

BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDEL-ILAH BENABDALLAH

**Générateurs de l'algèbre $\mathcal{U}(G)^K$ avec $G = SO(m)$
ou $SO_0(1, m-1)$ et $K = SO(m-1)$**

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 303-326

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__303_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GÉNÉRATEURS DE L'ALGÈBRE $\mathcal{U}(G)^K$
AVEC $G = SO(m)$ OU $SO_0(1, m-1)$ ET $K = SO(m-1)$

PAR

ABDEL-ILAH BENABDALLAH

RÉSUMÉ. — Soient $G = SO(m)$ ou $SO_0(1, m-1)$, $K = SO(m-1)$ et $\mathcal{U}(G)^K$ l'algèbre réelle des opérateurs différentiels sur G invariants par les translations à gauche de G et les translations à droite de K . On démontre, en exhibant dans l'algèbre symétrique un système explicite de générateurs, que $\mathcal{U}(G)^K$ est engendrée par les centres de $\mathcal{U}(G)$ et de $\mathcal{U}(K)$.

ABSTRACT. — Let $G = SO(m)$ or $SO_0(1, m-1)$, $K = SO(m-1)$ and let $\mathcal{U}(G)^K$ be the real algebra of differential operators on G , left invariant by G and right invariant by K . We show that $\mathcal{U}(G)^K$ is generated by the centers of $\mathcal{U}(G)$ and $\mathcal{U}(K)$.

Introduction

Soient G un groupe de Lie connexe, K un sous-groupe compact de G , π une représentation irréductible de K d'espace V , E le fibré homogène associé à la représentation π , $\Gamma(E)$ l'espace des sections C^∞ de ce fibré, $C^\infty(G, V)^K$ l'espace des applications C^∞ de G dans V vérifiant : $f(gk) = \pi(k^{-1})f(g)$, ($g \in G$, $k \in K$), et enfin $\mathcal{D}_\pi$ l'algèbre complexe des opérateurs différentiels sur E invariants par l'action naturelle de G sur $\Gamma(E)$. Rappelons que $\Gamma(E)$ est en correspondance bijective avec l'espace $C^\infty(G, V)^K$. Cette correspondance sera notée $\sim$ dans la suite.

Soient aussi $\mathcal{U}(G)$ (resp. $\mathcal{U}(K)$) l'algèbre réelle des opérateurs différentiels sur G (resp. sur K) invariants par les translations à gauche de G , (resp. de K) et $\mathcal{U}(G)^K$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}(G)$ formée des éléments de $\mathcal{U}(G)$ qui sont

(*) Texte reçu le 7 juin 1982, révisé le 10 mai 1983.

A. I. BENABDALLAH, Université Claude Bernard, Département de Mathématiques, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69621 Villeurbanne Cedex

invariants par les translations à droite de K . On note $\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{U}(K) \otimes \mathbb{C}$) la complexifiée de l'algèbre $\mathcal{U}(G)$ (resp. $\mathcal{U}(K)$), $(\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K$ le commutant de $\mathcal{U}(K) \otimes \mathbb{C}$ dans $\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C}$ et enfin $d\pi$ la représentation infinitésimale de π , J le noyau de $d\pi$ dans $\mathcal{U}(K) \otimes \mathbb{C}$ et $J^* = S^*(J)$ où S^* est l'anti-automorphisme principal de $\mathcal{U}(K) \otimes \mathbb{C}$.

MINEMURA ([3]) a démontré le résultat suivant : pour $D \in (\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K$, soit $\mu(D)$ l'élément de $\mathcal{D}_\pi$ défini par

$$\widetilde{\mu(D)}u = D\tilde{u} \quad (u \in \Gamma(E)).$$

Alors $\text{Ker } \mu = (\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K \cap (\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})J^*$ et l'application μ_K définie à partir de μ par passage au quotient est un isomorphisme d'algèbres. Ce résultat nous montre que l'étude de $\mathcal{D}_\pi$ se ramène à celle de $(\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K$. Nous nous proposons dans ce travail de calculer explicitement les générateurs de l'algèbre réelle $\mathcal{U}(G)^K$ dans le cas où G est le groupe $SO(m)$ ou $SO_0(1, m-1)$ et K le sous-groupe $SO(m-1)$, $(m \geq 3)$. Ces générateurs sont des générateurs de l'algèbre complexe $(\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K$. Nous démontrons qu'il y a $(m-1)$ générateurs, constitués par les générateurs du centre de $\mathcal{U}(G)$ et du centre de $\mathcal{U}(K)$. En particulier nous en déduisons que l'algèbre $\mathcal{U}(G)^K$ est commutative.

I. Notations et rappels

(1.1). — Soient $e_0, \dots, e_{m-1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{m-1}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ ayant pour base $e_1, \dots, e_{m-1}$, $G = SO(m)$ le groupe des transformations orthogonales de $\mathbb{R}^m$ de déterminant 1 et $K = SO(m-1)$ le stabilisateur de e_0 pour l'action naturelle de $SO(m)$ sur $\mathbb{R}^m$. L'algèbre de Lie $SO(m)$ de $SO(m)$ (resp. $SO(m-1)$ de $SO(m-1)$) qui est constituée par les matrices antisymétriques, munie de la forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée

$$B(X, Y) = -\frac{1}{2} \text{tr}(X, Y), \quad (X, Y \in SO(m)),$$

s'identifie canoniquement à l'espace euclidien $\Lambda^2 \mathbb{R}^m$ (resp. à $\Lambda^2 \mathbb{R}^{m-1}$) et on a la décomposition directe orthogonale

$$\Lambda^2 \mathbb{R}^m = e_0 \wedge \mathbb{R}^{m-1} \oplus \Lambda^2 \mathbb{R}^{m-1}.$$

Moyennant ces identifications, tout élément X de $\underline{SO(m)}$ s'écrit

$$X = e_0 \wedge X_1 + X_2 \quad (X_1 \in \mathbb{R}^{m-1}, X_2 \in \wedge^2 \mathbb{R}^{m-1}),$$

de plus pour $k \in SO(m-1)$, on a

$$Ad(k)X = e_0 \wedge k(X_1) + \wedge^2 k(X_2).$$

Identifions l'espace vectoriel $\underline{G} = \underline{SO(m)}$ et son dual algébrique par la forme B . Soit $S(G)^K$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\underline{G}$, invariantes par la représentation adjointe de K . On sait que les espaces vectoriels $S(G)^K$ et $\mathcal{U}(G)^K$ sont isomorphes par l'application symétrisation λ qui vérifie :

$$\lambda(P_1 P_2) = \lambda(P_1)\lambda(P_2) + \lambda(Q), \quad (P_1, P_2 \in S(G)^K),$$

avec $Q \in S(G)^K$ et $d^\circ Q < d^\circ P_1 + d^\circ P_2$.

Il est facile de voir que si $S(G)^K$ admet r générateurs $P_1, \dots, P_r$, alors $\mathcal{U}(G)^K$ admet $\lambda(P_1), \dots, \lambda(P_r)$ comme générateurs. Donc l'étude des générateurs de $\mathcal{U}(G)^K$ se ramène à celle de $S(G)^K$.

(1.2). — *Générateurs du centre $\mathcal{U}(SO(m))$.*

Pour $m = 2n$, on pose

$$\begin{aligned} P_\lambda(X) &= \det(X - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^{2n}}) \quad (X \in \underline{SO(2n)}) \\ &= \lambda^{2n} + a_2(X)\lambda^{2n-2} + \dots + a_{2p}(X)\lambda^{2n-2p} + \dots + \det(X), \\ \bar{I}_{2p}(X) &= \|X \wedge \dots \wedge X\|^2 = \|X^{p\wedge}\|^2, \quad (1 \leq p \leq n-1), \\ \bar{I}_{2n}(X) &= (X^{n\wedge})^* \quad (* \text{ étant l'isomorphisme de } \wedge^{2n} \mathbb{R}^{2n} \text{ avec } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Les fonctions polynomiales a_{2p} et $\bar{I}_{2p}$ ($1 \leq p \leq n$) sont invariantes par la représentation adjointe de $SO(2n)$. Un calcul direct montre que pour t appartenant à l'algèbre de Lie du tore maximal de $SO(2n)$,

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2p}(t) &= (p!)^2 a_{2p}(t), \quad (1 \leq p \leq n-1), \\ \bar{I}_{2n}^2(t) &= (n!)^2 \det(t). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $X \in \underline{SO(2n)}$, on a

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2p}(X) &= (p!)^2 a_{2p}(X), \quad (1 \leq p \leq n-1), \\ \bar{I}_{2n}^2(X) &= (n!)^2 \det(X). \end{aligned}$$

De même, pour $m = 2n + 1$, on pose

$$\begin{aligned} P_1(X) &= \det(X - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}^{2n+1}}) \quad (X \in \underline{SO}(2n+1)) \\ &= -[\lambda^{2n+1} + b_2(X)\lambda^{2n-1} \\ &\quad + \dots + b_{2p}(X)\lambda^{2n-2p+1} + \dots + b_{2n}(X)\lambda], \\ \bar{J}_{2p}(X) &= \|X^{p\wedge}\|^2, \quad (1 \leq p \leq n). \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a, pour tout $X \in \underline{SO}(2n+1)$,

$$\bar{J}_{2p}(X) = (p!)^2 b_{2p}(X).$$

Les fonctions polynomiales $(\bar{I}_{2p})_{1 \leq p \leq n}$ (resp. $(\bar{J}_{2p})_{1 \leq p \leq n}$) constituent donc les générateurs de $S(G)^G$, avec $G = SO(2n)$ (resp. $G = SO(2n+1)$) (cf. par exemple [4] page 302).

II. Générateurs de $\mathcal{U}(SO(m))^{SO(m-1)}$

Dans toute la suite, on identifie, sauf mention du contraire, l'algèbre de Lie de $SO(m)$ à $\wedge^2 \mathbb{R}^m$ et l'algèbre de Lie de $SO(m-1)$ à $\wedge^2 \mathbb{R}^{m-1}$.

(2.1). — Soit $X \in \underline{SO}(m)$. On a, d'après (1.1),

$$X = e_0 \wedge X_1 + X_2 \quad (X_1 \in \mathbb{R}^{m-1}, X_2 \in \wedge^2 \mathbb{R}^{m-1}).$$

Pour $m = 2n$, posons

$$\begin{aligned} I_{2p}(X) &= \|X_2^{p\wedge}\|^2, & 1 \leq p \leq n-1, \\ I_{2p+1}(X) &= \|X_1 \wedge X_2^{p\wedge}\|^2, & 0 \leq p < n-1, \\ I_{2n-1}(X) &= (X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge})^*, \end{aligned}$$

et pour $m = 2n + 1$,

$$\begin{aligned} J_{2p}(X) &= \|X_2^{p\wedge}\|^2, & 1 \leq p \leq n-1, \\ J_{2n}(X) &= (X_2^{n\wedge})^*, \\ J_{2p+1}(X) &= \|X_1 \wedge X_2^{p\wedge}\|^2, & 0 \leq p \leq n-1. \end{aligned}$$

(2.2). PROPOSITION. — Les fonctions polynomiales $F_1, \dots, F_{m-1}$ définies sur $\underline{SO}(m)$ par

$$F_i(X) = I_i(X) \quad (1 \leq i \leq m-1, X \in \underline{SO}(m)), \quad \text{si } m = 2n,$$

$$F_i(X) = J_i(X) \quad (1 \leq i \leq m-1, X \in \underline{SO(m)}), \quad \text{si } m = 2n+1,$$

sont algébriquement indépendantes.

Preuve. — Il faut montrer que si $P(\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ est un polynôme vérifiant

$$P(F_1(X), \dots, F_{m-1}(X)) = 0, \quad \text{pour tout } X \in \underline{SO(m)},$$

alors P est identiquement nul. Nous démontrons cette propriété par une double récurrence portant sur le degré de P et la « dimension » m .

Pour $d^\circ P = 1$, la proposition est triviale quel que soit m . Pour $m = 3$ et $m = 4$, la proposition est bien connue (cf. [5] p. 35 dans le cas $m = 4$). Supposons-la donc vraie pour tout polynôme P , quand la « dimension » est inférieure ou égale à $m-1$ et pour les polynômes P de degré inférieur ou égal à r , quand la « dimension » est égale à m et démontrons la proposition pour les polynômes de degré $r+1$, quand la « dimension » est égale à m . Il y a deux cas à considérer suivant la parité de m .

1^{er} cas : $m = 2n$

Il faut montrer que, si $P(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1})$ est un polynôme de degré $r+1$ vérifiant

$$P(I_1(X), \dots, I_{2n-1}(X)) = 0, \quad \text{pour tout } X \in \underline{SO(2n)},$$

P est identiquement nul.

Pour $Z \in \underline{SO(2n)}$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_{2n-1} \\ -x_1 & 0 & x_{12} & \dots & x_{1,2n-1} \\ \vdots & -x_{12} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & x_{2n-2,2n-1} \\ -x_{2n-1} & -x_{1,2n-1} & \dots & -x_{2n-2,2n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

associons $Z' \in \underline{SO(2n-1)}$ obtenue à partir de Z en annulant la dernière ligne et la dernière colonne. $J_1(Z'), \dots, J_{2n-2}(Z')$ sont les générateurs de $S(\underline{SO(2n-1)})^{SO(2n-2)}$. Il est clair que, pour $Z \in \underline{SO(2n)}$ tel que

$$x_{2n-1} = x_{1,2n-1} = \dots = x_{2n-2,2n-1} = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} I_p(Z) &= J_p(Z'), & (1 \leq p \leq 2n-3), \\ I_{2n-2}(Z) &= J_{2n-2}^2(Z') \\ I_{2n-1}(Z) &= 0. \end{aligned}$$

Soit $P(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1})$ un polynôme de degré $r+1$, tel que :

$$P(I_1(Z), \dots, I_{2n-1}(Z)) = 0, \text{ pour tout } Z \in \underline{SO}(2n).$$

En particulier pour $x_{2n-1} = x_{1,2n-1} = \dots = x_{2n-2,2n-1} = 0$,

$$P(J_1(Z'), \dots, J_{2n-3}(Z'), J_{2n-2}^2(Z'), 0) = 0.$$

Le polynôme G défini par

$$G(u_1, \dots, u_{2n-2}, u_{2n-1}) = P(u_1, \dots, u_{2n-3}, u_{2n-2}^2, u_{2n-1}),$$

vérifie

$$G(J_1(Z'), \dots, J_{2n-2}(Z'), 0) = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $J_1(Z'), \dots, J_{2n-2}(Z')$ sont algébriquement indépendants. Donc,

$$G(u_1, \dots, u_{2n-1}) = u_{2n-1}H(u_1, \dots, u_{2n-1}),$$

où H est un polynôme. Comme

$$G(u_1, \dots, u_{2n-3}, -u_{2n-2}, u_{2n-1}) = G(u_1, \dots, u_{2n-2}, u_{2n-1}),$$

le polynôme H vérifie la même propriété. Par conséquent, il existe un polynôme H_0 , tel que

$$H(u_1, \dots, u_{2n-1}) = H_0(u_1, \dots, u_{2n-3}, u_{2n-2}^2, u_{2n-1}).$$

Ainsi,

$$P(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1}) = \xi_{2n-1}H_0(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1}),$$

avec $d^\circ H_0 < d^\circ P$. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence à H_0 . Il s'ensuit que P est identiquement nul.

2^e cas : $m = 2n + 1$.

La démonstration est identique à la précédente.

(2.3). PROPOSITION. — Soient X et X' deux éléments de $SO(m)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$I_l(X) = I_l(X') \quad (1 \leq l \leq m-1), \quad \text{si } m = 2n,$$

$$J_l(X) = J_l(X') \quad (1 \leq l \leq m-1) \quad \text{si } m = 2n+1,$$

Alors, il existe $k \in SO(m-1)$, tel que $X' = kXk^{-1}$.

Preuve. — La proposition est trivialement vraie pour $m = 3$ comme, on peut le vérifier facilement. Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre $m-1$ et démontrons-la à l'ordre m . Il y a deux cas à considérer, suivant la parité de m .

1^{er} cas : $m = 2n$

a) Supposons $X_1 \neq 0$.

L'égalité $I_1(X) = I_1(X')$, c'est-à-dire $\|X_1\|^2 = \|X'_1\|^2$, implique qu'il existe $u \in SO(2n-1)$, tel que $u(X_1) = X'_1$. Soient $X''_2 = \Lambda^2 u^{-1}(X_2)$ et $X'' = e_0 \wedge X_1 + X''_2$. Alors,

$$\begin{aligned} X'' &= e_0 \wedge u^{-1}(X'_1) + \Lambda^2 u^{-1}(X'_2) = \text{Ad}(u^{-1})[e_0 \wedge X'_1 + X'_2] \\ &= \text{Ad}(u^{-1})X'. \end{aligned}$$

Le problème revient donc à démontrer que X et X'' sont conjugués par un élément de $SO(2n-1)$. Pour cela, nous allons montrer que X_2 et X''_2 , qui appartiennent à $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2n-1} = \underline{SO(2n-1)}$, vérifient l'hypothèse de récurrence.

Posons $E = \mathbb{R}^{2n-1}$, $\varepsilon_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}$ et $E_1 = \varepsilon_1^\perp$. E se décompose en somme directe orthogonale

$$E = \mathbb{R}\varepsilon_1 \oplus E_1,$$

d'où les décompositions suivantes en somme directe orthogonale

$$\begin{aligned} \Lambda^{2p} E &= \varepsilon_1 \wedge [\Lambda^{2p-1} E_1] \oplus \Lambda^{2p} E_1, \quad (1 \leq p \leq n-1), \\ \Lambda^{2p+1} E &= \varepsilon_1 \wedge [\Lambda^{2p} E_1] \oplus \Lambda^{2p+1} E_1, \quad (1 \leq p \leq n-2), \\ \Lambda^{2n-1} E &= \varepsilon_1 \wedge [\Lambda^{2n-2} E_1]. \end{aligned}$$

Les éléments X_2 et X''_2 , qui appartiennent à $\Lambda^2 E$, se décomposent en

$$\begin{aligned} X_2 &= \varepsilon_1 \wedge Y_1 + Y_2 \quad (Y_1 \in E_1, Y_2 \in \Lambda^2 E_1), \\ X''_2 &= \varepsilon_1 \wedge Y'_1 + Y'_2 \quad (Y'_1 \in E_1, Y'_2 \in \Lambda^2 E_1). \end{aligned}$$

On a :

$$X_2^{p\Lambda} = p\varepsilon_1 \wedge Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\Lambda} + Y_2^{p\Lambda}, \quad (1 \leq p \leq n-1), \quad (*)$$

$$\varepsilon_1 \wedge X_2^{p\Lambda} = \varepsilon_1 \wedge Y_2^{p\Lambda},$$

d'où,

$$X_1 \wedge X_2^{p\Lambda} = X_1 \wedge Y_2^{p\Lambda}.$$

Par suite, on a,

$$\begin{aligned} \|X_1 \wedge X_2^{p\Lambda}\| &= \|X_1\| \|Y_2^{p\Lambda}\| \\ &= \|X_1\| \|Y_2'^{p\Lambda}\|, \end{aligned}$$

du fait que $I_{2p+1}(X) = I_{2p+1}(X') = I_{2p+1}(X'')$; donc,

$$\|Y_2^{p\Lambda}\|^2 = \|Y_2'^{p\Lambda}\|^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad J_{2p}(X_2) = J_{2p}(X_2'), \quad (1 \leq p \leq n-2),$$

et

$$\begin{aligned} \|X_2^{p\Lambda}\|^2 &= p^2 \|Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\Lambda}\|^2 + \|Y_2^{p\Lambda}\|^2 \\ &= \|X_2''^{p\Lambda}\|^2 \quad (\text{du fait que } I_{2p}(X) = I_{2p}(X') = I_{2p}(X'')) \\ &= p^2 \|Y_1' \wedge Y_2^{(p-1)\Lambda}\|^2 + \|Y_2'^{p\Lambda}\|^2. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\Lambda}\|^2 = \|Y_1' \wedge Y_2^{(p-1)\Lambda}\|^2 \text{ i.e.}$$

$$J_{2p-1}(X_2) = J_{2p-1}(X_2') \quad (1 \leq p \leq n-2).$$

Maintenant, d'après l'égalité (*), on a :

$$\varepsilon_1 \wedge X_2^{(n-1)\Lambda} = \varepsilon_1 \wedge Y_2^{(n-1)\Lambda},$$

soit encore, en multipliant les deux membres par $\|X_1\|$,

$$\begin{aligned} X_1 \wedge X_2^{(n-1)\Lambda} &= X_1 \wedge Y_2^{(n-1)\Lambda} \\ &= X_1 \wedge X_2''^{(n-1)\Lambda} \quad (\text{du fait que } I_{2n-1}(X) = I_{2n-1}(X'')) \\ &= X_1 \wedge Y_2^{(n-1)\Lambda}. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$Y_2^{(n-1)\Lambda} = Y_2'^{(n-1)\Lambda}.$$

Donc

$$J_{2n-2}(X_2) = J_{2n-2}(X_2''),$$

et

$$\|Y_1 \wedge Y_2^{(n-1)\wedge}\|^2 = \|Y_1' \wedge Y_2''^{(n-1)\wedge}\|^2 \text{ i.e. } J_{2n-3}(X_2) = J_{2n-3}(X_2'').$$

Ainsi,

$$J_l(X_2) = J_l(X_2''), \quad (1 \leq l \leq 2n-2).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à X_2 et X_2'' . Il existe $v \in SO(2n-2)$, telle que

$$X_2'' = vX_2v^{-1}.$$

Définissons $w \in SO(2n-1)$ sur E , en posant

$$\begin{aligned} w(\varepsilon_1) &= \varepsilon_1, \\ w(x) &= v(x) \quad \text{si } x \in E_1. \end{aligned}$$

Alors,

$$w(X_1) = X_1, \quad \wedge^2 w(X_2) = \wedge^2 w(\varepsilon_1 \wedge Y_1 + Y_2) = \varepsilon_1 \wedge Y_1' + Y_2',$$

et

$$\text{Ad}(w)X = \wedge^2 w(e_0 \wedge X_1 + X_2) = e_0 \wedge X_1 + X_2'' = \text{Ad}(u^{-1})X'.$$

D'où

$$X' = \text{Ad}(u \circ w)X.$$

b) Si $X_1 = 0$, alors $X_1' = 0$, du fait que $I_1(X) = I_1(X')$. Donc, $X = X_2$ et $X' = X_2'$ appartiennent à $\underline{SO(2n-1)}$, avec

$$\bar{J}_{2p}(X) = \bar{J}_{2p}(X'), \quad (1 \leq p \leq n-1).$$

Il est bien connu que dans ce cas X et X' sont conjugués par un élément de $SO(2n-1)$.

2^e cas : $m = 2n + 1$.

La démonstration ne présente aucune difficulté. Elle est analogue à la précédente. Elle est laissée au soin du lecteur.

(2.4). THÉORÈME. — Soit F une fonction polynomiale sur $SO(m)$ et vérifiant

$$F(kXk^{-1}) = F(X), \text{ pour tout } k \in SO(m-1) \text{ et } X \in SO(m).$$

Alors, il existe un polynôme G à $(m-1)$ variables, tel que

$$\begin{aligned} F(X) &= G(I_1(X), \dots, I_{m-1}(X)), \text{ si } m = 2n, \\ F(X) &= G(J_1(X), \dots, J_{m-1}(X)), \text{ si } m = 2n + 1. \end{aligned}$$

Preuve. — Le théorème est trivialement vrai pour $m = 3$, comme on peut le vérifier aisément. Supposons qu'il soit vrai à l'ordre $m-1$ et démontrons-le à l'ordre m . Il y a deux cas à considérer, suivant la parité de m .

1^{er} cas : $m = 2n$.

Nous allons montrer, dans une première étape, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ et un polynôme $G_1(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1})$, tels que

$$I_1^\alpha(X)F(X) = G_1(I_1(X), \dots, I_{2n-1}(X)) \quad (*),$$

puis dans une seconde étape, qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}$ et deux polynômes $Q(\xi_2, \dots, \xi_{2n-2})$ et $H(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1})$, tels que

$$Q^\beta(I_2(X), \dots, I_{2n-2}(X))F(X) = H(I_1(X), \dots, I_{2n-1}(X)).$$

Ceci étant admis, démontrons le théorème :

Le polynôme

$$Q^\beta(\xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2n-2})G_1(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1}) - \xi_1^\beta H(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1})$$

est identiquement nul, lorsqu'on fait la substitution $\xi_i = I_i(X)$. D'après la proposition (2.2), les $(I_i(X))_{1 \leq i \leq 2n-1}$ sont algébriquement indépendants. Donc ce polynôme est identiquement nul; ce qui entraîne que le polynôme $G_1(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1})$ est divisible par ξ_1^α , c'est-à-dire

$$G_1(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1}) = \xi_1^\alpha G(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1}),$$

d'où la conclusion d'après l'égalité (*).

(2.4.1). — *1^{ère} étape :*

Comme $SO(2n) = \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n} = e_0 \wedge \mathbb{R}^{2n-1} \oplus \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n-1}$, on peut considérer F comme une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^{2n-1} \times \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n-1}$. Soit

$X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^{2n-1} \times \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n-1}$. Il existe $k \in SO(2n-1)$, tel que $X_1 = k(\|X_1\| e_1)$. Alors,

$$F(X_1, X_2) = F(\|X_1\| e_1, X'_2),$$

avec $X'_2 = \Lambda^2 k^{-1}(X_2)$. Posons

$$X' = \|X_1\| e_0 \wedge e_1 + X'_2 = \Lambda^2 k^{-1}(e_0 \wedge X_1 + X_2).$$

Les éléments X et X' , étant conjugués par un élément de $SO(2n-1)$, on a

$$I_l(X) = I_l(X'), \quad (1 \leq l \leq 2n-1).$$

Posons $E = \mathbb{R}^{2n-1}$ et $E_1 = e_1^\perp$. Alors,

$$E = \mathbb{R}e_1 \oplus E_1 \quad \text{et} \quad \Lambda^2 E = e_1 \wedge E_1 \oplus \Lambda^2 E_1.$$

L'élément X'_2 de $\Lambda^2 E$ se décompose en

$$X'_2 = e_1 \wedge Y_1 + Y_2.$$

Soit s une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^{2n-2}$, de déterminant égal à -1 et

$$k' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & s & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

L'élément k' appartient à $SO(2n-1)$. On a alors

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) &= F(\|X_1\| e_1, X'_2) = F(k'(\|X_1\| e_1), \Lambda^2 k'(X'_2)) \\ &= F(-\|X_1\| e_1, X''_2), \quad (\star) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} X''_2 &= \Lambda^2 k'(X'_2) = \Lambda^2 k'(e_1 \wedge Y_1 + Y_2) \\ &= -e_1 \wedge s(Y_1) + \Lambda^2 s(Y_2) = e_1 \wedge Y'_1 + Y'_2 \end{aligned}$$

où on a posé

$$Y'_1 = -s(Y_1), \quad Y'_2 = \Lambda^2 s(Y_2).$$

F étant polynomiale, il existe des fonctions polynomiales uniques G_i , définies sur $\Lambda^2 E$, telles que

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) &= F(\|X_1\| e_1, X'_2) = \sum_i \|X_1\|^{a_i} G_i(X'_2) \\ &= F(-\|X_1\| e_1, X''_2) = \sum_i (-1)^{a_i} \|X_1\|^{a_i} G_i(X''_2) \quad (\star\star), \end{aligned}$$

d'après l'égalité $(\star)$. Il est clair, que pour chaque i , la fonction G_i est invariante par $SO(2n-2)$. Appliquons l'hypothèse de récurrence aux G_i . Donc, pour chaque i , il existe un polynôme F_i , tel que, pour tout $Z \in \Lambda^2 E$, l'on ait

$$G_i(Z) = F_i(J_1(Z), \dots, J_{2n-2}(Z)).$$

On a

$$\begin{aligned} J_{2p}(X''_2) &= \|Y_2'^{p\wedge}\|^2, & (1 \leq p \leq n-2), \\ J_{2n-2}(X''_2) &= (Y_2'^{(n-1)\wedge})^*, \\ J_{2p+1}(X''_2) &= \|Y_1 \wedge Y_2'^{p\wedge}\|^2, & (0 \leq p \leq n-2). \end{aligned}$$

Sachant que $Y'_1 = -s(Y_1)$ et $Y'_2 = \Lambda^2 s(Y_2)$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} J_{2p}(X''_2) &= J_{2p}(X'_2), & (1 \leq p \leq n-2), \\ J_{2n-2}(X''_2) &= -J_{2n-2}(X'_2), \\ J_{2p+1}(X''_2) &= J_{2p+1}(X'_2), & (0 \leq p \leq n-2). \end{aligned}$$

Donc, pour chaque i , on a

$$\begin{aligned} G_i(X''_2) &= F_i(J_1(X''_2), \dots, J_{2n-2}(X''_2)) \\ &= F_i(J_1(X'_2), \dots, J_{2n-3}(X'_2), -J_{2n-2}(X'_2)). \end{aligned}$$

Par suite, d'après l'égalité $(\star\star)$, on a

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) &= \sum_i \|X_1\|^{a_i} F_i(J_1(X'_2), \dots, J_{2n-2}(X'_2)) \\ &= \sum_i (-1)^{a_i} \|X_1\|^{a_i} F_i(J_1(X'_2), \dots, J_{2n-3}(X'_2), -J_{2n-2}(X'_2)), \end{aligned}$$

ce qui entraîne que F s'exprime comme un polynôme de $J_1(X'_2), \dots, J_{2n-3}(X'_2), \|X_1\|^2, \|X_1\| J_{2n-2}(X'_2), J_{2n-2}^2(X'_2)$. Calculons maintenant les $J_p(X'_2)$ en fonction des $I_p(X)$.

(1) On a,

$$X_2'^{p\wedge} = p e_1 \wedge Y_1 \wedge Y_2'^{(p-1)\wedge} + Y_2'^{p\wedge},$$

par suite,

$$\|X_2'^{p\Lambda}\|^2 = p^2 \|Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\Lambda}\|^2 + \|Y_2^{p\Lambda}\|^2,$$

c'est-à-dire

$$I_{2p}(X) = p^2 J_{2p-1}(X_2') + J_{2p}(X_2'), \quad (1 \leq p < n-1).$$

(2) On a,

$$e_1 \wedge X_2'^{p\Lambda} = e_1 \wedge Y_2^{p\Lambda};$$

d'où,

$$\|X_1 \wedge X_2^{p\Lambda}\|^2 = \|X_1\|^2 \|Y_2^{p\Lambda}\|^2,$$

c'est-à-dire,

$$I_{2p+1}(X) = \|X_1\|^2 J_{2p}(X_2'), \quad (1 \leq p < n-1).$$

De (1) et (2), on déduit que

$$J_{2p-1}(X_2') = \frac{1}{p^2} \left[I_{2p}(X) - \frac{I_{2p+1}(X)}{\|X_1\|^2} \right].$$

(3) On a,

$$X_2'^{(n-1)\Lambda} = (n-1)e_1 \wedge Y_1 \wedge Y_2^{(n-2)\Lambda} + Y_2^{(n-1)\Lambda};$$

d'où,

$$\|X_2'^{(n-1)\Lambda}\|^2 = (n-1)^2 \|Y_1 \wedge Y_2^{(n-2)\Lambda}\|^2 + \|Y_2^{(n-1)\Lambda}\|^2,$$

c'est-à-dire,

$$I_{2n-2}(X') = I_{2n-2}(X) = (n-1)^2 J_{2n-3}(X_2') + J_{2n-2}^2(X_2').$$

(4) On a,

$$e_1 \wedge X_2'^{(n-1)\Lambda} = e_1 \wedge Y_2^{(n-1)\Lambda};$$

d'où,

$$\|X_1\| e_1 \wedge X_2'^{(n-1)\Lambda} = X_1 \wedge X_2'^{(n-1)\Lambda} = \|X_1\| e_1 \wedge Y_2^{(n-1)\Lambda}.$$

Ceci entraîne que

$$(X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge})^* = \|X_1\| (Y_2^{(n-1)\wedge})^*,$$

c'est-à-dire,

$$I_{2n-1}(X) = \|X_1\| J_{2n-2}(X'_2).$$

Par suite,

$$J_{2n-3}(X'_2) = \frac{1}{(n-1)^2} \left[I_{2n-2}(X) - \frac{I_{2n-1}^2(X)}{\|X_1\|^2} \right].$$

En résumé, $F(X)$ s'exprime comme un polynôme en les variables

$$I_1(X), \dots, I_{2n-1}(X), \frac{I_3(X)}{I_1(X)}, \dots, \frac{I_{2n-3}(X)}{I_1(X)}, \frac{I_{2n-1}^2(X)}{I_1(X)}.$$

Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ et un polynôme $G_1(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1})$, tels que

$$I_1^\alpha(X) F(X) = G_1(I_1(X), \dots, I_{2n-1}(X)).$$

(2.4.2). — 2^{ème} étape :

Soit $X \in \underline{SO}(2n)$. X se décompose en

$$X = e_0 \wedge X_1 + Y, \quad (X_1 \in \mathbb{R}^{2n-1}, \quad Y \in \underline{SO}(2n-1)).$$

Il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^{2n-1}$ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1}$, telle que la matrice de l'application Y s'écrit relativement à cette base :

$$Y' = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_{n-1} \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad D_i = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_i \\ -\alpha_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc, il existe $k \in \underline{SO}(2n-1)$, tel que

$$kYk^{-1} = Y' = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_{2i-1} \wedge \varepsilon_{2i}.$$

Posons

$$X'_1 = k \cdot X_1 = \sum_{i=1}^{2n-1} x'_i \varepsilon_i \quad \text{et} \quad X' = e_0 \wedge X'_1 + Y'_1 = \wedge^2 k(X).$$

On a

$$F(X) = F(X') = F(X'_1, Y').$$

Soient T le tore maximal de $SO(2n-1)$ et $N(T)$ le normalisateur de T dans $SO(2n-1)$; exprimons que F est invariante par $N(T)$. Posons

$$S_j = x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2 \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

1) Il existe $t \in T$, tel que

$$t \cdot X'_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{S_j} \varepsilon_{2j-1} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}.$$

Donc,

$$F(X) = F(X'_1, Y') = F(\sqrt{S_1} \varepsilon_1 + \dots + \sqrt{S_{n-1}} \varepsilon_{2n-3} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}, Y').$$

2) Pour $t_i \in T$,

$$t_i = \begin{pmatrix} & & & & 2i-1 \\ & & & & \vdots \\ & 1 & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & -1 & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad 2i-1, \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

on a :

$$t_i Y' t_i^{-1} = Y'$$

$$\begin{aligned} t_i \left(\sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{S_j} \varepsilon_{2j-1} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1} \right) &= \\ &= \sqrt{S_1} \varepsilon_1 + \dots + \sqrt{S_{i-1}} \varepsilon_{2i-3} - \sqrt{S_i} \varepsilon_{2i-1} \\ &\quad + \dots + \sqrt{S_{n-1}} \varepsilon_{2n-3} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que la fonction F ne dépend en fait que des variables $S_1, \dots, S_{n-1}, x'_{2n-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, c'est-à-dire,

$$F(X) = P(S_1 \varepsilon_1 + \dots + S_{n-1} \varepsilon_{2n-3} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

3) Pour $w_i \in N(T)$,

$$w_i = \begin{pmatrix} & & & 2i \\ & & & \vdots \\ 1 & \dots & & \vdots \\ & & 1 & \vdots \\ & & & -1 \\ & & & \vdots \\ & & & & 1 & \dots \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix} 2i, \quad (1 \leq i \leq n-1),$$

on a :

$$\begin{aligned} w_i \cdot (\sum_{j=1}^{n-1} S_j \varepsilon_{2j-1} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}) &= \sum_{j=1}^{n-1} S_j \varepsilon_{2j-1} - x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}, \\ w_i Y' w_i^{-1} &= \alpha_1 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \dots + \alpha_{i-1} \varepsilon_{2i-3} \wedge \varepsilon_{2i-2} \\ &\quad - \alpha_i \varepsilon_{2i} \wedge \varepsilon_{2i+1} + \dots + \alpha_{n-1} \varepsilon_{2n-3} \wedge \varepsilon_{2n-2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(S_1 \varepsilon_1 + \dots + S_{n-1} \varepsilon_{2n-3} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) &= \\ = P(S_1 \varepsilon_1 + \dots + S_{n-1} \varepsilon_{2n-3} - x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}, \alpha_1, \dots, -\alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit, que pour toute famille $(\eta_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, avec $\eta_i = \pm 1$, on a :

$$\begin{aligned} P(S_1, \dots, S_{n-1}, x'_{2n-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) &= \\ = P(S_1, \dots, S_{n-1}, \prod_{i=1}^{n-1} \eta_i x'_{2n-1}, \eta_1 \alpha_1, \dots, \eta_{n-1} \alpha_{n-1}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F(X) &= \sum A_{i_1, \dots, i_n}(S_1, \dots, S_{n-1}) \alpha_1^{i_1} \dots \alpha_{n-1}^{i_{n-1}} x'_{2n-1}^{i_n} \\ &= \sum A_{i_1, \dots, i_n}(S_1, \dots, S_{n-1}) \eta_1^{i_1} \dots \eta_{n-1}^{i_{n-1}} \\ &\quad [\eta_1, \dots, \eta_{n-1}]^{i_n} \alpha_1^{i_1} \dots \alpha_{n-1}^{i_{n-1}} x'_{2n-1}^{i_n}, \end{aligned}$$

pour toute famille $(\eta_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, avec $\eta_i = \pm 1$. Donc,

$$\eta_1^{i_1} \dots \eta_{n-1}^{i_{n-1}} [\eta_1 \dots \eta_{n-1}]^{i_n} = 1,$$

pour toute famille $(\eta_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, avec $\eta_i = \pm 1$. Ceci est équivalent à dire que $i_1 + i_n, \dots, i_{n-1} + i_n$ sont tous pairs. Par suite, si i_n est pair, $i_1, \dots, i_{n-1}$ sont tous pairs et, si i_n est impair, $i_1, \dots, i_{n-1}$ sont tous impairs. Il s'ensuit qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 des variables $S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2$, uniques, tels que l'on ait :

$$F(X) = R_1(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2, x_{2n-1}'^2) + \\ + x_{2n-1}' \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i R_2(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2, x_{2n-1}'^2).$$

4) Pour $w_{ij} \in N(T)$,

$$w_{ij} = \begin{pmatrix} & 2i-1 & & 2j-1 & & \\ 1 & \ddots & & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & & \ddots & \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 1 & & 0 & 0 & \ddots & \\ & \vdots & & \vdots & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix}, \quad (i < j, 1 \leq i, j \leq n-1),$$

on a

$$w_{ij} Y' w_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & D_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & D_i & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & D_{n-1} \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{ij} \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_j \\ \vdots \\ x_{2n-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_j \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ x_{2n-1}' \end{bmatrix}$$

Donc, pour toute permutation σ de $1, \dots, n-1$, on a

$$R_i(S_{\sigma(1)}, \dots, S_{\sigma(n-1)}, \alpha_{\sigma(1)}^2, \dots, \alpha_{\sigma(n-1)}^2, x_{2n-1}^2) = \\ = R_i(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2, x_{2n-1}^2), \quad (i = 1, 2).$$

Si $(s_p)_{1 \leq p \leq n-1}$ désignent les fonctions élémentaires symétriques de $\alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2$, on a

$$\|Y'^{p\Lambda}\|^2 = (p!)^2 s_p, \quad (1 \leq p \leq n-1).$$

Sachant que $\|X'_1\|^2 = \|X_1\|^2$, un calcul direct montre qu'on a aussi

$$\begin{aligned} \|X'_1 \wedge Y'\|^2 &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 [\|X_1\|^2 - S_j], \\ \|X'_1 \wedge Y'^{2\Lambda}\|^2 &= (2!)^2 \sum_{i < j} \alpha_i^2 \alpha_j^2 [\|X_1\|^2 - S_{ij}], \quad (S_{ij} = S_i + S_j), \\ \|X'_1 \wedge Y'^{p\Lambda}\|^2 &= (p!)^2 \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n-1} \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_p}^2 [\|X_1\|^2 - S_{i_1 \dots i_p}], \\ &\quad (S_{i_1 \dots i_p} = S_{i_1} + \dots + S_{i_p}), \quad 1 \leq p < n-1, \\ X'_1 \wedge Y'^{(n-1)\Lambda} &= (n-1)! x'_{2n-1} \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \dots \wedge \varepsilon_{2n-1}. \end{aligned}$$

D'où,

$$(X'_1 \wedge Y'^{(n-1)\Lambda})^* = (n-1)! x'_{2n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \alpha_j,$$

et

$$x_{2n-1}^2 = \frac{\|X_1 \wedge Y'^{(n-1)\Lambda}\|^2}{((n-1)!)^2 s_{n-1}}.$$

Les S_i vérifient les $(n-1)$ équations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} S_i &= \|X_1\|^2 - x_{2n-1}^2 = \|X_1\|^2 - \frac{[(X_1 \wedge Y'^{(n-1)\Lambda})^*]^2}{((n-1)!)^2 s_{n-1}}, \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n-1} \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_p}^2 S_{i_p \dots i_1} &= [\|X_1\|^2 \|Y'^{p\Lambda}\|^2 - \|X_1 \wedge Y'^{p\Lambda}\|^2] (p!)^{-2}, \quad (1 \leq p < n-1). \end{aligned}$$

Le déterminant associé à ce système est, au signe près, égal à

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\alpha_i^2 - \alpha_j^2).$$

D est une fonction antisymétrique. Par contre le discriminant D^2 est une fonction symétrique. Donc D^2 s'exprime comme un polynôme des variables $\|Y\|^2, \dots, \|Y'^{(n-1)\Lambda}\|^2$.

Posons :

$$a_1 = \|X_1\|^2 - \frac{\|X_1 \wedge Y^{(n-1)\Lambda}\|^2}{((n-1)!)^2 s_{n-1}},$$

$$a_{p+1} = [\|X_1\|^2 \|Y^{p\Lambda}\|^2 - \|X_1 \wedge Y^{p\Lambda}\|^2](p!)^{-2}, \quad (1 \leq p < n-1).$$

Alors,

$$S_i = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{n-1} f_{ij}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2) a_j \quad (\star).$$

Revenons maintenant à la fonction polynomiale F . Nous avons démontré en 3) et 4) qu'il existait deux polynômes uniques, R_1 et R_2 , des variables $S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2, x'_{2n-1}$, vérifiant

$$R_i(S_{\sigma(1)}, \dots, S_{\sigma(n-1)}, \alpha_{\sigma(1)}^2, \dots, \alpha_{\sigma(n-1)}^2, x'_{2n-1}) = \\ = R_i(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2, x'_{2n-1}), \quad (i = 1, 2),$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$ et tels que l'on ait

$$F(X) = R_1(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2, x'_{2n-1}) \\ + x'_{2n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i R_2(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2, x'_{2n-1}).$$

Considérons le polynôme R_i ($i = 1, 2$), comme un polynôme en la variable x'_{2n-1} . Il existe des polynômes uniques R_{ij} des variables $S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2$ tels que l'on ait

$$R_i(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2, x'_{2n-1}) \\ = \sum_j R_{ij}(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2) x'^{2j}_{2n-1}, \quad (i = 1, 2).$$

Pour chaque couple (i, j) , R_{ij} vérifie : pour tout permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$,

$$R_{ij}(S_{\sigma(1)}, \dots, S_{\sigma(n-1)}, \alpha_{\sigma(1)}^2, \dots, \alpha_{\sigma(n-1)}^2) = R_{ij}(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2).$$

Soient $S = (S_1, \dots, S_{n-1})$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. Posons

$$g_{ij}(S, \alpha) = R_{ij}(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2).$$

Pour chaque couple (i, j) , g_{ij} est une fonction polynomiale, invariante par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n-1}$. Pour :

$$u = (u_1, \dots, u_{n-1}), v = (v_1, \dots, v_{n-1}), \dots, w = (w_1, \dots, w_{n-1}),$$

on pose

$$\varphi_1(u) = \sum u_i,$$

$$\varphi_2(u, v) = \sum u_i v_k, \quad (i \neq k),$$

$$\varphi_3(u, v, w) = \sum u_i v_k w_l, \quad (i, k, l \text{ distincts deux à deux}),$$

$\vdots$

$$\varphi_{n-1}(u, v, \dots, w) = \sum u_i v_k \dots w_l, \quad (\text{les indices sont distincts deux à deux}).$$

Alors d'après [5], pour chaque couple (i, j) , g_{ij} est un polynôme de $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, où on a substitué dans les φ_i , les variables $u, v, \dots, w$ par S, α , dans toutes les combinaisons possibles. Remarquons que

$$\begin{aligned} \|X_1 \wedge Y\|^2 &= \sum_j \alpha_j^2 [\|X_1\|^2 - S_j] = \sum_j \alpha_j^2 \sum_{p \neq j} S_p \\ &= \sum_{j \neq p} \alpha_j^2 S_p = \varphi_2(S, \alpha), \\ \|X_1 \wedge Y^{p\wedge}\|^2 &= (p!)^2 \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n-1} \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_p}^2 [\|X_1\|^2 - S_{i_p \dots i_p}] \\ &= (p!)^2 \sum \alpha_{i_1}^2 \dots \alpha_{i_p}^2 \left[\sum_{\substack{i_1 \neq \\ \vdots \\ i_p}} S_{i_1} \right] \\ &= (p!)^2 \varphi_{p+1}(S, \alpha, \dots, \alpha). \end{aligned}$$

Remplaçons $S_1, \dots, S_{n-1}$ par leurs valeurs données par l'égalité (★) dans $\varphi_{2p}(S, \dots, S)$. On obtient :

$$\varphi_{2p}(S, \dots, S) = \frac{1}{D^{2p}} \psi_{2p}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2).$$

Comme φ_{2p} et D^2 sont invariants par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n-1}$, ψ_{2p} l'est également. Par conséquent, ψ_{2p} s'exprime comme un polynôme en les variables $\|Y\|^2, \dots, \|Y^{p\wedge}\|^2, \dots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2$. Pour $\varphi_{2p+1}(S, \dots, S)$ ($p \geq 2$), on obtient

$$\varphi_{2p+1}(S, \dots, S) = \frac{1}{D^{2p+1}} \psi_{2p+1}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2)$$

ψ_{2p+1} est antisymétrique. Donc $\psi_{2p+1} = D \cdot \theta_{2p+1}$ où θ_{2p+1} est symétrique. Donc θ_{2p+1} s'exprime en un polynôme des variables $\|Y\|^2, \dots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2$.

Par suite,

$$\varphi_{2p+1}(S, \dots, S) = \frac{1}{D^{2p}} \theta_{2p+1}(\|Y\|^2, \dots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2).$$

Remplaçons $S_1, \dots, S_{n-1}$ par leurs valeurs données par l'égalité (★) dans le reste des invariants. Pour les mêmes raisons que précédemment, ces invariants s'expriment en des polynômes des variables $\|Y\|^2, \dots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2$; quotientés par D élevé à une puissance paire. En conclusion, pour chaque couple (i, j) , R_{ij} s'écrit

$$R_{ij}(S_1, \dots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \dots, \alpha_{n-1}^2) = \frac{G_{ij}(I_1(X), \dots, I_{2n-1}(X))}{D^{2\beta_{ij}}},$$

où G_{ij} est un polynôme et β_{ij} un entier; et, en définitive, sachant que

$$D^2 = Q_1(\|Y\|^2, \dots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2) = Q_1(I_2(X), \dots, I_{2n-2}(X)),$$

F s'écrit :

$$F(X) \cdot Q^\beta(I_2(X), \dots, I_{2n-2}(X)) = H(I_1(X), \dots, I_{2n-1}(X)),$$

où H est un polynôme et β un entier.

2^e cas : $m = 2n + 1$.

La démonstration est semblable à la précédente et ne présente aucune difficulté nouvelle.

(2.5). COROLLAIRE. — L'algèbre $\mathcal{U}(G)^K$, avec $G = SO(m)$ et $K = SO(m-1)$, est engendrée par les générateurs du centre de $\mathcal{U}(SO(m))$ et les générateurs du centre de $\mathcal{U}(SO(m-1))$. En particulier, cette algèbre est commutative.

Preuve. — Si $m = 2n$, soient $X \in SO(2n)'$ et $X = e_0 \wedge X_1 + X_2$ sa décomposition canonique. Alors,

$$X^{p\wedge} = p e_0 \wedge X_1 \wedge X_2^{(p-1)\wedge} + X_2^{p\wedge}, \quad (1 \leq p < n),$$

$$(X^{n\wedge})^* = n(X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge})^* \quad (\star).$$

D'où

$$\|X^{p\wedge}\|^2 = p^2 \|X_1 \wedge X_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|X_2^{p\wedge}\|^2,$$

c'est-à-dire

$$(2.5.1) \quad \bar{I}_{2p}(X) = p^2 I_{2p-1}(X) + \bar{J}_{2p}(X_2), \quad (1 \leq p < n),$$

et

$$\bar{I}_{2n}(X) = n I_{2n-1}(X)$$

d'après (★), d'où la conclusion dans ce cas. Si $m = 2n + 1$, un calcul analogue au précédent montre que

$$(2.5.2) \quad \bar{J}_{2p}(X) = p^2 J_{2p-1}(X) + \bar{I}_{2p}(X_2), \quad (1 \leq p < n),$$

et

$$\bar{J}_{2n}(X) = n^2 J_{2n-1}(X) + [\bar{I}_{2n}(X_2)]^2.$$

III. Générateurs de $\mathcal{U}(SO_0(1, m-1))^{SO(m-1)}$

(3.1). — Dans $\mathbb{R}^m$ muni de la base canonique $e_0, e_1, \dots, e_{m-1}$, ($m \geq 3$), on considère la forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$$B(x, y) = -x_0 y_0 + \sum_{p=1}^{m-1} x_p y_p, \quad (x = \sum x_p e_p, y = \sum y_p e_p).$$

Soient

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{Id}_{\mathbb{R}^{m-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \text{Id}_{\mathbb{R}^{m-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

$SO(1, m-1) = \{A \in SL(m, \mathbb{R}); {}^tASA = S\}$, $SO_0(1, m-1)$ la composante connexe de $\text{Id}_{\mathbb{R}^m}$ dans $SO(1, m-1)$ et $K = SO(m-1)$ le stabilisateur de e_0 pour l'action naturelle de $SO_0(1, m-1)$ sur $\mathbb{R}^m$. L'algèbre de Lie $\underline{SO_0(1, m-1)}$ de $SO(1, m-1)$ est :

$$\underline{SO_0(1, m-1)} = \{X \in M(m, \mathbb{R}), {}^tXS + SX = 0\}.$$

Notons E_{pq} ($p \neq q$) la matrice d'ordre m dont tous les éléments sont nuls sauf celui d'indice (p, q) pris égal à 1. Les matrices $Y_p = E_{op} + E_{po}$,

($p = 1, \dots, m-1$) et $X_{pq} = E_{pq} - E_{qp}$, ($p < q$; $p, q = 1, 2, \dots, m-1$) forment une base de $SO_0(1, m-1)$. Pour

$$X \in SO_0(1, m-1), X = \sum_{p=1}^{m-1} x_p Y_p + \sum_{1 \leq p < q \leq m-1} x_{pq} X_{pq},$$

posons :

$$X_1 = \sum_{i=1}^{m-1} x_i e_i \in \mathbb{R}^{m-1}, X_2 = \sum_{1 \leq p < q \leq m-1} x_{pq} e_p \wedge e_q \in \wedge^2 \mathbb{R}^{m-1}.$$

Soient les fonctions polynomiales sur $SO_0(1, m-1)$ définies par :

(3.1.1.). — Si $m = 2n$,

$$\bar{I}'_{2p}(X) = -p^2 \|X_1 \wedge X_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|X_2^{p\wedge}\|^2, \quad (1 \leq p < n),$$

$$\bar{I}'_{2p}(X) = n(X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge})^*;$$

(3.1.2.). — Si $m = 2n + 1$,

$$\bar{J}'_{2p}(X) = -p^2 \|X_1 \wedge X_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|X_2^{p\wedge}\|^2, \quad (1 \leq p \leq n).$$

(3.2.). THÉORÈME.

(i) Les fonctions polynomiales $\bar{I}'_{2p}$, ($1 \leq p \leq n$), (resp. $\bar{J}'_{2p}$, ($1 \leq p \leq n$)) constituent les générateurs de l'algèbre réelle $S(G)^G$ avec $G = SO_0(1, 2n-1)$ (resp. $G = SO_0(1, 2n)$).

(ii) L'algèbre réelle $\mathcal{U}(G)^K$ avec $G = SO_0(1, m-1)$ et $K = SO(m-1)$ est engendrée par les générateurs du centre de $\mathcal{U}(SO_0(1, m-1))$ et les générateurs du centre de $\mathcal{U}(SO(m-1))$. En particulier, cette algèbre est commutative.

Preuve.

(i) Soit P un élément du centre de l'algèbre $S(SO_0(1, m-1))$. Comme $S(SO(m, \mathbb{C}))^{SO(m, \mathbb{C})} = S(SO_0(1, m-1))^{SO_0(1, m-1)} \otimes \mathbb{C}$, P appartient à

$$S(SO(m, \mathbb{C}))^{SO(m, \mathbb{C})} = S(SO(m))^{SO(m)} \otimes \mathbb{C}.$$

D'après (1.2), P est un polynôme à coefficients complexes de $\bar{I}'_{2p}$, ($1 \leq p < n-1$), $-i\bar{I}'_{2n}$ si $m = 2n$, (resp. de $\bar{J}'_{2p}$, ($1 \leq p < n$) si $m = 2n + 1$) considérées comme fonctions polynomiales sur $SO(m, \mathbb{C})$. Identifions l'algèbre $SO_0(1, m-1)$ à l'algèbre $G^* = \{JXJ; X \in SO_0(m, \mathbb{R})\}$. Alors, d'après (1.2), (2.5.1) et (2.5.2), les restrictions des fonctions polynomiales $\bar{I}'_{2p}$, ($1 \leq p < n$), $-i\bar{I}'_{2n}$, si $m = 2n$ (resp. $\bar{J}'_{2p}$, ($1 \leq p \leq n$) si $m = 2n + 1$) à G^* sont réelles et égales à $\bar{I}'_{2p}$,

($1 \leq p \leq n$) si $m = 2n$ (resp. à $\bar{J}'_{2p}$, ($1 \leq p \leq n$)). Donc P est un polynôme à coefficients réels de $\bar{I}'_{2p}$, ($1 \leq p \leq n$) si $m = 2n$ (resp. $\bar{J}'_{2p}$, ($1 \leq p \leq n$) si $m = 2n + 1$).

(ii) On a $\mathcal{U}(G)^{SO(m-1, \mathbb{R})} \otimes \mathbb{C} = \mathcal{U}(SO(m, \mathbb{C}))^{SO(m-1, \mathbb{C})}$ pour $G = SO(m, \mathbb{R})$ ou $SO_0(1, m-1)$. D'après (2.5) et ce qui précède, il est clair que tout élément de $\mathcal{U}(SO_0(1, m-1))^{SO(m-1, \mathbb{R})}$ est un polynôme réel des générateurs du centre de $\mathcal{U}(SO_0(1, m-1))$ et du centre de $\mathcal{U}(SO(m-1, \mathbb{R}))$.

(3.3) REMARQUE. — La commutativité de l'algèbre $\mathcal{U}(SO(m, \mathbb{C}))^{SO(m-1, \mathbb{C})}$ résulte aussi de [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. DIXMIER. — *Algèbres enveloppantes*. Gauthier-Villars, 1974.
- [2] J. DIXMIER. — *Sur les représentations de certains groupes orthogonaux*, C.R.A.S., 250, série A, (1960), p. 3263-3265.
- [3] K. MINEMURA. — *Invariant differential operators and spherical sections of a homogeneous vector bundle*. Preprint, (1978).
- [4] S. KOBAYASHI. — K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*. Volume II, Interscience publishers, 1969.
- [5] H. WEYL. — *The classical groups*. Princeton mathematical series, 1973.