BULLETIN DE LA S. M. F.

PATRICE ASSOUAD

Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 429-448
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__429_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 429-448.

PLONGEMENTS LIPSCHITZIENS DANS $\mathbb{R}^n$

PAR

PATRICE ASSOUAD (*)

RÉSUMÉ. — Un plongement Lipschitzien d'un espace métrique (X, d) dans un autre espace métrique (Y, δ) est une application $f : X \to Y$ telle que :

$$\exists A, B \in]0, +\infty[, \forall x, x' \in X, \quad Ad(x, x') \leqslant \delta(f(x), f(x')) \leqslant Bd(x, x').$$

Nous indiquons ici trois méthodes de construction d'un plongement Lipschitzien de l'espace métrique $(\mathbb{R}^k, \| \ \|^p)$ dans un espace métrique $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$.

L'une de ces méthodes permet, pour $k = 1$, de minimiser le rang d'un tel plongement (c'est-à-dire de trouver la valeur minimale de l'entier n).

ABSTRACT. — A Lipschitz embedding of a metric space (X, d) into another one (Y, δ) is an application $f : X \to Y$ such that :

$$\exists A, B \in]0, +\infty[, \forall x, x' \in X, \quad Ad(x, x') \leqslant \delta(f(x), f(x')) \leqslant Bd(x, x').$$

We describe here three methods to obtain Lipschitz embeddings of the metric space $(\mathbb{R}^k, \| \ \|^p)$ into some metric space $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$.

The third method allows us to minimize, for $k = 1$, the rank of such an embedding (i.e. to obtain the minimal value of the integer n).

Introduction

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est appelée un *plongement Lipschitzien de* (X, d) *dans* (Y, δ) s'il existe deux nombres $A, B \in]0, +\infty[$ tels qu'on ait

$$A\, d(x, x') \leqslant \delta(f(x), f(x')) \leqslant B\, d(x, x')$$

(*) Texte reçu le 17 mai 1983.

P. ASSOUAD, Université de Paris Sud, Centre d'Orsay, Département de Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay, Cedex.

0249-633X/83/04 429 20 $ 4.00 © Gauthier-Villars.

quels que soient $x, x' \in X$ (lorsqu'on veut être plus précis, on dit que f est un *plongement* (A, B)*-Lipschitzien de* (X, d) *dans* (Y, δ)).

A ce propos, quelques problèmes me semblent intéressants :

— comment reconnaître s'il existe, pour un espace métrique donné (X, d), un entier n et un plongement Lipschitzien de (X, d) dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$?

— si c'est le cas, calculer le rang de (X, d) (c'est-à-dire minimiser n);

— étudier comment décroît, lorsque n croît vers $+\infty$, la distortion de (X, d) dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ $\left(\text{c'est-à-dire la borne inférieure de } \operatorname{Log}\left(\frac{B}{A}\right) \text{ pour tous les plongements Lipschitziens de } (X, d) \text{ dans } (\mathbb{R}^n, \| \ \|)\right)$.

Dans le présent travail, nous étudierons surtout, de ce point de vue, l'espace métrique $(\mathbb{R}^k, \| \ \|^p)$:

(*a*) nous indiquons trois méthodes de plongement de $(\mathbb{R}^k, \| \ \|^p)$ dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$:

— la première méthode (très simple, mais qui ne donne pas une bonne évaluation du rang ni de la distortion) peut, en particulier, être effectuée à l'aide de séries lacunaires ou de la base de Schauder;

— la seconde méthode, qui généralise la précédente, permet de plonger l'espace (X, d^p) dans un espace $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$, quel que soit le nombre $p \in]0, 1[$, pour tout espace métrique (X, d) de dimension métrique finie (ces espaces sont étudiés notamment dans [1]);

— la troisième méthode utilise des courbes de Von Koch généralisées (de fait cette méthode étend l'observation, due à Glaeser [5] p. 57, que la courbe classique de H. Von Koch [7] réalise un plongement Lipschitzien de l'espace $([0,1], \| \ \|^{\operatorname{Log}3/\operatorname{Log}4})$ dans $(\mathbb{R}^2, \| \ \|)$).

(*b*) Nous montrons que cette troisième méthode permet, au moins pour $k = 1$, d'obtenir la valeur exacte du rang de l'espace $([0, 1]^k, \| \ \|^p)$.

Voici donc comment se subdivise ce travail :

Paragraphe 1 Base de Schauder et séries lacunaires.
Paragraphe 2 Dimension métrique et plongement.
Paragraphe 3 Courbes de Von Koch généralisées.
Paragraphe 4 Rang de l'espace $([0, 1]^k, \| \ \|^p)$.

Remerciements

Ce travail fut d'abord écrit en anglais (mars 1981); je tiens à exprimer ma gratitude envers ceux qui m'ont encouragé à lui donner la forme présente.

Notations

— Soit k un entier $\geqslant 1$; on note alors toujours $\| \ \|$ la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^k$.

— Soit $p \in]0, 1]$; si T est une partie d'un espace Euclidien $(E, \| \ \|)$, on note $(T, \| \ \|^p)$ l'ensemble T muni de la distance $s, t \to \|s - t\|^p$

(il s'agit bien d'un espace métrique, non d'un espace normé).

— Soit $b \in]0, +\infty[$; une partie T d'un espace métrique (X, d) est dite *b-discernable* (resp. de diamètre $\leqslant b$) si on a $d(s, t) > b$ (resp. $d(s, t) \leqslant b$) pour tout couple (s, t) de points distincts de T.

— Soient x et y deux nombres réels; nous écrirons alors :

$x \wedge y$ pour Inf (x, y), $x \vee y$ pour Sup (x, y), et x^+ pour Sup $(x, 0)$.

1 Base de Schauder et séries lacunaires

Nous allons indiquer d'abord *une construction assez générale* (elle peut s'effectuer à l'aide de la base de Schauder ou de séries lacunaires, ainsi qu'on le verra ensuite; elle s'appliquera également au paragraphe 2) :

(1.1) (*a*) Soit φ une application d'un espace (X, d) dans un espace de Hilbert $(E, \| \ \|)$, et soient $\tau \in]0,1[$ et $A, B, c \in]0, +\infty[$; on dit que φ est un *plongement local* (τ, A, B, c)*-contrôlé de* (X, d) *dans* $(E, \| \ \|)$ si elle vérifie les conditions suivantes, quels que soient $s, t \in X$:

(*a*1) $\tau c < d(s, t) \leqslant c$ implique $\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \geqslant A$;

(*a*2) $\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leqslant B(d(s, t) \wedge 1)$;

(*b*) soit $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite, périodique de période $2N$, d'éléments d'un espace Euclidien $(F, \| \ \|)$; on dit que $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une *base cyclique de* $(F, \| \ \|)$ si $(v_1, \ldots, v_{2N})$ est une base orthonormale de $(F, \| \ \|)$.

PROPOSITION 1.2. — *Soient* $\tau, p \in]0, 1[$ *et* $A, B, c \in]0, +\infty[$. *Soit* (X, d) *un espace métrique, où on distingue un point* 0, *et soit* $(E, \| \ \|)$ *un espace de Hilbert.*

Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, *on se donne un plongement local* φ_j, (τ, A, B, c)*-contrôlé et nul en* 0, *de l'espace* $(X, \tau^{-j}d)$ *dans* $(E, \| \ \|)$. *On se donne aussi une base cyclique* $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ *d'un espace Euclidien* $(F, \| \ \|)$ *de dimension* $2N$.

Pour chaque $s \in X$, on pose $f(s) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$. On a alors :

$$B\left(\frac{c^{-p}}{1-\tau^p} + \frac{c^{1-p}}{1-\tau^{1-p}}\right) d^p(s, t) \geqslant \| f(s) - f(t) \|$$
$$\geqslant \left[Ac^{-p} - B\left(\frac{c^{-p}}{1-\tau^p}\tau^{Np} + \frac{c^{1-p}}{1-\tau^{1-p}}\tau^{N(1-p)}\right)\right] d^p(s, t).$$

En particulier, l'application f est un plongement Lipschitzien de (X, d^p) dans $(E \otimes F, \| \ \|)$, dès que N est assez grand pour qu'on ait $\frac{A}{B} > \frac{\tau^{Np}}{1-\tau^p} + c\frac{\tau^{N(1-p)}}{1-\tau^{1-p}}$ ($E \otimes F$ est muni du produit tensoriel des structures Hilbertiennes de E et de F).

Démonstration. — Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, on note f_j l'application $s \to \tau^{ip}\varphi_j(s) \otimes v_j$. On a $f(0) = 0$; la majoration de $\| f(s) - f(t) \|$ que nous nous proposons d'établir suffira donc à montrer la convergence de la série $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$. Soit (s, t) un couple de points distincts de X, et soit l un entier tel que $\tau^{l+1} < \frac{1}{c} d(s, t) \leqslant \tau^l$.

(*a*) (*Majoration*). On a alors :

$$\begin{aligned}
\| f(s) - f(t) \| &\leqslant \textstyle\sum_{j \geqslant l+1} \| f_j(s) - f_j(t) \| + \sum_{j \leqslant l} \| f_j(s) - f_j(t) \| \\
&\leqslant \textstyle\sum_{j \geqslant l+1} B\tau^{jp} + \sum_{j \leqslant l} B\tau^{j(p-1)} d(s, t) \\
&\leqslant B\left(\frac{1}{1-\tau^p}\tau^{(l+1)p} + \frac{d(s, t)}{1-\tau^{1-p}}\tau^{l(p-1)}\right) \\
&\leqslant B\left(\frac{c^{-p}}{1-\tau^p} + \frac{c^{1-p}}{1-\tau^{1-p}}\right) d^p(s, t).
\end{aligned}$$

(*b*) (*Minoration*). On a aussi :

$$\begin{aligned}
\| f(s) - f(t) \| &\geqslant \| \textstyle\sum_{-N < j-l \leqslant N} (f_j(s) - f_j(t)) \| \\
&\qquad - \textstyle\sum_{j-l > N} \| f_j(s) - f_j(t) \| - \sum_{j-l \leqslant -N} \| f_j(s) - f_j(t) \| \\
&\geqslant \| f_l(s) - f_l(t) \| - \textstyle\sum_{j-l > N} B\tau^{jp} + \sum_{j-l \leqslant -N} B\tau^{j(p-1)} d(s, t) \\
&\geqslant A\tau^{lp} - B\left(\frac{1}{1-\tau^p}\tau^{(N+l+1)p} + \frac{d(s, t)}{1-\tau^{1-p}}\tau^{(l-N)(p-1)}\right) \\
&\geqslant \left[Ac^{-p} - B\left(\frac{c^{-p}}{1-\tau^p}\tau^{Np} + \frac{c^{1-p}}{1-\tau^{1-p}}\tau^{N(1-p)}\right)\right] d^p(s, t). \quad \square
\end{aligned}$$

Précisons un peu la Proposition précédente :

(1.3) (*a*) Si E est de dimension M, on a donc obtenu un plongement Lipschitzien de l'espace (X, d^p) dans $(\mathbb{R}^{2NM}, \| \ \|)$; mais $2NM$ n'est pas une bonne évaluation du rang de l'espace (X, d^p), ainsi qu'on le verra au paragraphe 4.

(*b*) On peut noter que la construction ci-dessus ne fonctionne pas bien lorsque p tend vers 1 (même lorsque, pour $p = 1$, le plongement est trivial).

(*c*) Soit $m \in \mathbb{Z}$; si T est une partie de diamètre $\leqslant c\tau^m$ de l'espace (X, d), alors l'application $s \to \sum_{j \geqslant m} \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$ est un plongement Lipschitzien de l'espace (T, d^p) dans $(E \otimes F, \| \ \|)$, dès que N est assez grand.

(*d*) Soit $m \in \mathbb{Z}$; si T est une partie $c\tau^m$-discernable de l'espace (X, d), alors l'application $s \to \sum_{j < m} \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$ est un plongement Lipschitzien de l'espace (T, d^p) dans $(E \otimes F, \| \ \|)$, dès que N est assez grand ((*c*) et (*d*) se démontrent exactement comme la Proposition 1.2, mais en tenant compte des valeurs que peut prendre l).

1.4. COROLLAIRE. — *Soient* $\tau, p \in]0, 1[$ *et* $A, B, c \in]0, +\infty[$. *Soit* φ *un plongement local* (τ, A, B, c)*-contrôlé de* $\mathbb{R}^k$ *dans un espace Euclidien* $(E, \| \ \|)$ *et soit* $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ *une base cyclique d'un espace Euclidien* $(E, \| \ \|)$ *de dimension* $2N$.

Pour chaque $s \in \mathbb{R}^k$, *on pose* $f(s) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{jp} \varphi(\tau^{-j} s) \otimes v_j$. *Alors* f *est un plongement Lipschitzien de* $(\mathbb{R}^k, \| \ \|^p)$ *dans* $(E \otimes F, \| \ \|)$, *dès que* N *est assez grand.*

Démonstration. — En ffet, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, l'application $\varphi_j : s \to \varphi(\tau^{-j} s)$ est un plongement local (τ, A, B, c)-contrôlé de l'espace $(\mathbb{R}^k, \tau^{-j} \| \ \|)$ dans $(E, \| \ \|)$. □

Indiquons quelques *exemples de plongements locaux de* $\mathbb{R}$ *dans un espace Euclidien :*

(1.5) Fixons $\tau \in]0, 1[$ et prenons $E = \mathbb{C}$ (considéré comme un espace Euclidien de dimension 2 sur $\mathbb{R}$). La fonction $\varphi : s \to \exp(is) - 1$ est alors un plongement local $(\tau, A, 2, c)$-contrôlé de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

$$\left(\text{en prenant par exemple } c = \frac{2\pi}{1+\tau} \text{ et } A = |\varphi(c\tau)|\right).$$

On peut donc en particulier plonger $([0, 1], \| \ \|^p)$ dans un espace Euclidien à l'aide d'une *série de Fourier lacunaire* à coefficients vectoriels convenables.

(1.6) Fixons $\tau \in]0, 1[$ et prenons $E = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ (la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sera notée (e_1, e_2)). Pour chaque $j \in \mathbb{Z}$ et chaque $z \in D_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$, on note $\Delta_{j,z}$ la

fonction $s \to (1 - |1 + 2^{j+1}(z - s)|)^+$ (*base de Schauder*). Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{ 0 \}$; la fonction

$$\varphi_\lambda = \sum_{r \text{ pair}} e_1 \otimes (e_1 \Delta_{0,r} + \lambda e_2 \Delta_{1,r/2}) + \sum_{r \text{ impair}} e_2 \otimes (e_1 \Delta_{0,r} + \lambda e_2 \Delta_{1,r/2})$$

est alors un plongement local (τ, A, B, c)-contrôlé de $\mathbb{R}$ dans E, pour des valeurs convenables de A, B, c (car φ_λ est injective sur tout intervalle de longueur < 1, bornée, Lipschitzienne et périodique).

1.7. COROLLAIRE. — *Prenons, en particulier,* $\tau = \frac{1}{4}$ *et* $\lambda = 2^{-p}$. *Le plongement f de $(\mathbb{R}, \| \|^p)$ dans un espace Euclidien construit à l'aide du plongement local φ_λ peut alors s'écrire $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{z \in D_j} 2^{-jp} u'_{j,z} \otimes v'_j \Delta_{j,z}$, où la suite $(v'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ (resp., pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, la suite $r \to u'_{j,r2^{-j}}$) est une base cyclique d'un espace Euclidien F' (resp. E') de dimension convenable.*

Démonstration. — On pose, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, $v'_{2j} = e_1 \otimes v_j$ et $v'_{2j+1} = e_2 \otimes v_j$; de plus, pour chaque $z \in D_j$, on pose $u'_{j,z} = e_1$ si $z2^j$ est pair, et $u'_{j,z} = e_2$ sinon. La suite $(v'_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est donc une base cyclique de $F' = \mathbb{R}^2 \otimes F$; d'autre part, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, la suite $r \to u'_{j,r2^{-j}}$ est une base cyclique de $E' = \mathbb{R}^2$.

On vérifie immédiatement que le plongement f est de la forme annoncée. □

Nous allons voir, dans le prochain paragraphe, que le procédé de plongement indiqué en 1.2 est susceptible de s'appliquer à des espaces métriques assez généraux.

2 Dimension métrique et plongement

(2.1) On dit qu'un espace métrique (X, d) est (C, s)-*homogène* si on a $|Y \cap Z| \leqslant C\left(\frac{b}{a}\right)^s$, quels que soient $a, b \in]0, +\infty[$ $(a < b)$ et quel que soit Y (resp. Z) a-discernable (resp. de diamètre $\leqslant b$) dans l'espace (X, d). La *dimension métrique de* (X, d) (qui est notée Dim (X, d)) est la borne inférieure des nombres réels $s \geqslant 0$ tels que, pour un certain $C \in]0, +\infty[$, l'espace (X, d) soit (C, s)-homogène.

Cette notion de dimension métrique (il y en a d'autres) est ancienne, puisqu'elle remonte à un article de G. BOULIGAND [3] (1928). Les résultats qui vont suivre sont plus récents, et figurent dans ma thèse [1] (1977).

(2.2) (*a*) la dimension métrique de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ est égale à n (quel que soit $n \in \mathbb{N}$);

(*b*) la dimension métrique de (X, d^p) est égale à $\frac{1}{p}$ Dim (X, d) (pour tout $p \in]0, 1]$);

(*c*) si f est un plongement Lipschitzien de (X, d) dans (Y, δ), on a alors Dim $(X, d) \leqslant$ Dim (Y, δ).

Il résulte de (*a*) et de (*c*) que, si (X, d) admet un plongement Lipschitzien dans un espace $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$, alors l'espace (X, d^p) est de dimension métrique finie, quel que soit $p \in]0, 1[$. Nous nous proposons d'établir une sorte de réciproque à cette observation. Nous aurons besoin de deux Lemmes.

(2.3) Soient (X, d) un espace métrique, b un nombre réel > 0 et M un entier $\geqslant 2$; on appelle *(M, b)-coloriage de (X, d)* toute application $k : X \to \{ 1, \ldots, M \}$ telle que $d(s, s') \leqslant b$ implique $k(s) \neq k(s')$, quels que soient $s, s' \in X$ $(s \neq s')$.

Comme on le sait (Brooks [4]), tout graphe de degré $< M$ possède un M-coloriage. Cela peut se reformuler ainsi :

2.4. Lemme. — *Soient (X, d) un espace métrique, b un nombre réel > 0 et M un entier $\geqslant 2$. On suppose qu'on a $|\{ x \in X | \ d(x, s) \leqslant b \}| \leqslant M$, quel que soit $s \in X$.*

L'espace (X, d) admet alors un (M, b)-coloriage.

Démonstration. On munit X d'un bon ordre en l'identifiant à l'ensemble des ordinaux de cardinal $<$ Card (X); pour chaque $\alpha \in X$, on pose $X_\alpha = \{ \beta \in X | 0 \leqslant \beta < \alpha \}$.

(*a*) Fixons $\alpha \in X$ et supposons défini un (M, b)-coloriage k_α de (X_α, d); soit V l'ensemble des valeurs prises par k_α sur $\{ \beta \in X_\alpha | \ d(\beta, \alpha) \leqslant b]$; on peut choisir un élément m de $\{ 1, \ldots, M \} \backslash V$; on définit alors un (M, b)-coloriage $k_{\alpha+1}$ de $(X_{\alpha+1}, d)$ prolongeant k_α en posant $k_{\alpha+1}(\alpha) = m$.

(*b*) Cela permet de définir inductivement, pour chaque $\alpha \in X$, un (M, b)-coloriage k_α de (X_α, d) de façon que k_α prolonge k_β, quels que soient $\alpha \in X$ et $\beta \in X_\alpha$.

L'application $k : X \to \{ 1, \ldots, \}$ qui prolonge chacun des k_α est alors un (M, b)-coloriage de (X, d). □

2.5. Lemme. — *Soient (X, d) un espace métrique, Y un 1-réseau de (X, d) (c'est-à-dire une partie 1-discernable maximale), b un nombre réel > 8 et M un entier $\geqslant 2$.*

On note $(e_1, ..., e_M)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^M$. *Soit* k *un* (M, b)*-coloriage de* (Y, d). *Alors l'application* $\varphi : s \to \sum_{y \in Y} (2 - d(s, y))^+ e_{k(y)}$ *est un plongement local* (τ, A, B, c)*-contrôlé de* (X, d) *dans* $(\mathbb{R}^M, \| \ \|)$, *pour* $c = b - 4$, $\tau = \frac{4}{c}$, $A = \sqrt{2}$ *et* $B = 4M$.

Démonstration. — Pour chaque $y \in Y$, on note Δ_y l'application $s \to (2 - d(s, y))^+$.

Pour chaque $s \in X$, on pose $B_s = \{ y \in Y \mid \Delta_y(s) \neq 0 \}$.

(*a*) Soient $s, t \in X$ avec $4 < d(s, t) \leqslant b - 4$. Alors les ensembles B_s et B_t sont disjoints et le coloriage k est injectif sur $B_s \cup B_t$. On a donc :

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\|^2 \geqslant \operatorname{Sup} \{ \Delta_y^2(s) + \Delta_z^2(t) \mid y \in B_s, z \in B_t \} \geqslant 2.$$

(*b*) Soient $s, t \in X$. Pour chaque $y \in Y$, on a $|\Delta_y(s) - \Delta_y(t)| \leqslant 2(d(s, t) \wedge 1)$.

Or on a $|B_s \cup B_t| \leqslant 2M$ (car k est injectif sur B_s et sur B_t). On a donc :

$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\| \leqslant \sum_{y \in B_s \cup B_t} |\Delta_y(s) - \Delta_y(t)| \leqslant 4M(d(s, t) \wedge 1). \quad \square$$

Nous arrivons maintenant au résultat que nous avions en vue :

2.6. Proposition. — *Soit* (X, d) *un espace métrique de dimension métrique finie et soit* $p \in]0, 1[$. *Il existe alors un entier* $n \geqslant 0$ *et un plongement Lipschitzien de l'espace* (X, d^p) *dans l'espace Euclidien* $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$.

Démonstration. — (*a*) On choisit $C \in]0, +\infty[$ et $s \in]0, +\infty[$ tels que l'espace (X, d) soit (C, s)-homogène. Soit τ un élément de $]0, 1[$; on pose $c = \frac{4}{\tau}$, $b = c + 4$, $A = \sqrt{2}$, $M = C(2b)^s$ et $B = 4M$. Enfin nous allons distinguer un point 0 dans X.

(*b*) Fixons $j \in \mathbb{Z}$. L'espace $(X, \tau^{-j}d)$ est, lui aussi, (C, s)-homogène. Soit Y_j un 1-réseau de $(X, \tau^{-j}d)$; on a donc $|\{ y \in Y_j \mid \tau^{-j}d(y, z) \leqslant b \}| \leqslant M$, quel que soit $z \in Y_j$. L'espace $(Y_j, \tau^{-j}d)$ admet donc un (M, b)-coloriage (voir 2.4) et il existe donc un plongement local φ_j, (τ, A, B, c)-contrôlé, de l'espace $(X, \tau^{-j}d)$ dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^M, \| \ \|)$ (voir 2.5). Quitte à remplacer φ_j par $\varphi_j - \varphi_j(0)$, on peut même supposer que φ_j est nul en 0.

(*c*) On a donc obtenu, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, un plongement local φ_j, (τ, A, B, c)-contrôlé et nul en 0, de $(X, \tau^{-j}d)$ dans $(\mathbb{R}^M, \| \ \|)$. Soit $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une base cyclique d'un espace Euclidien $(F, \| \ \|)$. Si la dimension de F est assez grande, alors l'application $f : s \to \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{jp} \varphi_j(s) \otimes v_j$ est un plongement Lipschitzien de l'espace (X, d^p) dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^M \otimes F, \| \ \|)$ (voir 1.2). $\square$

3. Courbes de Von Koch généralisées

La construction que nous allons écrire généralise, comme on le verra, celle de la courbe de Von Koch classique [7]; c'est ce qui justifie notre terminologie.

3.1. Soient l un entier $\geqslant 2$, η un élément de $]0, 1[$, ψ un élément de $[0, \pi[$, K une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et a_0 et a_l deux points distincts de K.

Nous appellerons *chaîne de Von Koch de longueur l, d'échelle η, de souplesse $\leqslant \psi$ et de maille (a_0, K, a_l) dans $\mathbb{R}^n$* toute famille $T = (T_0, ..., T_{l-1})$ d'isométries de l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(*a*) pour chaque $r = 0, ..., l-1$, l'ensemble $\eta T_r(K)$ (noté K_r) est inclus dans K;

(*b*) on a $\eta T_0(a_0) = a_0$ et $\eta T_{l-1}(a_l) = a_l$;

(*c*) pour chaque $r = 1, ..., l-1$, le point $\eta T_r(a_0)$ (noté a_r) est égal à $\eta T_{r-1}(a_l)$;

(*d*) pour chaque $r = 1, ..., l-1$, on a

$$(x - a_r \mid y - a_r) + \|x - a_r\| \, \|y - a_r\| \cos \psi \leqslant 0,$$

quels que soient $x \in K_{r-1}$ et $y \in K_r$;

(*e*) K_r et $K_{r'}$ sont disjoints, quels que soient $r, r' \in \{0, ..., l-1\}$ avec $|r - r'| \geqslant 2$.

La suite $(a_0, K_0, a_1, K_1, ..., a_{l-1}, K_{l-1}, a_l)$ est appelée le *support*, les points $a_0, ..., a_l$ les *sommets* et les ensembles $K_0, ..., K_{l-1}$ les *maillons* de la chaîne T.

Chaque chaîne de Von Koch va permettre la construction suivante :

3.2. Soit $T = (T_0, ..., T_{l-1})$ une chaîne de Von Koch de longueur l, d'échelle η, de souplesse $\leqslant \psi$ et de maille (a_0, K, a_l) dans $\mathbb{R}^n$.

(*a*) Pour chaque entier $j \geqslant 1$, on note D_j^l l'ensemble des nombres réels t de la forme $t = \sum_{i=1}^{j} r_i l^{-i}$ avec $r_1, r_2, ..., r_j \in \{0, ..., l-1\}$. On note D^l la réunion des ensembles D_j^l (pour $j \geqslant 1$). Pour chaque $r = 0, ..., l-1$, on pose $S_r = \eta T_r$.

(*b*) Pour chaque entier $j \geqslant 1$ et chaque élément $t = \sum_{i=1}^{j} r_i l^{-i}$ de D_j^l (avec $r_1, ..., r_j \in \{0, ..., l-1\}$), on pose $f_j(t) = S_{r_1} S_{r_2} ... S_{r_j}(a_0)$.

(*c*) Pour chaques entiers j, k (avec $j \leqslant k$), l'application f_k prolonge évidemment l'application f_j (puisqu'on a $S_0(a_0) = a_0$, voir 3.1 *b*); on note f_T l'application de D^l dans $\mathbb{R}^n$ qui est égale à f_j sur D_j^l, quel que soit l'entier $j \geqslant 1$;

l'ensemble $\gamma_T = f_T(D^l)$ est alors appelé *courbe de Von Koch généralisée relative à la chaîne T.*

Il y a un abus de langage à appeler γ_T une courbe; mais nous allons montrer que l'adhérence de γ_T est effectivement une courbe, et, plus précisément, que le prolongement par continuité de f_T à $[0, 1]$ est, pour un certain $p \in]0, 1[$, un plongement Lipschitzien de $([0, 1], \| \ \|^p)$ dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$.

Avant de démontrer cela, indiquons quelques exemples de chaînes de Von Koch :

3.3. Identifions l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^2, \| \ \|)$ à $\mathbb{C}$, et fixons $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$; on pose $a_0 = 1 + e^{i\theta}$, $a_1 = 0$, $a_2 = -\bar{a}_0$ et on note K le triangle de sommets a_0, a_1, a_2, K_0 le triangle de sommets $a_0, a_0 - 1, a_1$ et K_1 le triangle de sommets $a_1, a_2 + 1, a_2$. Visiblement, il existe une chaîne de Von Koch et une seule maille (a_0, K, a_2) et ayant pour support la suite $(a_0, K_0, a_1, K_1, a_2)$; c'est une chaîne T de longueur 2, d'échelle $\left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right)^{-1}$ et de souplesse $\leqslant 2\theta$ dans $\mathbb{R}^2$.

(*a*) En particulier, pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, la courbe γ_T est l'ensemble des points à paramètre dyadique de la *courbe de Von Koch classique* (voir [7]).

(*b*) Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ce que nous nous sommes interdit), la souplesse ne serait plus bornée et γ_T serait l'ensemble des points à paramètre dyadique d'une courbe de Peano remplissant K.

Nous allons construire *une classe assez large de chaînes de Von Koch* :

3.4. Soient n un entier $\geqslant 1$ et $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(*a*) Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$; on pose $S(\theta) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = \operatorname{tg} \theta, (x \mid e_1) = 0 \}$; et on note $D(\theta)$ l'enveloppe convexe de $S(\theta) \cup \{ e_1, -e_1 \}$.

(*b*) On dit que deux points x et y de $\mathbb{Z}^n$ sont adjacents si on a $\|x - y\| = 1$.

(*c*) Soit X une partie de $\mathbb{Z}^n$. Une suite $\gamma = (x_0, ..., x_l)$ de points distincts de X est appelée un *chemin de longueur l joignant x_0 à x_l dans X* si x_{r-1} et x_r sont adjacents, quel que soit $r = 1, ..., l$.

3.5. LEMME. — *Soient $k_1, ..., k_n$ des entiers $\geqslant 0$. On pose*

$$X = \prod_{i=1}^n \{0, ..., 2k_i\} \text{ et } a = 2 \sum_{i=1}^n k_i e_i.$$

Il existe alors un chemin γ de longueur $2l$ joignant 0 à a dans X, quel que soit l'entier l vérifiant $\sum_{i=1}^n k_i \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}[\prod_{i=1}^n (2k_i+1)-1]$.

Démonstration (récurrence sur $\sum_{i=1}^n k_i$). — Soient $k_1, ..., k_n$ des entiers $\geqslant 0$ et supposons le résultat démontré pour tous $k'_1, ..., k'_n$ avec $\sum_{i=1}^n k'_i < \sum_{i=1}^n k_i$.

(*a*) Nous allons supposer $k_1 \geqslant 1$ (quitte à permuter les coordonnées) et poser $m_2 = \sum_{i=2}^n k_i$, $M_2 = \frac{1}{2}[\prod_{i=2}^n (2k_i+1)-1]$, $m_1 = m_2 + k_1 \dot{-} 1$, $M_1 = \frac{1}{2}[(2M_2+1)(2k_1-1)-1]$ et enfin $m = m_1 + 1$, $M = M_1 + 2M_2 + 1$. On note X_1 (resp. X_2, resp. X_3) l'ensemble des points x de X tels que $(x \mid e_1)$ soit inférieur ou égal à $2k_1 - 2$ (resp. soit égal à $2k_1 - 1$, resp. soit égal à $2k_1$).

(*b*) Soit l un entier vérifiant $m \leqslant l \leqslant M$; il existe donc des entiers l_1 et l_2 avec $m_1 \leqslant l_1 \leqslant M_1$, $0 \leqslant l_2 \leqslant M_2$ et $l = l_1 + 2l_2 + 1$. Il existe donc (par l'hypothèse de récurrence) un chemin γ_1 de longueur $2l_1$ joignant 0 à $a_1 = a - 2e_1$ dans X_1, un point b_2 de X_2 et un chemin γ_2 de longueur $2l_2$ joignant $a_2 = a - e_1$ à b_2 dans X_2; il existe donc aussi un chemin γ_3 de longueur $2l_2$ joignant $b_3 = b_2 + e_1$ à a dans X_3. Soit γ le chemin obtenu en mettant bout à bout les chemins γ_1, (a_1, a_2), γ_2, (b_2, b_3) et γ_3; c'est le chemin de longueur $2l$ cherché. □

3.6. Proposition. — *Soient p un élément de $]0, 1[$, n un entier $> \frac{1}{p}$ et ψ un élément de $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$. Il existe alors un entier $l \geqslant 2$ et une chaîne de Von Kock de longueur l, d'échelle l^{-p} et de souplesse $\leqslant \psi$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. — (*a*) On prend $\theta = \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{3}$. On choisit un nombre réel $\beta > 0$ tel que le cube $[-2\beta, 2\beta]^n$ soit inclus dans $\frac{1}{2}D(\theta)$. On choisit un entier pair $l \geqslant 2$ vérifiant $2n(1+\beta)l^p \leqslant l \leqslant \beta^n l^{pn} - 1$ (cela est possible parce qu'on a $p < 1 < pn$).
On pose $\eta = l^{-p}$ et on note N la partie entière de βl^p.

(*b*) On pose $b = N\sum_{i=1}^n e_i$, $K = \frac{1}{2\eta}D(\theta)$, $a_0 = \frac{1}{\eta}e_l$ et $X = \{-N, ..., N\}^n$. Une suite $\gamma = (y_0, ..., y_q)$ de points distincts d'une partie Y de K sera appelée ici une *piste de longueur q joignant y_0 à y_q dans Y* si $y_0, ..., y_q$ sont des sommets

consécutifs d'une chaîne de Von Koch d'échelle η, de souplesse $\leqslant \psi$ et de maille $(a_0, K, -a_0)$.

(*c*) Soient

$$Y^+ = \{x \in K \mid (x \mid e_1) \geqslant N + 1\}$$

et

$$Y^- = \{x \in K \mid (x \mid e_1) \leqslant -(N+1)\}.$$

Visiblement on peut joindre a_0 à $b' = b + e_1$ par une piste γ^+ de longueur $r \leqslant \frac{n}{\eta} - 1$ dans Y^+ $\left(\text{c'est pour cela qu'on a pris } \psi > \frac{2\pi}{3}\right)$. De même on peut joindre $-b'$ à $-a_0$ par une piste γ^- de longueur r dans Y^-. Le nombre entier $l - 2r - 2$ est donc pair et vérifie

$$2nN \leqslant l - 2r - 2 \leqslant (2N+1)^n - 1.$$

Il existe donc (voir Lemme 3.5) un chemin γ_0 de longueur $l - 2r - 2$ joignant b à $-b$ dans X. Soit γ la suite obtenue en mettant bout à bout les chemins γ^+, (b', b), γ_0, $(-b, -b')$ et γ^-; c'est une piste de longueur l joignant a_0 à $-a_0$ dans K, ce qui démontre la Proposition. □

Ayant obtenu suffisamment d'exemples de chaînes de Von Koch, nous allons montrer maintenant que chaque chaîne de longueur l et d'échelle l^{-p} dans $\mathbb{R}^n$ définit un plongement Lipschitzien de $([0, 1], \| \ \|^p)$ dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$.

Voici quelques observations préliminaires :

3.7. (*a*) Soit T une chaîne de Von Koch de longueur l, d'échelle η et de maille (a_0, K, a_l) dans $\mathbb{R}^n$. Soit f_T l'application de D^l dans $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit (voir 3.2). Alors les points $F_T(0)$, $f_T\left(\frac{1}{l}\right), \ldots, f_T\left(\frac{l-1}{l}\right)$, a_l sont les sommets de la chaîne T.

(*b*) Soit k un entier $\geqslant 2$. Alors les points

$$f_T(0),\ f_T(l^{-k}),\ f_T(2l^{-k}),\ \ldots,\ f_T((l^k - 1)l^{-k}),$$

a_l sont les sommets d'une chaîne $T(k)$ de longueur l^k, d'échelle η^k, de maille (a_0, K, a_l) et qui vérifie $f_{T(k)} = f_T$ (observer qu'on a $D^{l^k} = D^l$).

(*c*) Soient $x, y \in D^l$ avec $|x - y| > \frac{1}{2l}$; alors $f_T(x)$ et $f_T(y)$ appartiennent à des maillons non consécutifs de la chaîne $T(3)$ $\left(\text{parce qu'on a } \frac{1}{2l} \geqslant 2l^{-3}\right)$.

(*d*) La quantité $A_T = \operatorname{Inf}\left\{ \|f_T(x) - f_T(y)\| \mid |x - y| > \frac{1}{2l} \right\}$ est donc nulle. Par ailleurs nous noterons B_T le diamètre de K.

(*e*) Soient $s, t \in D^l$ (avec $s < t$); soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $]s, t[$ ne contienne aucun élément de D^l_j. On pose $\bar{s}^j = l^j(s - z)$ et $\bar{t}^j = l^j(t - z)$, où z est le plus grand élément de D^l_j inférieur ou égal à s. On a alors

$$\|f_T(s) - f_T(t)\| = l^{-jp} \|f_T(\bar{s}^j) - f_T(\bar{t}^j)\| \leqslant B_T l^{-jp}.$$

Si de plus on a $|s - t| > \frac{1}{2} l^{-(j+1)}$, alors on a aussi $\|f_T(s) - f_T(t)\| \geqslant A_T l^{-jp}$.

3.8. Proposition. — *Soit p un élément de $]0, 1[$ et soit $T = (T_0, ..., T_{l-1})$ une chaîne de Von Koch de longueur l, d'échelle l^{-p}, de souplesse $\leqslant \psi$ et de maille (a_0, K, a_l) dans $\mathbb{R}^n$. Soit f_T l'application de D^l dans $\mathbb{R}^n$ qu'elle définit (voir 3.2).*

Alors f_T est un plongement Lipschitzien de $(D^l, \| \ \|^p)$ dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$.

Plus précisément, soient A_T et B_T les quantités définies en 3.6 d; on a alors

$$A_T |x - y|^p \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \|f_T(x) - f_T(y)\| \leqslant 2B_T l^p |x - y|^p,$$

quels que soient $x, y \in D^l$.

Démonstration. — Soient $x, y \in D^l$ (avec $x < y$) et soit j l'entier $\geqslant 0$ vérifiant $l^{-(j+1)} < |x - y| \leqslant l^{-j}$. On distingue deux cas :

(*a*) Si $]x, y[$ ne contient aucun élément de D^l_j, on a

$$A_T l^{-jp} \leqslant \|f_T(x) - f_T(y)\| \leqslant B_T l^{-jp}$$

(voir 3.6 *e*) et donc

$$A_T |x - y|^p \leqslant \|f_T(x) - f_T(y)\| \leqslant B_T l^p |x - y|^p.$$

(*b*) Sinon, $]x, y[$ contient un unique élément a de D^l_j; quitte à remplacer T par la chaîne opposée, on peut supposer qu'on a $\frac{1}{2} l^{-(j+1)} < |x - a| \leqslant l^{-j}$ et $|a - y| \leqslant l^{-j}$; on a donc

$$\begin{aligned} \|f_T(x) - f_T(a)\| \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) &\leqslant \|f_T(x) - f_T(y)\| \\ &\leqslant \|f_T(x) - f_T(a)\| + \|f_T(a) - f_T(y)\| \end{aligned}$$

(la première inégalité tenant à ce que la chaîne T est de souplesse $\leqslant \psi$; voir 3.1 *d*); on a donc $A_T l^{-jp} \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \|f_T(x) - f_T(y)\| \leqslant 2B_T l^{-jp}$ (voir 3.6 *e*), ce qui implique

$$A_T\,|x-y|^p \sin\left(\psi \vee \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \|f_T(x) - f_T(y) \leqslant 2B_T l^p\,|x-y|^p. \quad \square$$

4. Rang de l'espace $([0,1]^k, \|\ \|^p)$

4.1. (*a*) Soit (X, d) un espace métrique. On appelle *rang de* (X, d) (et on note $\mathrm{rg}\,(X, d)$) le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel qu'il existe un plongement Lipschitzien de (X, d) dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$.

(*b*) Soit f un plongement Lipschitzien de (X, d) dans l'espace métrique (Y, δ); on appelle *distorsion de* f (et on note $\Delta(f)$) la borne inférieure des nombres réels λ tels qu'il existe $A \in]0, +\infty[$ pour lequel on ait $Ad(x, y) \leqslant \delta(f(x), f(y)) \leqslant A\, e^{\lambda} d(x, y)$, quels que soient $x, y \in X$.

(*c*) Si n est un entier $\geqslant \mathrm{rg}\,(X, d)$, on appellle *n-distorsion de* (X, d) (et on note $\Delta_n(X, d)$) la borne inférieure de $\Delta(f)$ pour tous les plongements Lipschitziens f de (X, d) dans l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$.

Nous n'essayerons pas ici d'évaluer la n-distorsion de $([0, 1]^k, \|\ \|^p)$; indiquons cependant quelles questions se posent à ce propos.

4.2. Si (X, d) se plonge isométriquement, c'est-à-dire avec distorsion 0, dans un espace de Hilbert de dimension infinie (ce qui est le cas de l'espace $([0, 1]^k, \|\ \|^p)$), alors on peut s'attendre à ce que la n-distorsion de (X, d) tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi Kahane [6] a montré, en réponse à une question de l'auteur, que la n-distorsion de $([0, 1], \sqrt{\|\ \|})$ est inférieure ou égale à $0\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par contre, nous allons évaluer assez précisément le rang de $([0, 1]^k, \|\ \|^p)$. Voici d'abord quelques remarques préliminaires évidentes :

4.3. (*a*) Soient d et δ deux distances sur un ensemble X. On suppose que l'identité est un plongement Lipschitzien de (X, d) dans (X, δ) (on dit dans ce cas que d et δ sont *Lipschitz équivalentes*). Alors (X, d) et (X, δ) ont même rang.

(*b*) Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la *distance somme directe* $d \oplus \delta : (x, y), (x', y') \to d(x, x') + \delta(y, y')$. Le rang de $(X \times Y, d \oplus \delta)$ est alors inférieur ou égal à $\operatorname{rg}(X, d) + \operatorname{rg}(Y, \delta)$.

(*c*) Soit (X, d) un espace métrique. On a alors $\operatorname{Dim}(X, d) \leqslant \operatorname{rg}(X, d)$.

Résumons maintenant les résultats obtenus au paragraphe 3 :

4.4. PROPOSITION. — *Soient k un entier $\geqslant 1$ et p un élément de $]0, 1[$. Soit n le plus petit entier $> \frac{1}{p}$. Alors l'espace* $([0, 1]^k, \| \ \|^p)$ est de rang $\leqslant kn$.

Démonstration. — (*a*) On a montré, en 3.6, l'existence d'un entier $l \geqslant 2$ et d'une chaîne de Von Koch de longueur l, d'échelle l^{-p} et de souplesse $\leqslant \frac{3\pi}{4}$ dans $\mathbb{R}^n$. Il en résulte qu'il existe (voir 3.8) un plongement Lipschitzien de $(D^l, \| \ \|^p)$ dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$. Prolongeant ce plongement par continuité, on obtient un plongement Lipschitzien de $([0, 1], \| \ \|^p)$ dans $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$. Donc l'espace $([0, 1], \| \ \|^p)$ est de rang $\leqslant n$.

(*b*) Notons d (resp. δ) la distance $x, y \to \|x - y\|^p$ *sur* $[0, 1]^k$ (resp. sur $[0, 1]$). La distance d est Lipschitz équivalente à $\delta \oplus \ldots \oplus \delta$ (k fois). La remarque 4.3 *b* montre donc que $([0, 1]^k, \| \ \|^p)$ est de rang $\leqslant nk$. □

4.5. Il résulte de 2.2 que la dimension métrique de $([0, 1]^k, \| \ \|^p)$ est égale à $\frac{k}{p}$. En tenant compte de 4.3 *c*, on voit que $([0, 1]^k, \| \ \|^p)$ est de rang $\geqslant \frac{k}{p}$.

Le rang de $([0, 1], \| \ \|^p)$ (pour $p \in]0, 1[$) est donc le plus petit entier $> \frac{1}{p}$, dès que $\frac{1}{p}$ n'est pas entier. Nous nous proposons de montrer que ce résultat subsiste même si $\frac{1}{p}$ est entier (différent de 1). Plus généralement, nous allons établir que $([0, 1]^k, \| \ \|^p)$ est de rang $> \frac{k}{p}$, quels que soient k entier $\geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$.

Cela va résulter de trois lemmes.

4.6. (*a*) Un noyau symétrique $d : X^2 \to]0, +\infty[$ nul sur et seulement sur la diagonale est appelé une *pseudodistance sur* X s'il existe un nombre $a \in [1, +\infty[$ tel qu'on ait $d(x, y) \leqslant a(d(x, z) + d(z, y))$ quels que soient $x, y, z \in X$ (lorsqu'on veut être plus précis, on dit que d est une *a-pseudodistance sur* X). On munit alors l'espace (X, d), qu'on appelle un *espace*

pseudométrique, de la topologie engendrée par les boules « ouvertes » relatives à la pseudodistance d.

(*b*) Soit (X, d) un espace pseudométrique; pour chaque ouvert U de (X, d), on note $\tau(U)$ le *diamètre de* (U, d), c'est-à-dire la quantité $\operatorname{Sup}\{d(u, v) \mid u, v \in U\}$. On définit alors une mesure extérieure μ_d sur X de la façon suivante : pour chaque partie A de X et chaque $\varepsilon > 0$, on pose

$$\mu_{d,\varepsilon}(A) = \operatorname{Inf}\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \tau(U_i) \Big| (U_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ recouvrement de } A \text{ par des ouverts de diamètre} \leqslant \varepsilon\Big\}.$$

et

$$\mu_d(A) = \operatorname{Sup}_{\varepsilon>0} \mu_{d,\varepsilon}(A)$$

(la mesure μ_d est donc la mesure extérieure sur X obtenue par la méthode II de Rogers [8] p. 27 à partir de la prémesure τ).

Nous dirons que μ_d est la *mesure de Hausdorff sur* (X, d).

4.7. LEMME. — *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces pseudométriques; soient $A, B \in]0, +\infty[$. Soit f une application de X dans Y vérifiant $A\, d(x, x') \leqslant \delta(f(x), f(x')) \leqslant B\, d(x, x')$ quels que soient $x, x' \in X$. On a alors $A\,\mu_d(X) \leqslant \mu_\delta(f(X)) \leqslant B\,\mu_d(X)$.*

Démonstration. — Lorsque d et δ sont des distances, c'est un cas particulier du Théorème 29 de [8]. De plus la démonstration de ce théorème reste évidemment valable (voir [8] p. 54) même si d et δ ne sont pas des distances. □

4.8. Toute puissance d'une distance est une pseudodistance; par ailleurs on peut montrer ([1] Lemme 1.14) que toute pseudodistance est Lipschitz équivalente à une puissance d'une distance.

4.9. LEMME. — *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, x_0 un point de X et y_0 un point de Y; soient $A, B \in]0, +\infty[$. On suppose que les boules fermées de (Y, δ) sont compactes et qu'il existe, pour chaque partie finie F de X contenant x_0, un plongement (A, B)-Lipschitzien g_F de (F, d) dans (Y, δ) vérifiant $g_F(x_0) = y_0$. Il existe alors un plongement (A, B)-Lipschitzien de (X, d) dans (Y, δ).*

Démonstration. — Pour chaque partie finie F de X contenant x_0, on définit une application f_F de X dans Y en posant $f_F(x) = g_F(x)$ si x appartient à F, et $f_F(x) = y_0$ sinon. On pose alors $f(x) = \lim_{F,\mathscr{U}} f_F(x)$ (pour chaque $x \in X$), où $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre plus fin que le filtre de l'inclusion sur l'ensemble de toutes les parties finies de X contenant x_0 (on observe que $f_F(x)$ est, quel que soit F, un

élément de la boule fermée de centre y_0 et de rayon $B\,d(x_0, x)$; c'est la compacité de cette boule qui assure l'existence de $f(x)$).

L'application f est le plongement cherché. □

4.10. Soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Une partie T d'un espace métrique (X, d) est dite *ε-dense dans* (X, d) si, pour chaque $x \in X$, il existe $t \in T$ avec $d(x, t) < \varepsilon$.

4.11. LEMME. — *Soient F une partie α-discernable et G une partie ε-dense d'un espace métrique (X, d). Il existe alors une application $h : F \to G$ vérifiant $\left(1 - \frac{2\varepsilon}{\alpha}\right) d(x, y) \leqslant \delta(h(x), h(y)) \leqslant \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\alpha}\right) d(x, y)$, quels que soient $x, y \in F$.*

Démonstration. — Comme G est ε-dense, on peut choisir, pour chaque $x \in F$, un point $h(x)$ de G avec $d(x, h(x)) < \varepsilon$. Fixons $x, y \in F$ (avec $x \neq y$); on a alors :

$$\begin{aligned} d(h(x), h(y)) &\leqslant d(x, y) + d(x, h(x)) + d(y, h(y)) \\ &\leqslant d(x, y) + 2\varepsilon \leqslant \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\alpha}\right) d(x, y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leqslant d(h(x), h(y)) + d(x, h(x)) + d(y, h(y)) \\ &\leqslant d(h(x), h(y)) + \frac{2\varepsilon}{\alpha}\, d(x, y). \end{aligned}$$

L'application h est donc l'application cherchée. □

Voici maintenant le résultat que nous avions en vue :

4.12. PROPOSITION. — *Soient k un entier $\geqslant 1$ et p un élément de $]0, 1[$. Notons $r(k, p)$ le rang de l'espace métrique $([0, 1]^k, \| \ \|^p)$. On a alors $m \leqslant r(k, p) \leqslant kn$, où m est le plus petit entier $> \frac{k}{p}$, et n le plus petit entier $> \frac{1}{p}$.*

En particulier le rang de $([0, 1], \| \ \|^p)$ est le plus petit entier $> \frac{1}{p}$.

Démonstration. — (*a*) On a déjà démontré les inégalités $r(k, p) \leqslant kn$ (voir 4.4) et $r(k, p) \geqslant \frac{k}{p}$ (voir 4.5). Il nous reste donc à établir l'inégalité $r(k, p) > \frac{k}{p}$, dans le cas où $\frac{k}{p}$ est un entier.

(*b*) Pour cela, on va supposer qu'il existe un plongement f (A, B)-Lipschitzien de $([0, 2]^k, \| \ \|^p)$ dans $(\mathbb{R}^q, \| \ \|)$ $\left(\text{avec } \frac{k}{p} = q \in \mathbb{N}\right)$ et montrer que cela entraîne une contradiction; cela établira la Proposition.

(*c*) Soit f le plongement dont nous avons supposé l'existence en (*b*). On a donc $A^q \|x-y\|^k \leqslant \|f(x)-f(y)\|^q \leqslant B^q \|x-y\|^k$, quels que soient $x, y \in [0, 2]^k$. Le lemme 4.7 (appliqué aux pseudodistances $d : x, y \to \|x-y\|^k$ sur $[0, 2]^k$ et $\delta : s, t \to \|s-t\|^q$ sur $\mathbb{R}^q$) implique que l'ensemble $f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]^k\right)$ est de mesure de Lebesgue non nulle dans $\mathbb{R}^q$ et possède donc (par le théorème de dérivation de Lebesgue) un point de densité $t_0 = f(x_0)$.

(*d*) Pour chaque $\beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et chaque $x \in [-1, 1]^k$, on pose

$$f_\beta(x) = \beta^{-p}(f(x_0 + \beta x) - f(x_0)).$$

Pour chaque $\beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ l'application f_β ainsi définie est un plongement (A, B)-Lipschitzien de $([-1, 1]^k, \| \ \|^p)$ dans $(\mathbb{R}^q, \| \ \|)$ et on a :

$$\begin{aligned}\beta^k \lambda(f_\beta([-1, 1]^k) \cap S(O, A)) \\ = \lambda(f(x_0 + \beta[-1, 1]^k) \cap S(t_0, A\beta^p)) \geqslant \lambda(f([0, 2]^k) \cap S(t_0, A\beta^p))\end{aligned}$$

(en notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^q$ et $S(z, r)$ la boule fermée de centre z et de rayon r dans l'espace $(\mathbb{R}^q, \| \ \|)$).

(*e*) Comme t_0 est un point de densité de $f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]^k\right)$, l'inégalité que nous avons établie en (*d*) montre qu'on a

$$\lim_{\beta \to 0} \lambda(f_\beta([-1, 1]^k) \cap S(O, A)) = \lambda(S(O, A)).$$

On peut donc choisir, pour chaque $\varepsilon > 0$, un nombre $\beta(\varepsilon) \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $G_\varepsilon = f_{\beta(\varepsilon)}([-1, 1]^k) \cap S(O, A)$ soit ε-dense dans l'espace $(S(O, A), \| \ \|)$.

De plus $g_\varepsilon = f_{\beta(\varepsilon)}^{-1}$ est un plongement $\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{A}\right)$-Lipschitzien de l'espace $(G_\varepsilon, \| \ \|)$ dans l'espace $([-1, 1]^k, \| \ \|^p)$.

(*f*) Soit F une partie finie de $S(O, A)$ contenant 0; il existe donc $\alpha > 0$ tel que F soit α-discernable dans $(S(O, A), \| \ \|)$. On fixe $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$. Il existe donc (par le Lemme 4.11) un plongement $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$-Lipschitzien h_F de $(F, \| \ \|)$ dans

$(G_\varepsilon, \| \ \|)$, et on peut supposer $h_F(0) = 0$ (car 0 appartient à G_ε). L'application $g_F = g_\varepsilon \circ h_F$ est donc un plongement $\left(\frac{1}{2B}, \frac{3}{2A}\right)$-Lipschitzien de l'espace $(F, \| \ \|)$ dans l'espace $([-1, 1]^k, \| \ \|^p)$, et elle vérifie $g_F(0) = 0$.

(*g*) Il existe donc (par le Lemme 4.9) un plongement $\left(\frac{1}{2B}, \frac{3}{2A}\right)$-Lipschitzien de l'espace $(S(O, A), \| \ \|)$ dans l'espace $([-1, 1]^k, \| \ \|^p)$, en contradiction avec le fait que la dimension topologique de $S(O, A)$ est égale à $q > k$. C'est la contradiction cherchée. □

L'inégalité $r\left(1, \frac{1}{2}\right) > 2$ aurait pu être démontrée en utilisant le résultat suivant de Besicovitch et Schoenberg :

4.13. [2] Soit f une application injective et continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$. On a alors $\operatorname{Inf} \{ \sum_{i=1}^{j} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\|^2 \} = 0$, où la borne inférieure est prise sur toutes les partitions $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{j-1} < x_j = 1$ du segment $[0, 1]$.

De même l'inégalité $r\left(1, \frac{1}{q}\right) > q$ pourrait être établie en utilisant une extension (due à Y. Katznelson, non publiée) de 4.13 aux courbes de Jordan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^q$, la q-variation remplaçant alors la 2-variation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASSOUAD (P.). — Espaces métriques, plongements, facteurs, Thèse (Orsay, 1977).

[2] BESICOVITCH (A. S.), SCHOENBERG (I.J.). — On Jordan arcs and Lipschitz classes of functions defined on them, Acta Math. 106 (1961), 113-136.

[3] BOULIGAND (G.). — Ensembles impropres et ordre dimensionnel, Bull. Sci. Math. 52 (1928), 320-344 et 361-376.

[4] BROOKS (R. L.). — On colouring the nodes of a network, Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941), 194-197.

[5] GLAESER (G.). — Étude de quelques algèbres tayloriennes, J. Analyse Math. 6 (1958), 1-124.

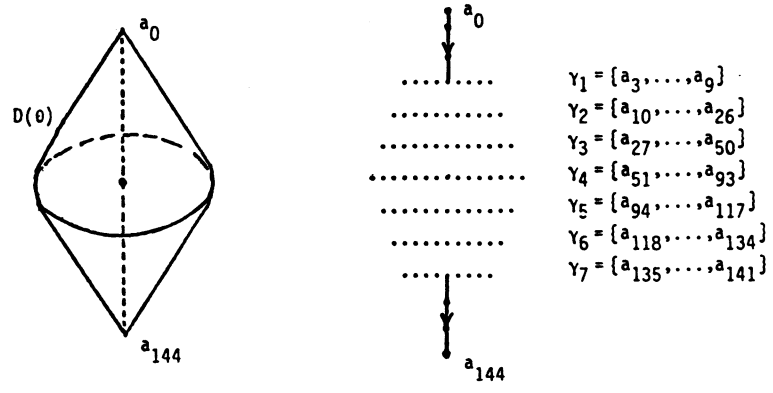
[6] KAHANE (J. P.). — Hélices et quasi-hélices, Math. Analysis and Appl. (L. Nachbin ed.), 417-433, Academic Press, 1981, New York.

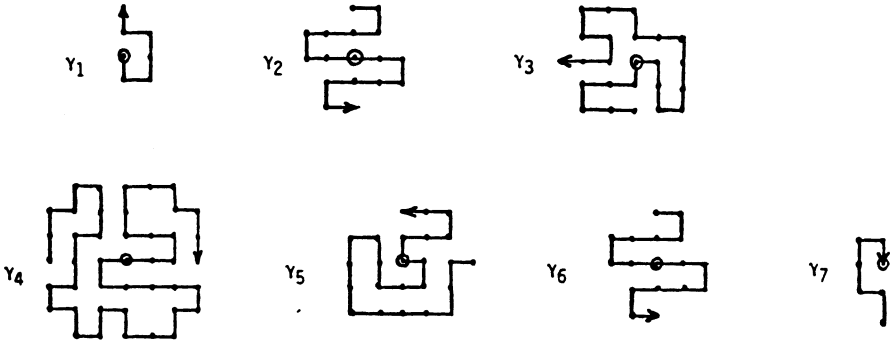
[7] Von KOCH (H.) — Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, Acta Math. 30 (1906), 145-174.

[8] ROGERS (C. A.). — Hausdorff measures, Cambridge University Press (1970).

APPENDICE. Une chaîne conduisant à un plongement de $([0, 1], \sqrt{\| \ \|})$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *:*

Soit $\theta = \operatorname{Arctg} \frac{2}{3}$; on considère une chaîne de Von Koch T de longueur 144, d'échelle $\frac{1}{12}$, de souplesse $\leqslant \frac{\pi}{2} + 2\theta$ et de maille $(a_0, D(\theta), a_{144})$ dans $\mathbb{R}^3$, dont le support $(a_0, K_0, a_1, \ldots, a_{143}, K_{143}, a_{144})$ soit donné par le schéma suivant :





Un calcul grossier (à la main) montre qu'il existe alors un nombre réel $A > 0$ tel qu'on ait $A\sqrt{|s-t|} \leqslant \|f_T(s) - f_T(t)\| \leqslant 2\,184 A\sqrt{|s-t|}$, quels que soient $s, t \in [0, 1]$.