BULLETIN DE LA S. M. F.

Y. DRIENCOURT

Sur les sommes de Dedekind attachées aux groupes de congruence

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 373-419
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__373_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 373-419.

SUR LES SOMMES DE DEDEKIND ATTACHÉES AUX GROUPES DE CONGRUENCE

PAR

Y. DRIENCOURT (*)

RÉSUMÉ. — Nous étudions les propriétés de la fonction η_Γ attachée à un sous-groupe de congruence Γ de $SL(2, \mathbb{Z})$ ainsi que les propriétés des « sommes de Dedekind » qui interviennent dans la formule de transformation de $\log \eta_\Gamma$. Nous présentons plus particulièrement le cas des sous-groupes $\Gamma(N)$ et $\Gamma_0(N)$.

ABSTRACT. — We study the properties of the function η_Γ attached to a congruence subgroup Γ of $SL(2, \mathbb{Z})$ to gether with the properties of the so-called "Dedekind sums" which appear in the transformation law of $\log \eta_\Gamma$. We exhibit more especially the case of the congruence subgroups $\Gamma(N)$ and $\Gamma_0(N)$.

1. Introduction

La première formule-limite de Kronecker dit que :

$$\lim_{s\to 1}\left[y^s \sum_{(c,\,d)\neq(0,\,0)} |cz+d|^{-2s} - \frac{\pi}{s-1}\right]$$
$$= 2\pi\left(\gamma - \log 2 - \frac{1}{2}\log y - 2\log|\eta(z)|\right),$$

où $z=x+iy$ appartient au demi-plan complexe supérieur, γ désigne la constante d'Euler et η la fonction de Dedekind définie par :

$$\eta(z) = e^{\pi iz/12} \prod_{n=1}^{+\infty}(1-e^{2\pi inz})$$

pour $\mathrm{Im}(z)>0$.

Il résulte en particulier de la formule de Kronecker que si l'on prend comme branche uniforme du logarithme :

$$\frac{\pi iz}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\text{détermination principale de } \log(1-e^{2\pi inz})),$$

(*) Texte reçu le 7 janvier 1982, révisé le 5 avril 1983.

Y. DRIENCOURT, Université de Paris-VII; U.E.R. de Mathématiques, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/04 373 47/$ 6.70

on a la formule :

$$\log \eta(\sigma z) = \log \eta(z) + \frac{1}{2}\log(cz+d) + \pi i S(\sigma)$$

pour tout $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$, où l'on a posé :

$$S(\sigma) = \frac{a+d}{12c} - \operatorname{sgn}(c)\left\{\frac{1}{4} + s(d, |c|)\right\} \qquad \text{si} \quad c \neq 0$$

$$= \frac{b}{12d} + \frac{1-\operatorname{sgn}(d)}{4} \qquad \text{si} \quad c = 0$$

$s(d, |c|)$ désigne la somme de Dedekind définie par :

$$s(d, |c|) = \textstyle\sum_{j=1}^{|c|} \left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right),$$

où l'on a posé :

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Z}, \\ 0 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dedekind a donné dans [1] un certain nombre de propriétés arithmétiques de ces sommes, qui n'ont cessé d'être étudiées et généralisées par la suite, notamment par Rademacher ([2] entre autres). Parmi ces propriétés, celles qui caractérisent les sommes de Dedekind – si l'on y ajoute le fait que $s(0, 1) = 0$ – sont les suivantes : pour $c \neq 0$, $(c, d) = 1$ on a :

(s.1) $$s(d, c) = s(d', c) \qquad \text{si} \quad d \equiv d'(c),$$

(s.2) $$s(d, -c) = s(-d, c) = -s(d, c),$$

(s.3) $$s(a, c) = s(d, c) \qquad \text{si} \quad ad \equiv 1\,(c),$$

(s.4) $$s(d, c) + s(c, d) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c} + \frac{1}{cd}\right)$$

$$\text{si} \quad c > 0 \quad \text{et} \quad d > 0$$

(*voir* [2] ou [3] par exemple).

On peut y ajouter deux autres propriétés remarquables :

(s.5) $s(nd, nc)=s(d, c)$ pour tout entier $n \geqslant 1$,

(s.6) $s(pd, c)+\sum_{m=0}^{p-1} s(d+mc, pc)=(p+1)s(d, c)$

pour tout nombre premier p.

Récemment KNOPP [4] a montré que la propriété (s.6) n'était qu'un cas particulier de la formule suivante :

(s.6 *bis*) $\sum_{\alpha\delta=n,\, \delta>0} \sum_{\beta \bmod \delta} s(\alpha d+\beta c, \delta c)=\sigma(n)s(d, c)$,

$\sigma(n)$ désignant la somme des diviseurs de n. La preuve de Knopp repose sur le fait que les opérateurs de Hecke agissent sur la fonction $\log\eta$ par multiplication par le facteur $\sigma(n)$. *Voir* également à ce propos PARSON [13], GOLDBERG [14] et APOSTOL-VU [15].

En modifiant de façon évidente la formule de Kronecker, on peut considérer qu'elle donne le terme constant du développement au voisinage du pôle $s=1$ de la série d'Eisenstein :

$$\sum_{\bar\Gamma_\infty\backslash\bar\Gamma} \operatorname{Im}(\gamma z)^s, \qquad \bar\Gamma=PSL(2, \mathbb{Z}), \qquad \bar\Gamma_\infty=\left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}, n\in\mathbb{Z}\right\}$$

attachée à l'unique pointe parabolique du groupe $\Gamma=SL(2, \mathbb{Z})$. Dans [5] GOLDSTEIN remplace $SL(2, \mathbb{Z})$ par un groupe fuchsien quelconque et obtient ainsi une formule-limite formelle donnant le terme constant, dans le développement au voisinage du pôle $s=1$, de la série d'Eisenstein associée à une pointe parabolique quelconque de ce groupe. Comme dans le cas classique, il intervient dans le terme constant une fonction analogue à $\log\eta$ qui se transforme par certaines substitutions, la loi de transformation faisant intervenir des sommes arithmétiques comme dans le cas du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$.

L'objet du présent travail est l'étude des propriétés de la fonction η associée au groupe $\Gamma(N)$ (le résultat principal figure au paragraphe 7), l'extension de ce résultat aux groupes de congruence, et, enfin l'étude des propriétés arithmétiques des « sommes de Dedekind » attachées aux groupes $\Gamma(N)$ et $\Gamma_0(N)$. Les méthodes pour obtenir le développement de Fourier des séries d'Eisenstein reposent essentiellement sur les raisonnements classiques de Hecke et Maass (les calculs dans le cas du groupe $\Gamma(N)$ sont en partie effectués dans [5]). Dans le cas du groupe $\Gamma_0(N)$, la « somme de Dedekind » s'exprime à partir des sommes de Dedekind classiques en fonction de la décomposition de N en facteurs premiers. On peut alors obtenir certaines formules arithmétiques généralisant les propriétés rappelées ci-dessus. Pour obtenir l'analogue des formules (s.6) et (s.6 *bis*) nous avons utilisé l'idée de Knopp évoquée plus haut.

L'auteur tient à remercier M. F. Vignéras, J. F. Michon, D. Barsky et G. Lachaud pour de nombreuses conversations à ce sujet. Enfin il exprime sa reconnaissance à D. Zagier pour plusieurs suggestions très intéressantes ainsi qu'au referee dont les commentaires très utiles lui ont permis d'améliorer sensiblement le texte initial.

2. Rappel des résultats généraux

Si Γ désigne un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ possédant un domaine fondamental de volume fini, on définit la série d'Eisenstein relative à la pointe $\varkappa_i$ de Γ par :

$$E_i(z, s) = \sum_{\sigma \in \Gamma_i \setminus \Gamma} \operatorname{Im}(\sigma_i^{-1} \sigma z)^s \tag{1}$$

où $\Gamma_i = \{\sigma \in \Gamma \mid \sigma(\varkappa_i) = \varkappa_i\}$ et où l'on a choisi σ_i appartenant à $SL(2, \mathbb{R})$ telle que :

$$\sigma_i(\infty) = \varkappa_i \qquad \text{et} \qquad \sigma_i^{-1} \Gamma_i \sigma_i = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On peut supposer, quitte à remplacer Γ par $\sigma_i^{-1} \Gamma \sigma_i$, que la pointe $\varkappa_i$ n'est autre que ∞ et que son stabilisateur dans Γ est :

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; n \in Z \right\}.$$

On peut développer :

$$E(z, s) = \sum_{\Gamma_\infty \setminus \Gamma} \operatorname{Im}(\sigma z)^s, \tag{2}$$

en série de Fourier :

$$E(z, s) = \sum_{m \in Z} a_m(s, y)\, e^{2\pi i m x}$$

où l'on a posé ([6], p. 16) :

$$\tag{3} \begin{cases} a_m(s, y) = 2\pi^s |m|^{s-1/2} \Gamma(s)^{-1} y^{1/2} K_{s-(1/2)}(2\pi |m| y)\, \varphi_m(s) & (m \neq 0) \\ \qquad\qquad = y^s + \varphi(s)\, y^{1-s} & (m = 0) \end{cases}$$

avec :

$$\varphi_m(s)=\sum_c c^{-2s}\sum_d e^{2\pi imd/c}$$

$$\left(c>0,\ d \bmod c,\ \begin{pmatrix} \star & \star \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma\right)$$

$$\varphi(s)=\pi^{1/2}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\varphi_0(s),$$

$$K_{s-1/2}(2\pi|u|)=2^{-1}\pi^{-s}|u|^{1/2-s}\Gamma(s)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2\pi iut}}{(t^2+1)^s}\,dt.$$

On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1 (GOLDSTEIN). — *Avec les notations précédentes, soit :*

$$\varphi_0(s)=\frac{\alpha}{s-1}+\beta+O(s-1)$$

le développement de φ_0 au voisinage de $s=1$. On a alors :

$$\lim_{s\to 1}\left[\frac{1}{2\pi}E(z,s)-\frac{\alpha}{2(s-1)}\right]=\frac{1}{2}\beta-\alpha\log 2-\alpha\left(\frac{1}{2}\log y+2\log|\eta_\Gamma(z)|\right)$$

où :

(4) $$\log\eta_\Gamma(z)=\frac{1}{2}\operatorname{vol}(\Gamma\backslash H)\left(\frac{iz}{2}-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(1)e^{2\pi inz}\right)$$

vérifie, pour tout $\sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ *:*

$$\log\eta_\Gamma(\sigma z)=\log\eta_\Gamma(z)+\frac{1}{2}\log(cz+d)+\pi iS_\Gamma(\sigma)$$

où $S_\Gamma(\sigma)$ est un nombre réel ne dépendant pas de z.

C'est ce nombre réel $S_\Gamma(\sigma)$ que l'on appelle la « somme de Dedekind attachée à Γ ». On sait également [5] que η_Γ vérifie les conditions de régularité aux pointes de Γ. Le résultat suivant permet de préciser le comportement de η_Γ au voisinage des différentes pointes dans le cas d'un **sous-groupe arithmétique (i. e. commensurable à $SL(2, \mathbb{Z})$).**

PROPOSITION 2.1. — *Si Γ est un sous-groupe arithmétique de $SL(2, \mathbb{R})$, la fonction η_Γ définie ci-dessus possède un zéro à la pointe ∞ et ne s'annule en* *aucun autre point du demi-plan, y compris aux pointes non équivalentes à ∞.*

Preuve. — Plaçons nous d'abord dans le cas d'un sous-groupe Γ d'indice fini μ de $\Gamma(1)=SL(2, \mathbf{Z})$. On pose :

$$\Gamma(1)=\bigcup_{i=1}^{\mu}\Gamma\sigma_i$$

et on utilise le fait que, si $\Gamma\cap\Gamma_\infty=\Gamma_\infty$, on a :

$$\sum_{\Gamma_\infty\setminus\Gamma(1)}\operatorname{Im}(\sigma z)^s=\sum_{\Gamma\setminus\Gamma(1)}\sum_{\Gamma_\infty\setminus\Gamma}\operatorname{Im}(\sigma\sigma_i z)^s$$

En écrivant la formule-limite pour le sous-groupe Γ dans le membre de droite et en identifiant, on obtient facilement la relation existant entre η et η_Γ, à savoir :

$$\eta^\mu(z)=\prod_{i=1}^{\mu}\eta_\Gamma\,|_{1/2}\,\sigma_i \tag{5}$$

où l'on note :

$$f|_k\sigma=J(\sigma, z)^{-k}\det(\sigma)^{k/2}f(\sigma z),$$

$$J(\sigma, z)=cz+d \qquad \text{si} \quad \sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

La formule (4) montre clairement que η_Γ possède à l'∞ un zéro d'ordre :

$$\frac{1}{8\pi}\operatorname{vol}(\Gamma\setminus H)=\frac{\mu}{8\pi}\operatorname{vol}(\Gamma(1)\setminus H)=\frac{\mu}{24}.$$

On écrit ensuite (5) sous la forme :

$$\eta^\mu(z)/\eta_\Gamma(z)=\prod_{\sigma_i\neq 1}\eta_\Gamma\,|_{1/2}\,\sigma_i. \tag{6}$$

Le développement de η_Γ au voisinage de la pointe $\sigma_i\infty$ étant de la forme :

$$\eta_\Gamma\,|_{1/2}\,\sigma_i=e^{2\pi i\theta_i z}\sum_{m=0}^{\infty}a_m e^{2\pi imz}$$

avec $0\leqslant\theta_i<1$.

On en déduit, en identifiant les développements à l'∞ des deux membres de (6) :

$$\theta_i=0 \quad \text{pour tout } i \text{ tel que } \sigma_i\neq 1,$$

ce qui montre que l'ordre du zéro de η_Γ au voisinage de toute pointe non équivalente à ∞ est nul.

Si maintenant Γ est un sous-groupe de $SL(2, \mathbb{R})$ tel que $\Gamma' = \Gamma(1) \cap \Gamma$ soit d'indice fini dans $\Gamma(1)$ et dans Γ, on obtient, par le même raisonnement que ci-dessus :

$$\eta_\Gamma^\mu(z) = \prod_{i=1}^\mu \eta_{\Gamma'}|_{1/2}\,\sigma_i$$

si $\Gamma = \bigcup_{i=1}^\mu \Gamma' \sigma_i$.

Soit alors $\varkappa$ une pointe de Γ et $A \in \Gamma(1)$ telle que $A(\infty) = \varkappa$. On a :

$$\eta_\Gamma|_{1/2}\,A = \prod_{i=1}^\mu (\eta_{\Gamma'}|_{1/2}\,\sigma_i)^{1/\mu}.$$

Le premier membre possède un zéro si et seulement si il existe i tel que $\eta_{\Gamma'}|_{1/2}\,\sigma_i A$ en ait un, autrement dit si et seulement si $\sigma_i A(\infty)$ est équivalente, modulo Γ', à la pointe ∞ ce qui signifie que $A(\infty)$ est équivalente à ∞ modulo Γ'.

3. La formule-limite pour $\Gamma(N)$

Soit

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}),\ a \equiv d \equiv 1\,(N) \text{ et } b \equiv c \equiv 0\,(N) \right\}.$$

On note $\overline{\Gamma(N)}$ son image dans $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$. C'est un sous-groupe normal de $SL(2, \mathbb{Z})/\{\pm I\}$ et le stabilisateur de ∞ est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & nN \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ n \in \mathbb{Z} \right\}$. Il nous faut donc considérer la série :

$$\sum_{\Gamma_\infty \backslash \overline{\Gamma'(N)}} \operatorname{Im}(\sigma z)^s = E_N(Nz, s) \tag{7}$$

où

$$\Gamma'(N) = \begin{pmatrix} N^{-1/2} & 0 \\ 0 & N^{1/2} \end{pmatrix} \Gamma(N) \begin{pmatrix} N^{+1/2} & 0 \\ 0 & N^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

et

$$E_N(z, s) = \frac{\delta(N)}{2} N^{-s} \sum_{c,\, d \in \mathbb{Z},\, (c,\, d)=1,\, c \equiv 0(N),\, d \equiv 1(N)} y^s |cz+d|^{-2s}, \tag{9}$$

où

$$\delta(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } N = 1 \text{ ou } 2, \\ 2 & \text{si } N > 2. \end{cases}$$

On suit la méthode de MAASS [6] pour obtenir le développement en série de Fourier de $E_N(Nz, s)$, en écrivant d'abord :

(10) $$E_N(Nz, s)=\sum_{a=1,(a,N)=1}^{N}\left(\sum_{n=1,\,na\equiv 1(N)}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^{2s}}\right)E^*_{N,a}(Nz, s)$$

où

(11) $$E^*_{N,a}(z, s)=\frac{\delta(N)}{2}N^{-s}\sum_{c\equiv 0(N),\,d\equiv a(N)}y^s|cz+d|^{-2s}$$

et donc

$$E^*_{N,a}(Nz, s)=\frac{\delta(N)}{2}y^s\left\{\sum_{d\equiv a(N)}d^{-2s}+\sum_{c\neq 0,\,c\equiv 0(N)}\sum_{d\equiv a(N)}|cNz+d|^{-2s}\right\}.$$

En appliquant la formule sommatoire de Poisson, on a :

$$\sum_{d\equiv a(N)}|cNz+d|^{-2s}$$
$$=N^{-2s}y^{1-2s}|c|^{1-2s}\sum_{m\in Z}e^{2\pi im(a+Ncx)/N}I(s, 2\pi|c|ym)$$

avec

$$I(s, v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iuv}du}{(u^2+1)^s}.$$

En isolant le coefficient d'ordre zéro du développement en série de Fourier, on obtient :

(12) $$E^*_{N,a}(Nz, s)=\frac{\delta(N)}{2}y^s\left\{\sum_{d\equiv a(N)}d^{-2s}\right.$$
$$+N^{-2s}y^{1-2s}\sum_{c\equiv 0(N),\,c\neq 0}|c|^{1-2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(u^2+1)^s}$$
$$\left.+N^{-2s}y^{1-2s}\sum_{c\equiv 0(N),\,c\neq 0}|c|^{1-2s}\sum_{m\neq 0}e^{2\pi imcx}e^{2\pi ima/N}I(s, 2\pi|c|ym)\right\}.$$

Dans le dernier terme, on intervertit les sommations, puis on ramène la sommation sur c à $c>0$, enfin on pose $n=mc$. On obtient finalement :

(13) $$E_N(Nz, s)=a_0(y, s, N)+\sum_{m\neq 0}a_m(y, s, N)\,e^{2\pi imx}$$

avec

(14) $$a_0(y, s, N)=y^s+y^{1-s}\varphi_{N,0}(s)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(u^2+1)^s}$$

où

$$\varphi_{N,0}(s)=\delta(N)N^{1-4s}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2s})^{-1} \tag{15}$$

et

$$\begin{aligned} a_m(y, s, N) &= \delta(N)\,N^{-2s}y^{1-s} \\ &\times\sum_{a=1,(a,N)=1}^{N}\left(\sum_{n=1,\,na\equiv 1(N)}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^{2s}}\right)I(s, 2\pi my) \\ &\times\sum_{c>0,\,c\equiv 0(N),\,c\mid m}\frac{\cos(2\pi ma/cN)}{c^{2s-1}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème 2.1, on calcule le développement de $\varphi_{N,0}(s)$ au voisinage de $s=1$ en posant :

$$\varphi_{N,0}(s)=\frac{\alpha_N}{s-1}+\beta_N+O(s-1)$$

et en utilisant les développements suivants :

$$\frac{1}{1-p^{-2s}}=\frac{p^2}{p^2-1}\left[1-\frac{2\log p}{p^2-1}(s-1)+\ldots\right]$$

$$\zeta(2s)=\frac{\pi^2}{6}+2\zeta'(2)(s-1)+\ldots$$

$$\text{d'où } \zeta(2s)^{-1}=\frac{6}{\pi^2}-\frac{12\zeta'(2)}{\pi^2\zeta(2)}(s-1)+\ldots$$

$$\zeta(2s-1)=\frac{1}{2(s-1)}+\gamma+O(s-1)$$

où γ désigne la constante d'Euler

$$N^{1-4s}=N^{-3}[1-4(s-1)\log N+\ldots]$$

pour trouver :

$$\alpha_N=\frac{3}{\pi^2}\,\delta(N)\left\{N^3\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})\right\}^{-1}, \tag{17}$$

$$\beta_N=\frac{6}{\pi^2}\,\delta(N)\left\{N^3\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})\right\}^{-1}\times\left\{\gamma-2\log N-\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-\sum_{p\mid N}\frac{\log p}{p^2-1}\right\}. \tag{18}$$

Reste à obtenir la valeur de $\log \eta_{\Gamma'(N)}$. On utilise pour cela la relation :

$$I(s, 2\pi my) = 2\pi^s |my|^{s-1/2} \Gamma(s)^{-1} K_{s-1/2}(2\pi |m| y)$$

et on compare avec la formule générale ([7], p. 16) pour avoir :

$$a_m(y, s, N) = 2\pi^s |m|^{s-1/2} \Gamma(s)^{-1} y^{1/2} K_{s-1/2}(2\pi |m| y)\, \varphi_{N.m}(s), \tag{19}$$

où :

$$\varphi_{N,m}(s) = \delta(N) N^{-2s} \sum_{a=1,(a,N)=1}^{N} \times \left(\sum_{n=1,\, na\equiv 1(N)}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s}}\right) \sum_{c>0,\, c\equiv 0(N),\, c|m} \frac{\cos(2\pi ma|cN)}{c^{2s-1}}. \tag{20}$$

Pour obtenir la valeur de $\log \eta_{\Gamma'(N)}$ on part de la formule générale :

$$\log \eta_{\Gamma'(N)}(z) = \frac{iz}{4\pi\alpha_N} - \frac{1}{2\alpha_N} \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi_{N,m}(1)\, e^{2\pi imz}.$$

On a facilement :

$$\frac{1}{2\alpha_N} \varphi_{N,m}(1) = \frac{\pi^2}{6} N \prod_{p|N}(1-p^{-2}) \sum_{c>0,\, c\equiv 0(N)} \frac{1}{c} \times \sum_{a=1,(a,N)=1}^{N} \left(\sum_{na\equiv 1(N)} \frac{\mu(n)}{n^2}\right) \cos(2\pi ma | cN)$$

En posant $c = m/d$, on obtient :

$$\log \eta_{\Gamma'(N)}(z) = \frac{iz}{4\pi\alpha_N} - \frac{\pi^2}{6} N \prod_{p|N}(1-p^{-2}) \times \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{d|m,\, d>0,\, m/d\equiv 0(N)} dA_N(d)\right) \frac{e^{2\pi imz}}{m},$$

où :

$$A_N(d) = \sum_{a=1,(a,N)=1}^{N} \left(\sum_{n=1,\, na\equiv 1(N)}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}\right) \cos(2\pi ad/N). \tag{21}$$

On pose enfin $m/d = kN$, d'où :

$$\log \eta_{\Gamma'(N)}(z) = \frac{iz}{4\pi\alpha_N} - \frac{\pi^2}{6} \times \prod_{p|N}(1-p^{-2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{d=1}^{+\infty} A_N(d) \frac{e^{2\pi ikdNz}}{k}$$

que l'on peut re-écrire sous la forme :

(22) $$\log\eta_{\Gamma'(N)}(z)=\frac{iz}{4\pi\alpha_N}+\frac{\pi^2}{6}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})\sum_{d=1}^{+\infty}A_N(d)\log(1-e^{2\pi idNz}).$$

Revenant au groupe $\Gamma(N)$, on pose naturellement :

(23) $$\log\eta_{\Gamma(N)}(z)=\log\eta_{\Gamma'(N)}(z/N)$$

et par le changement de variable $z\mapsto z/N$, on peut maintenant écrire la **formule-limite pour $\Gamma(N)$:**

THÉORÈME 3.1 (GOLDSTEIN). — *Soit :*

$$E_N(z,s)=\frac{\delta(N)}{2}N^{-s}\sum_{(c,d)=1,\,c\equiv 0(N),\,d\equiv 1(N)}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}.$$

On a :

$$\lim_{s\to 1}\left[\frac{1}{2\pi}E_N(z,s)-\frac{\alpha_N}{2(s-1)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\beta_N+\alpha_N\log\frac{\sqrt{N}}{2}-\alpha_N\left(\frac{1}{2}\log y+2\log|\eta_{\Gamma(N)}(z)|\right)$$

pour les valeurs de α_N, β_N et $\log\eta_{\Gamma(N)}$ données respectivement par (17), (18) et (23).

4. Calcul des sommes de Dedekind

On part de la formule :

$$\log\eta_{\Gamma(N)}(z)=\frac{iz}{4\pi\alpha_N N}-\frac{\pi^2}{6}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})\times\sum_{\delta=1}^{+\infty}A_N(\delta)\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{e^{2\pi ir\delta z}}{r}$$

Puisque $A_N(\delta)$ ne dépend que de la classe de δ mod N, on peut écrire :

$$\log\eta_{\Gamma(N)}(z)=\frac{iz}{4\pi\alpha_N N}-\frac{\pi^2}{6}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})$$
$$\times\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{\beta=1}^{N}A_N(\beta)\sum_{\lambda=0}^{+\infty}\frac{e^{2\pi ir(\beta+\lambda N)z}}{r}$$
$$=\frac{iz}{4\pi\alpha_N N}-\frac{\pi^2}{6}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})\sum_{r=1}^{+\infty}\sum_{\beta=1}^{N}\frac{A_N(\beta)}{r}\frac{e^{2\pi i\beta rz}}{1-e^{2\pi iNrz}}.$$

Soit $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\overline{\Gamma(N)}$. On sait que :

$$\log\eta_{\Gamma(N)}(\sigma z)=\log\eta_{\Gamma(N)}(z)+\frac{1}{2}\log(cz+d)+\pi i S_{\Gamma(N)}(\sigma)$$

de telle sorte que :

$$S_{\Gamma(N)}(\sigma)=\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left\{\log\eta_{\Gamma(N)}(\sigma z)-\log\eta_{\Gamma(N)}(z)-\frac{1}{2}\log(cz+d)\right\}.$$

Écrivons donc que :

$$(24)\quad \operatorname{Im}\log\eta_{\Gamma(N)}(z)=\frac{z+\bar{z}}{8\pi\alpha_N}-\frac{\pi^2}{12i}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})$$
$$\times\sum_{\beta=1}^{N} A_N(\beta)\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{Q^{r\beta}}{1-Q^{Nr}}-\frac{\overline{Q}^{r\beta}}{1-\overline{Q}^{Nr}}\right),$$

où on a posé $Q=e^{2\pi iz}$.

Premier cas. — $c\neq 0$.

On suit la méthode originale de Dedekind [1] en posant :

$$z=-\frac{d}{c}+iy\qquad (y>0),$$

d'où :

$$\sigma z=\frac{a}{c}+\frac{i}{c^2 y}$$

et en écrivant que :

$$(25)\quad S_{\Gamma(N)}(\sigma)=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0}\operatorname{Im}\left\{\log\eta_{\Gamma(N)}\left(\frac{a}{c}+\frac{i}{c^2 y}\right)\right.$$
$$\left.-\log\eta_{\Gamma(N)}\left(-\frac{d}{c}+iy\right)-\frac{1}{2}\log(icy)\right\}$$

On a facilement :

$$(26)\qquad \operatorname{Im}\log(icy)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(c)$$

1° *Calcul de :*

$$\lim_{y\to 0}\operatorname{Im}\log\eta_{\Gamma(N)}\left(\frac{a}{c}+\frac{i}{c^2 y}\right)$$

on écrit :

$$\frac{Q^{r\beta}}{1-Q^{rN}}-\frac{\overline{Q}^{r\beta}}{1-\overline{Q}^{rN}}=V^{r\beta}\left[\frac{Q_0^{r\beta}}{1-V^{Nr}Q_0^{Nr}}-\frac{Q_0^{-r\beta}}{1-V^{Nr}Q_0^{-Nr}}\right] \tag{27}$$

avec :

$$V=e^{-2\pi/c^2 y}, \qquad Q_0=e^{2\pi i a/c}$$

Quand $y \to 0$, $V \to 0$ également, et par suite (27) tend vers zéro. Comme le montre DEDEKIND [1] on peut intervertir la sommation et le passage à la limite, ce qui donne :

$$\lim_{y\to 0} \operatorname{Im} \log \eta_{\Gamma(N)}\left(\frac{a}{c}+\frac{i}{c^2 y}\right)=\frac{a}{4\pi N\alpha_N c}. \tag{28}$$

2° *Calcul de :*

$$\lim_{y\to 0} \operatorname{Im} \log \eta_{\Gamma(N)}\left(-\frac{d}{c}+iy\right).$$

On a :

$$\frac{Q^{r\beta}}{1-Q^{Nr}}-\frac{\overline{Q}^{r\beta}}{1-\overline{Q}^{Nr}}=W^{r\beta}\left(\frac{Q_1^{r\beta}}{1-W^{Nr}Q_1^{Nr}}-\frac{Q_1^{-r\beta}}{1-W^{Nr}Q_1^{-Nr}}\right) \tag{29}$$

avec :

$$W=e^{-2\pi y}, \qquad Q_1=e^{-2\pi i d/c}.$$

Moyennant intervertion de la sommation et de l'opération $y \to 0$, on obtient à la limite pour (29), si r est un entier tel que $Q_1^{Nr}\neq 1$:

$$\frac{Q_1^{r\beta}}{1-Q_1^{rN}}-\frac{Q_1^{-r\beta}}{1-Q_1^{-rN}}. \tag{30}$$

En vertu de la relation : $1/(1-x)=-1/n\sum_{j=1}^{n-1} jx^j$ si x est une racine n-ième de 1, (30) s'écrit :

$$-\frac{1}{|c|}\sum_{j=1}^{|c|-1} j\left(Q_1^{r(jN+\beta)}-Q_1^{-r(jN+\beta)}\right)$$

et donc :

$$\frac{Q_1^{r\beta}}{1-Q_1^{rN}}-\frac{Q_1^{-r\beta}}{1-Q_1^{-rN}} \tag{31}$$

$$=\frac{2i}{|c|}\sum_{j=1}^{|c|-1} j\sin\left[2\pi\frac{dr}{c}(jN+\beta)\right] \qquad \text{si} \quad Q_1^{Nr}\neq 1.$$

Dans le cas où $Q_1^{Nr}=1$, on a :

$$\frac{Q^{r\beta}}{1-Q^{Nr}}-\frac{\overline{Q}^{r\beta}}{1-\overline{Q}^{Nr}}=\frac{W^{r\beta}}{1-W^{Nr}}(Q_1^{r\beta}-Q_1^{-r\beta}).$$

On étudie alors la quantité :

$$(32)\quad \frac{1}{1-\mathrm{W}^{\mathrm{N}r}}\sum_{\beta=1}^{\mathrm{N}} A_N(\beta)\, W^{r\beta}(Q_1^{r\beta}-Q_1^{-r\beta})$$

$$=\frac{1}{1-W^{Nr}}\sum_{\alpha=1,(\alpha,N)=1}^{N} B(\alpha)\sum_{\beta=1}^{N-1} W^{r\beta}\cos(2\pi\alpha\beta/N)(Q_1^{r\beta}-Q_1^{-r\beta}),$$

où on a posé :

$$(33)\qquad B(\alpha)=\sum_{n=1,\,n\alpha\equiv 1(N)}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}.$$

or

$$\sum_{\beta=1}^{N-1} W^{r\beta}(Q_1^{r\beta}-Q_1^{-r\beta})\cos(2\pi\alpha\beta/\mathrm{N})$$

$$=\frac{1-W^{Nr}}{2}\left[\frac{1}{1-W^r e^{u-v}}-\frac{1}{1-W^r e^{u+v}}+\frac{1}{1-W^r e^{-u-v}}-\frac{1}{1-W^r e^{-u+v}}\right]$$

où $u=2\pi i\alpha/N$ et $v=2\pi i r d/c$ (somme de quatre progressions géométriques).

D'où :

$$(34)\quad \lim_{y\to 0}\sum_{\beta=1}^{N} A_N(\beta)\left[\frac{Q^{r\beta}}{1-Q^{Nr}}-\frac{\overline{Q}^{r\beta}}{1-\overline{Q}^{rN}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1,(\alpha,N)=1}^{N} B(\alpha)\left[\frac{1}{1-e^{u-v}}-\frac{1}{1-e^{u+v}}+\frac{1}{1-e^{-(u+v)}}-\frac{1}{1-e^{-u+v}}\right]$$

$$=\frac{i}{N}\sum_{\alpha=1,(\alpha,N)=1}^{N} B(\alpha)\sum_{j=1}^{N-1} j\left\{\sin 2\pi j\left(\frac{dr}{c}-\frac{\alpha}{N}\right)+\sin 2\pi j\left(\frac{dr}{c}+\frac{\alpha}{N}\right)\right\}$$

$$=\frac{2i}{N}\sum_{\alpha=1,(\alpha,N)=1}^{N} B(\alpha)\sum_{j=1}^{N-1} j\sin\left(\frac{2\pi r d j}{c}\right)\cos\left(\frac{2\pi\alpha j}{N}\right).$$

Finalement, en regroupant les résultats obtenus, à savoir (31) et (34), on a :

$$(35)\quad \lim_{y\to 0}\operatorname{Im}\log\eta_{\Gamma(N)}\left(-\frac{d}{c}+iy\right)$$

$$=-\frac{d}{4\pi N\alpha_N c}-\frac{\pi^2}{6}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{H(r)}{r}$$

où :

$$(36)\quad H(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{|c|}\sum_{\beta=1}^{N}A_N(\beta)\sum_{j=1}^{|c|-1}j\sin 2\pi\dfrac{dr}{c}(jN+\beta) & \text{si}\quad Q_1^{Nr}\neq 1\\ \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}j\,A_N(j)\sin(2\pi rdj/c) & \text{si}\quad Q_1^{Nr}=1.\end{cases}$$

On remarque alors que pour $Q_1^{Nr}=1$, c'est-à-dire pour r multiple de l'entier c/N, la première formule donne $H(r)=0$. En effet :

$$\sum_{\beta=1}^{N}\cos(2\pi\alpha\beta/N)\sin\frac{2\pi dr}{c}(jN+\beta)$$
$$=\frac{1}{4i}\sum_{\beta=1}^{N}(e^{2\pi i\alpha\beta/N}+e^{-2\pi i\alpha\beta/N})(e^{2\pi idr\beta/c}-e^{-2\pi idr\beta/c})$$

représente la somme de quatre progressions géométriques dont les sommes sont nulles car $(e^{\pm(2\pi i\alpha/N)\pm(2\pi idr/c)})^N=1$.

On peut donc écrire :

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{H(r)}{r}=\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{H_1(r)}{r}+N\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{H_2(rc/N)}{rc}$$

où H_1 et H_2 désignent respectivement la première et la deuxième formule définissant $H(r)$.

Compte tenu de la formule :

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi rx}{r}=-\pi((x))$$

on a finalement :

$$(37)\quad \sum_{r=1}^{+\infty}\frac{H(r)}{r}=-\frac{\pi}{|c|}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{j=1}^{|c|-1}j\,A_N(\beta)\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)$$
$$-\frac{\pi}{c}\sum_{j=1}^{N-1}jA_N(j)\left(\left(\frac{j}{N}\right)\right).$$

Posons alors

$$(38)\qquad s_{N,\beta}(d,|c|)=\sum_{j=0}^{|c|-1}\frac{j}{c}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right).$$

En regroupant les résultats (25), (26), (28), (35) et (37), on a :

THÉORÈME 4.1. — *Soit* $\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\overline{\Gamma(N)}$. *La « somme de Dedekind »* $S_{\Gamma(N)}(\sigma)$ *est donnée par :*

$$S_{\Gamma(N)}(\sigma)=\begin{cases} \dfrac{a+d}{4\pi^2 N\alpha_N c}-\dfrac{1}{4}\operatorname{sgn}(c)-\dfrac{\pi^2}{6}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2}) \\ \times\left[\dfrac{1}{c}\sum_{j=1}^{N-1} jA_N(j)\left(\left(\dfrac{j}{N}\right)\right)+\operatorname{sgn}(c)\sum_{\beta=1}^{N} A_N(\beta)\, s_{N,\beta}(d,|c|)\right] \\ \qquad\qquad si\quad c\neq 0, \\ \dfrac{b}{4\pi^2 N\alpha_N}\qquad si\quad c=0. \end{cases}$$

En effet dans ce dernier cas, on a $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b\equiv O(N)$ et on obtient facilement le résultat annoncé.

5. Propriétés des sommes partielles $S_{N,\beta}$

Nous donnons maintenant quelques propriétés des sommes :

$$s_{N,\beta}(d,c)=\sum_{j=0}^{c-1}\frac{j}{c}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right),$$

$$r_{N,\beta}(d,c)=\sum_{j=0}^{c-1}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)$$

que nous définissons *a priori* pour $c>0$, $c\equiv O(N)$ et $1\leqslant\beta\leqslant N$. Rappelons d'abord quelques propriétés élémentaires dont nous aurons besoin (*voir* [2] par exemple) :

(39) $$((x_1))=((x_2))\quad \text{si}\quad x_1-x_2\in\mathbb{Z},$$

(40) $$((-x))=-((x)),$$

(41) $$\sum_{j=1}^{c}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)=0\quad \text{pour tout entier } d,$$

d'où en particulier :

(42) $$s(d,c)=\sum_{j=1}^{c}\frac{j}{c}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right).$$

Plus généralement, on a :

(43) $$\sum_{j=1}^{c}\left(\left(\frac{j+x}{c}\right)\right)=((x)) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates des définitions :

(44) $$s_{N,\beta}(-d, c)=-s_{N,\beta}(d, c) \qquad \text{et} \qquad r_{N,\beta}(-d, c)=-r_{N,\beta}(d, c)$$

(45) $$s_{N,\beta}(d, c)=s_{N,\beta}(d', c)$$

et :

$$r_{N,\beta}(d, c)=r_{N,\beta}(d', c) \qquad \text{si} \quad d\equiv d'(c)$$

(46) $$s_{N,\beta n}(d, c)=s_{N/n,\beta}(nd, c) \text{ pour tout diviseur } n \text{ de } N;$$

(47) $$\sum_{\beta=1}^{N}\cos\left(\frac{2\pi\alpha\beta}{N}\right)\left(\left(\frac{d\beta}{N}\right)\right)=0 \quad \text{pour tout } (\alpha, d)\in\mathbb{N}^2.$$

La dernière s'obtient en remarquant que dans la somme, les termes correspondant à $\beta=N$ et $\beta=N/2$ éventuellement, sont nuls, puis en groupant les termes correspondant aux valeurs β et $N-\beta$.

LEMME 5.1 :

$$r_{N,\beta}(d, c)=N\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)$$

c'est immédiat en écrivant $c=Nc'$ et en utilisant (39).

THÉORÈME 5.1 :

$$r_{N,\beta}(d, c)=N\left(\left(\frac{d\beta}{N}\right)\right) \qquad si \quad (c, d)=1.$$

Soit en effet a tel que $ad\equiv 1\,(c)$. Posons $c=Nc'$:

$$\begin{aligned} r_{N,\beta}(d, c)&=N\sum_{j=0}^{c'-1}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)\\ &=N\sum_{j=0}^{c'-1}\left(\left(\frac{1}{c'}\left(adj+\frac{d\beta}{N}\right)\right)\right) \qquad \text{car} \quad (a, c')=1\\ &=N\sum_{j=0}^{c'-1}\left(\left(\frac{1}{c'}\left(j+\frac{d\beta}{N}\right)\right)\right) \qquad \text{car} \quad ad\equiv 1\,(c')\\ &=N\left(\left(\frac{d\beta}{N}\right)\right) \text{ d'après (43).}\end{aligned}$$

THÉORÈME 5.2. — *Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :*

$$r_{N,\beta}(nd, nc) = r_{N,\beta}(d, c)$$

$$s_{N,\beta}(nd, nc) = s_{N,\beta}(d, c) + \frac{n-1}{2} r_{N,\beta}(d, c)$$

d'où en particulier :

$$s_{N,\beta}(nd, nc) = s_{N,\beta}(d, c) + N\frac{n-1}{2}\left(\left(\frac{d\beta}{N}\right)\right) \quad si \quad (c, d) = 1.$$

En effet on a :

$$s_{N,\beta}(qd, qc) = \frac{1}{qc}\sum_{j=1}^{qc-1} j\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{qc}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=1}^{c}(kc+j)\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{c-1}\frac{j}{c}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{qc}\sum_{k=0}^{q-1} kc\sum_{j=0}^{c-1}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right).$$

LEMME 5.2 :

$$s_{N,\beta}(d, c) = \sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right) + \left(\frac{N}{2} - \frac{\beta}{c}\right)\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)$$

On écrit d'abord :

$$\sum_{j=0}^{c-1} j\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{c-1}(jN+\beta)\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right) - \frac{\beta}{N} r_{N,\beta}(d, c).$$

Ensuite, en posant $c = Nc'$, on a :

$$\sum_{j=0}^{Nc'-1}(jN+\beta)\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{c'-1}((kc'+j)N+\beta)\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)$$

$$= N\sum_{j=0}^{c'-1}(jN+\beta)\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right) + \sum_{k=0}^{N-1} kc' N\sum_{j=0}^{c'-1}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right)$$

$$= N\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1} j\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right) + cN\frac{N-1}{2}\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right).$$

En utilisant le lemme 5.1, on obtient donc :

$$s_{N,\beta}(d, c)$$

$$=\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1} \frac{j}{c}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)+\left(\frac{N-1}{2}-\frac{\beta}{c}\right)\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)$$

$$=\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)+\left(\frac{N}{2}-\frac{\beta}{c}\right)\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right).$$

THÉORÈME 5.3. — $s_{N,\beta}(d, c)=s_{N,\beta}(a, c)$ *si* $d\equiv 1(N)$, $ad\equiv 1(c)$.

En utilisant le lemme 5.2 et le théorème 5.1, on écrit :

$$s_{N,\beta}(d, c)=\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)+\left(\frac{N}{2}-\frac{\beta}{c}\right)\left(\left(\frac{\beta}{N}\right)\right)$$

$$=\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{aj}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{adj}{c}\right)\right)+\left(\frac{N}{2}-\frac{\beta}{c}\right)\left(\left(\frac{\beta}{N}\right)\right)$$

car $a\equiv 1\,(N)$ et a inversible $\bmod c$.

$$=\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{aj}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)+\left(\frac{N}{2}-\frac{\beta}{c}\right)\left(\left(\frac{\beta}{N}\right)\right) \text{ par (39)}$$

$$=s_{N,\beta}(a, c).$$

THÉORÈME 5.4. — *On a :*

$$\sum_{\beta=1}^{N-1} s_{N,\beta}(d, c) =s(d, c)-s(dN, c)-\frac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{N}\beta\sum_{j=0,\, j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right).$$

En effet on a d'abord :

$$s_{N,N}(d, c)=\sum_{j=0}^{c-1}\frac{j}{c}\left(\left(\frac{dN}{c}(j+1)\right)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{c}\left(\frac{j-1}{c}\right)\left(\left(\frac{dNj}{c}\right)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{c}\left(\left(\frac{j}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dNj}{c}\right)\right) \quad \text{par (41)}$$

$$=s(dN, c)$$

et ensuite :

$$\textstyle\sum_{\beta=1}^{N} s_{N,\beta}(d,c)$$

$$=s(d,c)+\frac{N}{2}\textstyle\sum_{j=0}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)-\frac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{N}\beta\sum_{j=0,\,j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right)$$

$$=s(d,c)-\frac{1}{c}\textstyle\sum_{\beta=1}^{N}\beta\sum_{j=0,\,j\equiv\beta(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{dj}{c}\right)\right) \text{ par (41).}$$

COROLLAIRE. — *Si* $(d, c)=1$, *on a :*

$$\textstyle\sum_{\beta=1}^{N-1} s_{N,\beta}(d,c)=s(d,c)-s(dN,c)-\frac{N}{c}\,s(d,N).$$

C'est immédiat en utilisant le théorème 5.1 et la définition (42) de $s(d, N)$.

6. Applications numériques

Pour $N=2, 3, 4, 6$ le calcul direct de α_N, β_N, $p_N(j)$ et $\log\eta_{\Gamma(N)}$ permet d'exprimer $\eta_{\Gamma(N)}$ à l'aide de la fonction η classique. Le calcul des sommes de Dedekind en résulte alors facilement, mais on peut également les obtenir à partir du théorème 4.1 et du corollaire du théorème 5.4.

$N=2$:

$$\eta_{\Gamma(2)}(z)=\frac{\eta(2z)^2}{\eta(z)},$$

$$S_{\Gamma(2)}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{a+d}{4c}-\operatorname{sgn}(c)\left\{\frac{1}{4}+2s(2d,|c|)-s(d,|c|)\right\}.$$

$N=3$:

$$\eta_{\Gamma(3)}(z)=\left\{\frac{\eta(3z)^3}{\eta(z)}\right\}^{1/2}$$

$$S_{\Gamma(3)}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{a+d}{3c}-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(c)\left\{\frac{1}{2}+3s(3d,|c|)-s(d,|c|)\right\}$$

$N=4$:

$$\eta_{\Gamma(4)}(z)=\frac{\eta(4z)^2}{\eta(2z)}=\eta_{\Gamma(2)}(2z)$$

$$S_{\Gamma(4)}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\frac{a+d}{2c}-\operatorname{sgn}(c)\left\{\frac{1}{4}+2s(4d,|c|)-s(2d,|c|)\right\}$$

$N=6$:

$$\eta_{\Gamma(6)}(z)=\left\{\frac{\eta(z)\eta^6(6z)}{\eta^2(2z)\eta^3(3z)}\right\}^{1/2}=\left\{\frac{\eta^3_{\Gamma(2)}(3z)}{\eta_{\Gamma(2)}(z)}\right\}^{1/2}=\frac{\eta^2_{\Gamma(3)}(2z)}{\eta_{\Gamma(3)}(z)},$$

$$S_{\Gamma(6)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\frac{a+d}{c}-\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(c)$$
$$\times\left\{\frac{1}{2}+s(d,|c|)+6s(6d,|c|)-3s(3d,|c|)-2s(2d,|c|)\right\}$$

7. Les propriétés de $\eta_{\Gamma(N)}$.

La formule (22) montre que :

(48) $$\eta_{\Gamma(N)}(z)=q^{\lambda}\prod_{d\geq 1}(1-q^d)^{p_N(d)},$$

où :

$$q=e^{2\pi iz},\qquad \lambda=\frac{1}{8\pi^2 N\alpha_N},\qquad p_N(d)=\frac{\pi^2}{6}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})\,A_N(d).$$

On sait déjà [5] que $\eta_{\Gamma(N)}$ est une forme modulaire, avec système multiplicatif $e^{\pi i}S_{\Gamma(N)}(\sigma)$, **de poids 1/2 pour le groupe $\Gamma(N)$. En particulier $\eta_{\Gamma(N)}$ est régulière aux pointes.**

En fait, on peut aller plus loin concernant les propriétés de $\eta_{\Gamma(N)}$. C'est l'objet du théorème que nous allons maintenant démontrer.

THÉORÈME 7.1. — *$\eta_{\Gamma(N)}$ est une forme modulaire de poids* 1/2 *pour le groupe $\Gamma(N)$, à coefficients rationnels, qui ne possède aucun zéro dans le demi-plan* $\operatorname{Im}(z)>0$ *ainsi qu'aux pointes à l'exception de ∞. De plus $S_{\Gamma(N)}(\sigma)\in Q$ pour tout $\sigma\in\Gamma(N)$, en particulier il existe un entier positif M tel que $\eta^M_{\Gamma(N)}$ soit une forme modulaire au sens usuel.*

Preuve. — A cause de la proposition 2.1, il suffit de prouver la dernière assertion, qui résulte du fait que $\pi^2 A_N(d)\in\mathbb{Q}$, ce que montre le calcul suivant :

Posons $d=(N, d)\,d'$ et $N=(N, d)\,N'$ et regardons $A_N(d)=B_{N'}(d')$ comme une fonction sur $G(N')/\{\pm 1\}$ (où $G(N')=(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z})^*$) dont le dual est l'ensemble des caractères pairs mod N'. En tant que telle, $B_{N'}$, est somme de sa « série de Fourier » :

$$B_{N'}(d')=\sum_{\chi\text{ pair, }\chi\bmod N'}\hat{B}_{N'}(\chi)\,\chi(d'),$$

où :

$$\hat{B}_{N'}(\chi)=\frac{2}{\varphi(N')}\sum_{\delta\in G(N')/\{\pm 1\}}B_{N'}(\delta)\,\overline{\chi(\delta)}.$$

En remplaçant $B_{N'}(\delta)$ par sa valeur, on a :

$$\hat{B}_{N'}(\chi)=\frac{1}{\varphi(N')}\sum_{a=1,(a,N)=1}^{N}\sum_{na\equiv 1(N)}\frac{\mu(n)}{n^2}G(\overline{\chi},a),$$

où l'on a fait apparaître la somme de Gauss :

$$G(\overline{\chi},a)=\sum_{\delta \bmod N'}\overline{\chi(\delta)}\,e^{2\pi i a\delta/N'}.$$

En utilisant la relation :

$$G(\overline{\chi},a)=\chi(a)\,G(\overline{\chi})$$

puisque $(a, N')=1$, on obtient :

$$\hat{B}_{N'}(\chi)=\frac{G(\overline{\chi})}{\varphi(N')}\sum_{(a,N)=1}\overline{\chi(a)}\sum_{na\equiv 1(N)}\frac{\mu(n)}{n^2}$$

$$=\frac{G(\overline{\chi})}{\varphi(N')\,L(2,\overline{\chi})}\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{\overline{\chi(p)}}{p^2}\right)^{-1},$$

d'où finalement :

(49) $A_N(d)=B_{N'}(d')$

$$=\frac{1}{\varphi(N')}\sum_{\chi\text{ pair},\,\chi \bmod N'}\frac{G(\overline{\chi})}{L(2,\overline{\chi})}\chi(d')\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{\overline{\chi(p)}}{p^2}\right)^{-1}.$$

Il résulte de (49) que $\pi^2 A_N(d)\in\mathbb{Q}$. En effet, on a la formule suivante ([8], par exemple) :

(50) $$L(2,\chi)=\frac{\pi^2}{f^2}G(\chi)\,B_{2,\overline{\chi}},$$

où f est le conducteur de χ :

(51) $$B_{2,\chi}=\frac{1}{f}\sum_{a=1}^{f}\chi(a)\,f^2\,B_2\left(\frac{a}{f}\right)$$

et :

(52) $$B_2(X)=X^2-X+\frac{1}{6}.$$

Or il est clair que $B_{2,\chi}\in\mathbb{Q}(\chi)$ et que $(B_{2,\chi})^{\sigma}=B_{2,\chi^{\sigma}}$ pour tout $\sigma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, d'où le résultat.

Remarquons qu'on peut calculer $A_N(d)$ de la façon suivante : Si $\chi=\chi_0$ le caractère principal, on utilise le fait que :

$$G(\chi_0)=\mu(N').$$

Si $\chi\neq\chi_0$, soit f son conducteur et χ_1 le caractère primitif mod f induisant χ. Si $(f, N'/f)>1$, on a $G(\chi)=0$. Il suffit donc de considérer les caractères pour lesquels $(f, N'/f)=1$. On a alors la décomposition :

$$\chi(a)=\chi_1(a)\,\chi_2(a) \tag{53}$$

où χ_2 est le caractère principal mod N'/f, ce qui entraîne la décomposition des sommes de Gauss :

$$G(\chi)=G(\chi_1)\,G(\chi_2)\,\chi_1\left(\frac{N'}{f}\right)=G(\chi_1)\,\mu\left(\frac{N'}{f}\right)\chi_1\left(\frac{N'}{f}\right). \tag{54}$$

En utilisant la formule :

$$L(2,\chi)=\frac{\pi^2}{f^3}\,G(\chi)\,M_2(\overline{\chi}) \qquad \text{si} \quad \chi \text{ est primitif,} \tag{55}$$

où :

$$M_2(\chi)=\textstyle\sum_{a \bmod f}\chi(a)\,a^2 \tag{56}$$

on obtient finalement pour $A_N(d)$ la formule suivante :

$$\begin{aligned} A_N(d)= {} & \frac{6\,\mu(N')}{\varphi(N')\,\pi^2}\textstyle\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})^{-1} \\ & +\frac{1}{\pi^2\,\varphi(N')}\textstyle\sum_{f\mid N'} f^3\,\mu\left(\frac{N'}{f}\right) \\ & \times\textstyle\sum_{\chi \bmod f,\ \chi \text{ pair},\ \chi \text{ primitif}}\chi(d')\,\overline{\chi}\left(\frac{N'}{f}\right)M_2(\chi)^{-1}\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{\overline{\chi}(p)}{p^2}\right). \end{aligned} \tag{57}$$

Ceci nous permet de simplifier l'expression de $S_{\Gamma(N)}(\sigma)$ donnée par le théorème 4.1, à l'aide des formules établies au paragraphe 5. On note d'abord que, grâce au lemme 5.2 et au théorème 5.1, on a :

$$s_{N,j}(d,c)+s_{N,N-j}(d,c)=t_{N,j}(d,c)+\frac{N-2j}{c}\left(\left(\frac{j}{N}\right)\right) \tag{58}$$

où on a posé :

$$(59)\qquad t_{N,j}(d,c)=\sum_{k=0,\,k\equiv j(N)}^{c-1}\left(\left(\frac{k}{c}\right)\right)\left(\left(\frac{dk}{c}\right)\right).$$

On en déduit facilement l'expression de $S_{\Gamma(N)}(\sigma)$ (pour $c(\sigma)\neq 0$) :

$$(60)\qquad S_{\Gamma(N)}(\sigma)=\frac{a+d}{4\pi^2 N\alpha_{Nc}}-\operatorname{sgn}(c)\left\{\frac{1}{4}+\sum_{j=0}^{[N/2]}p_N(j)\,t_{N,j}(d,|c|)\right\}.$$

Citons enfin quelques relations simples vérifiées par les nombres $p_N(j)$, dont nous aurons besoin par la suite :

En utilisant la propriété bien connue des caractères, à savoir :

$$\sum_{x\in G}\chi(x)=0 \qquad \text{si} \quad \chi\neq\chi_0,$$

on a d'abord la relation :

$$(61)\qquad \sum_{j=1}^{N}p_N(j)=\mu(N)+\sum_{d \bmod N,\,(d,N)>1}\frac{\mu(N/(N,d))}{\varphi(N/(N,d))}=0$$

ainsi que le montre un calcul simple.

On en déduit que :

$$(62)\qquad \left\{\begin{array}{c} \text{si } N\equiv 1(2) : \\ \sum_{j=1}^{(N-1)/2}p_N(j)=-\dfrac{1}{2}, \\ \text{si } N\equiv 0(2) : \\ p_N\left(\dfrac{N}{2}\right)=-1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{N/2-1}p_N(j)=0. \end{array}\right.$$

On a également :

$$(63)\qquad p_{qN}(qj)=p_N(j) \qquad \text{si} \quad q\,|\,N.$$

Il est intéressant de relier la fonction $\eta_{\Gamma(N)}$ à des fonctions connues par ailleurs. C'est l'objet du lemme suivant :

LEMME 7.1. — *Avec les notations précédentes, on a :*

$$(64)\qquad \eta_{\Gamma(N)}(z)=\eta(Nz)\prod_{j=1}^{[N/2]}\eta_{\binom{j}{0}}(Nz)\,p_N(j)\,\delta_N(j)$$

$$=\eta(Nz)^{3/2}\prod_{j=1}^{[N/2]}\theta_{N,\,j}(Nz)\,p_N(j)\,\delta_N(j)$$

où :

$$(65)\qquad \eta_{\binom{j}{0}}(z)=q^{(1/2)B_2(j/N)}\prod_{n\geq 1,\, n\equiv j(N)}(1-q^{n/N})\prod_{n\geq 1,\, n\equiv -j(N)}(1-q^{n/N})$$

(*la notation est celle de Schoeneberg* [9]) :

$$(66)\qquad \theta_{N,\, j}(z)=\sum_{n\in \mathbf{Z}}(-1)^n q^{(1/2)(n+j/N-1/2)^2}$$

$$(67)\qquad \delta_N(j)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & si \ \ N\equiv 0(2) \ \ et \ \ j=N/2,\\ 1 & sinon.\end{cases}$$

Preuve de la première égalité. — On peut écrire $\eta_{\Gamma(N)}$ sous la forme :

$$\eta_{\Gamma(N)}(z)=q^{\lambda-N/24}\eta(Nz)\prod_{j=1}^{N-1}\prod_{d\equiv j(N)}(1-q^d)\,p_N(j)$$

d'où, en introduisant $\eta_{\binom{j}{0}}(z)$:

$$\eta_{\Gamma(N)}(z)=q^{\lambda-N/24-(N/2)\sum_{j=1}^{[N/2]}p_N(j)\delta_N(j)B_2(j/N)}\ \eta(Nz)\prod_{j=1}^{[N/2]}\eta_{\binom{j}{0}}(Nz)\,p_N(j)\,\delta_N(j).$$

Le résultat s'ensuit grâce à la relation :

$$(68)\qquad \sum_{j=1}^{[N/2]}p_N(j)\,B_2(j/N)\,\delta_N(j)=2\,\frac{\lambda}{N}-\frac{1}{12}=\frac{1}{24}\Big(N\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})-2\Big)$$

qui se démontre comme suit : on calcule :

$$(69)\qquad \sum_{j=0}^{N-1}A_N(j)\,B_2(j/N)$$
$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{a=1,\,(a,\,N)=1}^{N}\sum_{na\equiv 1(N)}\mu(n)\,n^{-2}\times\sum_{j=0}^{N-1}e^{2\pi iaj/N}\sum_{m\neq 0}\frac{e^{2\pi imj/N}}{m^2}$$
$$=\frac{N}{2\pi^2}\sum_{a=1,\,(a,\,N)=1}^{N}\sum_{na\equiv 1(N)}\mu(n)\,n^{-2}\sum_{m\equiv -a(N)}m^{-2}$$
$$=\frac{N}{2\pi^2}\sum_{k\equiv -1(N)}k^{-2}\sum_{n\mid k}\mu(n)$$
$$=\frac{N}{2\pi^2}$$

d'où la relation cherchée en tenant compte de :

$$(70)\qquad B_2(0)=\frac{1}{6}\qquad \text{et}\qquad B_2\left(\frac{N-j}{N}\right)=B_2\left(\frac{j}{N}\right).$$

La deuxième formule peut se démontrer à partir de la première. On écrit d'abord, en utilisant (62) :

$$\eta_{\Gamma(N)}(z)=\eta(Nz)^{3/2}\prod_{j=1}^{[N/2]}[q^{(N/2)B_2(j/N)}\eta(Nz)$$
$$\times\prod_{d\equiv j(N)}(1-q^d)\prod_{d\equiv j\,(N)}(1-q^d)]^{p_N(j)\delta_N(j)}.$$

Ensuite on obtient le résultat cherché grâce à l'identité :

$$(71)\quad q^{(N/2)B_2(j/N)}\eta(Nz)\prod_{d\equiv j(N)}(1-q^d)\prod_{d\equiv -j(N)}(1-q^d)$$
$$=\sum_{n\in Z}(-1)^n q^{(N/2)(n+(j/N)-(1/2))^2},$$

que l'on peut déduire du triple produit de Jacobi par une série de changements de variable appropriés.

Nous pouvons utiliser (64) pour donner quelques indications sur l'entier M du théorème 7.1 en nous servant des propriétés des fonctions $\eta_{\binom{g}{h}}$ démontrées dans [9] : soit en effet δ un dénominateur commun des nombres $p_N(j)\,\delta_N(j)$. En posant comme dans [9] $N_1=12\,N^2/(6,\,N)$, on a :

$$(72)\qquad \eta^{N_1}_{\binom{j}{0}}(N\sigma z)=\eta^{N_1}_{\binom{j}{0}}(\sigma' Nz),\qquad \sigma'=\begin{pmatrix} a & bN \\ c/N & d\end{pmatrix}$$
$$=\eta^{N_1}_{\binom{j}{0}}(Nz).$$

On en déduit :

$$\eta^{N_1}_{\Gamma(N)}(\sigma z)=e^{\pi i N_1\delta S(\sigma')}(cz+d)^{N_1\delta/2}\,\eta^{N_1\delta}_{\Gamma(N)}(z).$$

On sait que $12\,S(\sigma')\in\mathbb{Z}$. Comme d'autre part $12\,|\,N_1$, il en résulte que :

$$(73)\qquad \eta^{2N_1}_{\Gamma(N)}(\sigma z)=(cz+d)^{N_1\delta}\,\eta^{2N_1\delta}_{\Gamma(N)}(z)$$

pour tout $\sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(N)$.

Pour terminer, voici un tableau des valeurs de $p_N(j)$ pour $N\leqslant 15$, compte tenu du fait que $p_N(N-j)=p_N(j)$.

Pour connaître plus précisément l'entier M du théorème 7.1, il serait évidemment intéressant de pouvoir préciser le comportement du dénominateur de $p_N(j)$ en fonction de N, mais l'auteur ne sait pas répondre à cette question pour l'instant.

TABLEAU

Valeurs de $p_N(j)$

N \ j	0	1	2	3	4	5	6	7
2	1	−1						
3	1	−1/2						
4	1	0	−1					
5	1	1	−3/2					
6	1	1/2	−1/2	−1				
7	1	3/2	−1/2	−3/2				
8	1	1	0	−1	−1			
9	1	3/2	0	−1/2	−3/2			
10	1	1	1/2	−1/2	−1	−1		
11	1	19/10	2/5	−1/10	−11/10	−8/5		
12	1	1	1/2	0	−1/2	−1	−1	
13	1	75/38	13/19	6/19	−15/19	−37/38	−65/38	
14	1	7/6	5/6	1/6	−1/6	−5/6	−7/6	−1
15	1	13/8	5/8	3/4	−3/8	−1/2	−5/4	−11/8

8. Extension aux groupes de congruence

Les résultats précédents concernant le groupe $\Gamma(N)$ s'étendent sans difficulté à un groupe de congruence. Soit en effet Γ_1 un sous-groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$ contenant $\Gamma(N)$. Posons :

$$\Gamma_1 = \cup_{i=1}^{\mu} \Gamma(N)\,\sigma_i. \tag{74}$$

Le même raisonnement qu'au paragraphe 2 conduit à la formule :

$$\eta_{\Gamma_1}(z) = \prod_{i=1}^{\mu} (\eta_{\Gamma(N)}|_{1/2}\,\sigma_i)^{1/\mu} \tag{75}$$

et on a le résultat suivant :

THÉORÈME 8.1. — η_{Γ_1} *est une forme modulaire de poids* 1/2 *pour* Γ_1, *à coefficients rationnels, qui ne possède aucun zéro dans le demi-plan* $\mathrm{Im}(z) > 0$, *ainsi qu'aux pointes à l'exception de* ∞. *De plus* $S_{\Gamma_1}(\sigma) \in \mathbb{Q}$ *pour tout* $\sigma \in \Gamma_1$.

Preuve. — La rationnalité de $S_{\Gamma_1}(\sigma)$ provient de la formule de transformation :

$$\begin{aligned}\eta_{\Gamma_1}|_{1/2}\,\sigma &= \prod_{i=1}^{\mu}(\eta_{\Gamma(N)}|_{1/2}\,\sigma_i\,\sigma)^{1/\mu}\\ &= \prod_{i=1}^{\mu}(\eta_{\Gamma(N)}|_{1/2}\,\gamma_i\,\sigma_{i'})^{1/\mu} \qquad \text{avec} \quad \gamma_i \in \Gamma(N)\\ &= \prod_{i=1}^{\mu}(e^{\pi i S_{\Gamma(N)}(\gamma_i)}\,\eta_{\Gamma(N)}|_{1/2}\,\sigma_{i'})^{1/\mu} = e^{\pi i/\mu \sum_{i=1}^{\mu} S_{\Gamma(N)}(\gamma_i)}\,\eta_{\Gamma_1}(z)\end{aligned}$$

d'où :

(76) $$S_{\Gamma_1}(\sigma)=\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\mu} S_{\Gamma(N)}(\gamma_i)\in\mathbb{Q}.$$

Notons ici qu'à partir du théorème 8.1, on peut obtenir facilement une démonstration du théorème de Manin-Drinfeld :

COROLLAIRE. — *Soient Γ_1 un groupe de congruence, $\varkappa$ et $\varkappa'$ deux pointes non équivalentes pour Γ_1. Si on désigne par i^* le plongement (envoyant ∞ sur 0) de la courbe modulaire X_{Γ_1} dans sa jacobienne, alors il existe un entier positif m tel que :*

$$mi^*(\varkappa-\varkappa')=0.$$

Preuve. — En termes de diviseurs, il suffit de montrer qu'il existe une fonction rationnelle sur X_{Γ_1} *dont le diviseur est précisément* $m(\varkappa-\varkappa')$.

Au vu du paragraphe 2 on peut poser :

(77) $$\eta_{\Gamma_1,\varkappa}=\eta_{\sigma^{-1}\Gamma_1\sigma},$$

si $\varkappa$ est une pointe de Γ_1 et $\sigma\in SL(2,\mathbb{Z})$ telle que $\sigma(\infty)=\varkappa$. Soit :

(78) $$f=\eta_{\Gamma_1,\varkappa}|_{1/2}\,\sigma^{-1}/\eta_{\Gamma_1,\varkappa'}|_{1/2}\,\sigma'^{-1}.$$

Montrons qu'il existe un entier m positif tel que f^m soit une fonction rationnelle sur X_{Γ_1}. On a en effet la formule :

$$\begin{aligned}\eta_{\Gamma_1,\varkappa}|_{1/2}\,\sigma^{-1}\big|_{1/2}\,\gamma_1&=\eta_{\Gamma_1,\varkappa}|_{1/2}\,\sigma^{-1}\gamma_1\\&=\eta_{\Gamma_1,\varkappa}|_{1/2}\,\sigma^{-1}\gamma_1\sigma\sigma^{-1}\\&=e^{\pi i S_{\Gamma_1,\varkappa}(\sigma^{-1}\gamma_1\sigma)}\,\eta_{\Gamma_1,\varkappa}|_{1/2}\,\sigma^{-1}.\end{aligned}$$

La rationnalité de $S_{\Gamma_1,\varkappa}$ montre alors qu'il existe un entier rationnel $m_\varkappa$ tel que $m_\varkappa S_{\Gamma_1,\varkappa}\in\mathbb{Z}$. De même pour $\varkappa'$, ce qui permet d'en déduire l'existence d'un entier m tel que f^m soit invariante par Γ_1. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\eta_{\Gamma_1,\varkappa}|_{1/2}\,\sigma^{-1}$ possède un zéro en $\varkappa$ et ne s'annule pas aux autres pointes, et que l'ordre de ce zéro est celui du zéro de $\eta_{\sigma^{-1}\Gamma_1\sigma}$ à l'∞, donc de celui de η_{Γ_1} à l'∞ puisque $[\sigma^{-1}\Gamma_1\sigma:\Gamma(N)]=[\Gamma_1:\Gamma(N)]$.

9. Le cas du groupe $\Gamma_0(N)$

Appliquons maintenant les résultats qui précèdent au groupe $\Gamma_0(N)$. Il est clair que :

$$E_{\Gamma_0(N)}(z, s)=\frac{1}{2}\sum_{(c, d)=1, c\equiv 0(N)} y^s|cz+d|^{-2s}. \tag{79}$$

On cherche son développement de Fourier en l'écrivant sous la forme :

$$E_{\Gamma_0(N)}(z, s)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1, (\alpha, N)=1}^{N}\sum_{(c, d)=1, c\equiv 0(N), d\equiv\alpha(N)}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}.$$

Posons :

$$E_{g, h}(z, s, N)=\frac{1}{2}\sum_{(c, d)=1, c\equiv g(N), d\equiv h(N)}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}}.$$

On a la formule suivante ([5], par exemple) :

$$E_{g, h}(z, s, N)=a_{0, g, h}(y, s, N)+\sum_{m\neq 0} a_{m, g, h}(y, s, N)\, e^{2\pi imx/N}, \tag{80}$$

où :

$$a_{0, g, h}(y, s, N)=\frac{1}{2}\sum_{a=1, (a, N)=1}^{N}\left(\sum_{n=1, na\equiv 1(N)}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^{2s}}\right)$$
$$\times\left[y^s\theta_N(ag)\sum_{d\equiv ah(N)}|d|^{-2s}+y^{1-s}\sum_{c\equiv ag(N)}|c|^{1-2s}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(u^2+1)^s}\right]$$

avec

$$\theta_N(g)=\begin{cases}1 & \text{si } g\equiv O(N),\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et

$$a_{m, g, h}(y, s, N)=\frac{y^{1-s}}{N}\sum_{a=1\,(a, N)=1}^{N}\left(\sum_{n=1,\ na\equiv 1\,(N)}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^{2s}}\right)$$
$$\times I\left(s, \frac{2\pi my}{N}\right)\sum_{c|m, c>0, c\equiv\pm ag(N)}\frac{\cos(2\pi mah/cN)}{c^{2s-1}}$$

avec

$$I(s, v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iuv}\,du}{(u^2+1)^s}.$$

A l'aide de ces formules, on obtient finalement :

$$E_{\Gamma_0(N)}(z, s)=a_0(y, s, N)+\sum_{m\equiv 0(N),\, m\neq 0} a_{m/N}(y, s, N)\, e^{2\pi imx/N}$$

avec

(81)
$$a_0(y, s, N)=y^s+y^{1-s}\varphi_{N,0}(s)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(u^2+1)^s}$$

où

(82)
$$\varphi_{N,0}(s)=\varphi(N)\,N^{-2s}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2s})^{-1}$$

et

(83)
$$a_{m/N}(y, s, N)=\frac{y^{1-s}}{N}\,I\left(s, \frac{2\pi my}{N}\right)\zeta(2s)^{-1}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2s})^{-1}$$
$$\times\sum_{c\mid m,\, c>0,\, c\equiv 0(N)} c^{1-2s}\sum_{\alpha=1,\,(\alpha, N)=1}^{N}\cos\left(\frac{2\pi m\alpha}{cN}\right).$$

Il en résulte (*cf.* [7], p. 16) :

(84)
$$\varphi_{N,m/N}(s)=\frac{1}{N}\zeta(2s)^{-1}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2s})^{-1}$$
$$\times\sum_{c\mid m,\, c>0,\, c\equiv 0(N)} c^{1-2s}\sum_{\alpha=1,\,(\alpha, N)=1}^{N}\cos\left(\frac{2\pi m\alpha}{cN}\right).$$

On pose ensuite :

$$\varphi_{N,0}(s)=\frac{\alpha_N}{s-1}+\beta_N+\ldots$$

et on calcule ces deux constantes en utilisant les développements suivants :

$$N^{-2s}=N^{-2}\{1-2(s-1)\log N+\ldots\}$$
$$\zeta(2s)^{-1}=\frac{6}{\pi^2}\,\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}(s-1)+\ldots$$
$$\zeta(2s-1)=\frac{1}{2(s-1)}+\gamma+\ldots,\quad \gamma \text{ Cte d'Euler}$$
$$\frac{1}{1-p^{-2s}}=\frac{p^2}{p^2-1}\left\{1-2\frac{\log p}{p^2-1}(s-1)+\ldots\right\}$$

d'où :

(85) $$\alpha_N = \frac{3\varphi(N)}{\pi^2}\{N^2 \prod_{p|N}(1-p^{-2})\}^{-1},$$

(86) $$\beta_N = \frac{6\varphi(N)}{\pi^2}\{N^2 \prod_{p|N}(1-p^{-2})\}^{-1} \times\left\{\gamma - \log N - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \sum_{p|N}\frac{\log p}{p^2-1}\right\},$$

on peut donc écrire maintenant :

$$\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) = \frac{\pi iz}{12\varphi(N)} N^2 \prod_{p|N}(1-p^{-2}) - \frac{N}{\varphi(N)} \sum_{m/N=1}^{+\infty} \sum_{c|m,\, c>0,\, c\equiv 0(N)} \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1,\,(\alpha,\,N)=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi m\alpha}{cN}\right) e^{2\pi imz/N}.$$

On remplace ensuite c par cN, m par mN et on pose $m = cd$. On obtient alors :

$$\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) = \frac{\pi iz}{12\varphi(N)} N^2 \prod_{p|N}(1-p^{-2}) - \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1,\,(\alpha,\,N)=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi\alpha d}{N}\right) e^{2\pi icdz}$$

que l'on peut écrire :

$$\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) = \frac{\pi iz}{12\varphi(N)} N^2 \prod_{p|N}(1-p^{-2}) + \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{d=1}^{+\infty} c_N(d) \log(1-e^{2\pi idz})$$

où

$$c_N(d) = \sum_{\alpha=1,\,(\alpha,\,N)=1}^{N} e^{2\pi i\alpha d/N}$$

est la somme de Ramanujan, dont nous utiliserons, dans les calculs qui suivent, les deux expressions suivantes (*cf.* [10], p. 238) :

(87) $$c_N(d) = \sum_{\delta|d,\,\delta|N} \mu(N/\delta)\,\delta,$$

(88) $$c_N(d) = \frac{\varphi(N)}{\varphi(N/(N,\,d))}\,\mu(N/(N,\,d)).$$

En tenant compte du fait que :

$$\frac{N^2}{\varphi(N)} \prod_{p|N}(1-p^{-2}) = N \prod_{p|N}(1+p^{-1}) = \mu_N,$$

où μ_N désigne l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans $SL(2,\,\mathbb{Z})$, on a donc :

(89) $$\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) = \frac{\pi iz}{12}\mu_N + \sum_{d=1}^{+\infty} \psi_N(d) \log(1-e^{2\pi idz})$$

avec :

$$\psi_N(d)=\frac{c_N(d)}{\varphi(N)} \tag{90}$$

et on a obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 9.1. — *Soit :*

$$E_{\Gamma_0(N)}(z,s)=\frac{1}{2}\sum\nolimits_{(c,d)=1,\,c\equiv 0(N)}^{\bullet}\frac{y^s}{|cz+d|^{2s}},$$

la série d'Eisenstein pour le groupe $\overline{\Gamma_0(N)}$. On a :

$$\lim_{s\to 1}\left[\frac{1}{2\pi}E_{\Gamma_0(N)}(z,s)-\frac{\alpha_N}{2(s-1)}\right]=\frac{1}{2}\beta_N-\alpha_N\log 2-\alpha_N\left(\frac{1}{2}\log y+2\log|\eta_{\Gamma_0(N)}(z)|\right),$$

où α_N, β_N *et* $\log\eta_{\Gamma_0(N)}$ *sont donnés respectivement par* (85), (86) *et* (89).

On sait que la fonction $\log\eta_{\Gamma_0(N)}$ se transforme par le groupe $\overline{\Gamma_0(N)}$ suivant la formule :

$$\log\eta_{\Gamma_0(N)}(\sigma z)=\log\eta_{\Gamma_0(N)}(z)+\frac{1}{2}\log(cz+d)+\pi i S_{\Gamma_0(N)}(\sigma),$$

où $\sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\overline{\Gamma_0(N)}$ et $S_{\Gamma_0(N)}(\sigma)$ désigne la somme de Dedekind attachée au groupe $\overline{\Gamma_0(N)}$. Des calculs similaires à ceux effectués au paragraphe 4 conduisent à la formule suivante :

$$S_{\Gamma_0(N)}(\sigma)=\begin{cases}\dfrac{a+d}{12c}\mu_N-\dfrac{1}{4}\operatorname{sgn}(c)-\left[\dfrac{1}{c}\sum_{j=1}^{N} j\psi_N(j)\left(\left(\dfrac{dj}{N}\right)\right)\right.\\ \left.\quad+\operatorname{sgn}(c)\sum_{\beta=1}^{N}\psi_N(\beta)s_{N,\beta}(d,|c|)\right] & \text{si } c\neq 0,\\ \dfrac{b}{12}\mu_N & \text{si } c=0,\end{cases} \tag{91}$$

où μ_N désigne l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans $SL(2,\mathbb{Z})$ et $s_{N,\beta}(d,|c|)$ est définie par :

$$s_{N,\beta}(d,|c|)=\sum_{j=0}^{|c|-1}\frac{j}{c}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right).$$

Nous allons voir que le calcul effectif de $\eta_{\Gamma_0(N)}$ permet d'exprimer $S_{\Gamma_0(N)}$ à l'aide des sommes de Dedekind classiques.

Les propriétés de $\eta_{\Gamma_0(N)}$.

Le calcul suivant montre comment $\eta_{\Gamma_0(N)}$ s'exprime à l'aide de la fonction η classique :

PROPOSITION 9.1. — $\eta_{\Gamma_0(N)}^{\varphi(N)}=\prod_{d\mid N}\eta(dz)^{d\mu(N/d)}$.

En effet on a, à l'aide de (87) :

$$\begin{aligned}
\varphi(N)\log\eta_{\Gamma_0(N)}
&=\frac{\pi iz}{12}N^2\prod_{p\mid N}(1-p^{-2})+\sum_{n=1}^{+\infty}c_N(d)\log(1-e^{2\pi inz})\\
&=\frac{\pi iz}{12}\sum_{d\mid N}d^2\mu(N/d)+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{d\mid N,\, d\mid n}\mu(N/d)\,d\log(1-e^{2\pi inz})\\
&=\frac{\pi iz}{12}\sum_{d\mid N}d^2\mu(N/d)+\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{d\mid N}\mu(N/d)\log(1-e^{2\pi indz})\\
&=\sum_{d\mid N}\left[\frac{\pi idz}{12}+\sum_{n=1}^{+\infty}\log(1-e^{2\pi indz})\right]d\mu(N/d)\\
&=\sum_{d\mid N}\log\eta(dz)\,d\mu(N/d).
\end{aligned}$$

Le calcul de $\eta_{\Gamma_0(N)}$ nous permet immédiatement de déterminer la somme de Dedekind $S_{\Gamma_0(N)}$:

PROPOSITION 9.2. — *Si* $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$, *on a :*

$$S_{\Gamma_0(N)}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\delta\mid N}\delta\mu(N/\delta)\,S\begin{pmatrix}a&b\delta\\c/\delta&d\end{pmatrix},\tag{92}$$

où

$$S\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{a+d}{12c}-\operatorname{sgn}(c)\left\{\frac{1}{4}+s(d,|c|)\right\}$$

si $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$.

Nous pouvons apporter quelques précisions concernant le théorème 8.1 dans le cas de $\Gamma_0(N)$, en particulier sur l'entier M tel que $\eta_{\Gamma_0(N)}^M$ soit une forme modulaire au sens usuel.

Tout d'abord si $N=p$ est un nombre premier, on a :

$$(93)\qquad \eta_{\Gamma_0(p)}^{p-1}=\frac{\eta(pz)^p}{\eta(z)}=f(z)$$

et si on pose $w=\begin{pmatrix}0 & -1\\ p & 0\end{pmatrix}$, on obtient :

$$f|_{(p-1)/2}\,w=p^{-(p+1)/4}\,e^{\pi i(1-p)/4}\,\frac{\eta^p(z)}{\eta(pz)}.$$

Or on sait [11] que pour $p>3$, $\eta^p(z)/\eta(pz)$ est une forme modulaire de poids $(p-1)/2$ et de « caractère » $\left(\frac{d}{p}\right)$. On a donc :

$$(94)\qquad \eta_{\Gamma_0(p)}^{p-1}(\sigma z)=\left(\frac{d}{p}\right)(cz+d)^{(p-1)/2}\,\eta_{\Gamma_0(p)}^{p-1}(z)$$

pour tout $\sigma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(p)$.

Dans le cas général, notons :

$$N=\prod_{i=1}^r p_i^{n_i}\qquad\text{et}\qquad N'=\prod_{i=1}^r p_i^{n_i-1}.$$

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 9.3. — $\eta_{\Gamma_0(N)}^{\varphi(N/N')}$ *est une forme modulaire de poids* $(1/2)\,\varphi(N/N')$ *pour* $\Gamma_0(N)$ *si* $r\geqslant 3$ *ou bien si* $r=2$ *avec* $p_1\geqslant 3$ *et* $p_2\geqslant 3$.

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre r, en commençant par le cas d'un entier sans facteur carré. Si $r=3$, c'est facilement vérifiable à l'aide de la proposition 9.1 et de la formule (94).

Pour $N=\prod_{i=1}^r p_i$ on pose $N_1=\prod_{i=2}^r p_i$ et on écrit que :

$$\eta_{\Gamma_0(N)}^{\varphi(N)}(z)=\eta_{\Gamma_0(N_1)}^{-\varphi(N_1)}(z)\,\eta_{\Gamma_0(N_1)}^{\varphi(N_1)p_1}(p_1 z),$$

à l'aide de la proposition 9.1 par exemple. Si $\sigma\in\Gamma_0(N)$, on peut écrire $\sigma=\gamma_{p_1}^{-1}\sigma'\gamma_{p_1}$, $\gamma_{p_1}=\begin{pmatrix}p_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\sigma'\in\Gamma_0(N_1)$ et supposant le résultat vrai pour N_1, on constate aisément qu'il est vrai pour N. Dans le cas général, on écrit :

$$\eta_{\Gamma_0(N)}(z)=f(N'z)$$

où f est de poids $(N/N')/2$ pour $\Gamma_0(N/N')$ d'après ce qu'on vient de voir. Le résultat s'ensuit aussitôt en écrivant comme précédemment $\sigma = \gamma_{N'}^{-1}\,\sigma'\,\gamma_{N'}$ avec $\sigma' \in \Gamma_0(N/N')$ si $\sigma \in \Gamma_0(\mathrm{N})$.

Reste à traiter les cas particuliers en calculant par exemple les sommes de Dedekind pour $N=2, 3$. On obtient ainsi :

$$\eta^{8}_{\Gamma_0(2)}(\sigma z)=(cz+d)^4\,\eta^{8}_{\Gamma_0(2)}(z), \qquad \sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(2), \tag{95}$$

$$\eta^{12}_{\Gamma_0(3)}(\sigma z)=(cz+d)^6\,\eta^{12}_{\Gamma_0(3)}(z), \qquad \sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(3), \tag{96}$$

$$\eta^{12}_{\Gamma_0(6)}(\sigma z)=(cz+d)^6\,\eta^{12}_{\Gamma_0(6)}(z), \qquad \sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(6), \tag{97}$$

$$\eta^{2(q-1)}_{\Gamma_0(2q)}(\sigma z)=(cz+d)^{q-1}\,\eta^{2(q-1)}_{\Gamma_0(2q)}(\mathrm{z}), \qquad \sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(2q). \tag{98}$$

10. L'action des opérateurs de Hecke sur log $\eta_{\Gamma_0(N)}$

Rappelons d'abord que l'opérateur de Hecke agissant sur les formes modulaires de poids k est défini pour tout n par :

$$T_k(n)\,f(z)=n^{k-1}\sum_{\alpha\delta=n,\ \delta>0}\ \sum_{\beta \bmod \delta}\delta^{-k} f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\delta}\right), \tag{99}$$

d'où en particulier :

$$T_k(p)\,f(z)=p^{k-1}f(pz)+p^{-1}\sum_{m \bmod p} f\left(\frac{z+m}{p}\right).$$

Rappelons également les formules :

$$T_k(p)\,T_k(p^r)\,f=T_k(p^{r+1})\,f+p^{r-1}\,T_k(p^{r-1})\,f, \qquad r\geqslant 1, \tag{100}$$

$$T_k(mn)\,f=T_k(m)\,T_k(n)\,f \quad \text{si} \quad (m, n)=1. \tag{101}$$

Dans le cas du groupe de congruence $\Gamma_0(N)$, nous utilisons, comme dans [12], les opérateurs suivants, en distinguant selon qu'un nombre premier, noté p (resp. q) est premier avec N (resp. divise N) :

$$T^*_k(p)\,f(z)=p^{k/2}f(pz)+p^{-k/2}\sum_{m=0}^{p-1} f\left(\frac{z+m}{p}\right), \tag{102}$$

$$U^*_k(q)\,f(z)=q^{-k/2}\sum_{m=0}^{q-1} f\left(\frac{z+m}{q}\right). \tag{103}$$

Suivant l'idée de Knopp, nous nous proposons d'examiner l'action des opérateurs $T_0^*(p)$ (resp. $U_0^*(q)$) sur $\log \eta_{\Gamma_0(N)}$. Puisqu'il n'y a aucune ambiguïté nous les noterons simplement $T(p)$ et $U(q)$ dans tout ce qui suit.

Auparavant donnons quelques propriétés immédiates de la fonction ψ_N, définie par (90), dont nous aurons besoin par la suite :

PROPOSITION 10.1. — (i) $\psi_N(pd)=\psi_N(d)$ *si* $(p, N)=1$;

(ii) $\psi_{Np}(pd)=\psi_N(d)$;

(iii) $\psi_{Np}(d)=0$ *si* $p \mid N$ *et* $(d, p)=1$;

(iv) $\psi_{Np}(d)=-(1/(p-1))\,\psi_N(d)$ *si* $(p, N)=1$.

Les propriétés (i) et (ii) résultent immédiatement de la définition de ψ_N (iii) résulte du fait que $\mu(Np/(Np, d))=0$ puisqu'alors $Np/(Np, d)$ est divisible par p^2. Enfin (iv) provient de la multiplicativité « restreinte » des fonctions φ et μ.

THÉORÈME 10.1. — *Soient p un nombre premier tel que $(p, N)=1$ et q un nombre premier divisant N. On a :*

$$(104)\quad \text{(i)}\ T(p)\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)=(p+1)\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)+\frac{\pi i}{24}(p-1)\,\mu_N$$

$$(105)\quad \text{(ii)}\ U(q)\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)$$

$$=\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)+q\log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(z)-\log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(qz)$$
$$+\frac{\pi i}{24}(q-1)\,\mu_N \qquad si \quad q \parallel N \quad (^1)$$

$$(106)\quad (iii)\ U(q)\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)=q\log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(z)+\frac{\pi i}{24}(q-1)\,\mu_N \qquad si \quad q^2 \mid N.$$

Preuve. — Rappelons que :

$$\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)=\frac{\pi i z}{12}\mu_N-\sum_{d=1}^{\infty}\psi_N(d)\sum_{c=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi icdz}}{c}$$

d'où :

$$T(p)\log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(z)=\frac{\pi i}{12}\mu_N\left[pz+z+\frac{p-1}{2}\right]$$
$$-\sum_{d=1}^{\infty}\psi_N(d)\left\{\sum_{c=1}^{\infty}\frac{e^{2\pi icdpz}}{c}+\sum_{m=0}^{p-1}\sum_{c=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi icd(z+m)/p}}{c}\right\},$$

(1) La notation $q \parallel N$ signifie : $q \mid N$ mais $q^2 \nmid N$.

or

$$\sum_{m=0}^{p-1} e^{2\pi icdm/p} = \begin{cases} 0 & \text{si } p \nmid cd, \\ p & \text{si } p \mid cd. \end{cases}$$

On écrit donc :

$$\begin{aligned} T(p) \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) &= \frac{\pi iz}{12} \mu_N (p+1) + \frac{\pi i}{24} (p-1) \mu_N \\ &\quad - \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(d) \left\{ \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdpz}}{c} + p \sum_{c=1,\, p \mid cd}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdz/p}}{c} \right\} \\ &= (p+1) \frac{\pi iz}{12} \mu_N + \frac{\pi i}{24} (p-1) \mu_N \\ &\quad - \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(d) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdpz}}{c} \\ &\quad - p \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(pd) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdz}}{c} \\ &\quad - \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(d) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdz}}{c} \\ &\quad + \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(pd) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdpz}}{c}. \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 10.1 (i) il reste :

$$\begin{aligned} T(p) &\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) \\ &= (p+1) \left[\frac{\pi iz}{12} \mu_N - \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(d) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdz}}{c} \right] + \frac{\pi i}{24} (p-1) \mu_N, \end{aligned}$$

d'où la première relation.

Dans le cas où $q \mid N$, on a $\psi_N(qd) = \psi_{N/q}(d)$ d'après la proposition 10.1 (ii) et le calcul précédent montre que :

$$\begin{aligned} U(q) \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) &= \frac{\pi iz}{12} \mu_N + \frac{\pi i}{24}(q-1) \mu_N - \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(d) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdz}}{c} \\ &\quad - q \sum_{d=1}^{\infty} \psi_{N/q}(d) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdz}}{c} + \sum_{d=1}^{\infty} \psi_{N/q}(d) \sum_{c=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi icdqz}}{c} \end{aligned}$$

d'où la deuxième formule puisque la somme des deux derniers termes représente exactement :

$$q \log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(z) - \log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(qz).$$

Dans le cas où $q^2 \mid N$, on a de plus :

$$\log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) = \log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(qz).$$

En effet :

$$\log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(z) = \frac{\pi i q z}{12} \frac{N}{q} \Pi_{p \mid (N/q)}(1+p^{-1}) + \sum_{d=1}^{\infty} \psi_{N/q}(d) \log(1-e^{2\pi i d q z})$$

$$= \frac{\pi i z}{12} N \prod_{p \mid N}(1+p^{-1}) + \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(qd) \log(1-e^{2\pi i d q z})$$

$$= \frac{\pi i z}{12} \mu_N + \sum_{d=1}^{\infty} \psi_N(d) \log(1-e^{2\pi i d z})$$

en remarquant que si $q^2 \mid N$ alors $\psi_N(d) = 0$ pour $(d, q) = 1$ comme le montre la proposition 10.1 (iii).

Ceci termine la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. — *Si $(n, N) = 1$, on a :*

$$T(n) \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) = \sigma(n) \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z) + K(n, N)$$

où $\sigma(n)$ désigne la somme des diviseurs de n et $K(n, N)$ une constante réelle ne dépendant que de n et de N.

Ce résultat provient évidemment de (i) et des propriétés des opérateurs de Hecke rappelées plus haut. La constante s'introduit du fait que ces opérateurs n'opèrent pas ici sur des fonctions périodiques à proprement parler (*voir* à ce propos la note de KNOPP [4], bas de la page 5).

11. Propriétés des sommes de Dedekind attachées à $\Gamma_0(N)$

Nous allons maintenant définir la somme $\sigma_N(d, c)$ comme l'analogue de $s(d, c)$ dans le cas classique et étudier ses propriétés arithmétiques. Nous supposerons désormais $c > 0$, ce qui n'est pas une restriction, pour ne pas trop alourdir les notations. On a donc :

$$S_{\Gamma_0(N)}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{12c} \mu_N - \left\{ \frac{1}{4} + \sigma_N(d, c) \right\} \tag{107}$$

c'est-à-dire, pour $(c, d) = 1$ et $c \equiv 0(N)$:

$$\sigma_N(d, c) = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{N} j \psi_N(j) \left(\left(\frac{dj}{N} \right) \right) + \sum_{\beta=1}^{N} \psi_N(\beta) s_{N,\beta}(d, c). \tag{108}$$

De même, il résulte de la proposition 9.2 la formule suivante, toujours pour $(c, d)=1$ et $c\equiv 0(N)$:

$$\sigma_N(d, c)=\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\delta\mid N}\delta\mu(N/\delta)s(d\delta, c). \tag{109}$$

Remarquons que $\sigma_N(d, c)$ n'est définie que pour $(c, d)=1$ et $c\equiv 0(N)$. Nous aurons besoin malgré tout dans les formules qui vont suivre de parler de $\sigma_N(d, c)$ pour $(c, d)>1$. Aussi nous convenons de définir $\sigma_N(d, c)$ dans ce cas par la formule (109). Cette formule montre que :

$$\sigma_N(nd, nc)=\sigma_N(d, c) \tag{110}$$

pour tout $n\geqslant 1$, en raison de la propriété similaire des sommes de Dedekind classiques $s(d, c)$. Mais il n'en est pas de même si σ_N est définie par (108) : l'obstruction provient du terme $1/c\sum_{j=1}^{N} j\psi_N(j)((dj/N))$ puisque :

$$\sum_{\beta=1}^{N}\psi_N(\beta)s_{N,\beta}(d, c)$$

est invariante par $(d, c)\to(nd, nc)$ pour tout $n\geqslant 1$ à cause du théorème 5.2 et de (47).

Donc, si $(c, d)>1$, on a :

$$\sigma_N(d, c)=\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\delta\mid N}\delta\mu(N/\delta)s(d\delta, c) \tag{111}$$

mais seulement :

$$\sigma_N(d, c)=\frac{1}{c'}\sum_{j=1}^{N} j\psi_N(j)\left(\left(\frac{d'j}{N}\right)\right)+\sum_{\beta=1}^{N}\psi_N(\beta)s_{N,\beta}(d', c') \tag{112}$$

où $c'=c/(c, d)$, $d'=d/(c, d)$, à condition que $c'\equiv 0(N)$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner les propriétés des sommes $\sigma_N(d, c)$.

THÉORÈME 11.2. — *Soient $c>0$ tel que $c\equiv 0(N)$ et d tel que $(c, d)=1$. Ln désigne par q un nombre premier divisant N. On a alors :*

(i) $\sigma_N(d, c)=\sigma_N(d', c)$ *si* $d\equiv d'(c)$;

(ii) $\sigma_N(-d, c)=-\sigma_N(d, c)$;

(iii) $\sigma_N(nd, nc)=\sigma_N(d, c)$ *pour tout* $n\geqslant 1$;

(iv) $\sigma_N(a, c)=\sigma_N(d, c)$ *si* $ad\equiv 1(c)$;

(v) $\sum_{\alpha\delta=n,\,\delta>0}\sum_{\beta=0}^{\delta-1}\sigma_N(\alpha d+\beta c, \delta c)=\sigma(n)\,\sigma_N(d, c)$ *si* $(n, N)=1$;

(vi) $\sum_{m=0}^{q-1} \sigma_N(d+mc,\ qc) = \sigma_N(d,\ c) + q\sigma_{N/q}(d,\ c) - \sigma_{N/q}(d,\ c/q)$ *si* $q \,\|\, N$;

(vii) $\sum_{m=0}^{q-1} \sigma_N(d+mc,\ qc) = q\sigma_{N/q}(d,\ c) = q\sigma_N(d,\ qc)$ *si* $q^2 \mid N$.

Les formules (i), (ii) et (iii) résultent immédiatement des définitions et de la remarque qui précède.

La formule (iv) résulte de (109) et de la formule similaire vérifiée par les sommes de Dedekind classiques puisque $ad \equiv 1\,(c)$ implique $ad \equiv 1\,(c/\delta)$ pour tout diviseur δ de N.

Pour démontrer la formule (v), on commence par prouver un lemme qui généralise une propriété vérifiée par les sommes de Dedekind $s(d,\ c)$.

LEMME 11.1. — *Soit p un nombre premier tel que $(p,\ N)=1$. On a alors, sans restriction sur c, d :*

$$\sigma_N(pd,\ c) + \sum_{m=0}^{p-1} \sigma_N(d+mc,\ pc) = (p+1)\,\sigma_N(d,\ c).$$

En effet, on part de la relation, valable pour c et d quelconques :

$$s(pd,\ c) + \sum_{m=0}^{p-1} s(d+mc,\ pc) = (p+1)\,s(d,\ c)$$

et on remplace d par $d\delta$ où $\delta \mid N$. L'expression $s(d\delta+mc,\ pc)$ ne dépend que de la classe de m mod p. Il en résulte, puisque $(p,\ \delta)=1$, que :

$$\sum_{m=0}^{p-1} s(d\delta+mc,\ pc) = \sum_{m=0}^{p-1} s(\delta(d+mc),\ pc).$$

La relation cherchée s'ensuit immédiatement à l'aide de la formule (109). La méthode la plus simple pour établir (v) consiste à suivre [13]. On regarde $\sigma_N(d,\ c)$ comme une fonction f du quotient d/c, ce qui a un sens à cause de (iii), cette fonction vérifiant de plus $f((d/c)+1) = f(d/c)$ en raison de (i). On peut alors écrire le résultat du lemme sous la forme :

$$T(p)\,f\left(\frac{d}{c}\right) = \sigma(p)\,f\left(\frac{d}{c}\right) \qquad \text{pour} \quad (p,\ N)=1. \tag{113}$$

Puisque f est de période 1, on peut utiliser les propriétés des opérateurs de Hecke rappelées au paragraphe 10, que l'on écrit maintenant sous la forme :

$$T(p^{l+1})f = T(p)\,T(p^l)f - pT(p^{l-1})f \qquad \text{si} \quad l \geqslant 1, \tag{114}$$

$$T(mn)\,f = T(m)\,T(n)\,f \qquad \text{si} \quad (m,\ n)=1. \tag{115}$$

On prouve d'abord la relation :

$$T(p^l)f\left(\frac{d}{c}\right)=\sigma(p^l)f\left(\frac{d}{c}\right) \tag{116}$$

par récurrence sur l à l'aide de (114) [puisque (116) est vraie pour $l=0$ trivialement et $l=1$ d'après le lemme] en tenant compte du fait que σ vérifie également :

$$\sigma(p^{l+1})=\sigma(p)\,\sigma(p^l)-p\sigma(p^{l-1}).$$

La relation (116) jointe à la multiplicativité de $T(n)$ et de $\sigma(n)$, permet d'obtenir (v).

Avant de démontrer (vi) remarquons d'abord que si $(d, c)=1$ et $q\mid N$, alors $(d+mc,\ qc)=1$ pour tout m puisque $q\mid c$ également. Par suite σ_N est donnée par la formule :

$$\sigma_N(d,\ c)=\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{N} j\psi_N(j)\left(\left(\frac{dj}{N}\right)\right)+\sum_{\beta=1}^{N}\psi_N(\beta)\,s_{N,\,\beta}(d,\ c).$$

Pour simplifier, nous poserons :

$$\sigma'_N(d,\ c)=\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{N} j\psi_N(j)\left(\left(\frac{dj}{N}\right)\right), \tag{117}$$

$$\sigma''_N(d,\ c)=\sum_{\beta=1}^{N}\psi_N(\beta)\,s_{N,\,\beta}(d,\ c). \tag{118}$$

On obtient facilement :

$$\sum_{m=0}^{q-1}\sigma'_N(d+mc,\ qc)=\sigma'_N(d,\ c) \tag{119}$$

car :

$$c\equiv 0(N)\ \Rightarrow\ \left(\left(\frac{(d+mc)\,j}{N}\right)\right)=\left(\left(\frac{dj}{N}\right)\right)\quad \text{pour tout } m.$$

Calculons ensuite $\sum_{m=0}^{q-1}\sigma''_N(d+mc,\ qc)$ dans l'hypothèse où $q\,\|\,N$. Pour cela, on écrit :

$$\sum_{m=0}^{q-1}\sigma''_N(d+mc,\ qc)=\sum_{\beta=1}^{N/q}\psi_N(q\beta)\sum_{m=0}^{q-1}s_{N,\,\beta_q}(d+mc,\ qc) + \sum_{(\beta,\,q)=1}\psi_N(\beta)\sum_{m=0}^{q-1}s_{N,\,\beta}(d+mc,\ qc). \tag{120}$$

La première somme du deuxième membre s'écrit, compte tenu de (46) et de la proposition 10.1 (ii) :

$$\sum_{\beta=1}^{N/q} \psi_{N/q}(\beta) \sum_{m=0}^{q-1} s_{N/q,\,\beta}(qdt\,qmc,\, qc)$$
$$= q \sum_{\beta=1}^{N/q} \psi_{N/q}(\beta)\, s_{N/q.\beta}(qd,\, qc) \text{ par (45)}$$
$$= q \sum_{\beta=1}^{N/q} \psi_{N/q}(\beta)\, s_{N/q.\beta}(d,\, c) + N\frac{q-1}{2} \sum_{\beta=1}^{N/q} \psi_{N/q}(\beta) \left(\left(\frac{d\beta q}{N}\right)\right)$$

par le théorème 5.2

$$= q\sigma''_{N/q}(d,\, c) \text{ par (47).}$$

Écrivons maintenant la deuxième somme du deuxième membre de (120) sous la forme :

$$\sum_{(\beta,\,q)=1} \psi_N(\beta) \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{qc-1} \frac{j}{qc}\left(\left(\frac{(d+mc)(jN+\beta)}{qc}\right)\right)$$
$$= \sum_{(\beta,\,q)=1} \psi_N(\beta) \sum_{j=1}^{qc-1} \frac{j}{qc} \sum_{m=0}^{q-1}\left(\left(\frac{d(jN+\beta)}{qc} + \frac{m\beta}{q}\right)\right) \text{ par (39) } c \equiv 0(q)$$
$$= \sum_{(\beta,\,q)=1} \psi_N(\beta) \sum_{j=1}^{qc-1} \frac{j}{qc} \sum_{m=0}^{q-1}\left(\left(\frac{d(jN+\beta)}{qc} + \frac{m}{q}\right)\right)$$

car β est inversible mod q

$$= \sum_{(\beta,\,q)=1} \psi_N(\beta) \sum_{j=1}^{qc-1} \frac{j}{qc}\left(\left(\frac{d}{c}(jN+\beta)\right)\right) \text{ par (43)}$$
$$= \sum_{(\beta,\,q)=1} \psi_N(\beta) \left\{ s_{N,\,\beta}(d,\, c) + N\frac{q-1}{2}\left(\left(\frac{d\beta}{N}\right)\right)\right\} \text{ par le théorème 5.2.}$$

Or $\sum_{(\beta,\,q)=1} \psi_N(\beta)\,((d\beta/N))=0$ comme on s'en aperçoit aisément en groupant les termes correspondant aux valeurs β et $N-\beta$ (puisque $(\beta,\, q)=1 \Rightarrow (N-\beta,\, q)=1$). On obtient donc :

$$\sum_{(\beta,\,q)=1} \psi_N(\beta) \sum_{m=0}^{q-1} s_{N,\,\beta}(d+mc,\, qc) = \sum_{(\beta,\,q)=1} \psi_N(\beta)\, s_{N,\,\beta}(d,\, c)$$
$$= \sum_{\beta=1}^{N} \psi_N(\beta)\, s_{N,\,\beta}(d,\, c) - \sum_{\beta=1}^{N/q} \psi_{N/q}(\beta)\, s_{N/q,\,\beta}(qd,\, c).$$

Ceci montre déjà que :

$$(121) \qquad \sum_{m=0}^{q-1} \sigma''_N(d+mc,\, qc) = \sigma''(d,\, c) + q\sigma''_{N/q}(d,\, c) - \sigma''_{N/q}(qd,\, c).$$

Par ailleurs on a :

$$(122) \qquad q\sigma'_{N/q}(d,\, c) = \sigma'_{N/q}\left(d,\, \frac{c}{q}\right).$$

Tenant compte de (119), on a donc l'égalité (vi).

Dans le cas où $q^2 \mid N$, on part de (120) en remarquant que :

$$\textstyle\sum_{(\beta,\, q)=1} \psi_N(\beta) \sum_{m=0}^{q-1} s_{N,\,\beta}(d+mc,\, qc)=0$$

puisque $\psi_N(\beta)=0$ d'après la proposition 10.1(iii) vu que $q^2 \mid N$ et $(q,\, \beta)=1$. On a donc immédiatement :

$$\textstyle\sum_{m=0}^{q-1} \sigma''_N(d+mc,\, qc)=q\sigma''_{N/q}(d,\, c). \tag{123}$$

Reste à voir, d'après (119) que :

$$\sigma'_N(d,\, c)=q\sigma'_{N/q}(d,\, c). \tag{124}$$

Pour cela on écrit :

$$\begin{aligned}\sigma'_N(d,\, c)&=\frac{1}{c} \textstyle\sum_{j=1}^{N} j\psi_N(j) \left(\left(\frac{dj}{N}\right)\right)\\ &=\frac{q}{c} \textstyle\sum_{j=1}^{N/q} j\psi_N(jq) \left(\left(\frac{djq}{N}\right)\right)\\ &\qquad \text{puisque} \quad \psi_N(j)=0 \quad \text{si} \quad (j,\, q)=1\\ &=\frac{q}{c} \textstyle\sum_{j=1}^{N/q} j\psi_{N/q}(j)\left(\left(\frac{djq}{N}\right)\right)\\ &=q\sigma'_{N/q}(d,\, c).\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\textstyle\sum_{m=0}^{q-1} \sigma_N(d+mc,\, qc)=q\sigma_{N/q}(d,\, c).$$

Les mêmes raisonnements, basés sur le fait que $\psi_N(j)=0$ si $(j,\, q)=1$, montrent que l'on a aussi :

$$\sigma_{N/q}(d,\, c)=\sigma_N(d,\, qc) \tag{125}$$

dans le cas où $q^2 \mid N$ (remarquer que $(d,\, qc)=1$ si $(d,\, c)=1$!) d'où la formule (vii).

Remarque. — Le théorème 10.1, qui nous a permis de « deviner » les formules (v), (vi) et (vii), montre que $T(p) \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)$ (resp. $U(q) \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)$ si $q \parallel N$, resp. $U(q) \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)$ si $q^2 \mid N$) se transforme par le groupe $\Gamma_0(N)$ de la même façon que $(p+1) \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)$ si $(p,\, N)=1$:

$$\begin{aligned}&(\text{resp. } \log \eta_{\Gamma_0(N)}(z)+q \log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(z)-\log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(qz) \qquad \text{si} \quad q \parallel N\\ &\qquad\qquad \text{resp. } q \log \eta_{\Gamma_0(N/q)}(z) \qquad \text{si} \quad q^2 \mid N).\end{aligned}$$

Nous aurions pu également déduire les formules en question de ce fait, en adaptant la preuve que Knopp donne dans le cas classique. Celle-ci repose sur le calcul explicite de $T(p)\log\eta_{\Gamma_0(N)}(\gamma z)$ (resp. $U(q)\log\eta_{\Gamma_0(N)}(\gamma z)$) pour $\gamma\in\Gamma_0(N)$, rendu possible par le fait suivant : si a, b, d sont des entiers vérifiant $ad=n$, $d>0$; $0\leqslant b\leqslant d-1$ alors il existe $\gamma'\in SL(2,\mathbb{Z})$ et des entiers a', b' et d' tels que $a'd'=n$, $d'>0$ et $0\leqslant b'\leqslant d'-1$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\gamma=\gamma'\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}\quad .$$

de plus quand $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ décrit l'ensemble des matrices soumises à ces conditions, il en est de même de $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$. Dans les différents cas qui nous occupent, il reste à prouver que l'on a toujours $\gamma'\in\Gamma_0(N)$, ce qui résulte immédiatement des calculs. Cette méthode est toutefois beaucoup plus longue.

12. Propriétés des sommes de Dedekind attachées au groupe $\Gamma(N)$

On peut se poser la question de savoir si, dans le cas du groupe $\Gamma(N)$, il existe des propriétés analogues pour les sommes de Dedekind qui lui sont attachées. La réponse est oui, mais en partie seulement, ce qui est probablement dû au fait que nous ne disposons pas dans ce cas d'une formule permettant d'exprimer ces sommes à l'aide des sommes de Dedekind classiques.

Posons donc, pour $c>0$, $c\equiv 0(N)$ et $(c, d)=1$:

$$(126)\qquad \sigma_N^*(d, c)=\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{N} j\,A_N(j)\left(\left(\frac{dj}{N}\right)\right)+\sum_{\beta=1}^{N} A_N(\beta)\,s_{N,\beta}(d, c)$$

où l'on rappelle que :

$$(127)\qquad A_N(\beta)=\sum_{\alpha=1,\,(\alpha,N)=1}^{N}\left(\sum_{n\alpha\equiv 1(N),\,n=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}\right)\cos\frac{2\pi\alpha\beta}{N}.$$

On a alors :

THÉORÈME 12.1. — (i) $\sigma_N^*(d, c)=\sigma_N^*(d', c)$ *si* $d\equiv d'(c)$;

(ii) $\sigma_N^*(-d, c)=-\sigma_N^*(d, c)$;

(iii) $\sigma_N^*(a, c)=\sigma_N^*(d, c)$ *si* $ad\equiv 1(c)$ *et* $d\equiv 1(N)$;

(iv) $\sigma_N^*(pd, c)+\sum_{m=0}^{p-1}\sigma_N^*(d+mc, pc)=(p+1)\sigma_N^*(d, c)$ *si* $d\equiv 1(N)$ *et* $p\equiv 1(N)$.

Remarque. — Il n'y a pas ici de façon raisonnable de définir $\sigma_N^*(d, c)$ pour $(c, d)>1$. Notons toutefois que la deuxième somme qui intervient dans le membre de droite de (126) est invariante par $(d, c)\to(nd, nc)$ pour les mêmes raisons que dans le cas de $\Gamma_0(N)$ (théorème 5.2 et (47)). (i) et (ii) sont claires et (iii) provient du théorème 5.3. (iv) provient du fait que, si $\log\eta_{\Gamma'(N)}$ est défini par (22), on a :

$$(128)\qquad T(p)\log\eta_{\Gamma'(N)}(z)=(p+1)\log\eta_{\Gamma'(N)}(z)+i(p-1)/8\,\pi\alpha_N$$

si $p\equiv 1(N)$.

En effet, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 10.1(i) et de remarquer que si $p\equiv 1(N)$ alors :

$$A_N(pd)=A_N(d),$$

ce qui est immédiat d'après (127).

Pour prouver (iv) nous ne voyons pas d'autre moyen que d'utiliser la méthode de Knopp : (128) signifie que $T(p)\log\eta_{\Gamma'(N)}$ et $(p+1)\log\eta_{\Gamma'(N)}$ se transforment de la même façon par le groupe $\Gamma'(N)$.

Aussi calcule-t-on l'expression :

$$T(p)\log\eta_{\Gamma'(N)}(\gamma z)-T(p)\log\eta_{\Gamma'(N)}(z)$$

pour :

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b/N \\ cN & d\end{pmatrix}\in\Gamma'(N)$$

à l'aide de la propriété rappelée ci-dessus, à savoir que si α, β, δ sont trois nombres positifs tels que $\alpha\delta=p$ et $0\leqslant\beta\leqslant p-1$, alors il existe trois nombres positifs α', β', et δ' vérifiant les mêmes propriétés et une matrice γ' de $SL(2, \mathbb{Z})$ tels que :

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b/N\\ cN & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ 0 & \delta'\end{pmatrix}.$$

Dans notre cas il faut vérifier que $a'\equiv 1\,(N)$, $d'\equiv 1\,(N)$ et enfin $c'\equiv 0(N^2)$ si on fait l'hypothèse supplémentaire que $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(N)$. Or on a :

$$\alpha a+\beta cN=a'\alpha',$$

d'où $\alpha a \equiv a'\alpha'(N)$ et donc $a' \equiv a(N)$ puisque α (resp. α') est égal à 1 ou p et que $p \equiv 1(N)$.

De même $\delta c N = \alpha' c'$ implique $c' \equiv 0(N^2)$ puisque $(p, N) = 1$. Enfin $d\delta = c'\beta' + d'\delta'$ implique $d \equiv d'(N)$ pour les mêmes raisons que dans le cas de a. Par suite, on a :

$$T(p)\log \eta_{\Gamma'(N)}(\gamma z) = \log \eta_{\Gamma'(N)}(\gamma' pz) + \textstyle\sum_{m=0}^{p-1} \log \eta_{\Gamma'(N)}\left(\gamma'_m \dfrac{z+m}{p}\right)$$

avec γ', $\gamma'_m (0 \leqslant m \leqslant p-1)$ dans $\Gamma'(N)$. On utilise alors la formule de transformation pour $\log \eta_{\Gamma'(N)}$ pour obtenir, tous calculs faits (*voir* le détail des calculs dans [4]) :

$$\begin{aligned} T(p)\log \eta_{\Gamma'(N)}(\gamma z) - T(p)\log \eta_{\Gamma'(N)}(z) \\ = \frac{1}{2}(p+1)\log(cNz+d) + i(p+1)\frac{a+d}{4\pi N \alpha_N c} - \frac{\pi i}{4} \\ - \pi i\left[\sigma_N^*(pd, c) + \textstyle\sum_{m=0}^{p-1} \sigma_N^*(d+mc, pc)\right] \end{aligned}$$

et la comparaison avec :

$$\log \eta_{\Gamma'(N)}(\gamma z) - \log \eta_{\Gamma'(N)}(z)$$

nous fournit la relation cherchée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEDEKIND (R.). — Erlanterungen zu zwei fragmenten von Riemann, *Gessammelte Math. Werke*, vol. I, p. 159-173.

[2] RADEMACHER (H.) et WHITEMAN (A.). — Theorems on Dedekind sums, *Amer. J. of Math.*, vol. 63, 1941, p. 377-407.

[3] ASAI (T.). — The reciprocity of Dedekind sums and the factor set for the universal covering group of $SL(2, \mathbb{R})$, *Nagoya Math. J.*, vol. 37, 1970, p. 67-80.

[4] KNOPP (M. I.). — Hecke operators and an identity for the Dedekind sums, *J. of Number Theory*, vol. 12, 1980, p. 2-9.

[5] GOLDSTEIN (L. J.). — Dedekind sums for a fuchsian group I. *Nagoya Math J.*, vol. 50, 1973.

[6] MAASS (H.). — Uber eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen, *Math. Annalen*, vol. 121, 1949.

[7] KUBOTA (T.). — Elementary theory of Eisenstein series, Kodansha-Halsted Press, 1973.

[8] IWASAWA (K.). — Lectures on p-adic L-functions, *Ann. Math. Studies*, Princeton University Press, n° 74.

[9] SCHOENEBERG (B.). — Elliptic modular functions, Springer-Verlag, 1974.

[10] HARDY (G. H.) et WRIGHT (E. M.). — An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press, 1960.

[11] HECKE (E.). — Mathematische Werke.

[12] ATKIN (A.O.L.) et LEHNER (J.). — Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, *Math. Annalen*, vol. 185, 1970.

[13] PARSON (A.). — Dedekind sums and Hecke operators, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1980.

[14] GOLDBERG (L.). — An elementary proof of the Petersson-Knopp theorem on Dedekind sums, *J. of Number Theory*, vol. 12, (4), 1980.

[15] APOSTOL (T.) et VU (T. H.). — Identities for sums of Dedekind type, *J. of Number Theory*, n° 14, (3), 1982.