BULLETIN DE LA S. M. F.

EMMANUEL LESIGNE

Résolution d'une équation fonctionnelle

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 177-196
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__177_0>

Bull. Soc. math. France,
112, 1984, p. 177-196.

RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

PAR

EMMANUEL LESIGNE (*)

RÉSUMÉ. — Nous présentons la résolution d'une équation fonctionnelle qui apparaît dans l'étude des invariants dans un système dynamique construit comme produit de systèmes à spectre discret généralisé. Cette résolution nous permet d'établir, dans [1], un théorème ergodique en moyenne.

ABSTRACT. — We present the solution of a fonctional equation which appears in the study of the invariants in some dynamical system, construct as a product of generalized discret spectrum systems. This solution allows us to demonstrate, in [1], a mean ergodic theorem.

Introduction

Dans [1], J. P. CONZE et l'auteur établissent le théorème ergodique suivant :

Si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *est un système dynamique mesuré totalement ergodique et si* f, g, h *sont des fonctions mesurables bornées sur* X, *alors la suite* $(1/N\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x) g(T^{2n} x) h(T^{3n} x))_{N>0}$ *converge en moyenne.*

La démonstration de ce résultat est liée à l'étude d'une équation fonctionnelle présentée ici.

La situation est la suivante : G est un groupe abélien, α est un élément fixé de G, H est une application de G dans l'espace des matrices unitaires de dimension d, $(F_t)_{t \in G}$ est une famille d'applications de G dans les matrices de dimension d et $(\lambda_t)_{t \in G}$ est une famille de constantes tels que : pour tout t,

$$H(x+t) \, . \, F_t(x) = \lambda_t \, . \, F_t(x+\alpha) \, . \, H(x). \tag{1}$$

(*) Texte reçu le 8 mars 1983.

E. LESIGNE, Département de Mathématiques, Université de Lyon I, 43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne Cedex.

Sous des hypothèses sur le groupe G, l'ergodicité de la rotation $x \to x+\alpha$ et l'irréductibilité de H, on montre que (1) n'est possible que si $d=1$ et si H est cohomologue au produit d'une constante et d'un caractère de G.

Nous allons commencer par définir la notion d'irréductibilité utilisée, avant d'énoncer le résultat et d'en donner la démonstration.

1. Irréductibilité

On reprend la définition donnée dans [1] et [4]. Nous noterons $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées de dimension d. Considérons un système dynamique mesuré ergodique (X, B, μ, T), et une application mesurable H de X dans l'espace des matrices unitaires de dimension d.

On peut montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il n'existe pas d'application mesurable P de X dans l'espace des matrices unitaires de dimension d telle que $P(Tx).H(x).P(x)^{-1}$ soit décomposée en blocs diagonaux.

(ii) Si A et N sont des applications B-mesurables à valeurs dans des espaces de matrices et telles que $A(Tx).H(x)=N(x).A(x)$ μ-presque partout, alors A est nulle presque partout ou $A(x)$ est, pour presque tout x, un élément inversible de $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$.

(iii) Si A est une application B-mesurable, à valeurs dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, telle que $A(Tx)=H(x).A(x).H(x)^{-1}$, alors A est une matrice scalaire constante.

Ces équivalences sont établies dans [4].

Une fonction H vérifiant ces propriétés sera appelée une fonction matricielle irréductible.

En reprenant le vocabulaire utilisé dans [1] et [4], on voit qu'une fonction matricielle est irréductible si et seulement si elle représente, dans une extension du système (X, B, μ, T) la transformation restreinte à un (B, T)-module irréductible. Un exemple de fonction matricielle irréductible est donné dans [3] et [4].

2. Le théorème

Soit G un groupe compact abélien connexe à base dénombrable. Munissons G de sa tribu borélienne et de sa probabilité de Haar. Soit α un élément fixé de G tel que la rotation $x \to x+\alpha$ soit ergodique.

Soit H une fonction matricielle irréductible de dimension d sur le système ainsi défini.

On suppose qu'à tout t dans G sont associées une application F_t, mesurable et non nulle, de G dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$ et une constante λ_t, de module 1, dépendant mesurablement de t, telles que, pour tout t dans G, on ait :

(1). $H(x+t).F_t(x)=\lambda_t.F_t(x+\alpha).H(x)$ *pour presque tout x*

On a alors :

H est nécessairement une fonction scalaire (c'est-à-dire $d=1$) cohomologue au produit d'une constante et d'un caractère de G. Autrement dit, il existe une fonction b, mesurable et de module 1, sur G, une constante δ, de module 1, et un caractère σ de G tels que :

$$H(x)=\delta.\sigma(x).b(x+\alpha).\overline{b(x)} \quad \textit{pour presque tout } x.$$

On peut remarquer que la réciproque de ce résultat est clairement vérifiée.

3. Un résultat préliminaire

Avant de démontrer le théorème nous sommes amenés à étudier une équation fonctionnelle plus simple : l'équation (1) sans les constantes λ_t. Cette étude est l'objet de la proposition suivante.

Proposition. — *Considérons un groupe G compact abélien à base dénombrable, une rotation ergodique $x \to x+\alpha$ sur G et une fonction matricielle irréductible H sur ce groupe.*

Soit V une partie non négligeable (pour la mesure de Haar de G) dans G. On suppose qu'à tout $t \in V$ est associé une application F_t, mesurable et non nulle, de G dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{C})$, telle que, pour tout $t \in V$, on ait :

(2) $H(x+t).F_t(x)=F_t(x+\alpha).H(x)$ *pour presque tout x.*

On a alors :

H est nécessairement une fonction scalaire (c'est-à-dire $d=1$) cohomologue à une constante. Autrement dit, il existe une fonction b, mesurable et de

module 1, *et une constante* δ, *de module* 1, *telles que :*

$$H(x)=\delta \, . \, b(x+\alpha) \, . \, \overline{b(x)} \quad \textit{pour presque tout } x.$$

Il est clair que la réciproque de cette proposition est vérifiée.

Démonstration de la proposition. — Remarquons tout d'abord que, pour tout $t \in V$, $F_t(x)$ est inversible pour presque tout x.

En effet, on a, d'après (2) :

$$F_t^*(x+\alpha) \, . \, F_t(x+\alpha)=H(x) \, . \, F_t^*(x) \, . \, F_t(x) \, . \, H(x)^{-1}$$

et d'après l'irréductibilité de H, ceci entraîne que $F_t^* F_t$ est scalaire constante et donc que F_t ne diffère d'une matrice unitaire que par une constante multiplicative.

Soit $U(d)$ le groupe des matrices unitaires (d, d).

Posons

$$\mathcal{G}=G \times U(d) \times G \times U(d).$$

Considérons la transformation R de $\mathcal{G}$ définie par :

$$R(x, P, y, Q)=(x+\alpha, H(x) \, . \, P, y+\alpha, H(y) \, . \, Q).$$

La mesure de Haar sur $\mathcal{G}$ est préservée par R.

Soit $L(x)$ une fonction matricielle définie sur G à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, et $V(x, P, y, Q)$ la fonction matricielle définie sur $\mathcal{G}$ par :

$$V(x, P, y, Q)=P^{-1} \, . \, L(x) \, . \, Q.$$

D'après le théorème ergodique, on sait que la suite $(1/N \sum_{n=0}^{N-1} R^n V)_{N>0}$ converge presque-partout vers une fonction matricielle $\tilde{V}$.

L'application $\tilde{V}$ est R-invariante et les formes de L et de R entraînent que $P \, . \, \tilde{V}(x, P, y, Q) \, . \, Q^{-1}$ n'est fonction que de (x, y).

Montrons que l'on peut choisir L de façon que $\tilde{V}$ soit non nulle. On note

$$H^{(n)}(x)=H(x+(n-1)\alpha) \, . \, H(x+(n-2)\alpha) \ldots H(x).$$

On a :

$$R^n[V(x, P, y, Q)]=P^{-1} \, . \, H^{(n)}(x)^{-1} \, . \, L(x+n\alpha) \, . \, H^{(n)}(y) \, . \, Q.$$

Supposons que $\tilde{V}\equiv 0$. on a alors :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H^{(n)}(x)^{-1}.L(x+n\alpha).H^{(n)}(y)$$

converge vers 0 pour presque tout (x, y) dans $G\times G$.

En opérant un changement de variable et en appliquant le théorème de Fubini, on en déduit : pour presque tout t dans G,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H^{(n)}(x)^{-1}.L(x+n\alpha).H^{(n)}(x+t)$$

converge vers 0 pour presque tout x dans G.

En particulier ceci est vrai pour presque tout t dans V.

Or, d'après l'hypothèse (2), on a, pour tout $t\in V$:

$$H^{(n)}(x+t)=F_t(x+n\alpha).H^{(n)}(x).F_t(x)^{-1}.$$

On a donc, pour presque tout t dans V,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H^{(n)}(x)^{-1}.L(x+n\alpha).F_t(x+n\alpha).H^{(n)}(x).F_t(x)^{-1}$$

converge vers 0 pour presque tout x.

Soit, pour presque tout t dans V,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H^{(n)}(x)^{-1}.L(x+n\alpha).F_t(x+n\alpha).H^{(n)}(x)$$

converge vers 0 pour presque tout x.

En appliquant la fonction trace aux termes de cette suite, on obtient, pour presque tout t dans V,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{tr}(L(x+n\alpha).F_t(x+n\alpha))$$

converge vers 0 pour presque tout x.

Or, d'après le théorème ergodique et l'ergodicité de la rotation $x\to x+\alpha$, on a

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{tr}(L(x+n\alpha).F_t(x+n\alpha))=\int_G \operatorname{tr}(L(u).F_t(u))\,du,$$

pour presque tout x (du désigne la mesure de Haar sur G).

On a donc, pour presque tout t dans V,

$$\int_G \operatorname{tr}(L(u) . F_t(u))\, du=0. \tag{3}$$

Supposons que $\tilde{V}=0$ pour tout choix de L.

Soit $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ une base orthonormée de $L^2(G)$. Notons $F_t=(f_t^{ij})_{i\leq i,\, j\leq d}$.

Soient $n\in\mathbb{N}$, $(i_0, j_0)\in[1, d]^2$ et $L=(l_{ij})_{1\leq i,\, j\leq d}$ défini par :

$$l_{ij}=0 \quad \text{si } (i, j)\neq(i_0, j_0) \quad \text{et} \quad l_{i_0 j_0}=\gamma_n.$$

On a :

$$\operatorname{tr}(L(x) . F_t(x))=\gamma_n(x) . f_t^{i_0 j_0}(x).$$

On aurait donc d'après (3), $\int_G \gamma_n(x) . f_t^{i_0 j_0}(x)\, dx=0$ pour presque tout t dans V.

Ceci étant vrai pour tout choix de n et de (i_0, j_0), et l'ensemble des choix possibles étant dénombrable, on aurait pour presque tout t dans V, pour tout n et tout (i_0, j_0),

$$\int_G \gamma_n(x) . f_t^{i_0 j_0}(x)\, dx=0.$$

Ceci entraînerait, pour presque tout t dans V, $F_t=0$.

Or, par hypothèse, V n'est pas négligeable et $F_t\neq 0$ pour tout t dans V.

On arrive ainsi à une contradiction et on peut en conclure qu'en choisissant convenablement L, l'application $\tilde{V}$ n'est pas nulle.

Remarque. — Soit (Y, D, m, S) un système dynamique mesuré tel que $L^2(Y)$ soit séparable. Soit F une fonction matricielle définie sur $Y\times Y$, mesurable et à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On suppose que F est invariante sous $S\times S$. Soit $\mathcal{E}_S$ l'espace engendré par les fonctions propres pour S dans $L^2(Y)$ et $(f_k)_{k\geq 0}$ une base orthonormée de $\mathcal{E}_S$ formée de fonctions S-propres. On a

$$F(x, y)=\sum_{k, k'} \Lambda_{kk'} . f_k(x) . \overline{f_{k'}}(y)$$

où les $\Lambda_{kk'}$ sont des matrices (d, d) constantes et où la somme est prise sur l'ensemble des couples (k, k') tels que f_k et $f_{k'}$ soient associées à la même valeur propre.

Ceci est un résultat bien connu pour les fonctions scalaires invariantes sur $Y \times Y$. Il suffit de l'appliquer à chaque coefficient de F pour justifier cette remarque.

Revenons à la démonstration de la proposition; on suppose que L a été choisi de sorte que $\tilde{V} \not\equiv 0$. Soit S la transformation de $G \times U(d)$ définie par $S(x, P) = (x+\alpha, H(x).P)$.

On a $R = S \times S$ et on sait que $R\tilde{V} = \tilde{V}$.

Soit $(f_k)_{k \geq 0}$ une famille orthonormée maximale de fonctions S-propres dans $L^2(G \times U(d))$. Notons δ_k la valeur propre associée à f_k.

D'après la remarque précédente, on a :

$$\tilde{V}(x, P, y, Q) = \sum_{k, k', \delta_k = \delta_{k'}} \Lambda_{kk'} . f_k(x, P) . \bar{f}_{k'}(y, Q)$$
$$= \sum_{k'} \left(\sum_{k, \delta_k = \delta_{k'}} \Lambda_{kk'} . f_k(x, P)\right) . \bar{f}_{k'}(y, Q).$$

$P . \tilde{V}(x, P, y, Q)$ étant indépendant de P et la famille $(f_{k'})$ étant libre, on a, pour tout k' : $\sum_{k, \delta_k = \delta_{k'}} P . \Lambda_{kk'} . f_k(x, P)$ est une matrice $M_{k'}(x)$ indépendante de P.

Il existe k' tel que $M_{k'} \not\equiv 0$ car $\tilde{V} \not\equiv 0$.

De

$$f_k(x+\alpha, H(x). P) = \delta_k . f_k(x, P)$$

on déduit que

$$M_{k'}(x+\alpha) = H(x). \delta_{k'} . M_{k'}(x).$$

Soit M l'une des matrices $M_{k'}$ non nulles et posons $\delta_{k'} = \delta$.

H étant irréductible et M étant non nulle, l'égalité

$$M(x+\alpha) = \delta . H(x) . M(x)$$

entraîne que $M(x)$ est inversible pour presque tout x.

On a donc $H(x) = \bar{\delta} M(x+\alpha) M(x)^{-1}$; la matrice H est cohomologue à $\bar{\delta} I$. Ceci est contradictoire avec l'irréductibilité à moins que $d = 1$. H est donc en fait une fonction scalaire de module 1.

$M(x)$ est une fonction scalaire $m(x)$ et on a $|m(x+\alpha)| = |m(x)|$, ce qui entraîne que $|m|$ est constante.

On pose $b = m/|m|$ et on obtient $H(x) = \bar{\delta} b(x+\alpha) \overline{b(x)}$.

La proposition est ainsi démontrée.

4. Démonstration du théorème

Reprenons à présent les hypothèses du théorème (*cf.* 2). Pour établir le théorème, on procède en plusieurs étapes :

a) réduction au cas où F_t est à valeurs dans $U(d)$;

b) réduction au cas où $F_t(x)$ est une fonction mesurable du couple (t, x);

c) étude de l'équation $M(x+\alpha)=\mu H(x) M(x) H(x)^{-1}$;

d) réduction au cas où λ_t vérifie, au voisinage de 0, une propriété d'homomorphisme local;

e) passage de la rotation $x \to x+\alpha$ à une rotation arbitraire sur G;

f) étude de certaines fonctions sur $G \times G$ qui vérifient au voisinage de 0 une propriété de bi-homomorphisme;

g) conclusion.

Remarque. — La connexité du groupe n'intervient dans la démonstration qu'à partir du *g*). Le résultat énoncé est également vérifié dans d'autres types de groupes, en particulier les groupes totalement discontinus.

Dans la suite les relations et propriétés énoncées seront en général vraies pour presque tout x. On omettra de le préciser systématiquement.

a) *Réduction au cas unitaire*

Notons F_t^* l'adjoint de F_t. H étant unitaire, (1) entraîne

$$F_t^*(x+\alpha) . F_t(x+\alpha) = H(x) . F_t^*(x) . F_t(x) . H(x)^{-1}.$$

L'irréductibilité de H entraîne alors que $F_t^* F_t$ est scalaire constante : $F_t^* F_t = \alpha_t I$.

Le scalaire α_t est nécessairement un réel positif.

La matrice $(1/\sqrt{\alpha_t}) . F_t$ est unitaire et on peut remplacer dans (1) F_t par $(1/\sqrt{\alpha_t}) . F_t$.

On peut donc supposer que F_t est une fonction matricielle unitaire.

C'est ce qu'on fait dans la suite.

b) *Réduction au cas mesurable*

Notons

$$H^{(n)}(x) = H(x+(n-1)\alpha) . H(x+(n-2)\alpha) \ldots H(x).$$

D'après (1), on a :

$$(4) \qquad F_t(x+n\alpha)=\bar{\lambda}_t^n \, . \, H^{(n)}(x+t) \, . \, F_t(x) \, . \, H^{(n)}(x)^{-1}.$$

Soit L une application mesurable de G dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

Soit S la transformation de $G\times U(d)$ définie par :

$$S(x, P)=(x+\alpha, H(x) \, . \, P).$$

Posons

$$V_t(x, P)=P^{-1} \, . \, L(x) \, . \, F_t(x) \, . \, P.$$

Le théorème ergodique entraîne que :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S^n V_t(x, P)=\tilde{V}_t(x, P)$$

existe presque partout.

$\tilde{V}_t(x, P)$ est nécessairement de la forme $P^{-1} \, . \, \tilde{L}_t(x) \, . \, P$.

$\tilde{V}_t$ étant S-invariant, on a $H^{-1}(x) \, . \, \tilde{L}_t(x+\alpha) \, . \, H(x)=\tilde{L}_t(x)$.

H étant irréductible, on a alors : $\tilde{L}_t$ est scalaire constante.

$$\tilde{L}_t(x)=\mu_{L,t} \, . \, I \qquad \text{où} \quad \mu_{L,t}\in\mathbb{C}.$$

$$(5) \quad \mu_{L,t} \, . \, I$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H^{(n)}(x)^{-1} \, . \, L(x+n\alpha) \, . \, F_t(x+n\alpha) \, . \, H^{(n)}(x)$$

d'où :

$$d \, . \, \mu_{L,t}$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{tr}\left(H^{(n)}(x)^{-1} \, . \, L(x+n\alpha) \, . \, F_t(x+n\alpha) \, . \, H^{(n)}(x)\right)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{tr}\left(L(x+n\alpha) \, . \, F_t(x+n\alpha)\right)$$

$$=\int_G \operatorname{tr}\left(L(x) \, . \, F_t(x)\right) dx$$

d'après le théorème ergodique et l'ergodicité de la rotation $x\to x+\alpha$.

Pour t fixé, on sait que $F_t\not\equiv 0$ et on peut donc trouver L tel que $\mu_{L,t}\neq 0$. On peut même imposer aux coefficients de L d'être des caractères de G.

L'ensemble Γ des matrices (d, d) dont les coefficients sont des caractères de G est dénombrable (6).

Fixons L; d'après (4) et (5) on a :

$$(7)\quad \mu_{L,t}\, I = \left[\lim_N \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \bar{\lambda}_t^n \,.\, H^{(n)}(x)^{-1}\, L(x+n\alpha)\,.\, H^{(n)}(x+t)\right].\, F_t(x).$$

Les différentes hypothèses de mesurabilité effectuées au départ permettent alors d'affirmer que $\mu_{L,t}\,.\,F_t(x)^{-1}$ est une fonction mesurable du couple (t, x).

De plus

$$(8)\qquad |\mu_{L,t}|^2\,.\,I = (\mu_{L,t}\,.\,F_t(x)^{-1})\,.\,(\mu_{L,t}\,.\,F_t(x)^{-1})^*.$$

Donc $|\mu_{L,t}|$ est une fonction mesurable de t.

A chaque L dans Γ on peut associer $\{t \in G \,|\, \mu_{L,t} \neq 0\}$.

On obtient ainsi un recouvrement dénombrable (d'après (6)) et mesurable (d'après (8)) de G. On peut en tirer une partition $(P_L)_{L\in\Gamma}$ mesurable telle que $t\in P_L \Rightarrow \mu_{L,t}\neq 0$.

Pour $t \in P_L$, on pose

$$G_t = \frac{|\mu_{L,t}|}{\mu_{L,t}}\, F_t.$$

$G_t(x)$ est une fonction mesurable du couple (t, x) d'après (7) et (8), G_t est unitaire, et on a :

$$G_t(x+\alpha) = \bar{\lambda}_t\,.\,H(x+t)\,.\,G_t(x)\,.\,H(x)^{-1}.$$

CONCLUSION. — On peut supposer que $F_t(x)$ est une fonction mesurable du couple (t, x).

c) Notons $\mathcal{M}_d(L^2(G))$ l'ensemble des matrices (d, d) à coefficients dans $L^2(G)$. Pour $M, N \in \mathcal{M}_d(L^2(G))$, on pose

$$\langle M, N\rangle = \frac{1}{d}\int_G \operatorname{tr}(M(x)\,.\,N^*(x))\, dx.$$

Ceci définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_d(L^2(G))$ qui en fait un espace de Hilbert. Si $M = (m_{ij})_{1\le i,\, j\le d}$, la norme associée est

$$\|M\| = \frac{1}{\sqrt{d}}\left[\sum_{i,j}\int |m_{ij}|^2(x)\, dx\right]^{1/2}.$$

La convergence correspondant à cette norme est la convergence de chaque coefficient dans $L^2(G)$.

Les matrices unitaires sont de norme 1.

Considérons l'opérateur T de $\mathcal{M}_d(L^2(G))$ défini par :

$$TM(x) = H(x)^{-1}.M(x+\alpha).H(x).$$

C'est un opérateur unitaire. Nous allons montrer que ses espaces propres sont de dimension 1 et sont engendrés par des matrices unitaires.

Soit $M \in \mathcal{M}_d(L^2(G))$, $M \not\equiv 0$, et $\mu \in \mathbf{C}$ tels que $TM = \mu . M$, c'est-à-dire

$$M(x+\alpha) = \mu . H(x).M(x).H(x)^{-1}. \tag{9}$$

T étant unitaire, on a $|\mu| = 1$. D'après (9), on a :

$$M(x+\alpha).M^*(x+\alpha) = H(x).M(x).M^*(x).H(x)^{-1}.$$

H étant irréductible, on en déduit que MM^* est scalaire constante. Ceci entraîne :

Il existe une fonction matricielle unitaire $M_0(x)$ et une constante λ telles que $M(x) = \lambda M_0(x)$.

Les espaces propres de T sont donc engendrés par des fonctions matricielles unitaires.

Si M et M' vérifient :

$$M(x+\alpha) = \mu . H(x).M(x).H(x)^{-1}$$

et

$$M'(x+\alpha) = \mu . H(x).M'(x).H(x)^{-1},$$

on a :

$$M(x+\alpha).M'(x+\alpha)^{-1} = H(x).M(x).M'(x)^{-1}.H(x)^{-1}$$

donc $M.M'^{-1}$ est scalaire constante.

On vérifie ainsi que les espaces propres de T sont de dimension 1.

On choisit dans chaque espace propre une matrice unitaire et on désigne par $U_H(d)$ la famille obtenue.

$U_H(d)$ est un système orthonormal dans $\mathcal{M}_d(L^2(G))$.

Si $M \in U_H(d)$, on désigne par μ_M la valeur propre correspondante.

$L^2(G)$ étant séparable, $\mathcal{M}_d(L^2(G))$ l'est et donc $U_H(d)$ est dénombrable.

On pose

$$\Gamma = \{ \mu_M \mid M \in U_H(d) \}.$$

Γ est un sous-groupe dénombrable du tore.

En conclusion, tout $M \in \mathcal{M}_d(L^2(G))$ vérifiant

$$M(x+\alpha) = \mu . H(x) . M(x) . H(x)^{-1}$$

est proportionnel à un élément de $U_H(d)$.

d) Réduction au cas où $t \to \lambda_t$ est localement un homomorphisme

Les matrices F_t étant unitaires, elles sont dans $\mathcal{M}_d(L^2(G))$ ainsi que les produits de telles matrices.

D'après (1), on a, pour tous t, $s \in G$,

$$\begin{aligned} F_{t+s}(x-s+\alpha) &= \bar{\lambda}_{t+s} . H(x+t) . F_{t+s}(x-s) . H(x-s)^{-1} \\ &= \bar{\lambda}_{t+s} \lambda_t \lambda_s . F_t(x+\alpha) . H(x) . F_t(x)^{-1} \\ &\qquad \times F_{t+s}(x-s) . F_s(x-s)^{-1} . H(x)^{-1} . F_s(x-s+\alpha). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &[F_t(x+\alpha)^{-1} . F_{t+s}(x-s+\alpha) . F_s(x-s+\alpha)^{-1}] \\ &\qquad = \bar{\lambda}_{t+s} \lambda_t \lambda_s . H(x) . [F_t(x)^{-1} . F_{t+s}(x-s) . F_s(x-s)^{-1}] . H(x)^{-1}. \end{aligned}$$

D'après *c*) on en déduit : il existe $\nu_{t,s} \in \mathbb{C}$ et $M_{t,s} \in U_H(d)$ tels que

$$(10) \qquad F_t(x)^{-1} . F_{t+s}(x-s) . F_s(x-s)^{-1} = \nu_{t,s} . M_{t,s}(x)$$

avec

$$\mu_{M_{t,s}} = \bar{\lambda}_{t+s} \lambda_t \lambda_s \in \Gamma$$

et $|\nu_{t,s}| = 1$ car les F_t sont unitaires.

Montrons que si $(t_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite qui tend vers 0 dans G, on peut en extraire une sous-suite (t'_n) telle que $F_{t'_n+s}$ converge vers F_s pour presque tout s (au sens de la norme sur $\mathcal{M}_d(L^2(G))$). Il suffit de la faire coefficient par coefficient au sens de la norme sur $L^2(G)$.

Soit $f(t, x)$ une fonction mesurable bornée sur $G \times G$ (comme c'est le cas des coefficients de $F_t(x)$). –

D'après la continuité en norme $\|.\|_2$ des translations, on a :

$$\iint |f(t_n+s, x)-f(s, x)|^2\, ds\, dx \to_{n\to+\infty} 0$$

Autrement dit, la suite de fonctions

$$\left(s \to \int |f(t_n+s, x)-f(s, x)|^2\, dx\right)$$

converge vers 0 dans $L^1(G)$.

On peut donc extraire une sous-suite (t'_n) de (t_n) telle que cette convergence ait lieu presque partout.

On a bien alors $f(t'_n+s, .) \to_{n\to+\infty} f(s, .)$ dans $L^2(G)$ pour presque tout s.

$U_H(d)$ étant une famille orthonormale et les F_t étant de norme 1 dans $\mathcal{M}_d(L^2(G))$, on peut associer à tout t, une matrice M_t de $U_H(d)$ telle que

$$|\langle F_t, M_t\rangle| = \sup_{M\in U_H(d)} |\langle F_t, M\rangle| \leqslant 1.$$

Soit (t_n) une suite tendant vers 0 dans G. En utilisant ce qui précède, on extrait (t'_n) et on fixe s de sorte que $F_{t'_n+s}$ converge vers F_s. On a alors :

$$1 = \lim |\langle F_{t'_n+s}, F_s\rangle| = \lim \left|\int \operatorname{tr}(F_{t'_n+s}(x-s).F_s(x-s)^{-1})\, dx\right|$$
$$= \lim \left|\int \operatorname{tr}(F_{t'_n}(x).M_{t'_n,s}(x))\, dx\right|$$

d'après (10).

$$1 = \lim |\langle F_{t'_n}, M^*_{t'_n,s}\rangle| \leqslant \lim |\langle F_{t'_n}, M_{t'_n}\rangle|.$$

Ainsi, de toute suite (t_n) tendant vers 0 dans G, on peut extraire (t'_n) telle que

$$\lim |\langle F_{t'_n}, M_{t'_n}\rangle| = 1.$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to 0} |\langle F_t, M_t\rangle| = 1.$$

En remplaçant dans (1) F_t par $(|\langle F_t, M_t\rangle|/\langle F_t, M_t\rangle).F_t$, on obtient :

$$\lim_{t\to 0}\langle F_t, M_t\rangle = 1.$$

On a

$$\lambda_t.F_t(x+\alpha).H(x)=H(x+t).F_t(x)$$

et

$$M_t(x+\alpha)=\mu_{M_t}.H(x).M_t(x).H(x)^{-1}.$$

D'où :

$$\lambda_t\,\mu_{M_t}.F_t(x+\alpha).M_t^*(x+\alpha).H(x)=H(x+t).F_t(x).M_t^*(x).$$

Quitte à remplacer λ_t par $\lambda_t\,\mu_{M_t}$, on peut donc remplacer dans (1) F_t par $F_t\,M_t^*$ (nous n'aurons plus dorénavant à utiliser la mesurabilité de $F_t(x)$ par rapport au couple de variables (t, x)).

On obtient alors :

$$\lim_{t\to 0}\langle F_t, I\rangle = 1.$$

Ceci entraîne, puisque $\|F_t\| = \|I\| = 1$,

$$\lim_{t\to 0}\| F_t - I\| = 0,$$

ce qui est équivalent à : $\lim_{t\to 0} F_t = I$ au sens de la convergence dans $L^2(G)$ de chaque coefficient.

Ces coefficients étant bornés par 1, on a encore : pour tout $p<+\infty$, $\lim_{t\to 0} F_t = I$ au sens de la convergence dans $L^p(G)$ de chaque coefficient.

On a $F_0\equiv I$ et donc $\lambda_0=1$.

D'après (1), on a :

$$(11)\qquad \lambda_t.I=H(x+t).F_t(x).H(x)^{-1}.F_t(x+\alpha)^{-1}.$$

D'autre part, coefficient par coefficient, on a les convergences suivantes dans $L^p(G)$ $(p<+\infty)$:

$$\lim_{t\to 0} H(x+t)=H(x)$$
$$\lim_{t\to 0} F_t(x)=I$$

et

$$\lim_{t\to 0} F_t(x+\alpha)^{-1}=\lim_{t\to 0} F_t(x+\alpha)^*=I$$

On en déduit, d'après (11) : $\lim_{t\to 0}\lambda_t=1$.

On a :

$$\| F_s(x-s)-I\| = \| F_s(x)-I\|$$

et

$$\| F_{t+s}(x-s)-I\| = \| F_{t+s}(x)-I\|$$

et on sait que $\lim_{s\to 0}\| F_s-I\| =0$.

Le même raisonnement que précédemment permet donc d'affirmer :

$$\lim_{s,t\to 0} F_t(x)^{-1}.F_{s+t}(x-s).F_s(x-s)^{-1}=I$$

coefficient par coefficient dans $L^2(G)$.

Autrement dit, d'après (10), $\lim_{s,t\to 0}\nu_{t,s}.M_{t,s}=I$ dans $\mathscr{M}_d(L^2(G))$.

Or $U_H(d)$ est un système orthonormal et on a :

$$\|\nu_{t,s}.M_{t,s}-I\| = \sqrt{2}$$

dès que $M_{t,s}$ n'est pas scalaire constante.

On a donc : il existe un voisinage V de 0 dans G tel que

(12) pour tous t, $s\in V$, $M_{t,s}$ est scalaire constante.

Ceci est équivalent à : pour tous $t,s\in V$, $\mu_{M_{t,s}}=1$. c'est-à-dire, d'après (10), $\lambda_{t+s}=\lambda_t\lambda_s$.

Nous sommes donc arrivés à :

(13) $$\lim_{t\to 0}\lambda_t=1$$

et il existe un voisinage V de 0 dans G tel que, pour tous t, $s\in V$,

(14) $$\lambda_{t+s}=\lambda_t\lambda_s.$$

e) Passage à une rotation arbitraire sur G

Soient t, $s\in G$; considérons la fonction matricielle $D_{s,t}$ définie par :

$$D_{s,t}(x)=F_s(x)^{-1}.F_t(x+s)^{-1}.F_s(x+t).F_t(x).$$

Un calcul simple à partir de (1) montre que $D_{s,t}$ vérifie :

$$D_{s,t}(x+\alpha)=H(x).D_{s,t}(x).H(x)^{-1}.$$

H étant irréductible, on en déduit que $D_{s,t}$ est une matrice scalaire constante : $D_{s,t}(x) = \lambda(s, t).I$.

En résumé, pour tous t, $s \in G$, on a

$$F_s(x+t).F_t(x) = \lambda(s, t).F_t(x+s).F_s(x) \tag{15}$$

On a :

$$\text{pour tout } t \in G,\ \lambda(t, t) = 1 \tag{16}$$

$$\text{pour tous } t, s \in G,\ \lambda(t, s) = \overline{\lambda(s, t)} \tag{17}$$

$$\text{pour tout } t \in G,\ \lim_{s \to 0} \lambda(s, t) = 1 \tag{18}$$

(16) et (17) sont évidents. (18) se montre de la même façon que (13).

Montrons que λ vérifie au voisinage de 0 une propriété d'homomorphisme. Soient t_1, $t_2 \in V$ et $s \in G$.

D'après (15), on a :

$$\lambda(s, t_1+t_2)\,I = F_s(x)^{-1}.F_{t_1+t_2}(x+s)^{-1}.F_s(x+t_1+t_2).F_{t_1+t_2}(x).$$

D'après (10) et (12), on a :

$$F_{t_1+t_2}(x) = \nu_{t_1,t_2}.F_{t_1}(x+t_2).F_{t_2}(x).$$

D'après (15), on a :

$$F_s(x+t_1+t_2) = \lambda(s, t_1)\,\lambda(s, t_2).F_{t_1}(x+s+t_2) \\ \times F_{t_2}(x+s).F_s(x).F_{t_2}(x)^{-1}.F_{t_1}(x+t_2)^{-1}.$$

Par un calcul simple, on déduit de ces trois égalités que

$$\lambda(s, t_1+t_2) = \lambda(s, t_1).\lambda(s, t_2). \tag{19}$$

f) LEMME. — *Soit G un groupe compact abélien, V un voisinage de* 0 *dans G et λ une application de $V \times V$ dans le groupe des complexes de module* 1 *telle que*

(i) *pour tout $t \in V$, $\lambda(t, t) = 1$*

(ii) *pour tous t_1, t_2 et $s \in V$, si $t_1 + t_2 \in V$ alors*

$$\lambda(t_1+t_2, s) = \lambda(t_1, s)\,\lambda(t_2, s)$$

et

$$\lambda(s, t_1+t_2) = \lambda(s, t_1)\,\lambda(s, t_2)$$

(iii) *pour tout* $t \in V$, $\lim_{s \to 0} \lambda(s, t) = \lim_{s \to 0} \lambda(t, s) = 1$.

Sous ces conditions, il existe un voisinage V' *de* 0 *dans* G *tel que pour tous* $t, s \in V'$, $\lambda(t, s) = 1$.

Preuve du lemme. — Montrons tout d'abord ce résultat quand G est un groupe de Lie compact abélien, c'est-à-dire isomorphe au produit d'un tore de dimension finie (m) et d'un groupe fini. Dans ce cas on peut choisir un voisinage simplement connexe V' de 0 tel que $V' \subset V$. Soit $t \in V'$; d'après la structure des tores, il est clair que l'on peut trouver une suite $(t_n)_{n>0}$ dans V' telle que, pour tout $n>0$, $nt_n = t$ et $t_n, 2t_n, \ldots, nt_n \in V'$. On a alors d'après l'hypothèse (ii) : $\lambda(t, t_n) = [\lambda(t_n, t_n)]^n$; d'où, d'après (i) : $\lambda(t, t_n) = 1$. Toujours d'après (ii), l'application $\lambda(t, .)$ vérifie localement une propriété d'homomorphisme. Le voisinage V', étant simplement connexe, peut être considéré comme un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$. Dans $\mathbb{R}^m$ on peut prolonger $\lambda(t, .)$ en un caractère γ_t. Il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que si $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ on sait :

$$\gamma_t(X) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j\right).$$

Or on a $\lim_{n \to +\infty} t_n = 0$ et, pour tout n, $\lambda(t, t_n) = 1$.

Ceci entraîne naturellement que $\gamma_t \equiv 1$.

On a ainsi montré que pour tous $t, s \in V'$, $\lambda(t, s) = 1$.

Revenons au cas d'un groupe compact abélien quelconque G. Nous allons nous ramener à la situation précédente par un passage au quotient. Il existe un voisinage V_1 de 0 dans G tel que $V_1 + V_1 \subset V$. On peut « approcher » le groupe G par un groupe de Lie de la façon suivante : il existe un sous-groupe fermé H de G tel que $H \subset V$ et G/H est un groupe de Lie (*cf.* par exemple Hewitt and Ross [2] théorème 24.7).

Pour $s \in V_1$, notons σ_s la restriction de $\lambda(s, .)$ à H. D'après (ii) et (iii), on sait que σ_s est un caractère de H. On sait également que pour tout t dans H, $\lim_{s \to 0} \sigma_s(t) = 1$. Cette convergence étant dominée par 1, on en déduit que

$$\lim_{s \to 0} \int_H \sigma_s(t)\, dt = 1.$$

Or

$$\int_H \sigma_s(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma_s \not\equiv 1 \\ 1 & \text{si } \sigma_s \equiv 1. \end{cases}$$

Il existe donc un voisinage V_2 de 0 dans G tel que $V_2 \subset V_1$ et pour tout $s \in V_2$, $\sigma_s \equiv 1$.

$V_2 \cap H$ est un voisinage de 0 dans H. Il existe donc un sous-groupe fermé H' de H tel que $H' \subset V_2$ et H/H' est un groupe de Lie.

$(G/H')/(H/H')$ qui est isomorphe à G/H est un groupe de Lie. On en déduit que G/H' est un groupe de Lie.

Soit π la projection canonique de G sur G/H'. Posons $W = \pi(V_2)$. π étant une application ouverte, W est un voisinage de 0 dans G/H'. On définit sur $W \times W$ une application $\tilde{\lambda}$ par $\tilde{\lambda}(\pi(s), \pi(t)) = \lambda(s, t)$. Il faut vérifier que cette application est bien définie : si s', $t' \in H'$ et s, $t \in V_2$, on a :

$$\lambda(s+s', t+t') = \lambda(s, t)\, \lambda(s', t)\, \lambda(s, t')\, \lambda(s', t')$$

d'après (ii). Or

$$\begin{aligned} \lambda(s', t) &= 1 \text{ car } s' \in H' \subset H \text{ et } t \in V_2 \\ \lambda(s, t') &= 1 \text{ car } t' \in H' \subset H \text{ et } s \in V_2 \\ \lambda(s', t') &= 1 \text{ car } t' \in H' \subset H \text{ et } s' \in H' \subset V_2. \end{aligned}$$

$\tilde{\lambda}$ est donc bien définie et vérifie sur $W \times W$ les hypothèses du lemme. G/H' étant un groupe de Lie, on sait, d'après la première partie de la démonstration, qu'il existe un voisinage W' de 0 dans G/H' tel que, pour tous t, $s \in W'$, $\tilde{\lambda}(t, s) = 1$.

Soit $V' = \pi^{-1}(W')$. C'est un voisinage de 0 dans G et, pour tous t, $s \in V'$, $\lambda(t, s) = 1$.

Le lemme est ainsi démontré.

g) Fin de la démonstration du théorème

D'après (16), (17), (18) et (19), on peut appliquer le lemme à la fonction λ, définie sur $V \times V$. On en déduit qu'il existe un voisinage V' de 0 dans G tel que, pour tous t, $s \in V'$, $\lambda(t, s) = 1$. Autrement dit, pour tous t, $s \in V'$,

$$F_s(x+t) \,.\, F_t(x) = F_t(x+s) \,.\, F_s(x). \tag{20}$$

Le groupe G étant supposé connexe, V' engendre tout le groupe.

En particulier, il existe $s_1, s_2, \ldots, s_p \in V'$ tels que $\alpha = s_1 + s_2 + \ldots + s_p$. Posons

$$H'(x) = F_{s_p}(x + s_1 + \ldots + s_{p-1}) \,.\, F_{s_{p-1}}(x + s_1 + \ldots + s_{p-2}) \ldots F_{s_1}(x).$$

Un calcul simple à partir de (3) montre que :

$$H(x+\alpha)=H(x+s_1+\ldots+s_p)$$
$$=\lambda_{s_p}\lambda_{s_{p-1}}\ldots\lambda_{s_1}.H'(x+\alpha).H(x).H'(x)^{-1}.$$

D'où, en posant $\mu=\lambda_{s_p}\lambda_{s_{p-1}}\ldots\lambda_{s_1}$,

$$\mu.H(x).[H'(x)^{-1}.H(x)].H(x)^{-1}=H'(x+\alpha)^{-1}.H(x+\alpha).$$

D'après l'étude du *c*), on en déduit : il existe $M\in U_H(d)$ et ν constante de module 1 tels que : $H(x)=\nu H'(x)M(x)$. On a $\mu=\mu_M$.

Montrons que ceci entraîne l'irréductibilité de H' ; on va utiliser le critère (1)-iii)).

Soit φ une fonction matricielle mesurable sur G telle que :

$$\varphi(x+\alpha)=H'(x).\varphi(x).H'(x)^{-1}.$$

On a :

$$\varphi(x+\alpha)=H(x).M(x)^{-1}.\varphi(x).M(x).H(x)^{-1}.$$

Or :

$$M(x).H(x)^{-1}=\bar{\mu}_M.H(x)^{-1}.M(x+\alpha).$$

D'où :

$$M^{-1}(x+\alpha).\varphi(x+\alpha)=\bar{\mu}_M.H(x).M^{-1}(x).\varphi(x).H(x)^{-1}.$$

Ce qui entraîne, d'après l'étude du *c*), que $M^{-1}.\varphi$ est proportionnel à M^{-1}, et donc que φ est une matrice scalaire constante.

L'irréductibilité de H' est ainsi vérifiée.

Un calcul simple à partir de (15) montre que : pour tout $t\in V'$,

$$H'(x+t)=F_t(x+\alpha).H'(x).F_t(x)^{-1}.$$

On peut alors appliquer la proposition et on en déduit que $d=1$ et qu'il existe une fonction b sur G, de module 1, et une constante δ, telles que $H'(x)=\delta b(x+\alpha)\overline{b(x)}$.

On a d'autre part $H=\nu.H'.M$ où $M\in U_H(1)$, c'est-à-dire que M est proportionnel à un caractère σ de G.

On a finalement : $H(x)=\delta'.\sigma(x)b(x+\alpha)\overline{b(x)}$ où δ' est une constante de module 1.

La démonstration du théorème est ainsi achevée.

RÉFÉRENCES

[1] CONZE (J. P.) et LESIGNE (E.). — Théorèmes ergodiques pour des mesures diagonales. Bull. Soc. math. France, t. 112 (1984), p. 143-175.

[2] HEWITT (E.) et ROSS (K. A.). — Abstract harmonic analysis. Springer Verlag. Berlin (1963).

[3] ISMAGILOV (R. S.). — Sur les cycles irréductibles liés aux systèmes dynamiques. Funct. analysis, T 3. V 3-(1969), 92-95.

[4] LESIGNE (E.). — Convergence de moyennes ergodiques pour des mesures diagonales. Thèse de 3e cycle. Université Rennes I.