de (X, t) vérifiant :

— A_n est non Y-rec. top-(F_σ) dans X pour tout n;

— $A^Y_n \subset G_n$ pour tout n;

— $A_n \subset M(s, k_n) \cap A$ pour une certaine suite d'entiers (k_n).

(3) Une suite (z_n) de points de Y telle que $z_n \in \bar{A}^Y_n - X$ pour tout n.

Démonstration du lemme. — Soit (W_p) une base dénombrable de voisinages ouverts de z dans (Y, t') telle que $\bar{W}^Y_{p+1} \subset W_p \subset G$ pour tout p.

On construit par récurrence, grâce à la régularité de (Y, t'), une sous-suite (W_{p_n}) de la suite (W_p) et une suite (G_n) d'ouverts de (Y, t') telles que :

$$z \notin \bar{G}^Y_n \subset W_{p_n} \quad \text{pour tout } n, \qquad \bar{G}^Y_n \cap \bar{G}^Y_m = \emptyset \quad \text{si } n \neq m$$

et

$$G_n \cap A \neq \emptyset \quad \text{pour tout } n.$$

Posons pour tout n, $V_n = W_{p_n}$. La suite (V_n) est une base décroissante de voisinages de z dans (Y, t').

Soit (G'_n) une suite d'ouverts de (Y, t') telle que

$$\bar{G}'_n \subset G_n \quad \text{et} \quad G'_n \cap A \neq \emptyset \quad \text{pour tout } n.$$

L'ouvert $G'_n \cap A$ de A n'est pas Y-rec (F_σ) dans X. De plus il existe k_n tel que $G'_n \cap A \cap M(s, k_n)$ ne soit pas Y-rec(F_σ) dans X. Selon le lemme 5.3.6, il existe A_n fermé de $G'_n \cap A \cap M(s, k_n)$ non Y-rec. top-(F_σ) dans X.

On choisit maintenant pour chaque n, z_n dans $\bar{A}_n^Y - X$. ■

Reprenons la démonstration du théorème.

La construction des schémas de Souslin et de la famille (z_s) est alors claire.

On définit $f : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{K}(X, t)$ en posant $f(\sigma) = \bigcap_n \overline{\varphi(\sigma|n)}^X$. Comme dans le théorème 5.3.1, on montre que f est bien à valeurs dans les compacts non vides de (X, t), qu'elle est s. c. s., que $f(\mathbb{N}^\mathbb{N}) = \bigcap_n \bigcup_{|s|=n} \overline{\varphi(s)}^X$ est fermé dans (X, t) et que $g : A \to \mathbb{N}^\mathbb{N}$ définie par $g(x) = \sigma$ pour lequel $x \in f(\sigma)$ est une application propre de A sur $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ avec $A = f(\mathbb{N}^\mathbb{N})$.

On pose alors $C = \bar{A}^Y$ et $D = \{z(s)/s \in S\}$.

On a clairement $D \subset \bar{A}^Y$ en vertu de (2) et (7). Montrons qu'en fait $D = \bar{A}^Y - X$.

Soit $z \in Y - A$ et $z \notin D$. Ou bien $z \in \psi(s) - \bigcup_n (\psi(s, n)$ pour un s et alors $z \notin \bar{A}^Y$ (car $\psi(s) - (\bigcup_n \overline{\varphi(s, n)}^Y \cup \{z(s)\})$ est un ouvert de (Y, t') disjoint de A), ou bien il existe σ tel que pour tout n, $z \in \psi(\sigma|n)$. Dans ce dernier cas, comme $\bigcap_n \overline{\varphi(\sigma|n)}^X$ est compact, il existe un ouvert U de (Y, t') contenant $\bigcap_n \overline{\varphi(\sigma|n)}^X$ et d'adhérence ne contenant pas z. Il existe alors n_0 tel que $\overline{\varphi(\sigma|n)}^X \subset U$ ((φ (σ | n)) est centrée, $(\overline{M(s)}^X)$-Cauchy).

L'ouvert $(Y - \bar{U}^Y) \cap \psi(\sigma|n_0)$ est alors un voisinage de z disjoint de A.

On a bien $C = \bar{A}^Y = A \cup D$.

Le sous-espace D est métrisable (comme étant dénombrable, régulier, à bases dénombrables de voisinages pour ses points), sans point isolé, il est donc homéomorphe à $\mathbb{Q}$ (*cf.* [13]).

Reste à voir que C est compact.

C est évidemment de Lindelöf. Il suffit de voir qu'il est dénombrablement compact. Soit (x_n) une suite injective à valeurs dans C.

Ou bien il existe s tel que pour une infinité de p, $\psi(s, p)$ contient des éléments de la suite (x_n) et alors il existe une sous-suite de (x_n) convergeant vers $z(s)$.

Ou bien pour tout s, $\{x_n/n\in\mathbb{N}\}\cap\psi(s, p)=\varnothing$ sauf pour un nombre fini de p. On construit alors σ tel que $\varphi(\sigma|k)$ contienne un élément $x(\sigma|k)$ de la suite (x_n) et tel que $(x(\sigma|k))$ soit une sous-suite de la suite (x_n). Il est facile de voir que $\{x(\sigma|k)/k\in\mathbb{N}\}\cup(\bigcup_n\overline{\varphi(\sigma|n)}^X)$ est compact. Et donc (x_n) admet une valeur d'adhérence dans C.

Si (X, t) est analytique, en prenant un système déterminant complet convenable, on peut fabriquer f à valeurs dans les singletons. On obtient alors A homéomorphe à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Reste à voir que C est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

On vérifie que les ensembles de la forme

$$C\cap\psi(s)=C\cap\overline{\psi(s)}^Y \qquad \text{ou} \qquad C\cap V(s)=C\cap\overline{V(s)}^Y$$

forment une base dénombrable d'ouverts-fermés de C.

Comme C est métrisable, compact, éparpillé, sans point isolé, il est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (*voir* [13]). ■

Remarque. — Une extension remarquable du théorème d'Hurewicz a été faite par SAINT RAYMOND [15]. Soit X un borélien d'un espace métrisable compact. Pour que X soit réunion d'un K_σ et d'un G_δ, il faut et il suffit que X ne contienne aucun fermé homéomorphe à $\mathbb{Q}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

6. Une remarque sur les espaces métrisables

Soit (X, d) un espace métrique où d est la métrique de cet espace et t_d la topologie induite par cette métrique. Notons $U(X, d)$ l'ensemble des applications réelles uniformément continues définies sur (X, d).

THÉORÈME 6.1. — *Soit (X, t) un espace métrisable. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *il existe sur X une métrique d telle que $t_d=t$ et $C(X, t)=U(X, d)$.*

(*b*) *l'espace (X, t) est union d'un sous-espace discret et d'un sous-espace compact.*

Démonstration. — Supposons la condition (*a*) réalisée. Soit D l'ensemble des points isolés de (X, t). Montrons que $X-D$ est un compact de (X, t).

Si $X-D$ n'est pas compact, il existe alors une suite injective (x_n) de points de $X-D$ sans valeur d'adhérence. Soit (r_n) une suite de nombres réels décroissant vers 0 et telle que $B^d(x_n, r_n)\cap B^d(x_m, r_m)=\varnothing$ pour tout $n\neq m$, ($B^d(x_n, r_n)$ étant la boule ouverte de centre x_n et de rayon r_n). Choisissons dans chaque $B^d(x_n, r_n)$ un point y_n distinct de x_n.

L'ensemble A constitué des x_n et des y_n est fermé dans (X, t). Soit $f: A \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_n)=0 \quad \text{et} \quad f(y_n)=1 \quad \text{pour tout } n.$$

Cette fonction est continue sur A et se prolonge en une fonction continue sur tout X qui n'est pas d-uniformément continue.

Réciproquement, supposons que (X, t) soit union d'un sous-espace compact K et d'un sous-espace discret D. On peut supposer K et D disjoints.

Soit d une distance sur X, bornée par 1 et telle que $t_d=t$. Soit :

$$B_n=\left\{x\in X/d(x, K)<\frac{1}{n}\right\} \quad \text{pour tout } n>1.$$

Comme B_n est ouvert et fermé dans X, (X, t) est la somme topologique de B_n et $X-B_n$. Définissons une distance d_n sur X telle que $t_{d_n}=t$ en posant :

$$d_n(x, y)=d(x, y) \quad \text{si } x, y\in B_n \quad \text{et} \quad d_n(x, y)=1 \quad \text{sinon.}$$

La distance d' définie sur X par $d'(x, y)=\sum_n 1/2^n d_n(x, y)$ vérifie $t_{d'}=t$.

Montrons que l'on a $C(X, t)=U(X, d')$. Supposons qu'il existe un élément f de $C(X, t)$ pour lequel il existe $r>0$ et une suite

$$((x_n, y_n)) \quad \text{tels que } d'(x_n, y_n)\to 0$$

et

$$|f(x_n)-f(y_n)|>r \quad \text{pour tout } n.$$

Comme K est compact, on peut supposer que les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas dans K. En vertu de la construction de d', on peut supposer que x_n et y_n sont dans B_n. Mais alors, il existe une suite (z_n) dans K telle que $d'(x_n, z_n)\to 0$. En extrayant une sous-suite convenable, on peut supposer que $z_n\to z$. Il s'en suit que

$$x_n\to z \quad \text{et} \quad y_n\to z \quad \text{et donc } |f(x_n)-f(y_n)|\to 0,$$

ce qui est contradictoire. ■

COROLLAIRE 6.2. — *Un espace métrisable (X, t), union d'un sous-espace compact et d'un sous-espace discret est topologiquement complet.*

Démonstration. — Soit d une distance sur X telle que $t_d=t$ et $C(X, t)=U(X, d)$. Montrons que d est une distance complète. Supposons que d ne soit pas complète. Plongeons (X, d) dans son complété $(\hat{X}, \hat{d})$.

Soit x dans $\hat{X}-X$ et soit (x_n) une suite dans X convergeant vers x. L'ensemble A constitué des x_n est fermé dans X. Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_n)=n$ pour tout n. Elle se prolonge en une fonction continue sur tout X qui ne peut pas se prolonger à tout $\hat{X}$ en une fonction continue. D'où la contradiction. ■

Remerciements. — Je remercie J. P. R. CHRISTENSEN de m'avoir signalé que sa conjecture n'était pas encore résolue et de m'avoir suggéré l'utilisation du résultat d'Hurewicz dans ce problème. Je remercie J. SAINT-RAYMOND de m'avoir signalé l'extension du résultat d'HUREWICZ par J. E. JAYNE et C. A. ROGERS. Je remercie A. LOUVEAU pour ses aimables indications sur l'espace de Arens. Toute ma sincère gratitude envers C. DELLACHERIE pour ses encouragements et maintes utiles remarques.

Additif. — J'ai reçu de la part de D. LUTZER un article fait conjointement par J. VAN MILL, R. POL et lui-même, intitulé « Descriptive complexity of function spaces » et à paraître dans la revue T.A.M.S.

On y trouvera une étude sur la classe de Baire de $C_p(X)$ dans $\mathbb{R}^X$ pour certains espaces dénombrables X n'ayant qu'un point d'accumulation. Par ailleurs, I. NTANTU doit faire paraître conjointement avec R. A. MCCOY un article intitulé « Completeness properties of function spaces » où des propriétés du type de celles évoquées dans le théorème 3.2, sont intensivement étudiées.

Je remercie D. H. FREMLIN et M. TALAGRAND de m'avoir chacun signalé que la non mesurabilité des ultra-filtres non triviaux sur $\mathbb{N}$ avait été démontrée par Sierpinski.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CALBRIX (J.). — Une propriété des espaces réguliers, images continues d'espaces métrisables séparables, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 295, série I, 1982, p. 81-82.

[2] CALBRIX (J.). — Espaces K-analytiques et espaces sousliniens, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 298, série I, 1984, p. 481-484.

[3] CALBRIX (J.). — Plongement dans les espaces lusiniens d'après A. Bešlagić et sur un théorème d'Hurewicz, *Séminaire d'Initiation à l'Analyse (Séminaire G. Choquet)*, 1983-1984 (à paraître).

[4] CHRISTENSEN (J.-P. R.). — *Topology and borel structure*, North Holland, Amsterdam, 1974.

[5] DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.-A.). — *Probabilités et Potentiel*, Hermann, Paris, 1983.

[6] ENGELKING (R.). — *General Topology*, P.W.N., Warszawa, 1977.

[7] FROLIK (Z.). — On analytic spaces, *Bul. Acad. Polonaise. Sc.*, vol. IX, n° 10, 1961, p. 721-726.

[8] FROLIK (Z.). — On coanalytic and bianalytic spaces, *Bul. Acad. Polonaise, Sc.*, vol. XII, n° 9, 1964, p. 527-530.

[8'] HUREWICZ (W.). — Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A), *Fund., Math.*, vol. 12, 1928, p. 78-109.

[9] JAYNE (J. E.) and ROGERS (C. A.). — Borel isomorphisms at first level, *Mathematika*, vol. 26, 1979, p. 125-179, et *Mathematika*, vol. 27, 1980, p. 236-260.

[10] KELLEY (J. L.). — *General Topology*, Van Nostrand, 1961.

[11] MICHAEL (E.). — $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, vol. 15, 1966, p. 983-1002.

[12] NTANTU (I.). — Communication privée.

[13] ROGERS (C. A.), JAYNE (J. E.), DELLACHERIE (C.), TOPSØE (F.), HOFFMANN-JØRGENSEN (J.), MARTIN (D. A.), KECHRIS (A. S.) et STONE (A. H.). — *Analytic sets*, Academic press, London, 1980.

[14] SAINT RAYMOND (J.). — Caractérisation d'espaces polonais, *Séminaire d'initiation à l'analyse (Séminaire Choquet)*, n° 5, 1971-1973, 10 p.

[15] SAINT RAYMOND (J.). — La structure d'Effros est-elle standard ?, *Fund., Math.*, vol. 100, n° 3, 1978, p. 201-210.

[16] TALAGRAND (M.). — Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables, *Studia math.*, t. LXVII, 1980, p. 13-43.

[17] TROALLIC (J.-P.). — Espaces fonctionnels et théorèmes de I. Namioka, *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 107, 1979, p. 127-137.