

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL MORALES

## **Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissances d'un idéal $m$ -primaire**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 112 (1984), p. 343-358

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1984\\_\\_112\\_\\_343\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__343_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

POLYNÔME D'HILBERT-SAMUEL  
DES CLÔTURES INTÉGRALES  
DES PUISSANCES D'UN IDÉAL  $m$ -PRIMAIRE

PAR

M. MORALES (\*)

RÉSUMÉ.— Soit  $k$  un corps algébriquement clos,  $R$  une  $k$ -algèbre de type fini, normale,  $m$  un idéal maximal de  $R$ ,  $Q$  un idéal  $m$ -primaire et  $\overline{Q^n}$  la clôture intégrale de l'idéal  $Q^n$ . Nous donnons une interprétation géométrique des coefficients du polynôme d'Hilbert-Samuel  $\lg(R/\overline{Q^n})$ .

ABSTRACT. — Let  $R$  be a normal, finitely generated  $k$ -algebra over an algebraically closed field  $k$ ,  $m$  a maximal ideal,  $Q$  a  $m$ -primary ideal and  $\overline{Q^n}$  the integral closure of the ideal  $Q^n$ . We interpret geometrically all the coefficients of the Hilbert-Samuel polynomial  $\lg(R/\overline{Q^n})$ .

Introduction

Soit  $V$  une variété projective sur un corps  $k$  algébriquement clos, de dimension  $d$ . Si  $V = \text{Proj } S$ ,  $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n$ ,  $P_V(n) = \dim_k S_n$  est la fonction de Hilbert de  $V$ . Il est bien connu (voir par exemple [6], p. 65, [14], p. 277, [16], p. 578) que

$$P_V(n) = c_0 \binom{n+d-1}{d} + c_1 \binom{n+d-2}{d-1} + \dots + c_{d-1} \binom{n}{1} + c_d,$$

où  $c_d = \chi(\mathcal{O}_V)$  et  $c_i = \chi(\mathcal{O}_{H_{d-i}})$ .

$H_j$  étant l'intersection de  $V$  avec un sous-espace linéaire général de codim  $j$  et  $\chi$  désignant la caractéristique d'Euler-Poincaré.

(\*) Texte reçu le 26 mai 1983, révisé le 14 juin 1984.

M. MORALES, Institut Fourier, B.P. n° 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.

La preuve se fait par récurrence sur  $j$ .

L'analogie local qui consiste à étudier  $\lg(R/Q^n)$  pour un anneau local  $(R, m)$  et un idéal  $m$ -primaire  $Q$  s'obtient facilement par la même méthode de récurrence.

Par contre, le calcul de  $\lg(\overline{R/Q^n})$  où  $\overline{Q^n}$  est la clôture intégrale de l'idéal  $Q^n$ , qui coïncide avec la valeur d'un polynôme pour  $n$  grand ne peut se faire en utilisant la méthode de récurrence. En effet, il n'est pas clair et c'est probablement faux, que pour un élément général  $h \in Q$ , on ait

$$\lg(\overline{R/Q^{n+1}}) - \lg(\overline{R/Q^n}) = \lg((R/h)/(Q/h)^{n+1})$$

pour  $n$  grand.

Pour contourner cette difficulté on calcule  $\lg(\overline{R/Q^n})$  en utilisant le théorème de Riemann-Roch sur l'éclatement normalisé de l'idéal  $Q$ .

Les coefficients qui apparaissent dans le polynôme  $\lg(\overline{R/Q^n})$  ne sont plus des invariants des sections hyperplanes successives, mais s'interprètent néanmoins en fonction de leurs transformées strictes dans l'éclatement normalisé de  $Q$ .

Pendant dans le cas où  $X = \text{Spec } R$  est Cohen-Macaulay à singularité isolée et l'éclatement normalisé de l'idéal  $Q$  n'a que des singularités rationnelles le long du diviseur exceptionnel, les genres géométriques de  $X$  et des germes  $H_i$  définis par  $i$  éléments généraux de  $Q$  déterminent le polynôme  $\lg(\overline{R/Q^n})$ .

Dans un travail ultérieur [18] nous considérons l'anneau  $A$  des polynômes en  $d$  variables et  $Q_1, \dots, Q_k$  des idéaux de codimension finie engendrés par des monômes. Les techniques développées dans cet article nous permettront à partir du calcul explicite de  $\lg(A/Q_1^{n_1} \dots Q_k^{n_k})$  de donner une formule élémentaire (combinatoire) pour calculer le genre géométrique d'une singularité isolée intersection complète « générique ». C'est une généralisation du résultat de [15].

0. 1. Nous rappelons ici l'énoncé du Théorème de Riemann-Roch pour les variétés singulières ([1] et [2]) et de quelques corollaires.

Soit  $Y$  un schéma projectif sur un corps  $k$  algébriquement clos,  $Y$  non nécessairement réduit. On notera  $K^* Y$  l'anneau de Grothendieck des fibrés vectoriels sur  $Y$ ,  $K_* Y$  le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur  $Y$ ,  $A^* Y$  l'anneau de Chow de  $Y$  et  $A_* Y$  le groupe de Chow.

Rappelons que  $A^* Y$  est gradué par la codimension et  $A_* Y$  par la dimension.

$A \cdot Y$  nous donne une théorie de cohomologie et le cap produit fait de  $A \cdot Y$  un  $A \cdot Y$ -module

$$A^q Y \times A_p Y \xrightarrow{\wedge} A_{p-q} Y.$$

Un morphisme

$$f: X \rightarrow Y$$

entre variétés projectives induit un morphisme image inverse  $f^*: A \cdot Y \rightarrow A \cdot X$  qui est un morphisme d'anneaux et un morphisme image directe ( $f$  est nécessairement propre) :

$$f_*: A \cdot X \rightarrow A \cdot Y$$

qui est un morphisme de groupes. Ils vérifient la « formule de projection » :

$$\forall x \in A \cdot X, y \in A \cdot Y, f_* (f^* y \cap x) = y \cap f_* x.$$

Soit  $A \cdot Y_{\mathbb{Q}} = A \cdot Y \otimes \mathbb{Q}$  et  $\varepsilon: A \cdot Y_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Q}$  l'application induite par le morphisme  $Y \rightarrow \text{Spec}(k)$ .

**THÉORÈME (Riemann-Roch) [1].** — *Il existe une transformation naturelle  $\tau: K \cdot Y \rightarrow A \cdot Y_{\mathbb{Q}}$  tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} K \cdot Y \otimes K \cdot Y & \xrightarrow{\otimes} & K \cdot Y \\ \text{ch} \otimes \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ A \cdot Y_{\mathbb{Q}} \otimes A \cdot Y_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\wedge} & A \cdot Y_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

soit commutatif.

**0. 2. COROLLAIRE (Riemann-Roch-Hirzebruch).** — *Si  $\mathcal{E}$  est un fibré vectoriel sur une variété projective  $Y$  alors*

$$\chi(Y, \mathcal{E}) = \varepsilon(\text{ch } \mathcal{E} \cap \tau(\mathcal{O}_Y)),$$

où  $\text{ch } \mathcal{E}$  est le caractère de Chern du fibré  $\mathcal{E}$ ,  $\tau(\mathcal{O}_Y)$  la classe de Todd du faisceau structural  $\mathcal{O}_Y$  et  $\chi$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré au sens usuel.

0.3. PROPOSITION (Formule d'Adjonction). — Soit  $D$  un diviseur de Cartier effectif sur  $Y$ ,  $j : D \hookrightarrow Y$  l'inclusion canonique et  $D \in A^1 Y$  la classe déterminée par  $D$ . Alors

$$j_* \tau(\mathcal{O}_D) = (1 - e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_Y)$$

dans  $A_*(Y)_{\mathbb{Q}}$ .

1.1. Soit  $X$  une variété projective définie sur un corps  $k$  algébriquement clos, de dimension  $d$ , normale en un point fermé  $m$  de  $X$ ,  $f : \tilde{X} \rightarrow X$  une application birationnelle propre telle que sa restriction  $\tilde{X} - f^{-1}(m) \rightarrow X - \{m\}$  soit un isomorphisme. Un diviseur de Cartier  $D$  effectif est dit exceptionnel si  $f(D) = m$ . Nous supposons par la suite que  $d = \dim X \geq 2$ .

1.2. Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $\tilde{X}$ , notons  $i : X - \{m\} \hookrightarrow X$  l'inclusion canonique;  $i_*(f_* \mathcal{L}|_{X - \{m\}})$  est un faisceau réflexif au voisinage de  $m$  car  $m$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $X$ . En particulier, il est cohérent.  $f_* \mathcal{L}$  et  $i_*(f_* \mathcal{L}|_{X - \{m\}})$  coïncident sur  $X - \{m\}$ . Voir par exemple [13], Th. 1 et Prop. 7.

Il en résulte que les faisceaux  $i_*(f_* \mathcal{L}|_{X - \{m\}})/f_* \mathcal{L}$  et  $R^i f_* \mathcal{L}$  sont cohérents, concentrés au point  $m$  et donc leurs fibres en  $m$  sont de dimension finie sur  $k$ .

1.3. DÉFINITION. — Nous posons

$$\chi_f(\mathcal{L}) = -\dim_k(i_*(f_* \mathcal{L}|_{X - \{m\}})/f_* \mathcal{L}) + \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^i \dim_k R^i f_* \mathcal{L}.$$

1.4. THÉORÈME. — Soit  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L)$  un  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -Module inversible (de sorte que  $L \in A^1(\tilde{X})$  est le diviseur qui lui correspond). Pour tout diviseur de Cartier exceptionnel effectif  $D$  nous avons (dans  $\mathbb{Q}$ ) :

$$\chi_f(\mathcal{L}) - \chi_f(\mathcal{L}(-D)) = \chi(D, j^* \mathcal{L}) = \varepsilon((e^L - e^{L-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})),$$

où  $j : D \hookrightarrow \tilde{X}$  est l'inclusion canonique et

$$\varepsilon : A_*(\tilde{X})_{\mathbb{Q}} \rightarrow A_*(m)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}.$$

Preuve. — On a les suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathcal{L}(-D) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow j^* \mathcal{L} \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow f_* \mathcal{L}(-D) \rightarrow f_* \mathcal{L} \rightarrow f_* j^* \mathcal{L} \rightarrow R^1 f_* \mathcal{L}(-D) \\ &\rightarrow R^1 f_* \mathcal{L} \rightarrow R^1 f_* j^* \mathcal{L} \rightarrow \dots \rightarrow R^{d-1} f_* j^* \mathcal{L} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$D$  étant exceptionnel, nous avons :

$$(R^i f_* j^* \mathcal{L})_m = H^i(D, j^* \mathcal{L}) \quad \text{si } i \geq 0.$$

D'autre part, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & f_* \mathcal{L}(-D) & \longrightarrow & f_* \mathcal{L} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & i_*(f_* \mathcal{L}(-D)|_{X-(m)}) & = & i_*(f_* \mathcal{L}|_{X-(m)})
 \end{array}$$

implique la suite exacte :

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow f_* \mathcal{L} / f_* \mathcal{L}(-D) \rightarrow i_*(f_* \mathcal{L}(-D)|_{X-(m)}) / f_* \mathcal{L}(-D) \\
 \rightarrow i_*(f_* \mathcal{L}|_{X-(m)}) / f_* \mathcal{L} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Combinant avec la suite exacte longue ci-dessus nous obtenons :

$$\chi_f(\mathcal{L}) - \chi_f(\mathcal{L}(-D)) = \chi(D, j^* \mathcal{L}).$$

Pour finir la preuve du théorème, nous appliquerons le théorème de Riemann-Roch.

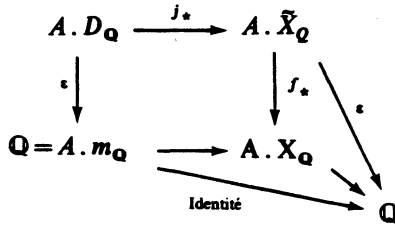
D'après 0. 2. :

$$\chi(D, j^* \mathcal{L}) = \varepsilon(\text{ch } j^* \mathcal{L} \cap \tau(\mathcal{O}_D)).$$

Considérons le diagramme commutatif suivant où tous les morphismes sont propres

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\
 p \downarrow & & \downarrow f \\
 m & \xrightarrow{c} & X \\
 & \searrow & \searrow \\
 & & m
 \end{array}$$

qui donne un diagramme commutatif



Il en résulte l'identité dans  $\mathbf{Q}$  :

$$\begin{aligned}
 \chi(D, j^* \mathcal{L}) &= \epsilon(\text{ch } j^* \mathcal{L} \cap \tau(\mathcal{O}_D)) = \epsilon(j_* (\text{ch } j^* \mathcal{L} \cap \tau(\mathcal{O}_D))) \\
 &= \epsilon(\text{ch } \mathcal{L} \cap j_* \tau(\mathcal{O}_D)) = \epsilon(\text{ch } \mathcal{L} \cap ((1 - e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))) \\
 &= \epsilon(e^L \cap ((1 - e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))) = \epsilon((e^L - e^{L-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})).
 \end{aligned}$$

Où nous avons utilisé la formule de projection, la formule d'adjonction et le fait que  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(L)$  étant inversible

$$\text{ch } j^* \mathcal{L} = e^{\epsilon_1(\sigma^* \mathcal{L})} = e^{\sigma^* \epsilon_1(\mathcal{L})} = j^* e^L = j^* \text{ch } \mathcal{L}$$

dans  $A^* D$ . Ce qui finit la preuve du théorème.

1. 5. LEMME.— Dans l'anneau  $A^* \tilde{X}_{\mathbf{Q}}$  nous avons l'égalité

$$\begin{aligned}
 1 - e^{-nD} = & - \left[ (-1)^d D^d \binom{n+d-1}{d} \right. \\
 & \left. + (1 - e^D)^{d-1} \binom{n+d-2}{d-1} + \dots + (1 - e^D) \binom{n}{1} \right]
 \end{aligned}$$

pour tout  $n$  entier naturel.

*Preuve.* — Dans  $A^* \tilde{X}_{\mathbf{Q}}$   $1 - e^{-nD}$  est un polynôme en  $n$  de degré  $d$ ,  $\binom{n+d-1}{d}, \dots, \binom{n}{1}$ , 1 est une base des polynômes en  $n$  de degré  $\leq d$  de sorte que

$$\begin{aligned}
 1 - e^{-nD} = P_0(n) = & a_d \binom{n+d-1}{d} + \dots \\
 & + a_{d-1} \binom{n+d-i-1}{d-i} + \dots + a_1 \binom{n}{1}
 \end{aligned}$$

et que

$$a_1 = P_0(n) - P_0(n-1) \Big|_{n=0} = P(0) - P(-1) = -(1 - e^D).$$

Posant  $P_i(n) = P_{i-1}(n) - P_{i-1}(n-1)$  on a  $a_i = P_i(0)$  et ceci permettra de trouver le résultat annoncé.

2.0. Soit  $X$  une variété projective, normale et Cohen-Macaulay au voisinage du point fermé  $m$ , définie sur un corps  $k$  algébriquement clos de caractéristique 0. On supposera que  $d = \dim X \geq 2$ . Soit  $\mathcal{Q}$  un faisceau d'idéaux tel que  $\mathcal{Q}_m = Q$  soit un idéal  $m$ -primaire et  $\mathcal{Q}_x = \mathcal{O}_{X,x}$  si  $x \neq m$ .

$f: \tilde{X} \rightarrow X$  une application birationnelle propre telle que la restriction  $f: \tilde{X}f^{-1}(m) \rightarrow X - \{m\}$  soit un isomorphisme et  $\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}}$  soit un  $\tilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}}$ -module inversible. On notera  $D$  le diviseur de Cartier effectif sur  $\tilde{X}$  tel que  $\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}} = \tilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}}(-D)$ .

$\mathcal{Q}\tilde{\mathcal{O}}_{\tilde{X}}$  étant inversible,  $f$  se factorise par l'éclatement  $g: X' \rightarrow X$  de l'idéal  $\mathcal{Q}$ . Soit  $\eta_0, \dots, \eta_s$  un système de générateurs de l'idéal  $Q$  et  $U$  un voisinage de  $m$  tel que  $\eta_i \in \Gamma(U, \mathcal{Q}), \forall i = 1, \dots, s$ . Soit  $\lambda: U - \{m\} \rightarrow \mathbb{P}_k^s$  l'application qui à  $x \in U - \{m\}$  fait correspondre le point de  $\mathbb{P}_k^s$  de coordonnées homogènes  $(\eta_0(x), \dots, \eta_s(x))$ . On sait que  $g|_{g^{-1}(U)}$  s'identifie à l'adhérence du graphe de  $\lambda$ . Nous noterons

$$\Lambda: f^{-1}(U) \rightarrow g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{P}_k^s$$

la projection qui en résulte.

Alors  $\Lambda[f^{-1}(m)]$  est égale à  $\text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} Q^n/Q^{n+1}$  et sa dimension est  $d-1$ . De plus,  $f^{-1}(U)$  est irréductible puisque  $X$  est normale et irréductible au voisinage de  $m$ .

On peut donc appliquer le théorème de Bertini [4] (Cor. 6.11, p. 89). Pour presque tout hyperplan projectif  $H$  (de codimension 1) dans  $\mathbb{P}_k^s$  le  $k$ -schéma  $\Lambda^{-1}(H)$  est irréductible si  $d \geq 3$  et il est réduit si  $d = 2$ .

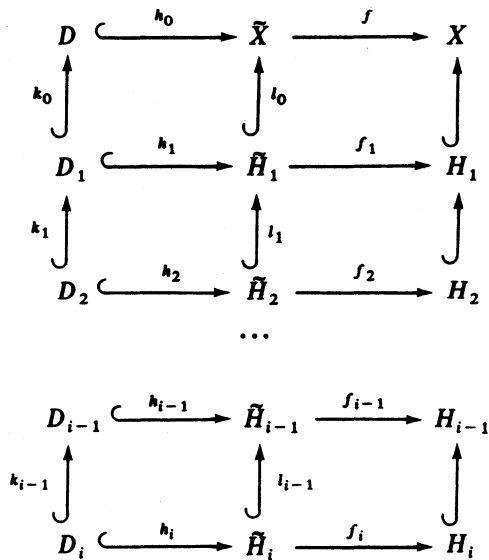
Soit  $\lambda_0 X_0 + \dots + \lambda_s X_s$  l'équation d'un tel hyperplan,  $\xi_1 = \lambda_0 \eta_0 + \dots + \lambda_s \eta_s$  et  $H_1$  un sous-espace de  $X$  défini sur  $U$  par l'idéal principal  $(\xi_1)$ . On peut supposer que  $H_1$  est normal dans  $U$  (voir [3], la condition à satisfaire par les  $(\lambda_0, \dots, \lambda_s)$  pour qu'il en soit ainsi étant aussi générique).

Si  $d \geq 3$ ,  $\Lambda^{-1}(H)$  étant irréductible coïncide avec la transformée stricte  $\tilde{H}_1$  de  $H_1$  par  $f$  sur  $f^{-1}(U)$ . Si  $d = 2$ ,  $\Lambda^{-1}(H)$  est une courbe réduite sur  $\tilde{X}$  qui est une surface, on se convainc que  $\Lambda^{-1}(H)$  coïncide aussi avec  $\tilde{H}_1$ .



en réappliquant Bertini à la normalisation de  $\bar{X}$ . Soit  $f_1 : \tilde{H}_1 \rightarrow H_1$ , la restriction de  $f$  à  $\tilde{H}_1$ .

Finalement  $\text{div } \xi_1 \circ f|_{f^{-1}(U)} = D + \tilde{H}_1|_{f^{-1}(U)}$ , la restriction de  $\tilde{H}_1$  à  $f^{-1}(U)$  est donc un diviseur de Cartier sur  $f^{-1}(U)$  linéairement équivalent à  $-D$ . Le faisceau  $\mathcal{O}_{H_1} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{H}_1} = \mathcal{O}_{\tilde{H}_1} = \mathcal{O}_{\bar{X}} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{H}_1}$  est donc un  $\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}$  module inversible, nous le noterons  $\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}(-D_1)$ . Le morphisme  $f_1 : \tilde{H}_1 \rightarrow H_1$  vérifie les mêmes propriétés que  $f$  et on construit ainsi par récurrence une suite  $\xi_1, \dots, \xi_{d-1}$  de  $d-1$  combinaisons linéaires génériques de  $\eta_0, \dots, \eta_s$ ;  $H_i, i=1, \dots, d-1$  des sous-espaces de  $X$  normaux dans  $U$  si  $i \leq d-2$ , réduit si  $i=d-1$ ; des morphismes  $f_i : \tilde{H}_i \rightarrow H_i$  et des diviseurs de Cartier  $D_i$  sur  $\tilde{H}_i$  tels que le diagramme suivant soit commuta-



tif avec les propriétés suivantes :

- (1)  $D_i$  est un diviseur de Cartier dans  $D_{i-1}$  et en fait

$$D_i = (h_0|_{f^{-1}(U)} \circ k_0 \circ \dots \circ k_{i-2})^*(\tilde{G}_i),$$

où  $\tilde{G}_i$  est défini sur  $f^{-1}(U)$  par  $\xi_i \circ f|_{f^{-1}(U)}$ .

- (2)  $D_1 = (h_0|_{f^{-1}(U)})^*(\tilde{H}_1|_{f^{-1}(U)})$ ,

où  $h_0^* : A^* \tilde{X} \rightarrow A^* D$ .

$$(3) \quad l_{i-1}^* D_{i-1} = D_i,$$

où  $l_{i-1}^* : A^* \tilde{H}_{i-1} \rightarrow A^* \tilde{H}_i$ .

$$(3') \quad \begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i) &= l_{i-1}^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{i-1}}(D_{i-1})), \\ \mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i) &= (l_0 \circ \dots \circ l_{i-1})^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D). \end{aligned}$$

2. 0. 1. DÉFINITION. — Soit  $C$  une courbe réduite éventuellement singulière au point fermé  $m$  et  $f : \tilde{C} \rightarrow C$  un morphisme propre bitationnel tel que  $f : \tilde{C} - f^{-1}(m) \rightarrow C - \{m\}$  soit un isomorphisme, alors nous posons :

$$\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = \text{lg}(f_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} / \mathcal{O}_C) = \delta.$$

2. 1. THÉORÈME. — Les hypothèses sont celles de 2. 0. Soit  $\overline{Q^n}$  la clôture intégrale de  $Q^n$ . Si  $\tilde{X}$  est normale et si  $R^i f_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = 0$  pour  $n$  assez grand et  $i > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \text{lg}(\mathcal{O}_{X, m} / \overline{Q^n}) &= (-1)^{d+1} D^d \binom{n+d-1}{d} \\ &\quad - \chi_{f_{d-1}}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{d-1}}) \binom{n+d-2}{d-1} \dots - \chi_{f_1}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}) \binom{n}{1} - \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \end{aligned}$$

pour  $n$  assez grand.

Preuve. — Une conséquence directe du théorème 1. 4 appliqué à  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}$  et  $D$  remplacé par  $nD$  est

$$\begin{aligned} -\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n &= \text{lg}(\mathcal{O}_{X, m} / f_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{lg} R^i f_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n \\ &= \varepsilon[(1 - e^{-nD}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})] - \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \end{aligned}$$

mais  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$  étant inversible et  $\tilde{X}$  normal  $f$  se factorise par l'éclatement normalisé de l'idéal  $\mathcal{Q}$  dans  $X$   $\eta : \tilde{X}' \rightarrow X$ , ceci implique qu'il existe  $g$  tel que  $\eta \circ g = f$  et alors

$$\begin{aligned} f_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n &= f_* (g^* (\mathcal{O}_{\tilde{X}'}))^n = \eta_* ((\mathcal{O}_{\tilde{X}'}))^n \otimes g_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \\ &= \eta_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}'}))^n = \overline{Q^n} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

(voir [17], t. II, lemme, p. 354, traduit dans le langage des faisceaux dans [7], lemme 4. 2. 5).

En utilisant les hypothèses du théorème, nous avons pour  $n$  assez grand

$$\begin{aligned} \lg(\mathcal{O}_{X,m}/\overline{Q^n}) &= \varepsilon[1 - e^{-nd} \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})] - \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \\ &= -\varepsilon \left[ (-1)^d D^d \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \binom{n+d-1}{d} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (1-e^D)^i \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \binom{n+i-1}{i} + \dots \right] - \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \end{aligned}$$

et les lemmes 1.5, 2.2 et 2.3 achèveront la preuve du théorème.

2.2. LEMME. — *On a pour tout  $0 \leq i \leq d-2$  :*

$$\chi_{f_{i+1}}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{i+1}}) = -\chi(D_i, h_i^* \mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i)).$$

2.3. LEMME. — *Dans les conditions c--dessus*

$$-\chi(D_i, h_i^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i))) = \varepsilon[(1-e^D)^{i+1} \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})].$$

Au cours de cette démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant.

2.4. LEMME. — *Pour tout  $0 \leq i \leq d-1$ , nous avons*

$$(4) \quad (h_0 \circ k_0 \circ \dots \circ k_{i-1})_* \tau(\mathcal{O}_{D_i}) = (1-e^D)^i \cap [(1-e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})].$$

*Preuve.* — La preuve se fait par récurrence sur  $i$ .

Pour  $i=0$  cette formule s'écrit :

$$(h_0)_* \tau(\mathcal{O}_D) = (1-e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

et c'est la formule d'adjonction.

Supposons (4) vérifiée pour  $i-1$  et prouvons là pour  $i$  :

$$\begin{aligned} (h_0 \circ k_0 \circ \dots \circ k_{i-1})_* \tau(\mathcal{O}_{D_i}) &= (h_0 \circ k_0 \circ \dots \circ k_{i-2})_* (k_{i-1})_* \tau(\mathcal{O}_{D_i}) \\ &= (h_0 \circ k_0 \circ \dots \circ k_{i-2})_* [(1-e^{-D_i}) \cap \tau(\mathcal{O}_{D_{i-1}})] \end{aligned}$$

(par la formule d'adjonction)

$$= (1-e^{-\tilde{G}_i}) \cap [(h_0 \circ k_0 \circ \dots \circ k_{i-2})_* \tau(\mathcal{O}_{D_{i-1}})]$$

(on a utilisé la formule de projection, car

$$D_i = (h_0|_{f^{-1}(U)} \circ k_0 \circ \dots \circ k_{i-2})^*(\tilde{G}_i)$$

d'après les propriétés (1) et (2)

$$= (1-e^D) \cap [(1-e^D)^{i-1} \cap ((1-e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))]$$

(par hypothèse de récurrence) :

$$= (1 - e^D)^i \cap [(1 - e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]$$

ce qui finit la preuve du lemme 2.4.

*Preuve du lemme 2.2.* — Si  $i < d - 2$ ,  $H_{i+1}$  est une variété normale  $f_i : \tilde{H}_i \rightarrow H_i$  est birationnelle propre et en fait pour montrer le lemme il suffira de montrer que

$$\chi_{f_1}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}) = -\chi(D, h_0^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)).$$

Pour  $i = d - 2$ ,  $H_{d-1}$  est une courbe réduite et la preuve se fait de façon analogue.

Considérons donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{H}_1} \rightarrow 0$$

$f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)$  est un faisceau réflexif et en fait  $f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1) = \mathcal{O}_X(-H_1)$  ([8], 1.2.2). Aussi  $f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_X$ ,  $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{H}_1} = R^i f_{1*} \mathcal{O}_{\tilde{H}_1}$  pour  $i \geq 0$  et  $f_{1*} \mathcal{O}_{\tilde{H}_1} = \mathcal{O}_{H_1}$  car  $H_1$  est normale.

Par conséquent, le morphisme  $\partial$  de la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1) \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow f_* \mathcal{O}_{\tilde{H}_1} \xrightarrow{\partial} R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1) \rightarrow \\ \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_{\tilde{H}_1} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

est nul.

On en déduit que

$$\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) - \chi_f \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1) = \chi_{f_1}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}).$$

Par ailleurs, le théorème 1.4 appliqué à  $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$  nous donne

$$\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) - \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)) = -\chi(D, h_0^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)),$$

où  $h_0 : D \hookrightarrow \tilde{X}$  est l'inclusion canonique. En comparant les deux expressions, vu que  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)$  au voisinage de  $D$ , nous aurons

$$\chi_{f_1}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}) = -\chi(D, h_0^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D))$$

car la définition de  $\chi_f$  est purement locale. Ce qui finit la preuve du lemme 2. 2.

Preuve du lemme 2. 3 — Nous aurons par le théorème de Riemann-Roch que :

$$\begin{aligned}\chi(D_i, h_i^*(\mathcal{O}_{H_i}^{\sim}(D_i))) &= \varepsilon[\text{ch}(h_i^*(\mathcal{O}_{H_i}^{\sim}(D_i))) \cap \tau(\mathcal{O}_{D_i})] \\ &= \varepsilon[\text{ch}(l_0 \circ \dots \circ l_{i-1} \circ h_i)^* \mathcal{O}_{\bar{X}}^{\sim}(D) \cap \tau(\mathcal{O}_{D_i})]\end{aligned}$$

par l'égalité (3') :

$$\begin{aligned}&= \varepsilon[\text{ch} \mathcal{O}_{\bar{X}}^{\sim}(D) \cap (l_0 \circ \dots \circ l_{i-1} \circ h_i)_* \tau(\mathcal{O}_{D_i})] \\ &= \varepsilon[\text{ch} \mathcal{O}_{\bar{X}}^{\sim}(D) \cap (h_0 \circ k_0 \circ \dots \circ k_{i-1})_* \tau(\mathcal{O}_{D_i})] \\ &= \varepsilon[e^D \cap ((1-e^D)^i \cap ((1-e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\bar{X}}^{\sim})))]\end{aligned}$$

(par le lemme 2. 4) :

$$= -\varepsilon[(1-e^D)^{i+1} \cap \tau(\mathcal{O}_{\bar{X}}^{\sim})]$$

ce qui finit la preuve du lemme 2. 3.

2. 5. PROPOSITION. — *Les hypothèses sont celles de 2. 0. Supposons en outre que  $f=\eta$  soit l'éclatement normalisé de l'idéal  $\mathcal{Q}$  dans  $X$ . Alors les hypothèses du théorème 2. 2 sont remplies i. e.  $R^i \eta_* (\mathcal{Q}_{\bar{X}}^{\sim})^n = 0$  pour  $n$  assez grand et pour  $i > 0$ .*

Preuve. —  $\eta$  est la composée de l'éclatement de l'idéal  $\mathcal{Q}$  dans  $X$ ,  $h : X' \rightarrow X$  et de la normalisation  $n : \bar{X}' \rightarrow X'$ .

Le faisceau  $\mathcal{Q}_{X'}$  est très ample pour  $h$  et par conséquent  $R^i h_* ((\mathcal{Q}_{X'})^n \otimes \mathcal{F}) = 0$ .

pour  $n$  assez grand, tout  $i > 0$  et tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $X'$ .

$n$  est un morphisme fini, donc :

$$R_q n_* \mathcal{F} = 0$$

pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $\bar{X}'$  et tout  $q > 0$ .

La suite spectrale de la composée de deux morphismes propres

$$E_2^{p,q} = R^p h_* (R^q n_* (\mathcal{Q}_{\bar{X}}^{\sim})^n) \Rightarrow R^{p+q} \eta_* (\mathcal{Q}_{\bar{X}}^{\sim})^n$$

nous donne  $E_2^{p,q} = 0$  si  $q > 0$  et  $n$  grand.

D'autre part :

$$\begin{aligned} E_2^{p,0} &= R^p \eta_*(\mathcal{L}\mathcal{O}_{\bar{X}})^n \\ &= R^p h_*(n_*(n^*(\mathcal{L}\mathcal{O}_{\bar{X}})^n)) \\ &= R^p h_*(n_* \mathcal{O}_{\bar{X}} \otimes (\mathcal{L}\mathcal{O}_{\bar{X}})^n) = 0 \end{aligned}$$

pour  $p > 0$  et  $n$  assez grand.

Pour  $p = 0$ , nous avons

$$(\eta_*(\mathcal{L}\mathcal{O}_{\bar{X}})^n)_m = \overline{Q^n}$$

d'après [17], t. II, p. 354, ou [7], lemme 4.2.5. Ce qui finit la preuve de la proposition.

2.6. DÉFINITION. — (1) Si  $Y$  est une variété à singularité isolée et Cohen-Macaulay de dimension  $d \geq 2$  et  $f: \tilde{Y} \rightarrow Y$  une résolution des singularités, nous noterons  $p_g(Y)$  le genre géométrique de la singularité

$$p_g(Y) = (-1)^{d-1} \lg R^{d-1} f_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$$

rappelons que cet invariant dépend uniquement de la singularité et non de  $f$  et que  $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} = 0$  pour  $1 \leq i \leq d-2$  car  $Y$  est Cohen-Macaulay de sorte que  $p_g(Y) = \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{Y}})$ .

(2) Si  $Y$  est une courbe réduite en un point fermé  $m$ , nous poserons :

$$\delta(Y) = \lg(\overline{\mathcal{O}_{Y,m}} / \mathcal{O}_{Y,m}),$$

où  $\overline{\mathcal{O}_{Y,m}}$  est le normalisé de  $\mathcal{O}_{Y,m}$ .

(3) Si  $Y$  est un gros point (i. e. dimension de  $Y$  égale à zéro) donné par un idéal  $Q$   $m$ -primaire dans un anneau  $R$ , on posera

$$\text{mult}(\mathcal{Q}) = \chi^0(Y) = \chi^0(\mathcal{Q})$$

pour noter la multiplicité de l'idéal  $Q$ .

2.7. PROPOSITION. — Avec les notations ci-dessus, supposons que  $\text{car}(k) = 0$ , que  $X$  soit Cohen-Macaulay à singularité isolée de dimension  $d$  et que l'éclatement normalisé  $\tilde{X}'$  de l'idéal  $Q$  dans  $X$  n'ait que des singularités

rationnelles le long du diviseur exceptionnel. Alors pour  $n$  assez grand

$$\begin{aligned} \lg(\mathcal{O}_{X,m}/\overline{Q^n}) = \text{mult}(Q) \binom{n+d-1}{d} - \delta(H_{d-1}) \binom{n+d-2}{d-1} \\ - \dots - p_g(H_1) \binom{n}{1} - p_g(X), \end{aligned}$$

où  $H_i$  est la sous-variété de  $X$  définie au voisinage de  $m$  par l'idéal  $(\xi_1, \dots, \xi_i)$ , la suite  $\xi_1, \dots, \xi_{d-1} \in Q$  étant une suite générique dans  $Q$  au sens de 2.0.

Les hypothèses ci-dessus sont vérifiées par exemple si  $X$  a une singularité torique isolée à l'origine et  $Q$  est un idéal de codimension fini invariant par l'action du tore.

*Preuve.* — Soit  $\eta: \tilde{X}' \rightarrow X$  l'éclatement normalisé de  $\mathcal{Q}$  dans  $X$  et  $g: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$  une résolution des singularités de  $\tilde{X}'$ . Choisissons  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{d-1}$  une suite régulière dans  $Q$ ,  $\xi_k$  étant pour tout  $1 \leq k \leq d-1$  une combinaison linéaire générique d'un ensemble fixé de générateurs de  $Q$  en sorte qu'ils vérifient les hypothèses de 2.0 et tel que la transformée stricte  $\tilde{H}_i$  par le morphisme  $f = \eta \circ g$  de la sous-variété  $H_i$  définie par l'idéal  $(\xi_1, \dots, \xi_i)$  soit non singulière au voisinage du diviseur exceptionnel.

Pour montrer la proposition, il suffira donc de vérifier les hypothèses du théorème 2.1, i. e. que

$$R^i f_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

En effet, soit la suite spectrale composée de deux morphismes propres

$$R^p \eta_* (R^q g_* \mathcal{F}) \Rightarrow R^{p+q} f_* (\mathcal{F})$$

pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $\tilde{X}$ .

Prenons  $\mathcal{F} = (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = g^* (\mathcal{O}_{\tilde{X}'}^n)$  pour  $n$  assez grand, alors :

$$\begin{aligned} R^q g_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n &= R^q g_* g^* (\mathcal{O}_{\tilde{X}'}^n) = (\mathcal{O}_{\tilde{X}'}^n) \otimes R^q g_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \\ &= \begin{cases} (\mathcal{O}_{\tilde{X}'}^n) & \text{si } q=0, \\ 0 & \text{si } q \neq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donc la suite spectrale dégénère et l'on a :

$$R^p \eta_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = R^p f_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n,$$

mais nous avons déjà vu au cours de la démonstration de la proposition 2.5 que :

$$R^p \eta_* (\mathcal{O}_{\bar{X}})^n = \begin{cases} \bar{Q}^n & \text{si } p=0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0, \end{cases}$$

pour  $n$  assez grand.

Ce qui finit la preuve de la proposition.

2.8. Remarquons qu'on retrouve le résultat [9] obtenu pour les surfaces en appliquant Riemann-Roch à la résolution des singularités. L'énoncé correspondant en dimension 1 est le suivant.

PROPOSITION [10]. — Soit  $X$  une courbe quasi projective réduite singulière éventuellement réductible au point fermé  $m$ .  $R = \mathcal{O}_{X,m}$  l'anneau local en  $m$  et  $Q$  un idéal  $m$ -primaire. Alors pour  $n$  assez grand

$$\lg(R/\bar{Q}^n) = n(\text{mult } Q) - \delta,$$

où  $\delta = \lg(\bar{R}/R)$ ,  $\bar{R}$  étant la fermeture intégrale de  $R$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAUM-FULTON-MACPHERSON. — Riemann-Roch for singular varieties, *Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 45, 1975, p. 101-146.
- [2] FULTON (W.). — Rational equivalence for singular varieties, *Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 45, 1975, p. 147-167.
- [3] FLENNER (H.). — Die Sätze von Bertini für lokale Ringe, *Math. Ann.*, vol. 229, 1977, p. 97-111.
- [4] JOUANOLOU (J. P.). — Théorèmes de Bertini et applications, *Séries de Math. pures et appliquées*, Strasbourg, 1979.
- [5] KHOVANSKI (A. G.). — Newton polyedra and the germs of complete intersections, *Funct. An. and its appl.*, vol. 12, n° 1, 1978, p. 51-61.
- [6] KRULL (W.). — *Idealtheorie*. 2. Auflage. *Ergebnisse der Mathematik*, vol. 46, 1965.
- [7] LEJEUNE-TEISSIER. — Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, *Séminaire au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique*, 1974.
- [8] MORALES (M.). — Une propriété asymptotique des puissances symboliques, *Ann. Inst. Fourier*, vol. XXXII, n° 2, 1982, p. 219-228.
- [9] MORALES (M.). — Calcul de quelques invariants de surface normale. Monographie n° 31 de l'Enseignement Mathématique, *Nœuds, Tresses et singularités, Les Plans sur Bex*, mars 1982, Genève, 1983.
- [10] MORALES (M.). — Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissances de l'idéal maximal pour une courbe plane, *C.R. Acad. Sc.*, t. 289, série A, 1979, p. 401-404.



- [11] REES (D.). — Hilbert functions and pseudo rational local rings of dimension two, *J. London Math. Soc.*, vol. 24, (2), 1981, p. 467-479.
- [12] REES (D.). — *Research notes*, janvier 1979, non publié.
- [13] SERRE (J. P.). — Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol. 16-1, 1966, p. 363-374.
- [14] SERRE (J. P.). — *Fac. Annals of Maths*, vol. 61, n° 2, 1955.
- [15] TEISSIER (B.) et MERLE (M.). — Dans *Séminaire Demazure-Pinkham-Teissier*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1976-1977.
- [16] ZARISKI (O.). — Complete linear systems on normal varieties, *Ann. of Math.*, vol. 55, n° 3, 1952.
- [17] ZARISKI (O.) et SAMUEL (P.). — *Alg. Commutative*, vol. I et II, Van Nostrand Company Inc.
- [18] MORALES (M.). — Polyèdre de Newton et genre géométrique d'une singularité intersection complète, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 112, 1984, p. 325-341.