BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL MORALES

Polyèdre de Newton et genre géométrique d'une singularité intersection complète

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 325-341
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__325_0>

Bull. Soc. math. France,
112, 1984, p. 325-341

POLYÈDRE DE NEWTON ET GENRE GÉOMÉTRIQUE D'UNE SINGULARITÉ INTERSECTION COMPLÈTE

PAR

M. MORALES (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons une condition suffisante sur une suite $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ ayant des polyèdres de Newton $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$ pour que le germe H_k défini par $f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0$ soit une intersection complète à singularité isolée. Nous calculons le genre géométrique de la singularité $p_g(H_k)$ en fonction des polyèdres de Newton $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$ par une formule élémentaire.

ABSTRACT. — Let $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ with Newton polyedra $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$, H_k the germ at the origine defined by the equations $f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0$. We give a condition in $f_1, \ldots, f_k$ in order to have an isolated singularity in H_k and we calculate the geometric genus of the singularity H_k in function of the Newton polyedra $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$ by an elementary formula.

Introduction

Soit (X, m) un germe de variété algébrique Cohen-Macaulay de dimension d ayant une singularité isolée en m. $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X. Le faisceau $R^{d-1}\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est concentré en m et l'on définit le genre géométrique de X par $p_g(X) = (-1)^{d-1} \lg (R^{d-1}\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_m$; c'est un invariant analytique de la singularité. Par exemple, s'il est nul on dit que la singularité est rationnelle (*cf.* Artin) et divers auteurs ont étudié les propriétés des singularités de genre géométrique petit. Principalement H. Laufer, S. T. Yau.

Nous donnons ici une condition suffisante sur une suite $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d] = A$ ayant des polyèdres de Newton $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$ pour que le germe H_k défini par $f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0$ soit

(*) Texte reçu le 10 mai 1983, révisé le 14 juin 1984.

M. MORALES, Institut Fourier, B. P. n° 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.

une intersection complète à singularité isolée et nous établissons une relation entre le genre géométrique $p_g(H_k)$ du germe H_k et le polynôme

$$\lg(A/\overline{Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \ldots Q_k^{n_k}}) \qquad \text{où} \quad Q_i = \oplus_{\alpha \in \Gamma_i^+ \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C}\, x^\alpha.$$

Dans 2.4, nous utilisons les résultats combinatoires résumés dans 1.5 pour calculer le genre géométrique $p_g(H_k)$ en fonction des polyèdres de Newton $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$. Ceci généralise le résultat obtenu pour $k=1$ dans [14] et [6].

Lorsque $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ = \ldots = \Gamma_{d-1}^+$ nous précisons davantage notre condition sur la suite $f_1, \ldots, f_k$. D'après le théorème 2.7 [10] la suite des genres géométriques $p_g(H_i)$, $i=1, \ldots, d-1$, et la multiplicité de l'idéal Q déterminent le polynôme $\lg(A/\overline{Q^n})$ où

$$Q = \oplus_{\alpha \in \Gamma^+ \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C}\, x^\alpha.$$

Ces résultats sont à comparer avec ceux de [5] dans la situation globale.

1. Notations et rappels

1.1. Considérons l'anneau $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ des polynômes à d variables sur le corps des nombres complexes. Soit m l'idéal maximal engendré par $x_1, \ldots, x_d$. Q désignera un idéal m-primaire engendré par des monômes. On pose $X = \mathbb{C}^d$.

1.2. Définition. — *Soit I un idéal de A engendré par des monômes, nous appellerons :*

(1) *support de l'idéal I :*

$$\mathrm{Supp}(I) = \{ \alpha \in \mathbb{Z}^d \mid x^\alpha \in I \},$$

où $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}$.

(2) *polyèdre de Newton de I :*

$\Gamma^+(I) =$ *Enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^d$ de l'ensemble* $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Supp}(I)} \{\alpha\} + \mathbb{R}_+^d$.

(3) *Frontière de Newton de I :*

$\Gamma(I)$ *la réunion des faces compactes de* $\Gamma^+(I)$.

1.2.1. Définition. — *Soit $f(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$:*

$$f(x) = \textstyle\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha.$$

Soit $I(f)$ l'idéal engendré par les monômes x^α tels que $c_\alpha \neq 0$. Alors, on appellera polyèdre de Newton de f (resp. frontière de Newton de f) le polyèdre de Newton (resp. la frontière de Newton) de $I(f)$.

1.3. LEMME ([4], p. 28, [13], I-13). — *Soit I un idéal engendré par des monômes, alors la clôture intégrale $\bar{I}$ de l'idéal I est :*

$$\bar{I} = \oplus_{\alpha \in \Gamma^+(I) \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C}\, x^\alpha.$$

Autrement dit $\bar{I}$ est engendré par des monômes et

$$\operatorname{Supp}(\bar{I}) = \Gamma^+(I) \cap \mathbb{Z}^d.$$

1.4. DÉFINITION. — *Soit Δ un polyèdre convexe compact dans $\mathbb{R}^d$, on notera $n\Delta$ le polyèdre n-fois homothétique de Δ, $l(\Delta)$ le nombre de points dans $\Delta \cap \mathbb{Z}^d$ et $l(\mathring{\Delta})$ le nombre des points à coordonnées entières se trouvant à l'intérieur de Δ.*

1.5. PROPOSITION ([2], p. 131, [5], [3], [1], [8]). — *Soit $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ des polyèdres convexes compacts dont les sommets appartiennent à $\mathbb{Z}^d$, aucun n'étant contenu dans un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension $<d$. Alors il existe un polynôme $R[T_1, \ldots, T_k] \in \mathbb{Q}[T_1, \ldots, T_k]$ de degré d tel que :*

$$l(n_1\Delta_1 + \ldots + n_k\Delta_k) = R(n_1, \ldots, n_k), \qquad \forall\, n_i \text{ entiers} \geq 0.$$

De plus,

Loi de réciprocité :

$$(-1)^d R(-n_1, \ldots, -n_k) = l(\overset{\circ}{\overbrace{n_1\Delta_1 + \ldots + n_k\Delta_k}}), \quad \forall\, n_i \text{ entiers positifs.}$$

La preuve de cette proposition est une conséquence de l'étude de la cohomologie sur les variétés toriques et de la dualité de Serre.

2. Intersections complètes non dégénérées par rapport à leurs polyèdres de Newton

2.1. DÉFINITION [5]. — *Soit $f_l \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$, $l = 1, \ldots, k$ une suite de polynômes, Γ^+_l leurs polyèdres de Newton. Soit $Q_l = \oplus_{\alpha \in \Gamma_l^+ \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C}\, x^\alpha$ de sorte que $Q_l = \overline{I(f_l)}$, nous supposerons que Q_l est primaire pour $m = (x_1, \ldots, x_d)$.*

Pour $a \in (\mathbb{R}_+)^d$ on pose :

$$m^l(a) = \min\{\langle \underline{a}, \alpha \rangle \mid \alpha \in \Gamma_l^+\}$$

et

$$f_l^a=\sum_{\alpha\in\Gamma_l^+,\ \langle a,\alpha\rangle=m^l(a)} A_{l,\alpha}x^\alpha.$$

Nous dirons que la suite $f_1, \ldots, f_k$ est non dégénérée par rapport à ses polyèdres de Newton si pour tout $1\leqq j\leqq k$ et tout $a\in(\mathbf{R}_+-\{0\})^d$ la condition suivante est vérifiée :

en tout point $q\in(\mathbf{C}-\{0\})^d$ tel que $f_1^a(q)=\ldots=f_j^a(q)=0$ les différentielles $df_1^a(q), \ldots, df_j^a(q)$ sont linéairement indépendantes dans l'espace tangent à $\mathbf{C}^d$ en q.

Dans ce cas, nous dirons aussi que le germe H_k défini au voisinage de l'origine par

$$H_k=\{x\in\mathbf{C}^d \mid f_1(x)=\ldots=f_k(x)=0\}$$

est non dégénéré par rapport à $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$. Pour des polyèdres de Newton donnés la notion de non-dégénérescence est générique, la démonstration de [5], th. 2, s'adapte à notre situation.

2.2. DÉFINITION [10]. — *Soit Y une variété quasi projective sur le corps k, de dimension d, ayant une singularité normale au point fermé m, $\pi:\tilde{Y}\to Y$ un morphisme birationnel propre tel que la restriction $\pi:\tilde{Y}-\pi^{-1}(m)\to Y-\{m\}$ soit un isomorphisme et $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$-module inversible. On pose :*

$$-\chi_\pi(\mathscr{L})=\dim_k(i_* i^* \pi_*\mathscr{L}/\pi_*\mathscr{L})+\sum_{j=1}^{d-1}(-1)^{j+1}\lg(R^j\pi_*\mathscr{L})_m,$$

où $i: Y-\{m\}\hookrightarrow Y$ est l'inclusion canonique.

2.3. DÉFINITION. — (1) *Si Y est une variété à singularité isolée et Cohen-Macaulay de dimension $d\geqq 2$ et $f:\tilde{Y}\to Y$ une résolution des singularités, nous noterons $p_g(Y)$ le genre géométrique de la singularité*

$$p_g(Y)=(-1)^{d-1}\lg R^{d-1}f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}};$$

rappelons que cet invariant dépend uniquement de la singularité et non de f et que $R^i f_*\mathcal{O}_{\tilde{Y}}=0$ pour $1\leqq i<d-2$ car Y est Cohen-Macaulay de sorte que $p_g(Y)=\chi_f(\mathcal{O}_{\tilde{Y}})$ (voir 2.2).

(2) *Si Y est une courbe réduite en un point fermé m nous poserons*

$$p_g(Y)=\delta(Y)=\lg(\overline{\mathcal{O}_{Y,m}}/\mathcal{O}_{Y,m}),$$

où $\overline{\mathcal{O}_{Y,m}}$ *est le normalisé de* $\mathcal{O}_{Y,m}$ *et nous l'appellerons genre géométrique de la courbe* Y.

2.4. THÉORÈME. — *Soit* $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ *une suite non dégénérée par rapport à ses polyèdre de Newton* $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$. *Alors le germe* H_k *défini par*

$$H_k = \{ x \in \mathbb{C}^d \mid f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0 \}$$

est une intersection complète à singularité isolée et son genre géométrique $p_g(H_k)$ *est donné par :*

$$p_g(H_k) = (-1)^{d-k-1} [R(\Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \ldots + \Gamma_k^+) \\ - \textstyle\sum_{i=1}^k R(\Gamma_1^+ + \ldots + \hat{\Gamma}_i^+ + \ldots + \Gamma_k^+) + \ldots + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^k R(\Gamma_i^+)]$$

où $R(\Delta)$ *désigne le nombre de points à coordonnées entières strictement positives se trouvant en dessous ou sur la frontière de* Δ, *et le signe* $\hat{}$ *signifie que ce terme n'apparaît pas dans la somme.*

2.4.1. La démonstration du théorème utilise d'une part les techniques développées dans [10] pour montrer le théorème 2.1 où l'on travaillait avec un seul idéal primaire; d'autre part la théorie des variétés toriques ([4], [2]) permet de préciser dans notre cas les conditions d'application de ces techniques.

Le théorème est une conséquence de la proposition et des lemmes suivants :

2.5. PROPOSITION (Résolution des singularités) (*voir* aussi [5]). — *Soit* $f_1, \ldots, f_k$ *une suite non dégénérée par rapport à ses polyèdres de Newton* $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$. *Posons*

$$H_j = \{ x \in \mathbb{C}^d \mid f_1(x) = \ldots = f_j(x) = 0 \}.$$

Il existe un éventail Σ qui est une décomposition de $(\mathbb{R}_+)^d$ tel que si on note X_Σ la variété torique définie par Σ, et $\pi : X_\Sigma \to X = \mathbb{C}^d$ le morphisme induit par la décomposition de $(\mathbb{R}_+)^d$ on ait :

(1) X_Σ est lisse et la restriction

$$\pi : \quad X_\Sigma - \pi^{-1}(0) \to X - \{0\} \text{ est un isomorphisme.}$$

(2) $Q_i \cdot \mathcal{O}_{X_\Sigma}$ est un faisceau inversible. $Q_i \cdot \mathcal{O}_{X_\Sigma} = \mathcal{O}_{X_\Sigma}(-D^{(i)})$, $D^{(i)}$ étant un diviseur exceptionnel effectif.

(3) $\forall j=1, \ldots, k$ la transformée stricte $\tilde{H}_j$ de H_j est lisse au voisinage du diviseur exceptionnel et coupe transversalement le diviseur exceptionnel.

Plus précisément, soit $\pi_j : \tilde{H}_j \rightarrow H_j$ la restriction de π à $\tilde{H}_j$, alors div $(f_{j+1} \circ \pi_j) = D^{(j+1)} \cap \tilde{H}_j + \tilde{H}_j + \tilde{H}_{j+1}$.

D'autre part, notons par $\tilde{H}^{(j)}$ la transformée stricte par π de l'hypersurface $H^{(j)} = \{ x \in \mathbb{C}^d \mid f_j(x) = 0 \}$. Alors

$$\tilde{H}_j = \tilde{H}^{(1)} \cap \tilde{H}^{(2)} \cap \ldots \cap \tilde{H}^{(j)} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{div}(f_j \circ \pi) = D^{(j)} + \tilde{H}^{(j)}.$$

Cette proposition sera démontrée plus loin.

2.6. Considérons $X = \mathbb{C}^d$ comme un ouvert dans l'espace projectif $\mathbb{P}^d$ et notons $\tilde{X}$ la variété obtenue par la modification de l'origine $\pi : X_\Sigma \rightarrow X = \mathbb{C}^d$. Nous noterons encore par π le morphisme $\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^d$.

Considérons les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
D^{(t+1)} \arrow[r, hook, "c_0"] & \tilde{X} \arrow[r, hook, "\pi"] & \mathbb{P}^d \\
D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_1 \arrow[r, hook, "c_1"] \arrow[u, hook, "d_0"] & \tilde{H}_1 \arrow[r, hook, "\pi_1"] \arrow[u, hook, "l_0"] & H_1 \arrow[u, hook] \\
D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_2 \arrow[r, hook, "c_2"] \arrow[u, hook, "d_1"] & \tilde{H}_2 \arrow[r, hook, "\pi_2"] \arrow[u, hook, "l_1"] & H_2 \arrow[u, hook] \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t \arrow[r, hook, "c_t"] \arrow[u, hook, "d_{t-1}"] & \tilde{H}_t \arrow[r, hook, "\pi_t"] \arrow[u, hook, "l_{t-1}"] & H_t \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Avec les notations ci-dessus, nous avons :

2.6.1. Lemme 1 :

$$p_g(H_{t+1}) = -\chi\,(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t, (l_0 \circ \ldots \circ l_{t-1} \circ c_t)^* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D^{(t+1)})).$$

2.6.2. LEMME 2 :

$$-\chi\,(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t,\ (l_0 \circ \ldots \circ l_{t-1} \circ c_t)^*\ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(D^{(t+1)}))$$
$$= \varepsilon\,[\textstyle\prod_{j=1}^{t+1} (1-e^{D^{(j)}}) \cap Td\,(\mathcal{O}_{\tilde{X}})].$$

2.6.3. LEMME 3 :

$$\lg\,(A/\overline{Q_1^{n_1}\,Q_2^{n_2}\ldots Q_k^{n_k}}) = \varepsilon\,[\,(1-e^{-\sum_{i=1}^{k} n_i D^{(i)}}) \cap Td\,(\mathcal{O}_{\tilde{X}})\,].$$

2.6.4. LEMME 4. — (1) *Pour $n_1, \ldots, n_k$ entiers positifs ou nuls la fonction $\bar{l}(n_1\Gamma_1^+ + \ldots + n_k\Gamma_k^+)$ = nombre de points à coordonnées entières positives ou nulles se trouvant en dessous de $n_1\Gamma_1^+ + \ldots + n_k\Gamma_k^+$ coïncide avec les valeurs d'un polynôme $F(n_1, \ldots, n_k)$ de degré d en $n_1, \ldots, n_k$.*

(2) *Soit $J \subset \{1, \ldots, k\}$ et $e_1, \ldots, e_k$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$, la valeur $(-1)^d F(-\sum_{j\in J} e_j)$ est le nombre des points à coordonnées entières strictement positives se trouvant en dessous ou sur les faces compactes de $\sum_{j\in J}\Gamma_j^+$.*

Nous poserons

$$R\,(\textstyle\sum_{j\in J}\Gamma_j^+) = (-1)^d F\,(-\sum_{j\in J} e_j).$$

2.6.5. LEMME 5 [6]. — *Soit $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. On pose $F_0 = F$ et pour $1 \leqq j \leqq k$:*

$$F_j\,(n_1, \ldots, n_k) = F_{j-1}\,(n_1, \ldots, n_k) - F_{j-1}\,(n_1, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_k).$$

Alors

$$F_k\,(0, 0, \ldots, 0) = F\,(0) - \textstyle\sum_{i=1}^{k} F\,(-e_i)$$
$$+ \textstyle\sum_{1\leqq i<j\leqq k} F\,(-e_i - e_j) + \ldots + (-1)^k F\,(-e_1 - e_2 - \ldots - e_k),$$

où $e_1, \ldots, e_k$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

2.6.6. LEMME 6. — *Avec les notations des lemmes* 3, 4 *et* 5 *on a* :

$$F\,(n_1, \ldots, n_k) = \lg\,(A/\overline{Q_1^{n_1}\ldots Q_k^{n_k}})$$

et

$$F_k\,(0, \ldots, 0) = -\varepsilon\,[\textstyle\prod_{j=1}^{k} (1-e^{D^{(j)}}) \cap Td\,(\mathcal{O}_{\tilde{X}})\,].$$

2.7. Démonstration des lemmes 3 à 6.

2.7.1. Les lemmes 5 et 6 sont obtenus par un calcul direct.

2.7.2. *Preuve du lemme* 4. — Soit $\Gamma^+=n_1\Gamma_1^+ + \ldots + n_k\Gamma_k^+$ et Γ la réunion des faces compactes de Γ^+. Posons Δ_1 l'enveloppe convexe de Γ et Δ_2 l'enveloppe convexe de $\Gamma \cup \{0\}$, il suffira de remarquer que

$$\bar{l}(\Gamma^+)=l(\Delta_2)-l(\Delta_1)$$

et d'appliquer la proposition 1.5.

2.7.3. *Preuve du lemme* 3. — Nous appliquons le théorème 1.4 de [10] à $\pi : \tilde{X} \to \mathbb{P}^d$, $L=\mathcal{O}_{\tilde{X}}$, $D=\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}$ et obtenons

$$\chi_\pi(\mathcal{O}_{\tilde{X}})-\chi_\pi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\textstyle\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}))=\varepsilon\,[(1-e^{-\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}})\cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]$$

et nous avons ([4], Cor. 1, page 44) :

$$\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}=\mathcal{O}_X, \qquad R^i\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}=0 \quad \text{pour } i>0,$$
$$\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\textstyle\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}))(\mathbb{C}^d)=\overline{Q_1^{n_1}Q_2^{n_2}\ldots Q_k^{n_k}}$$

et

$$R^i\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\textstyle\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}))=0 \qquad \text{pour} \quad i>0,$$

ce qui implique vu la définition de χ_π (*voir* 2.2) que :

$$\lg(A/\overline{Q_1^{n_1}\ldots Q_k^{n_k}})=\varepsilon\,[(1-e^{-\sum_{i=1}^k n_i D^{(i)}})\cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]$$

et finit la preuve du lemme 3.

2.8. *Preuve du lemme* 1. — Remarquons que

$$\operatorname{div}(f_{t+1}\circ\pi_t)=D^{(t+1)}\cap\tilde{H}_t+\tilde{H}_{t+1},$$

$\tilde{H}_t$ et les composantes de $D^{(t+1)}$ sont non singulières, et l'intersection $\tilde{H}_t\cap D^{(t+1)}$ est transverse et est un diviseur dans $\tilde{H}_t$. Dans l'anneau de Chow de $\tilde{H}_t$ on aura

$$D^{(t+1)}\cap\tilde{H}_t=(l_0\circ\ldots\circ l_{t-1})^*D^{(t+1)}.$$

Les diviseurs $D^{(t+1)}\cap\tilde{H}_t$ et $-\tilde{H}_{t+1}$ sont linéairement équivalents au voisinage de $D^{(t+1)}\cap\tilde{H}_t$ et par conséquent les faisceaux $\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)}\cap\tilde{H}_t)$ et $\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(-\tilde{H}_{t+1})$ sont isomorphes au voisinage du diviseur exceptionnel.

Par ailleurs, les suites exactes courtes :

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(-\tilde{H}_{t+1}) \to \mathcal{O}_{\tilde{H}_t} \to \mathcal{O}_{\tilde{H}_{t+1}} \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{H}_t} \to \mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t) \to c_t^* (\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t)) \to 0$$

donnent les égalités :

$$\chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}) - \chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(-\tilde{H}_{t+1})) = \chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{t+1}}),$$

$$\chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}) - \chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t))$$
$$= -\chi(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t, c_t^* (\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t)))$$

et on en déduit que :

$$\chi_{\pi_t}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{t+1}}) = -\chi(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t, c_t^* (\mathcal{O}_{\tilde{H}_t}(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t)))$$

or $\pi_t|_{\tilde{H}_{t+1}} = \pi_{t+1} : \tilde{H}_{t+1} \to H_{t+1}$ est une résolution des singularités et H_{t+1} est normale donc :

$$\chi_{\pi_{t+1}}(\mathcal{O}_{\tilde{H}_{t+1}}) = p_g(H_{t+1})$$

ce qui finit la preuve du lemme 1 (*voir* aussi [10], lemme 2.2).

Avant de passer à la démonstration du lemme 2, voici un lemme préliminaire.

2.9.1. Lemme. — *Pour* $0 \leq j \leq t$ *nous avons*

$$(c_0 \circ d_0 \circ \ldots \circ d_{j-1})_* \, Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j})$$
$$= \prod_{i=1}^{j} (1 - e^{D^{(i)}}) \cap (1 - e^{-D^{(t+1)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}}).$$

Preuve. — La preuve se fait par récurrence sur j. Pour $j=0$ c'est la formule d'adjonction. Supposons le lemme vrai pour $j-1$ et prouvons-le pour j.

$$(c_0 \circ d_0 \circ \ldots \circ d_{j-1})_* \, Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j})$$
$$= (c_0 \circ d_0 \circ \ldots \circ d_{j-2})_* \circ (d_{j-1})_* \, Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j})$$
$$= c_0 \circ d_0 \circ \ldots \circ d_{j-2})_* [(1 - e^{-(c_0 \circ d_0 \circ \ldots \circ d_{j-2})^* \tilde{H}^{(j)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_{j-1}})]$$

(par la formule d'adjonction et le fait que $D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_j$ est un diviseur dans $D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_{j-1}$ et en fait $D^{t+1} \cap \tilde{H}_j = (c_0 \circ d_0 \circ \ldots \circ d_{j-2})^* H^{(j)}$ dans l'anneau de Chow de $D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_{j-1}$)

$$=(1-e^{-\tilde{H}^{(j)}}) \cap (c_0 \circ d_0 \circ \ldots \circ d_{j-2})_* (Td(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_{j-1}}$$
$$=(1-e^{-\tilde{H}^{(j)}}) (\textstyle\prod_{i=1}^{j-1} (1-e^{D^{(i)}}) \cap (1-e^{-D^{(t+1)}}) \cap Td(\mathcal{O}_{\tilde{X}}))$$

par hypothèse de récurrence. Or,

$$\operatorname{div}(f_j \circ \pi) = D^{(j)} + \tilde{H}^{(j)}$$

au voisinage du diviseur exceptionnel donc $D^{(j)}$ est linéairement équivalent à $-H^{(j)}$. Nous remplaçons dans la formule précédente et finissons la preuve du lemme.

2.9.2. *Preuve du lemme* 2. — Les notations sont celles de 2.6 :

$$\chi(D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t, (l_0 \circ l_1 \circ \ldots \circ l_{t-1} \circ c_t)^* \mathcal{O}_{\tilde{X}} D^{(t+1)})$$
$$= \varepsilon\,[\mathrm{ch}\,(l_0 \circ \ldots \circ l_{t-1} \circ c_t)^* (\mathcal{O}_{\tilde{X}} (D^{(t+1)})) \cap Td\,(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t})]$$

(théorème de Riemann-Roch)

$$= \varepsilon\,[\mathrm{ch}\,\mathcal{O}_{\tilde{X}}(D^{(t+1)}) \cap (l_0 \circ \ldots \circ l_{t-1} \circ c_t)_*\, Td\,(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t})]$$

(formule de projection)

$$= \varepsilon\,[e^{D^{(t+1)}} \cap (c_0 \circ d_0 \circ \ldots \circ d_{t-1})_*\, Td\,(\mathcal{O}_{D^{(t+1)} \cap \tilde{H}_t})]$$

(par 2.9.1)

$$= \varepsilon[e^{D^{(t+1)}} \cap (\textstyle\prod_{j=1}^{t} (1-e^{D^{(j)}})) \cap (1-e^{-D^{(t+1)}}) \cap Td\,(\mathcal{O}_{\tilde{X}})]$$
$$= -\varepsilon\,[\,[\textstyle\prod_{j=1}^{t+1} (1-e^{D^{(j)}})\,] \cap Td\,(\mathcal{O}_{\tilde{X}})\,].$$

2.10. *Preuves des assertions* 1 *et* 2 *de la proposition* 2.5. — Soit $z \in (\mathbb{R}_+)^d$. On pose $m^i(a) = \min_{\alpha \in \Gamma_i^+} \langle a, \alpha \rangle$. Dans $(\mathbb{R}_+{}^d$ nous définissons la relation d'équivalence :

$$a \sim a' \iff \forall\, i = 1, \ldots, k,$$
$$\{\, \alpha \in \Gamma_i^+ \mid \langle a, \alpha \rangle = m^i(a) \,\} = \{\, \alpha \in \Gamma_i^+ \mid \langle a', \alpha \rangle = m^i(a') \,\}.$$

L'ensemble des clôtures de classes d'équivalence des éléments $a \in (\mathbb{R}_+)^d$ forment un éventail Σ^1 qui est une décomposition de $(\mathbb{R}_+)^d$. Le morphisme induit $\eta : X_{\Sigma^1} \to \mathbb{C}^d$ est l'éclatement normalisé de l'idéal $Q_1 Q_2 \ldots Q_k$, où $Q_i = \oplus_{\alpha \in \Gamma_i^+ \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{C}\, x^\alpha$.

D'autre part, soit Σ_i l'éventail correspondant à l'éclatement normalisé de l'idéal Q_i, Σ^1 est une décomposition de Σ_i pour $i=1, \ldots, k$. Nous savons ([4], p. 35) qu'il existe un éventail Σ plus fin que Σ^1 tel que la variété torique X_Σ est non singulière et le morphisme $\pi : X_\Sigma \to X = \mathbb{C}^d$ est un isomorphisme en dehors de $\pi^{-1}(0)$.

Les assertions de la proposition étant locales, soit $\sigma \in \Sigma$, σ engendré par les vecteurs $a^1, a^2, \ldots, a^d$, alors $X_\sigma = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_d]$ et le morphisme $\pi : X_\sigma \to X$ est décrit par

$$x_i = y_1^{a_i^1} y_2^{a_i^2} \ldots y_d^{a_i^d}$$

pour $i=1, \ldots, d$.

Il est clair puisque l'éventail Σ est une subdivision de l'éventail Σ_i pour $i=1, \ldots, k$ que l'idéal $Q_i . \mathcal{O}_{X_\sigma}$ est inversible et en fait

$$Q_i . \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_d] = y_1^{m^i(a^1)} y_2^{m^i(a^2)} \ldots y_d^{m^i(a^d)}$$

et pour $f_i \in Q_i$ ayant le polyèdre de Newton Γ_i^+ on aura

$$f_i \circ \pi = y_1^{m^i(a^1)} \ldots y_d^{m^i(a^d)} \tilde{f}_i(y) \qquad \text{avec} \quad \tilde{f}_i(0) \neq 0.$$

Nous noterons par $\tilde{H}^{(i)}$ l'hypersurface dans X_σ définie par $\tilde{f}_i(y)=0$. C'est bien entendu la transformée stricte de $H^{(i)}$ définie par $f_i(x)=0$.

2.11. *Preuve de l'assertion* 3 *de la proposition* 2.5.

2.11.0. DÉFINITION. — *X_σ et le diviseur exceptionnel qui est une réunion d'hyperplans de coordonnées admettent une stratification par des tores T_I. Soit $I \subset \{1, \ldots, d\}$ et*

$$T_I = \{ y \in \mathbb{C}^d \mid y_i = 0 \text{ si } i \in I,\ y_i \neq 0 \text{ si } i \notin I \}.$$

2.11.1. LEMME ([15], [9]). — *T_I est contenu dans le diviseur exceptionnel si et seulement si le cône σ^I engendré par les vecteurs a^j, $j \in I$ n'est pas contenu dans un hyperplan de coordonnées et dans ce cas l'ensemble*

$$\gamma_{I,l} = \{ \alpha \in \Gamma_l \mid \langle \alpha, a^j \rangle = m^l(a^j), \quad \forall j \in I \}$$

est une face compacte de Γ_l pour $l=1, \ldots, k$.

2.11.2. LEMME [15]. — *Si $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_d]$ on notera par $\tilde{f} \in \mathbb{C}[y_1, y_2, \ldots, y_d]$ l'élément tel que $f \circ \pi = y_1^{b_1} y_2^{b_2} \ldots y_d^{b_d} \tilde{f}(y)$, avec $\tilde{f}(0) \neq 0$. Soit $f_l = \sum_\alpha A_{l,\alpha} x^\alpha$, posons $f_{l,\gamma_{I,l}} = \sum_{\alpha \in \gamma_{I,l}} A_{\alpha,l} x^\alpha$. La restriction de $\tilde{f}_l$ au tore T_I*

est un polynôme en les variables y_i, $i \notin I$ *et en fait*

$$\tilde{f}_l|_{T_I} = \tilde{f}_{l, \gamma_{I, l}}$$

2.11.3. *Remarque.* – Soit $a_I = (1/\mathrm{card}(I))(\sum_{i \in I} a^i)$, où card$(i)$=cardinal de l'ensemble I, alors $a_I \in (\mathbb{R}_+ - 0)^d$ et pour tout $l = 1, \ldots, k$,

$$\gamma_{I, l} = \{ \alpha \in \Gamma_l \mid \langle \alpha, a_I \rangle = m^l(a_I) \}.$$

Si la suite $f_1, \ldots, f_k$ est non dégénérée par rapport à leurs polyèdres de Newton $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$ alors en tout point $q \in (\mathbb{C}\{0\})^d$ tel que $f_{l, \gamma_{I, l}}(q) = 0$ $\forall l = 1, \ldots, t$, la matrice

$$\left(\frac{\partial f_{l, \gamma_{I, l}}(q)}{\partial x_j} \right)_{1 \leq l \leq t,\ 1 \leq j \leq d}$$

est de rang t.

La preuve de la proposition découlera du lemme suivant :

2.11.4. Lemme. – *Soit* $f_1, \ldots, f_k$ *une suite de polynômes non dégénérée par rapport à leurs polyèdres de Newton* $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$. *Soit* $t \leqq k$, $p \in T_I \subset \pi^{-1}(0) \cap \tilde{H}_t$ *et* $\gamma_{I, l}$ *la face compacte de* Γ_l^+ *associée à* T_I, $l = 1, \ldots, t$. *Alors*

(1) *la matrice*

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}_{l, \gamma_{I, l}}(p)}{\partial y_j} \right)_{1 \leq l \leq t,\ 1 \leq j \leq d}$$

est de rang t.

(2) *Nous avons l'égalité*

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}_l(p)}{\partial y_j} \right)_{j \notin I,\ l = 1, \ldots, t} = \left(\frac{\partial \tilde{f}_{l, \gamma_{I, l}}(p)}{\partial y_j} \right)_{j \notin I,\ l = 1, \ldots, t}.$$

En particulier, $\tilde{H}_t$ *est lisse au point* p *et l'espace tangent* $T_p \tilde{H}_t$ *n'est contenu dans aucune composante du diviseur exceptionnel passant par* p.

(3) *Remarquons que les seules composantes de* $\pi^{-1}(0)$ *qui puissent passer par* p *ont pour équation* $y_i = 0$ *avec* $i \in I$. $\forall i \in I$ *nous aurons*

$$\tilde{f}_t \not\equiv y_i Q_t \bmod (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{t-1}).$$

2.11.5. *Preuve du lemme.* — (1) Soit $p=(p_j)_{j=1,\ldots,d}$. Posons :

$$p''=(p''_j)_{j=1,\ldots,d}$$

où

$$p''_j=1 \quad \text{si } j\in I \qquad \text{et} \qquad p''_j=p_j \quad \text{si } j\notin I.$$

Nous savons que $\forall l=1,\ldots,t$:

$$f_{l,\gamma_I,l}\circ\pi=M_l(y)\,\tilde{f}_{l,\gamma_I,p}$$

où $M_l(y)$ est un monôme. Appliquons cette égalité à $y=p''$, cela entraîne que $f_{l,\gamma_I,l}(\pi(p''))=0$ car $\tilde{f}_{l,\gamma_I,l}(p'')=0$, $\forall l=1,\ldots,t$. D'autre part, par simple dérivation, on obtient :

$$\forall j\in I,\ \frac{\partial(f_{l,\gamma_I,l}\circ\pi)(p'')}{\partial y_j}=\frac{\partial M_l(p'')}{\partial y_j}\tilde{f}_{l,\gamma_I,l}(p'')=0$$

et

$$\forall j\notin I,\quad \frac{\partial(f_{l,\gamma_I,l}\circ\pi)(p'')}{\partial y_j}=M_l(p'')\frac{\partial\tilde{f}_{l,\gamma_I,l}(p'')}{\partial y_j},$$

où $M_l(p'')\neq 0$ et pour montrer (1), il suffira donc d'établir que la matrice

$$\left(\frac{\partial(f_{l,\gamma_I,l}\circ\pi)(p'')}{\partial y_j}\right)_{1\leq l\leq t,\ 1\leq j\leq d}$$

est de rang t. Ceci sera une conséquence de l'hypothèse et de l'égalité suivante obtenue en appliquant la règle de dérivation d'une fonction composée :

$$\left(\frac{y_i\,\partial(f_{l,\gamma_I,l}\circ\pi)(p'')}{\partial y_j}\right)_{1\leq i\leq d,\ 1\leq l\leq t}=(a^i_j)_{1\leq i\leq d,\ 1\leq j\leq d}\left(\frac{x_i\,\partial f_{l,\gamma_I,l}(\pi(p''))}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq d,\ 1\leq l\leq t}$$

car les points p'' et $\pi(p'')$ sont à coordonnées non nulles et la matrice $(a^i_j)_{i,j}$ est inversible. Ceci finit la preuve de (1).

2.11.6. La *preuve de* (2) est immédiate à partir de 2.11.2.

2.11.7. *Preuve de* (3). — Supposons qu'il existe $i\in I$ tel que

$$\tilde{f}_t=y_i\,Q_t+\sum_{l<t}\tilde{f}_l R_l,$$

alors $\forall j \notin I$:

$$\frac{\partial \tilde{f}_t}{\partial y_j} = y_i \frac{\partial Q_t}{\partial y_j} + \sum_{l<t} \tilde{f}_l \frac{\partial R_l}{\partial y_j} + \sum_{l<t} \frac{\partial \tilde{f}_l}{\partial y_j} R_l$$

et

$$\frac{\partial \tilde{f}_t(p)}{\partial y_j} = \sum_{l<t} R_l(p) \frac{\partial \tilde{f}_l(p)}{\partial y_j}, \qquad \forall j \notin I,$$

ou encore, car $p \in T_I$, d'après (2) :

$$\forall j \in I, \quad \frac{\partial \tilde{f}_{t,\gamma_{I,t}}(p)}{\partial y_j} = \sum_{l<t} R_l(p) \frac{\partial \tilde{f}_{l,\gamma_{I,l}}(p)}{\partial y_j}$$

autrement dit, le vecteur

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}_{t,\gamma_{I,t}}(p)}{\partial y_j}\right)_{j=1,\ldots,d}$$

serait une combinaison linéaire des vecteurs

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}_{l,\gamma_{I,l}}(p)}{\partial y_j}\right)_{j=1,\ldots,d}$$

pour $l=1, \ldots, t-1$. Ce qui est absurde d'après (1) et (2) et finit la preuve de (3).

2.12. Définition. — *Nous dirons qu'une suite $f_1, \ldots, f_s \in Q$ de polynômes ayant tous le même polyèdre de Newton $\Gamma^+(Q)$ est non dégénérée si elle vérifie les conditions suivantes* :

(1) *pour tout $t \leqq s$ et toute face compacte γ de $\Gamma^+(Q)$ de dimension $k \geqq t$ la matrice*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{1,\gamma}}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_{t,\gamma}}{\partial x_1} \\ & \ldots & \\ \dfrac{\partial f_{1,\gamma}}{\partial x_d}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_{t,\gamma}}{\partial x_d} \end{bmatrix}$$

est de rang t en tout point de $(\mathbb{C}-\{0\})^d$.

(2) *Pour toute face compacte γ de $\Gamma^+(Q)$ de dimension $k<s$, les polynômes $f_{1,\gamma}, \ldots, f_{k+1,\gamma}$ n'ont pas de zéro commun dans* $(\mathbb{C}\{0\})^d$.

2.12.1. *Remarque.* — $\forall t \leqq s$ la suite $(f_1, \ldots, f_t)$ est non dégénérée (par rapport à $\Gamma^+(Q)$).

2.13. *Exemple.* — Soit Γ^+ un polyèdre de Newton dont toutes ses faces compactes sont des simplexes. Autrement dit, toute face compacte de dimension k a $k+1$-sommets. Une condition suffisante pour que la suite $(f_1, \ldots, f_d)$ soit non dégénérée par rapport à leur polyèdre de Newton Γ^+ est que tout déterminant d'ordre $r \leqq d$ de la matrice suivante soit non nul :

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,k} \\ A_{2,1} & \ldots & A_{2,k} \\ & \ldots & \\ A_{d,1} & \ldots & A_{d,k} \end{bmatrix}$$

où $f_l = \sum_{i=1}^{k} A_{l,i} x^{\alpha_i}$, $l=1, \ldots, d$. Nous voyons en particulier dans cet exemple que la condition de non dégénérescence est générique.

Preuve. — Soit $t \geqq 1$ et γ une face compacte de Γ^+ de dimension $r-1 \geqq t$. Notons $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$ les sommets de γ. Alors $\forall j=1, \ldots, d$ et $l=1, \ldots, t$:

$$\frac{x_j \partial f_{l,\gamma}}{\partial x_j} = \sum_{\alpha \in \gamma} x_j A_{l,\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^i A_{l,i} x^{\alpha^i},$$

où $\alpha^i = (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_d^i)$.

Par conséquent, on aura l'égalité de matrices

$$\left(\frac{x_j \partial f_{l,\gamma}(x)}{\partial x_j}\right)_{l,j} = (A_{l,i})_{1 \leqq l \leqq t,\ 1 \leqq i \leqq r} (x^{\alpha^i} \alpha_j^i)_{1 \leqq j \leqq d,\ 1 \leqq i \leqq r}$$

Or, la matrice $(\alpha_j^i)_{1 \leqq j \leqq d,\ 1 \leqq i \leqq r}$ est de rang r par hypothèse et la matrice $(A_{l,i})_{1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq l \leqq t}$ est de rang t, par conséquent pour un point $x \in (\mathbb{C}\{0\})^d$ la matrice $(x_j \partial f_{l,\gamma}(x)/\partial x_j)_{l,j}$ est de rang t. La condition (1) est donc vérifiée.

Vérifions la condition 2 : pour toute face compacte γ de Γ^+ de dimension $k<s$, alors $f_{1,\gamma}, \ldots, f_{k+1,\gamma}$ n'ont pas de zéro commun dans $(\mathbb{C}\{0\})^d$.

Soit

$$f_{l,\gamma}=\sum_{\alpha\in\gamma} A_{l,\alpha} x^{\alpha}=\sum_{i=1}^{k+1} A_{l,i}\, x^{\alpha^i}=x^{\alpha^1}\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_{l,i}\, x^{(\alpha^i-\alpha^1)}\right)$$

et posons $z_i=x^{\alpha^i-\alpha^1}$, $i=2, \ldots, k+1$.

Considérons les polynômes

$$P_{l,\gamma}=A_{l,1}+\sum_{i=2}^{k+1} A_{l,i}\, z_i.$$

Les $k+1$ polynômes $P_{l,\gamma}$ en k variables n'ont pas de zéro commun car leur résultant est non nul par hypothèse. D'autre part, si l'on avait un point $q\in(\mathbb{C}-\{0\})^d$ tel que $f_{l,\gamma}(q)=0$ pour $l=1, \ldots, k+1$, on aurait $P_{l,\gamma}(z)=0$ pour un certain z ce qui est absurde.

2.14. *Exemple* 2. — Soient $\beta_1, \ldots, \beta_d$ des entiers strictement positifs et

$$f_l=\sum_{j=1}^{d} A_{j,l}\, x_j^{\beta_j}, \qquad A_{j,l}\in\mathbb{C}, \quad l=1, \ldots, d.$$

Alors la suite $f_1, \ldots, f_d$ est non dégénérée si tous les déterminants d'ordre t avec $t\leq d$ de la matrice $(A_{l,j})$ sont non nuls.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSHTEIN (D. I.). — The number of integral points in integral polyhedra, *Funct. An. and its appl.*, vol. 10, 1976, p. 72-73.

[2] DANILOV (V. I.). — Geometry of Toral Varieties, *Usp. Mat. Nauk*, n° 2, 1973, p. 85-135.

[3] EHRART (E.). — Thèse : « Sur un problème de géométrie diophantienne ». *J. fur die Reine...*, n° 226, 1967, p. 1-29.

[4] KEMPF-MUMFORD et coll. — Toroidals Embeddings, *Lect. Not. in Math.*, n° 339.

[5] KHOVANSKII (A. G.). — Newton polyedral and toral varieties, *Funct. Anal. and its appl.*, vol. 11, n° 4, 1977, p. 56-67.

[6] KHOVANSKII (A. G.). — Newton polyedra and the genus of complete intersections, *Funct. Anal. and its appl.*, vol. 12, n° 1, 1978, p. 51-61.

[7] LEJEUNE-TEISSIER. — Clôture intégrale d'idéaux et équisingularité, *Séminaire au Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique*, 1974.

[8] MCMULLEN (P.). — Metrical and continatorial properties of convex polyotopes, *Proc. Int. Cong. Math. Vancouver*, 1974, p. 491-495.

[9] MERLE (M.). — Dans *Séminaire Demazure-Pinkham-Teissier*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1976-1977.

[10] MORALES (M.). — Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissances d'un idéal m-primaire, *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 112, 1984, p. 343-358.

[11] MORALES (M.). — Calcul de quelques invariants de surface normale. Dans *Nœuds, tresses et singularités. Les Plans sur Bex*, 1982, monographie n° 31 de l'Enseignement Mathématique, Genève, 1983.

[12] MORALES (M.). — Polynôme d'Hilbert-Samuel des clôtures intégrales des puissances de l'idéal maximal pour une courbe plane, *C. R. Acad. Sc.*, t. 289, série A, 1979, p. 401-404.

[13] TEISSIER (B.). — *Variétés polaires II*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1982.

[14] TEISSIER (B.) et MERLE (M.). — Dans *Séminaire Demazure-Pinkham-Teissier*, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1976-1977.

[15] VARCHENKO (A. N.). — Zeta-function of monodromy and Newton's diagram, *Inv. Math.*, vol. 37, 1976, p. 235-262.

[16] WATANABE (K.). — On plurigenera of normal isolated singularities I, *Math. Ann.*, vol. 250, 1980, p. 65-94.