BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL MORALES

Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissances d'un idéal m-primaire

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 343-358

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__343_0>

Bull. Soc. math. France,
112, 1984, p. 343-358

POLYNÔME D'HILBERT-SAMUEL DES CLÔTURES INTÉGRALES DES PUISSANCES D'UN IDÉAL m-PRIMAIRE

PAR

M. MORALES (*)

RÉSUMÉ.— Soit k un corps algébriquement clos, R une k-algèbre de type fini, normale, m un idéal maximal de R, Q un idéal m-primaire et $\overline{Q^n}$ la clôture intégrale de l'idéal Q^n. Nous donnons une interprétation géométrique des coefficients du polynôme d'Hilbert-Samuel $\lg(R/\overline{Q^n})$.

ABSTRACT. — Let R be a normal, finitely generaled k-algebra over an algebraically closed field k, m a maximal ideal, Q a m-primary ideal and $\overline{Q^n}$ the integral closure of the ideal Q^n. We interpret geometrically all the coefficients of the Hilbert-Samuel polynomial $\lg(R/\overline{Q^n})$.

Introduction

Soit V une variété projective sur un corps k algébriquement clos, de dimension d. Si $V=\operatorname{Proj} S$, $S=\oplus_{n=0}^{\infty} S_n$, $P_V(n)=\dim_k S_n$ est la fonction de Hilbert de V. Il est bien connu (*voir* par exemple [6], p. 65, [14], p. 277, [16], p. 578) que

$$P_V(n)=c_0\binom{n+d-1}{d}+c_1\binom{n+d-2}{d-1}+\ldots+c_{d-1}\binom{n}{1}+c_d,$$

où $c_d=\chi(\mathcal{O}_V)$ et $c_i=\chi(\mathcal{O}_{H_{d-i}})$.

H_j étant l'intersection de V avec un sous-espace linéaire général de codim j et χ désignant la caractéristique d'Euler-Poincaré.

(*) Texte reçu le 26 mai 1983, révisé le 14 juin 1984.

M. MORALES, Institut Fourier, B.P. n° 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9434/1984/03 343 16/$ 3.60

La preuve se fait par récurrence sur j.

L'analogue local qui consiste à étudier $\lg(R/Q^n)$ pour un anneau local (R, m) et un idéal m-primaire Q s'obtient facilement par la même méthode de récurrence.

Par contre, le calcul de $\lg(R/\overline{Q^n})$ où $\overline{Q^n}$ est la clôture intégrale de l'idéal Q^n, qui coïncide avec la valeur d'un polynôme pour n grand ne peut se faire en utilisant la méthode de récurrence. En effet, il n'est pas clair et c'est probablement faux, que pour un élément général $h \in Q$, on ait

$$\lg(R/\overline{Q^{n+1}}) - \lg(R/\overline{Q^n}) = \lg((R/h)/\overline{(Q/h)^{n+1}})$$

pour n grand.

Pour contourner cette difficulté on calcule $\lg(R/\overline{Q^n})$ en utilisant le théorème de Riemann-Roch sur l'éclatement normalisé de l'idéal Q.

Les coefficients qui apparaissent dans le polynome $\lg(R/\overline{Q^n})$ ne sont plus des invariants des sections hyperplanes successives, mais s'interprètent néanmoins en fonction de leurs transformées strictes dans l'éclatement normalisé de Q.

Cependant dans le cas où $X = \operatorname{Spec} R$ est Cohen-Macaulay à singularité isolée et l'éclatement normalisé de l'idéal Q n'a que des singularités rationnelles le long du diviseur exceptionnel, les genres géométriques de X et des germes $\underline{H_i}$ définis par i éléments généraux de Q déterminent le polynôme $\lg(R/\overline{Q^n})$.

Dans un travail ultérieur [18] nous considérons l'anneau A des polynômes en d variables et $Q_1, \ldots, Q_k$ des idéaux de codimension finie engendrés par des monômes. Les techniques développées dans cet article nous permettront à partir du calcul explicite de $\lg(A/\overline{Q_1^{n_1} \ldots Q_k^{n_k}})$ de donner une formule élémentaire (combinatoire) pour calculer le genre géométrique d'une singularité isolée intersection complète « générique ». C'est une généralisation du résultat de [15].

0.1. Nous rappelons ici l'énoncé du Théorème de Riemann-Roch pour les variétés singulières ([1] et [2]) et de quelques corollaires.

Soit Y un schéma projectif sur un corps k algébriquement clos, Y non nécessairement réduit. On notera $K^{\bullet} Y$ l'anneau de Grothendieck des fibrés vectoriels sur Y, $K_{\bullet} Y$ le groupe de Grothendieck des faisceaux cohérents sur Y, $A^{\bullet} Y$ l'anneau de Chow de Y et $A_{\bullet} Y$ le groupe de Chow.

Rappelons que $A^{\bullet} Y$ est gradué par la codimension et $A_{\bullet} Y$ par la dimension.

$A^{\cdot} Y$ nous donne une théorie de cohomologie et le cap produit fait de $A_{\cdot} Y$ un $A^{\cdot} Y$-module

$$A^q Y \times A_p Y \xrightarrow{\cap} A_{p-q} Y.$$

Un morphisme

$$f: \quad X \to Y$$

entre variétés projectives induit un morphisme image inverse $f^* : A^{\cdot} Y \to A^{\cdot} X$ qui est un morphisme d'anneaux et un morphisme image directe (f est nécessairement propre) :

$$f_* : \quad A_{\cdot} X \to A_{\cdot} Y$$

qui est un morphisme de groupes. Ils vérifient la « formule de projection » :

$$\forall x \in A_{\cdot} X, \quad y \in A^{\cdot} Y, \qquad f_* (f^* y \cap x) = y \cap f_* x.$$

Soit $A_{\cdot} Y_{\mathbb{Q}} = A_{\cdot} Y \otimes \mathbb{Q}$ et $\varepsilon : A_{\cdot} Y_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ l'application induite par le morphisme $Y \to \operatorname{Spec}(k)$.

THÉORÈME (Riemann-Roch) [1]. — *Il existe une transformation naturelle* $\tau : K_{\cdot} Y \to A_{\cdot} Y_{\mathbb{Q}}$ *tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
K^{\cdot} Y \otimes K_{\cdot} Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\mathrm{ch} \otimes \tau"'] & K_{\cdot} Y \arrow[d, "\tau"] \\
A^{\cdot} Y_{\mathbb{Q}} \otimes A_{\cdot} Y_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\cap"] & A_{\cdot} Y_{\mathbb{Q}}
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

0.2. COROLLAIRE (Riemann-Roch-Hirzebruch). — *Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel sur une variété projective Y alors*

$$\chi(Y, \mathscr{E}) = \varepsilon(\mathrm{ch}\, \mathscr{E} \cap \tau(\mathcal{O}_Y)),$$

où $\mathrm{ch}\,\mathscr{E}$ *est le caractère de Chern du fibré* $\mathscr{E}$, $\tau(\mathcal{O}_Y)$ *la classe de Todd du faisceau structural* $\mathcal{O}_Y$ *et* χ *est la caractéristique d'Euler-Poincaré au sens usuel.*

0.3. PROPOSITION (Formule d'Adjonction). — *Soit D un diviseur de Cartier effectif sur Y, $j : D \subsetneq Y$ l'inclusion canonique et $D \in A^1 Y$ la classe déterminée par D. Alors*

$$j_* \tau(\mathcal{O}_D)=(1-e^{-D})\cap\tau(\mathcal{O}_Y)$$

dans $A_.(Y)_{\mathbf{Q}}$.

1.1. Soit X une variété projective définie sur un corps k algébriquement clos, de dimension d, normale en un point fermé m de X, $f: \tilde{X} \to X$ une application birationnelle propre telle que sa restriction $\tilde{X}-f^{-1}(m) \to X-\{m\}$ soit un isomorphisme. Un diviseur de Cartier D effectif est dit exceptionnel si $f(D)=m$. Nous supposerons par la suite que $d=\dim X \geqslant 2$.

1.2. Soit $\mathscr{L}$ un faisceau inversible sur $\tilde{X}$, notons $i : X-\{m\} \subsetneq X$ l'inclusion canonique; $i_*(f_* \mathscr{L}|_{X-\{m\}})$ est un faisceau réflexif au voisinage de m car m est de codimension $\geqslant 2$ dans X. En particulier, il est cohérent. $f_* \mathscr{L}$ et $i_*(f_* \mathscr{L}|_{X-\{m\}})$ coïncident sur $X-\{m\}$. *Voir* par exemple [13], Th. 1 et Prop. 7.

Il en résulte que les faisceaux $i_*(f_* \mathscr{L}|_{X-\{m\}})/f_* \mathscr{L}$ et $R^i f_* \mathscr{L}$ sont cohérents, concentrés au point m et donc leurs fibres en m sont de dimension finie sur k.

1.3. DÉFINITION. — *Nous posons*

$$\chi_f(\mathscr{L})=-\dim_k(i_*(f_* \mathscr{L}|_{X-\{m\}})/f_* \mathscr{L})+\textstyle\sum_{i=1}^{d-1}(-1)^i \dim_k R^i f_* \mathscr{L}.$$

1.4. THÉORÈME. — *Soit $\mathscr{L}=\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L)$ un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-Module inversible (de sorte que $L \in A^1(\tilde{X})$ est le diviseur qui lui correspond). Pour tout diviseur de Cartier exceptionnel effectif D nous avons (dans $\mathbf{Q}$) :*

$$\chi_f(\mathscr{L})-\chi_f(\mathscr{L}(-D))=\chi(D, j^* \mathscr{L})=\varepsilon((e^L-e^{L-D})\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})),$$

où $j : D \subsetneq \tilde{X}$ est l'inclusion canonique et

$$\varepsilon: \quad A_.\tilde{X}_{\mathbf{Q}} \to A_. m_{\mathbf{Q}} \simeq \mathbf{Q} m \simeq \mathbf{Q}.$$

Preuve. — On a les suites exactes :

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D) \to \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to \mathcal{O}_D \to 0,$$

$$0 \to \mathscr{L}(-D) \to \mathscr{L} \to j^* \mathscr{L} \to 0,$$

$$0 \to f_* \mathscr{L}(-D) \to f_* \mathscr{L} \to f_* j^* \mathscr{L} \to R^1 f_* \mathscr{L}(-D)$$
$$\to R^1 f_* \mathscr{L} \to R^1 f_* j^* \mathscr{L} \to \ldots \to R^{d-1} f_* j^* \mathscr{L} \to 0.$$

D étant exceptionnel, nous avons :

$$(R^i f_* j^* \mathscr{L})_m = H^i(D, j^* \mathscr{L}) \qquad \text{si} \quad i \geqslant 0.$$

D'autre part, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & f_* \mathscr{L}(-D) \arrow[r] \arrow[d] & f_* \mathscr{L} \arrow[d] \\
 & i_*(f_* \mathscr{L}(-D)|_{X-\{m\}}) \arrow[r, phantom, "="] & i_*(f_* \mathscr{L}|_{X-\{m\}})
\end{tikzcd}$$

implique la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \to f_* \mathscr{L}/f_* \mathscr{L}(-D) \to i_*(f_* \mathscr{L}(-D)|_{X-\{m\}}/f_* \mathscr{L}(-D)) \\ \to i_*(f_* \mathscr{L}|_{X-\{m\}})/f_* \mathscr{L} \to 0. \end{aligned}$$

Combinant avec la suite exacte longue ci-dessus nous obtenons :

$$\chi_f(\mathscr{L}) - \chi_f(\mathscr{L}(-D)) = \chi(D, j^* \mathscr{L}).$$

Pour finir la preuve du théorème, nous appliquerons le théorème de Riemann-Roch.

D'après 0.2. :

$$\chi(D, j^* \mathscr{L}) = \varepsilon(\operatorname{ch} j^* \mathscr{L} \cap \tau(\mathcal{O}_D)).$$

Considérons le diagramme commutatif suivant où tous les morphismes sont propres

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "p"'] & \tilde{X} \arrow[d, "f"] \arrow[ddr] & \\
m \arrow[r, hook] \arrow[drr] & X \arrow[dr] & \\
 & & m
\end{tikzcd}$$

qui donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A.D_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & A.\tilde{X}_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "f_*"] \arrow[ddr, "\varepsilon"] & \\ \mathbb{Q}=A.m_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[drr, "\text{Identité}"'] & A.X_{\mathbb{Q}} \arrow[dr] & \\ & & \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Il en résulte l'identité dans $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}\chi(D, j^*\mathscr{L}) &= \varepsilon(\mathrm{ch}\, j^*\mathscr{L}\cap\tau(\mathcal{O}_D)) = \varepsilon(j_*(\mathrm{ch}\, j^*\mathscr{L}\cap\tau(\mathcal{O}_D)))\\ &= \varepsilon(\mathrm{ch}\,\mathscr{L}\cap j_*\tau(\mathcal{O}_D)) = \varepsilon(\mathrm{ch}\,\mathscr{L}\cap((1-e^{-D})\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})))\\ &= \varepsilon(e^L\cap((1-e^{-D})\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))) = \varepsilon((e^L-e^{L-D})\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})).\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé la formule de projection, la formule d'adjonction et le fait que $\mathscr{L}=\mathcal{O}_{\tilde{X}}(L)$ étant inversible

$$\mathrm{ch}\, j^*\mathscr{L} = e^{c_1(j^*\mathscr{L})} = e^{j^*c_1(\mathscr{L})} = j^*e^L = j^*\,\mathrm{ch}\,\mathscr{L}$$

dans $A^{\cdot}D$. Ce qui finit la preuve du théorème.

1.5. LEMME.— *Dans l'anneau $A^{\cdot}\tilde{X}_{\mathbb{Q}}$ nous avons l'égalité*

$$1-e^{-nD} = -\left[(-1)^d D^d\binom{n+d-1}{d} + (1-e^D)^{d-1}\binom{n+d-2}{d-1} + \ldots + (1-e^D)\binom{n}{1}\right]$$

pour tout n entier naturel.

Preuve. — Dans $A^{\cdot}\tilde{X}_{\mathbb{Q}}$ $1-e^{-nD}$ est un polynôme en n de degré d, $\binom{n+d-1}{d}, \ldots, \binom{n}{1}$, 1 est une base des polynômes en n de degré $\leqslant d$ de sorte que

$$1-e^{-nD} = P_0(n) = a_d\binom{n+d-1}{d} + \ldots + a_{d-i}\binom{n+d-i-1}{d-i} + \ldots + a_1\binom{n}{1}$$

et que

$$a_1 = P_0(n) - P_0(n-1)\big|_{n=0} = P(0) - P(-1) = -(1-e^D).$$

Posant $P_i(n) = P_{i-1}(n) - P_{i-1}(n-1)$ on a $a_i = P_i(0)$ et ceci permettra de trouver le résultat annoncé.

2.0. Soit X une variété projective, normale et Cohen-Macaulay au voisinage du point fermé m, définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0. On supposera que $d = \dim X \geqslant 2$. Soit $\mathcal{Q}$ un faisceau d'idéaux tel que $\mathcal{Q}_m = Q$ soit un idéal m-primaire et $\mathcal{Q}_x = \mathcal{O}_{X,x}$ si $x \neq m$.

$f : \tilde{X} \to X$ une application birationnelle propre telle que la restriction $f : \tilde{X} f^{-1}(m) \to X - \{m\}$ soit un isomorphisme et $\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ soit un $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-module inversible. On notera D le diviseur de Cartier effectif sur $\tilde{X}$ tel que $\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-D)$.

$\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ étant inversible, f se factorise par l'éclatement $g : X' \to X$ de l'idéal $\mathcal{Q}$. Soit $\eta_0, \ldots, \eta_s$ un système de générateurs de l'idéal Q et U un voisinage de m tel que $\eta_i \in \Gamma(U, \mathcal{Q})$, $\forall i = 1, \ldots, s$. Soit $\lambda : U - \{m\} \to \mathbb{P}_k^s$ l'application qui à $x \in U - \{m\}$ fait correspondre le point de $\mathbb{P}_k^s$ de coordonnées homogènes $(\eta_0(x), \ldots, \eta_s(x))$. On sait que $g|_{g^{-1}(U)}$ s'identifie à l'adhérence du graphe de λ. Nous noterons

$$\Lambda : \quad f^{-1}(U) \to g^{-1}(U) \to \mathbb{P}_k^s$$

la projection qui en résulte.

Alors $\Lambda[f^{-1}(m)]$ est égale à Proj $\oplus_{n \geqslant 0} Q^n/Q^{n+1}$ et sa dimension est $d-1$. De plus, $f^{-1}(U)$ est irréductible puisque X est normale et irréductible au voisinage de m.

On peut donc appliquer le théorème de Bertini [4] (Cor. 6.11, p. 89). Pour presque tout hyperplan projectif H (de codimension 1) dans $\mathbb{P}_k^s$ le k-schéma $\Lambda^{-1}(H)$ est irréductible si $d \geqslant 3$ et il est réduit si $d = 2$.

Soit $\lambda_0 X_0 + \ldots + \lambda_s X_s$ l'équation d'un tel hyperplan, $\xi_1 = \lambda_0 \eta_0 + \ldots + \lambda_s \eta_s$ et H_1 un sous-espace de X défini sur U par l'idéal principal (ξ_1). On peut supposer que H_1 est normal dans U (*voir* [3], la condition à satisfaire par les $(\lambda_0, \ldots, \lambda_s)$ pour qu'il en soit ainsi étant aussi générique).

Si $d \geqslant 3$, $\Lambda^{-1}(H)$ étant irréductible coïncide avec la transformée stricte $\tilde{H}_1$ de H_1 par f sur $f^{-1}(U)$. Si $d = 2$, $\Lambda^{-1}(H)$ est une courbe réduite sur $\tilde{X}$ qui est une surface, on se convaint que $\Lambda^{-1}(H)$ coïncide aussi avec $\tilde{H}_1$

en réappliquant Bertini à la normalisation de $\tilde{X}$. Soit $f_1 : \tilde{H}_1 \to H_1$, la restriction de f à $\tilde{H}_1$.

Finalement $\operatorname{div} \xi_1 \circ f|_{f^{-1}(U)} = D + \tilde{H}_1|_{f^{-1}(U)}$, la restriction de $\tilde{H}_1$ à $f^{-1}(U)$ est donc un diviseur de Cartier sur $f^{-1}(U)$ linéairement équivalent à $-D$. Le faisceau $\mathcal{Q}.\mathcal{O}_{H_1}.\mathcal{O}_{\tilde{H}_1} = \mathcal{Q}.\mathcal{O}_{\tilde{H}_1} = \mathcal{Q}.\mathcal{O}_{\tilde{X}}.\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}$ est donc un $\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}$ module inversible, nous le noterons $\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}(-D_1)$. Le morphisme $f_1 : \tilde{H}_1 \to \mathrm{H}_1$ vérifie les mêmes propriétés que f et on construit ainsi par récurrence une suite $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$ de $d-1$ combinaisons linéaires génériques de $\eta_0, \ldots, \eta_s$; H_i, $i=1, \ldots, d-1$ des sous-espaces de X normaux dans U si $i \leqslant d-2$, réduit si $i=d-1$; des morphismes $f_i : \tilde{H}_i \to H_i$ et des diviseurs de Cartier D_i sur $\tilde{H}_i$ tels que le diagramme suivant soit commuta-

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, hook, "h_0"] & \tilde{X} \arrow[r, "f"] & X \\
D_1 \arrow[u, hook, "k_0"] \arrow[r, hook, "h_1"] & \tilde{H}_1 \arrow[u, hook, "l_0"'] \arrow[r, "f_1"] & H_1 \arrow[u, hook] \\
D_2 \arrow[u, hook, "k_1"] \arrow[r, hook, "h_2"] & \tilde{H}_2 \arrow[u, hook, "l_1"'] \arrow[r, "f_2"] & H_2 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$$\cdots$$

$$\begin{tikzcd}
D_{i-1} \arrow[r, hook, "h_{i-1}"] & \tilde{H}_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & H_{i-1} \\
D_i \arrow[u, hook, "k_{i-1}"] \arrow[r, hook, "h_i"] & \tilde{H}_i \arrow[u, hook, "l_{i-1}"'] \arrow[r, "f_i"] & H_i \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

tif avec les propriétés suivantes :

(1) D_i est un diviseur de Cartier dans D_{i-1} et en fait

$$D_i = (h_0|_{f^{-1}(U)} \circ k_0 \circ \ldots \circ k_{i-2})^* (\tilde{G}_i),$$

où $\tilde{G}_i$ est défini sur $f^{-1}(U)$ par $\xi_i \circ f|_{f^{-1}(U)}$.

(2) $$D_1 = (h_0|_{f^{-1}(U)})^* (\tilde{H}_1|_{f^{-1}(U)}),$$

où $h_0^*: A^{\bullet}\tilde{X} \to A^{\bullet} D$.

(3) $$l_{i-1}^* D_{i-1} = D_i,$$

où $l_{i-1}^*: A^{\bullet}\tilde{H}_{i-1} \to A^{\bullet}\tilde{H}_i$.

(3′) $$\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i) = l_{i-1}^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{i-1}}(D_{i-1})),$$
$$\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i) = (l_0 \circ \ldots \circ l_{i-1})^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D).$$

2.0.1. DÉFINITION. — *Soit C une courbe réduite éventuellement singulière au point fermé m et $f: \tilde{C} \to C$ un morphisme propre bitationnel tel que $f: \tilde{C} - f^{-1}(m) \to C - \{m\}$ soit un isomorphisme, alors nous posons :*

$$\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{C}}) = \lg(f_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C) = \delta.$$

2.1. THÉORÈME. — *Les hypothèses sont celles de 2.0. Soit $\overline{Q^n}$ la clôture intégrale de Q^n. Si $\tilde{X}$ est normale et si $R^i f_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = 0$ pour n assez grand et $i > 0$, alors*

$$\lg(\mathcal{O}_{X,m}/\overline{Q^n}) = (-1)^{d+1} D^d \binom{n+d-1}{d}$$
$$-\chi_{f_{d-1}}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{d-1}}) \binom{n+d-2}{d-1} \ldots - \chi_{f_1}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}) \binom{n}{1} - \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

pour n assez grand.

Preuve. — Une conséquence directe du théorème 1.4 appliqué à $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ et D remplacé par nD est

$$-\chi_f(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = \lg(\mathcal{O}_{X,m}/f_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})_m^n)$$
$$+ \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \lg R^i f_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})_m^n$$
$$= \varepsilon[(1 - e^{-nD}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})] - \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

mais $\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ étant inversible et $\tilde{X}$ normal f se factorise par l'éclatement normalisé de l'idéal $\mathcal{Q}$ dans X $\eta: \bar{X}' \to X$, ceci implique qu'il existe g tel que $\eta \circ g = f$ et alors

$$f_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})_m^n = f_*(g^*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}'})^n)_m = \eta_*((\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}'})^n \otimes g_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}))_m$$
$$= \eta_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}'})_m^n = \overline{Q^n} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

(*voir* [17], t. II, lemme, p. 354, traduit dans le langage des faisceaux dans [7], lemme 4.2.5).

En utilisant les hypothèses du théorème, nous avons pour n assez grand

$$\lg(\mathcal{O}_{X,m}/\overline{Q^n})=\varepsilon[1-e^{-nD}\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]-\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$
$$=-\varepsilon\left[(-1)^d D^d\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})\binom{n+d-1}{d}+\ldots\right.$$
$$\left.+(1-e^D)^i\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})\binom{n+i-1}{i}+\ldots\right]-\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

et les lemmes 1.5, 2.2 et 2.3 achèveront la preuve du théorème.

2.2. Lemme. — *On a pour tout* $0\leqslant i\leqslant d-2$:

$$\chi_{f_{i+1}}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{i+1}})=-\chi(D_i,\ h_i^*\,\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i)).$$

2.3. Lemme. — *Dans les conditions c--dessus*

$$-\chi(D_i,\ h_i^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i)))=\varepsilon[(1-e^D)^{i+1}\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})].$$

Au cours de cette démonstration, nous aurons besoin du lemme suivant.

2.4. Lemme. — *Pour tout* $0\leqslant i\leqslant d-1$, *nous avons*

$$(4)\qquad (h_0\circ k_0\circ\ldots\circ k_{i-1})_*\tau(\mathcal{O}_{D_i})=(1-e^D)^i\cap[(1-e^{-D})\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})].$$

Preuve. — La preuve se fait par récurrence sur i.

Pour $i=0$ cette formule s'écrit :

$$(h_0)_*\tau(\mathcal{O}_D)=(1-e^{-D})\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$$

et c'est la formule d'adjonction.

Supposons (4) vérifiée pour $i-1$ et prouvons là pour i :

$$(h_0\circ k_0\circ\ldots\circ k_{i-1})_*\tau(\mathcal{O}_{D_i})=(h_0\circ k_0\circ\ldots\circ k_{i-2})_*(k_{i-1})_*\tau(\mathcal{O}_{D_i})$$
$$=(h_0\circ k_0\circ\ldots\circ k_{i-2})_*[(1-e^{-D_i})\cap\tau(\mathcal{O}_{D_{i-1}})]$$

(*par la formule d'adjonction*)

$$=(1-e^{-\tilde{G}_i})\cap[(h_0\circ k_0\circ\ldots\circ k_{i-2})_*\tau(\mathcal{O}_{D_{i-1}})]$$

(on a utilisé la formule de projection, car

$$D_i=(h_0|_{f^{-1}(U)}\circ k_0\circ\ldots,\circ k_{1-2})^*(\tilde{G}_i)$$

d'après les propriétés (1) et (2)

$$=(1-e^D)\cap[(1-e^D)^{i-1}\cap((1-e^{-D})\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))]$$

(par hypothèse de récurrence) :

$$=(1-e^{D})^{i}\cap[(1-e^{-D})\cap\tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]$$

ce qui finit la preuve du lemme 2.4.

Preuve du lemme 2.2. — Si $i<d-2$, H_{i+1} est une variété normale $f_i : \tilde{H}_i \to H_i$ est birationnelle propre et en fait pour montrer le lemme il suffira de montrer que

$$\chi_{f_1}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_1})=-\chi(D,\, h_0^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)).$$

Pour $i=d-2$, H_{d-1} est une courbe réduite et la preuve se fait de façon analogue.

Considérons donc la suite exacte :

$$0\to\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)\to\mathcal{O}_{\tilde{X}}\to\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}\to 0$$

$f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)$ est un faisceau réflexif et en fait $f_* O_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)=\mathcal{O}_X(-H_1)$ ([8], 1.2.2). Aussi $f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}=\mathcal{O}_X$, $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{H}_1}=R^i f_{1*}\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}$ pour $i\geqslant 0$ et $f_{1*}\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}=\mathcal{O}_{H_1}$ car H_1 est normale.

Par conséquent, le morphisme ∂ de la suite exacte longue

$$\begin{aligned}0\to f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)\to f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}\to f_*\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}\xrightarrow{\partial} R^1 f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)\to\\ \to R^1 f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}\to R^1 f_*\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}\to \dots\end{aligned}$$

est nul.

On en déduit que

$$\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}})-\chi_f\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)=\chi_{f_1}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_1}).$$

Par ailleurs, le théorème 1.4 appliqué à $\mathcal{L}=\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$ nous donne

$$\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}})-\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D))=-\chi(D,\, h_0^*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)),$$

où $h_0 : D \subsetneq \tilde{X}$ est l'inclusion canonique. En comparant les deux expressions, vu que $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{H}_1)$ au voisinage de D, nous aurons

$$\chi_{f_1}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_1})=-\chi(D,\, h_0^*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D))$$

car la définition de χ_f est purement locale. Ce qui finit la preuve du lemme 2.2.

Preuve du lemme 2.3 — Nous aurons par le théorème de Riemann-Roch que :

$$\begin{aligned}\chi(D_i, h_i^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i))) &= \varepsilon[\mathrm{ch}(h_i^*(\mathcal{O}_{\tilde{H}_i}(D_i))) \cap \tau(\mathcal{O}_{D_i})]\\ &= \varepsilon[\mathrm{ch}(l_0 \circ \ldots \circ l_{i-1} \circ h_i)^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D) \cap \tau(\mathcal{O}_{D_i})]\end{aligned}$$

par l'égalité (3′) :

$$\begin{aligned}&= \varepsilon[\mathrm{ch}\, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D) \cap (l_0 \circ \ldots \circ l_{i-1} \circ h_i)_* \tau(\mathcal{O}_{D_i})]\\ &= \varepsilon[\mathrm{ch}\, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D) \cap (h_0 \circ k_0 \circ \ldots \circ k_{i-1})_* \tau(\mathcal{O}_{D_i})]\\ &= \varepsilon[e^D \cap ((1-e^D)^i \cap ((1-e^{-D}) \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})))]\end{aligned}$$

(par le lemme 2.4) :

$$= -\varepsilon[(1-e^D)^{i+1} \cap \tau(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]$$

ce qui finit la preuve du lemme 2.3.

2.5. Proposition. — *Les hypothèses sont celles de* 2.0. *Supposons en outre que $f=\eta$ soit l'éclatement normalisé de l'idéal $\mathcal{Q}$ dans X. Alors les hypothèses du théorème* 2.2 *sont remplies i.e. $R^i\eta_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}'})^n=0$ pour n assez grand et pour $i>0$.*

Preuve. — η est la composée de l'éclatement de l'idéal $\mathcal{Q}$ dans X, $h: X' \to X$ et de la normalisation $n: \bar{X}' \to X'$.

Le faisceau $\mathcal{Q}\mathcal{O}_{X'}$ est très ample pour h et par conséquent $R^i h_*((\mathcal{Q}\mathcal{O}_{X'})^n \otimes \mathcal{F}) = 0$.

pour n assez grand, tout $i>0$ et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X'.

n est un morphisme fini, donc :

$$R_q n_* \mathcal{S} = 0$$

pour tout faisceau cohérent $\mathcal{S}$ sur $\bar{X}'$ et tout $q>0$.

La suite spectrale de la composée de deux morphismes propres

$$E_2^{p,q} = R^p h_*(R^q n_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}'})^n) \quad \Rightarrow \quad R^{p+q}\eta_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}'})^n$$

nous donne $E_2^{p,q}=0$ si $q>0$ *et* n grand.

D'autre part :

$$\begin{aligned} E_2^{p,0} &= R^p \eta_* (\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n \\ &= R^p h_* (n_* (n^* (\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n)) \\ &= R^p h_* (n_* \mathcal{O}_{\bar{X}'} \otimes (\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n = 0 \end{aligned}$$

pour $p>0$ et n assez grand.

Pour $p=0$, nous avons

$$(\eta_* (\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n)_m = \overline{Q^n}$$

d'après [17], t. II, p. 354, ou [7], lemme 4.2.5. Ce qui finit la preuve de la proposition.

2.6. Définition. — (1) *Si Y est une variété à singularité isolée et Cohen-Macaulay de dimension $d \geqslant 2$ et $f: \tilde{Y} \to Y$ une résolution des singularités, nous noterons $p_g(Y)$ le genre géométrique de la singularité*

$$p_g(Y) = (-1)^{d-1} \lg R^{d-1} f_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}}$$

rappelons que cet invariant dépend uniquement de la singularité et non de f et que $R^i f_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant d-2$ car Y est Cohen-Macaulay de sorte que $p_g(Y) = \chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{Y}})$.

(2) *Si Y est une courbe réduite en un point fermé m, nous poserons :*

$$\delta(Y) = \lg(\overline{\mathcal{O}_{Y,m}}/\mathcal{O}_{Y,m}),$$

où $\overline{\mathcal{O}_{Y,m}}$ est le normalisé de $\mathcal{O}_{Y,m}$.

(3) *Si Y est un gros point (i. e. dimension de Y égale à zéro) donné par un idéal Q m-primaire dans un anneau R, on posera*

$$\operatorname{mult}(\mathcal{Q}) = \chi^0(Y) = \chi^0(\mathcal{Q})$$

pour noter la multiplicité de l'idéal Q.

2.7. Proposition. — *Avec les notations ci-dessus, supposons que $car(k)=0$, que X soit Cohen-Macaulay à singularité isolée de dimension d et que l'éclatement normalisé $\bar{X}'$ de l'idéal Q dans X n'ait que des singularités* *rationnelles le long du diviseur exceptionnel. Alors pour n assez grand*

$$\lg(\mathcal{O}_{X,m}/\overline{Q^n}) = \operatorname{mult}(Q)\binom{n+d-1}{d} - \delta(H_{d-1})\binom{n+d-2}{d-1} - \ldots - p_g(H_1)\binom{n}{1} - p_g(X),$$

où H_i est la sous-variété de X définie au voisinage de m par l'idéal $(\xi_1, \ldots, \xi_i)$, la suite $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1} \in Q$ étant une suite générique dans Q au sens de 2.0.

Les hypothèses ci-dessus sont vérifiées par exemple si X a une singularité torique isolée à l'origine et Q est un idéal de codimension fini invariant par l'action du tore.

Preuve. — Soit $\eta : \bar{X}' \to X$ l'éclatement normalisé de $\mathcal{Q}$ dans X et $g : \tilde{X} \to \bar{X}'$ une résolution des singularités de $\bar{X}'$. Choisissons $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{d-1}$ une suite régulière dans Q, ξ_k étant pour tout $1 \leqslant k \leqslant d-1$ une combinaison linéaire générique d'un ensemble fixé de générateurs de Q en sorte qu'ils vérifient les hypothèses de 2.0 et tel que la transformée stricte $\tilde{H}_i$ par le morphisme $f = \eta \circ g$ de la sous-variété H_i définie par l'idéal $(\xi_1, \ldots, \xi_i)$ soit non singulière au voisinage du diviseur exceptionnel.

Pour montrer la proposition, il suffira donc de vérifier les hypothèses du théorème 2.1, i. e. que

$R^i f_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = 0$ pour n assez grand.

En effet, soit la suite spectrale composée de deux morphismes propres

$$R^p \eta_*(R^q g_* \mathcal{F}) \Rightarrow R^{p+q} f_*(\mathcal{F})$$

pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\tilde{X}$.

Prenons $\mathcal{F} = (\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = g^*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n$ pour n assez grand, alors :

$$R^q g_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n = R^q g_* g^*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n = (\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n \otimes R^q g_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$$
$$= \begin{cases} (\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n & \text{si } q = 0, \\ 0 & \text{si } q \neq 0, \end{cases}$$

donc la suite spectrale dégénère et l'on a :

$$R^p \eta_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n = R^p f_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\tilde{X}})^n,$$

mais nous avons déjà vu au cours de la démonstration de la proposition 2.5 que :

$$R^p \eta_*(\mathcal{Q}\mathcal{O}_{\bar{X}'})^n = \begin{cases} \overline{Q^n} & \text{si } p=0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0, \end{cases}$$

pour n assez grand.

Ce qui finit la preuve de la proposition.

2.8. Remarquons qu'on retrouve le résultat [9] obtenu pour les surfaces en appliquant Riemann-Roch à la résolution des singularités. L'énoncé correspondant en dimension 1 est le suivant.

Proposition [10]. — *Soit X une courbe quasi projective réduite singulière éventuellement réductible au point fermé m. $R = \mathcal{O}_{X,m}$ l'anneau local en m et Q un idéal m-primaire. Alors pour n assez grand*

$$\lg(R/\overline{Q^n}) = n(\operatorname{mult} Q) - \delta,$$

où $\delta = \lg(\bar{R}/R)$, $\bar{R}$ étant la fermeture intégrale de R.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Baum-Fulton-Macpherson. — Riemann-Roch for singular varieties, *Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 45, 1975, p. 101-146.

[2] Fulton (W.). — Rational equivalence for singular varieties, *Pub. Math. I.H.E.S.*, n° 45, 1975, p. 147-167.

[3] Flenner (H.). — Die Sätze von Bertini fur lokale ringe, *Math. Ann.*, vol. 229, 1977, p. 97-111.

[4] Jouanolou (J. P.). — Théorèmes de Bertini et applications, *Séries de Math. pures et appliquées*, Strasbourg, 1979.

[5] Khovanski (A. G.). — Newton polyedra and the germs of complete intersections, *Funct. An. and its appl.*, vol. 12, n° 1, 1978, p. 51-61.

[6] Krull (W.). — *Idealtheorie. 2. Auflage. Ergebnisse der Mathematik*, vol. 46, 1965.

[7] Lejeune-Teissier. — Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, *Séminaire au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique*, 1974.

[8] Morales (M.). — Une propriété asymptotique des puissances symboliques, *Ann. Inst. Fourier*, vol. XXXII, n° 2, 1982, p. 219-228.

[9] Morales (M.). — Calcul de quelques invariants de surface normale. Monographie n° 31 de l'*Enseignement Mathématique, Nœuds, Tresses et singularités, Les Plans sur Bex*, mars 1982, Genève, 1983.

[10] Morales (M.). — Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissances de l'idéal maximal pour une courbe plane, *C.R. Acad. Sc.*, t. 289, série A, 1979, p. 401-404.

[11] REES (D.). — Hilbert functions and pseudo rational local rings of dimension two, *J. London Math. Soc.*, vol. 24, (2), 1981, p. 467-479.

[12] REES (D). — *Research notes*, janvier 1979, non publié.

[13] SERRE (J. P.). — Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol. 16-1, 1966, p. 363-374.

[14] SERRE (J. P.). — *Fac. Annals of Maths*, vol. 61, n° 2, 1955.

[15] TEISSIER (B.) et MERLE (M.). — Dans *Séminaire Demazure-Pinkham-Teissier*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1976-1977.

[16] ZARISKI (O.). — Complete linear systems on normal varieties, *Ann. of Math.*, vol. 55, n° 3, 1952.

[17] ZARISKI (O.) et SAMUEL (P.). — *Alg. Commutative*, vol. I et II, Van Nostrand Company Inc.

[18] MORALES (M.). — Polyèdre de Newton et genre géométrique d'une singularité intersection complète, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 112, 1984, p. 325-341.