

BULLETIN DE LA S. M. F.

Y. MARTINEZ-MAURE

Feuilletages des surfaces et décompositions en pantalons

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 387-396

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__387_0

© Bulletin de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FEUILLETAGES DES SURFACES ET DÉCOMPOSITIONS EN PANTALONS

PAR

Y. MARTINEZ-MAURE (*)

RÉSUMÉ. — Sur une surface orientable compacte $M \neq T^2$, considérons un feuilletage \mathcal{F} transverse à ∂M dont les singularités sont des selles de Morse, et supposons que toute feuille compacte intérieure soit coupée par une transversale fermée et qu'aucune séparatrice ne joigne deux points de selle. Sur un pantalon, un tel feuilletage sans feuille compacte intérieure est conjugué à un feuilletage standard \mathcal{F}_0 . Après avoir introduit les notions de modèle et modèles équivalents, nous déterminons deux modèles canoniques $\mathcal{M}_{g,b}$ et $\mathcal{M}'_{g,b}$ (où g est le genre de M et b le nombre de composantes de ∂M) tels que : si \mathcal{F} est non orientable, il existe une décomposition en pantalons \mathcal{D} , transverse à \mathcal{F} , qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{M}_{g,b}$ si toute demi-feuille de \mathcal{F} atteint ∂M , et à $\mathcal{M}'_{g,b}$ sinon, auquel cas une transversale de \mathcal{D} coupe toute demi-feuille qui n'atteint pas ∂M .

ABSTRACT. — On a compact orientable surface $M \neq T^2$, consider a foliation \mathcal{F} transverse to ∂M whose singularities are Morse saddles, and assume each interior compact leaf is cut by a closed transversal and no separatrix joins two saddle points. On a pair of pants, such a foliation without interior compact leaf is conjugate to a standard foliation \mathcal{F}_0 . After introducing the notions of model and equivalent models, we determine two canonical models $\mathcal{M}_{g,b}$ and $\mathcal{M}'_{g,b}$ (where g is the genus of M and b the number of components of ∂M) such that: if \mathcal{F} is non orientable, there exists a pants decomposition \mathcal{D} , transverse to \mathcal{F} , which defines a model equivalent to $\mathcal{M}_{g,b}$ if every half-leaf of \mathcal{F} reaches ∂M , and to $\mathcal{M}'_{g,b}$ if not, in which case a transversal of \mathcal{D} cuts every half-leaf that doesn't reach ∂M .

Introduction

Nous nous proposons d'étudier les feuilletages des surfaces compactes orientables qui sont transverses au bord, sans liaison et dont les seules singularités sont des selles de Morse. Le cas des feuilletages orientables a été traité par Gilbert Levitt dans [L].

Je tiens à remercier vivement les referees dont les arguments pertinents m'ont permis de simplifier la démonstration du Théorème I. Par ailleurs, je dois beaucoup à Harold Rosenberg pour son aide lors de la préparation de ce travail.

(*) Texte reçu le 1^{er} octobre 1983, révisé le 19 janvier 1984.

Y. MARTINEZ-MAURE, 21, rue des Alpes, 78400 Chatou.

Dans tout ce qui suit, les surfaces sont compactes et orientables, et les feuilletages sont transverses au bord et n'ont pour singularités que des selles de Morse.

Le résultat principal de cet article est le suivant :

THÉORÈME. — Soit \mathcal{F} un feuilletage non orientable sans liaison d'une surface sans bord M différente du tore, tel que toute feuille compacte intérieure soit coupée par une transversale fermée. Il existe un difféomorphisme de M sur la surface S_g représentée à la figure 1 (g est le genre de M) tel que

- le feuilletage \mathcal{F}_S induit sur S_g soit transverse à la décomposition en pantalon de S_g dessinée;
- sur chaque pantalon de la décomposition, le feuilletage déterminé par \mathcal{F}_S soit isotope au feuilletage dessiné à la figure 2.

(Nous démontrerons en fait un théorème plus général)

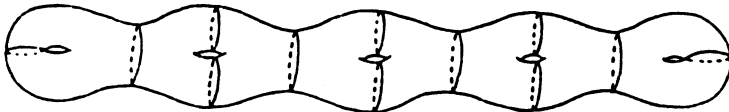


Fig. 1.

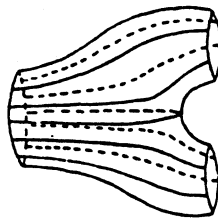


Fig. 2.

I. Existence d'une décomposition en pantalons

Un cycle de feuilles est dit totalement dissymétrique s'il ne contient aucune paire de séparatrices opposées.

PROPOSITION. — Soit \mathcal{F} un feuilletage sans cycle de feuilles totalement dissymétrique d'une surface M différente de T^2 et de $S^1 \times I$. Il existe sur M une décomposition en pantalons \mathcal{D} , transverse à \mathcal{F} , telle que :

- si \mathcal{F} ne possède pas de feuille compacte intérieure, alors le feuilletage induit par \mathcal{F} sur chaque pantalon déterminé par \mathcal{D} est conjugué au feuilletage

\mathcal{F}_0 représenté à la figure 3. \mathcal{F} peut donc alors s'obtenir par recollements selon leurs bords de pantalons munis de \mathcal{F}_0 .

— si \mathcal{F} possède une ou plusieurs feuilles compactes intérieures, alors nous pouvons choisir les courbes de \mathcal{D} pour qu'elles n'en rencontrent aucune. De plus, chaque pantalon déterminé par \mathcal{D} contient un pantalon sur lequel le feuilletage induit par \mathcal{F} est conjugué à \mathcal{F}_0 . \mathcal{F} peut donc s'obtenir par recollements selon leurs bords de pantalons munis de \mathcal{F}_0 et d'anneaux contenant toutes les feuilles compactes intérieures de \mathcal{F} .

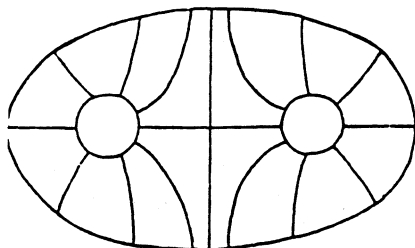


Fig. 3. — Le feuilletage \mathcal{F}_0 .

Remarque. — Les pantalons que l'on obtient en découpant M selon les courbes de \mathcal{D} ne sont pas nécessairement plongés dans M : il se peut que deux composantes du bord d'un pantalon déterminé par \mathcal{D} proviennent par découpage d'une même courbe de \mathcal{D} .

Cette proposition est prouvée dans [L] pour des feuilletages qui sont orientables, mais cette dernière hypothèse s'élimine sans difficulté de la démonstration.

COROLLAIRE 1. — *Tout feuilletage d'un pantalon sans feuille compacte intérieure ni cycle de feuilles totalement dissymétrique est conjugué à \mathcal{F}_0 .*

COROLLAIRE 2. — *Soit sur une surface M un feuilletage \mathcal{F} sans cycle de feuilles totalement dissymétrique tel que toute feuille compacte intérieure soit coupée par une transversale fermée. Il existe une famille finie de transversales fermées disjointes telle que toute demi-feuille qui ne rencontre pas ∂M coupe une transversale de cette famille.*

La démonstration de ce corollaire est rigoureusement identique à celle du corollaire correspondant de [L].

Remarque. — Nous verrons plus loin que si nous supposons de plus que \mathcal{F} est sans liaison, alors il existe une transversale fermée qui coupe toute demi-feuille qui ne rencontre pas ∂M .

II. Les décompositions canoniques

Soit \mathcal{F} un feuilletage sur une surface M différente de T^2 et de $S^1 \times I$, M définit un couple (g, b) , où g est le genre de M et b le nombre de composantes de son bord. Puisque l'indice d'une selle de Morse est -1 et que \mathcal{F} ne possède que des selles de Morse pour singularités, \mathcal{F} possède $2g+b-2$ singularités en vertu du théorème de l'indice. On a donc $2g+b \geq 2$ et par conséquent, comme on considère une surface différente de T^2 et de $S^1 \times I$, on a : $2g+b \geq 3$.

A tout couple $(g, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, tel que $2g+b \geq 3$, nous allons associer un ou deux modèles canoniques.

Un modèle associé à (g, b) est la donnée :

- d'une surface M de genre g , dont le bord possède b composantes;
- d'une décomposition \mathcal{D} de M en pantalons;
- du choix pour chaque pantalon déterminé par \mathcal{D} d'un bord privilégié.

Nous dirons que M est le support du modèle. Deux modèles seront dits équivalents s'il existe un difféomorphisme entre leurs supports qui conjugue les décompositions et respecte le choix des bords privilégiés.

Si \mathcal{F} est sans cycle de feuilles totalement dissymétrique (en particulier si \mathcal{F} est sans liaison), alors une décomposition en pantalons \mathcal{D} de M transverse à \mathcal{F} , telle que toute feuille compacte intérieure soit coupée par une courbe de \mathcal{D} , définit un modèle avec \mathcal{F} , de la manière suivante : si P est un pantalon déterminé par \mathcal{D} , le corollaire I nous assure que $\mathcal{F}|_P$ est conjugué à \mathcal{F}_0 et, nous privilégions la composante de ∂P qui rencontre toute feuille de $\mathcal{F}|_P$.

Le premier modèle canonique $\mathcal{M}_{g,b}$, où $g \geq 1$ et $b \geq 1$, est représenté sur la figure suivante (sur le dessin $g=3$ et $b=4$) :

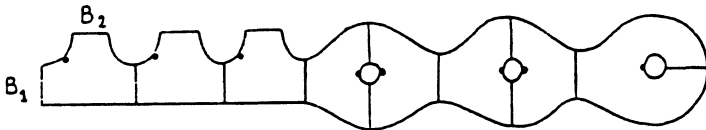
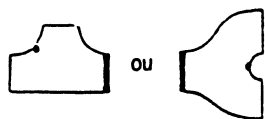


Fig. 4.

Les composantes B_1 et B_2 du bord seront dites primaires.

$\mathcal{D}_{g,b}$ (resp. $M_{g,b}$) désignera la décomposition en pantalons (resp. le support de $\mathcal{M}_{g,b}$).



représente un pantalon où le bord privilégié, tracé ici en gras, est le bord opposé au point.

Le second modèle canonique $\mathcal{M}'_{g,b}$, où $g \geq 2$ et $b \geq 0$ est représenté sur la figure suivante (sur le dessin $g=4$ et $b=3$); il est obtenu en collant $\mathcal{M}_{1,1}$ à $\mathcal{M}_{g-1,b+1}$ suivant une composante primaire du bord.

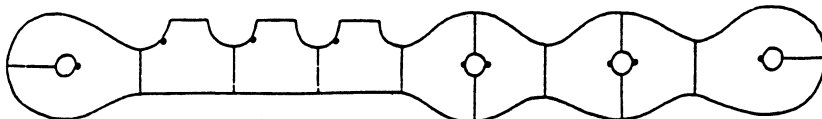


Fig. 5.

THÉORÈME I. — Soit \mathcal{F} un feuilletage non orientable sans liaison d'une surface à bord non vide M , et soit B une composante de ∂M . Si toute demi-feuille de \mathcal{F} atteint ∂M , alors il existe sur M une décomposition en pantalons \mathcal{D} , transverse à \mathcal{F} , qui définit un modèle équivalent au premier modèle canonique $\mathcal{M}_{g,b}$, avec B s'identifiant à une composante primaire de $\partial M_{g,b}$.

Démonstration. — Raisonons par récurrence sur le nombre q de selles de \mathcal{F} : $q=2g+b-2 \geq 1$. Si $q=1$, alors M est un tore troué qui admet (cf. proposition) une décomposition transverse en un pantalon non plongé dans M , définissant un modèle équivalent à $\mathcal{M}_{1,1}$.

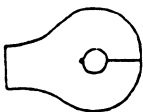


Fig. 6.

En effet, M ne peut pas être un pantalon puisqu'alors (corollaire I) \mathcal{F} serait conjugué à \mathcal{F}_0 qui est orientable.

Le théorème est donc établi pour $q=1$. Supposons le théorème démontré pour $q < q_0$, où $q_0 \geq 2$, et considérons un feuilletage possédant q_0 selles.

Distinguons deux cas :

a) Il existe deux séparatrices opposées l_1 et l_2 qui rencontrent des composantes différentes B_1 et B_2 de ∂M .

Nous construisons alors une transversale fermée C qui borde un pantalon P avec B_1 et B_2 , comme il est indiqué sur la figure suivante :

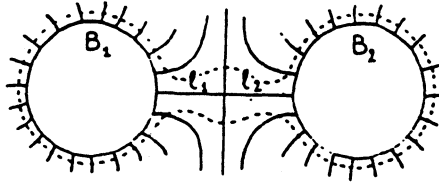


Fig. 7.

Notons M_1 la surface $\overline{M-P}$. Par hypothèse de récurrence, M_1 admet une décomposition \mathcal{D}_1 , transverse à $\mathcal{F}|_{M_1}$, qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{N}_{g,b-1}$, avec C s'identifiant à une composante primaire de $\partial M_{g,b-1}$. Lorsque l'on recolte P et M_1 , il apparaît que M admet une décomposition en pantalons \mathcal{D}' , transverse à \mathcal{F} , qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{N}_{g,b}$, avec B_1 et B_2 s'identifiant aux composantes primaires de $\partial M_{g,b}$.

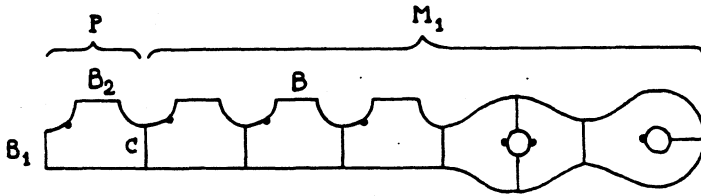


Fig. 8.

Nous voyons qu'il existe une composante B' différente de B , et deux séparatrices opposées l et l' qui rencontrent respectivement B et B' . Et si nous refaisons la construction précédente avec l et l' au lieu de l_1 et l_2 , il apparaît que M admet une décomposition en pantalons \mathcal{D} , transverse à \mathcal{F} , qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{N}_{g,b}$, avec B s'identifiant à une composante primaire de $\partial M_{g,b}$.

b) Il n'existe pas deux séparatrices opposées qui rencontrent des composantes différentes de ∂M .

Supposons que pour aucune paire (l_1, l_2) de séparatrices opposées, issues d'une selle s et atteignant une composante C de ∂M en des points b_1 et

b_2 , il n'existe une paire (l_1, l_2) de séparatrices opposées, issues d'une selle s' distincte de s et qui rencontrent C en des points b'_1 et b'_2 entrecroisés avec b_1 et b_2 (cf. figure 9).

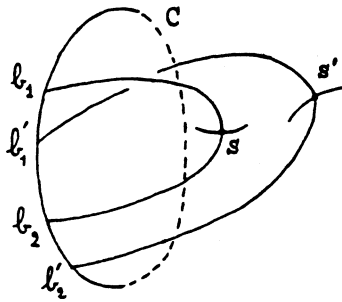


Fig. 9

Alors, comme les séparatrices de \mathcal{F} sont en nombre fini, il existe une paire (l_1, l_2) de séparatrices opposées, issues d'une selle s et atteignant une composante C de ∂M en des points b_1 et b_2 , telle qu'un des deux segments de C déterminés par b_1 et b_2 , ne rencontre aucune séparatrice issue d'une autre selle que s . Notons S ce segment, et construisons (cf. figure 10) un pantalon P_1 contenant l_1, l_2 et C , et dont le bord est transverse à \mathcal{F} .

Appelons C_1 et C_2 les composantes de ∂P autres que C .

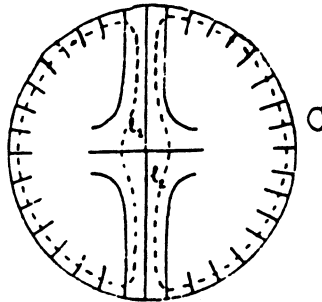


Fig. 10

S correspond à une de ces composantes, par exemple C_1 . Soit N la composante de $\overline{M - P_1}$ qui contient C_1 . Comme C_1 ne rencontre aucune séparatrice de $\mathcal{F}|_N$, N ne peut être qu'un anneau muni d'un feuilletage produit. L'autre composante du bord de cet anneau n'est pas une compo-

sante de ∂M , car sinon les deux autres séparatrices issues de s atteindraient des composantes différentes de ∂M . C'est donc C_2 , et par conséquent M est un tore troué, ce qui est absurde puisque $q_0 \geq 2$.

Il existe donc une paire (l_1, l_2) de séparatrices opposées, issues d'une selle s et atteignant une composante C de ∂M en des points b_1 et b_2 , et une paire (l'_1, l'_2) de séparatrices opposées, issues d'une selle s' distincte de s , qui rencontrent C en des points b'_1 et b'_2 entrecroisés avec b_1 et b_2 . Construisons comme précédemment un pantalon P_1 contenant l_1, l_2 et C , et dont le bord est transverse à \mathcal{F} , et appelons C_1 et C_2 les composantes de ∂P autres que C . Puisque b'_1 et b'_2 sont entrecroisés avec b_1 et b_2 , l'_1 et l'_2 rencontrent C_1 et C_2 , et nous pouvons construire, comme au a), un pantalon P_2 dont le bord, qui contient C_1 et C_2 , est transverse à \mathcal{F} .

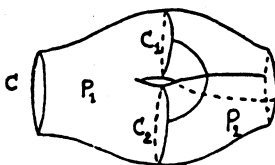


Fig. 11

Notons M_2 la surface $\overline{M - P_1 \cup P_2}$. Comme il n'existe pas deux séparatrices opposées de $\mathcal{F}|_{M_2}$ qui rencontrent des composantes différentes de ∂M_2 , on voit, en appliquant l'hypothèse de récurrence, que M_2 admet une décomposition en pantalons \mathcal{D}_2 , transverse à $\mathcal{F}|_{M_2}$, qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{M}_{g-1, b}$. En recollant M_2 à M , il apparaît que ∂M n'a qu'une composante $C=B$ et que M admet une décomposition en pantalons \mathcal{D} , transverse à \mathcal{F} , qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{M}_{g, 1}$.

Q.E.D.

THÉORÈME 2. — Soit \mathcal{F} un feuilletage non orientable sans liaison d'une surface M différente du tore, tel que toute feuille compacte intérieure soit coupée par une transversale fermée. S'il existe une demi-feuille de \mathcal{F} qui n'atteint pas ∂M (en particulier si M est sans bord ou si \mathcal{F} possède une feuille compacte intérieure), alors il existe sur M une décomposition en pantalons \mathcal{D} transverse à \mathcal{F} , dont une courbe coupe toute demi-feuille n'atteignant pas ∂M , et qui définit un modèle équivalent au second modèle canonique $\mathcal{M}'_{g, b}$.

COROLLAIRE. — Si \mathcal{F} est un feuilletage non orientable sans liaison ni feuille compacte d'une surface sans bord M , alors il existe une transversale fermée qui coupe une infinité de fois toute demi-feuille de \mathcal{F} .

Lorsque $b=0$, ce théorème exprime en d'autres termes le résultat annoncé en début d'article.

Démonstration. — D'après le corollaire 2 de la proposition, il existe des familles finies de transversales fermées disjointes telles que toute demi-feuille qui ne rencontre pas ∂M coupe une transversale de la famille. Parmi toutes ces familles, choisissons en une $\mathcal{T} = (T_1, \dots, T_h)$ possédant le plus petit nombre d'éléments possible. Ce choix entraîne que :

- $\forall i \in \{1, \dots, h\}$, T_i n'est pas isotope à une composante de ∂M .
- $\forall i, j \in \{1, \dots, h\}$, T_i n'est pas isotope à T_j .

Considérons une composante M_0 de la surface obtenue en découpant M selon les T_i , $1 \leq i \leq h$. M_0 n'est pas un anneau car M est différente du tore et h est minimal. D'après la définition de \mathcal{T} , toute demi-feuille du feuilletage \mathcal{F}^0 induit par \mathcal{F} sur M_0 rencontre ∂M_0 . Si \mathcal{F}^0 était orientable, alors le raisonnement effectué dans [L] à la fin de la démonstration du théorème correspondant nous prouve que \mathcal{F} serait orientable. \mathcal{F}^0 est donc non orientable et donc d'après le théorème I, il existe une décomposition en pantalons \mathcal{D}_0 de M_0 , transverse à \mathcal{F}^0 , telle que le modèle défini par \mathcal{F}^0 et \mathcal{D}_0 soit équivalent à \mathcal{M}_{g_0, b_0} , où g_0 est le genre de M_0 et b_0 le nombre de composantes de son bord. Soit donc φ un difféomorphisme de M_0 sur \mathcal{M}_{g_0, b_0} qui conjugue \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_{g_0, b_0} et respecte la répartition des composantes privilégiées du bord des pantalons déterminés par \mathcal{D}_0 et \mathcal{D}_{g_0, b_0} .

Désignons par C la courbe de \mathcal{D}_{g_0, b_0} qui sépare le pantalon non plongé \mathcal{P} du reste de la surface.

M_0 possède au moins une composante B qui provient par découpage d'une courbe T_u de \mathcal{T} . D'après le théorème I, nous pouvons supposer que $\varphi(B)$ est un bord primaire de \mathcal{M}_{g_0, b_0} .

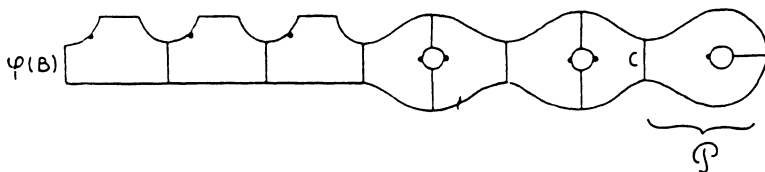


Fig. 12

Supposons qu'une autre composante de ∂M_0 provienne par découpage d'une courbe T_v de \mathcal{F} . Nous pouvons alors remplacer T_u et T_v par $\varphi^{-1}(C)$ dans \mathcal{F} , et donc $T_u = T_v$ puisque h est minimal. Il s'ensuit que $\mathcal{F} = (T_u)$. Découpons M suivant $\varphi^{-1}(C)$ et appliquons le théorème I à $N_0 = \overline{M - \varphi^{-1}(\mathcal{P})}$: N_0 admet une décomposition en pantalons, transverse à $\mathcal{F} \mid_{N_0}$, qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{M}_{g-1, b+1}$. Il apparaît donc qu'il existe alors sur M une décomposition en pantalons \mathcal{D} transverse à \mathcal{F} , qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{M}'_{g, b}$.

Nous pouvons donc supposer que B est l'unique composante de ∂M_0 qui provienne par découpage d'une courbe de \mathcal{F} . Alors, M admet une décomposition en pantalons, transverse à \mathcal{F} , qui définit un modèle équivalent à un modèle obtenu en collant à \mathcal{M}_{g_0, b_0} un modèle \mathcal{M}_{g_1, b_1} suivant un de leurs bords primaires. Comme nous pouvons remplacer l'unique courbe de \mathcal{F} par la courbe $\varphi^{-1}(C)$, qui sépare le pantalon non plongé $\varphi^{-1}(\mathcal{P})$ du reste de la surface, nous pouvons supposer que $\mathcal{M}_{g_1, b_1} = \mathcal{M}_{g-1, b+1}$ et $\mathcal{M}_{g_0, b_0} = \mathcal{M}_{1, 1}$. Donc, il existe sur M une décomposition en pantalons \mathcal{D} transverse à \mathcal{F} , qui définit un modèle équivalent à $\mathcal{M}'_{g, b}$.

Q.E.D.

REFERENCE

- [L] Gilbert LEVITT, Pantalons et feuilletages des surfaces. *Topology* 21 (1982), p. 9-33.