BULLETIN DE LA S. M. F.

P. ERDÖS
G. TENENBAUM

Sur les diviseurs consécutifs d'un entier

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 125-145
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__125_0>

Bull. Soc. Math. France
111, 1983, p. 125-145.

SUR LES DIVISEURS CONSÉCUTIFS D'UN ENTIER

PAR

P. ERDÖS et G. TENENBAUM (*)

RÉSUMÉ. — Soit $1=d_1<d_2<\ldots<d_{\tau(n)}\leqslant n$ la suite ordonnée des diviseurs d'un entier n. Nous étudions certaines propriétés des couples $\{d_i, d_{i+1}\}$, $1\leqslant i<\tau(n)$. Par exemple : pour toute fonction réelle bornée θ définie sur $]0, 1[$ la fonction arithmétique :

$$\frac{1}{\tau(\mathrm{n})}\sum\nolimits_{1\leqslant i<\tau(n)}\theta(d_i/d_{i+1}),$$

possède une mesure de répartition.

ABSTRACT. — Let $1=d_1<d_2<\ldots<d_{\tau(n)}=n$ be the ordered sequence of the divisors of an integer n. We discuss some properties of the pairs $\{d_i, d_{i+1}\}$, $1\leqslant i<\tau(n)$. For instance: given any bounded real function θ defined on $]0, 1[$ the arithmetical function:

$$\frac{1}{\tau(n)}\sum\nolimits_{1\leqslant i<\tau(n)}\theta(d_i/d_{i+1}),$$

has a distribution function.

1. Introduction

La répartition des facteurs premiers d'un entier est assez bien connue en Théorie Probabiliste des Nombres. Cependant la description que l'on peut en déduire de la distribution des diviseurs présente encore de nombreuses obscurités. Un exemple édifiant est fourni par la conjecture d'ERDÖS affirmant que presque tout entier possède au moins deux diviseurs d, d', avec $d<d'\leqslant 2d$, qui résiste depuis plus de 40 ans.

Considérons la suite ordonnée :

$$1=d_1<d_2<\ldots<d_\tau=n,$$

(*) Texte reçu le 1er septembre 1982, révisé en janvier 1983.

P. ERDÖS, Institut de Mathématiques, Académie des Sciences de Hongrie, Budapest (Hongrie).

G. TENENBAUM, U.E.R. de Mathématiques, Université de Nancy I, Boite Postale n° 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex (France).

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/125/$ 5.00

des diviseurs d'un entier générique n. La conjecture s'énonce donc :

(1) $$\min_{i=1}^{\tau(n)-1} d_{i+1}/d_i \leqslant 2 \quad \text{p. p. (*)}$$

et une forme plus précise, fondée sur un argument probabiliste heuristique ([3], [4]), suggère que le membre de gauche de (1) vaut :

$$1+(\log n)^{1-\log 3+o(1)} \quad \text{p. p.}$$

Les questions qui font explicitement intervenir les relations entre d_i et d_{i+1}, $1 \leqslant i < \tau(n)$, sont souvent difficiles et nécessitent une approche indirecte — sauf dans les cas exceptionnels, comme [7], où le problème peut être reformulé en termes de facteurs premiers.

Nous nous proposons ici d'établir un certain nombre de résultats nouveaux concernant les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs.

Une sous-classe assez étendue est constituée par les fonctions du type :

(2) $$F(n;\, \theta) := \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} \theta(d_i/d_{i+1}),$$

où θ est une application de $]0,\ 1[$ dans R. Nos deux premiers résultats traitent, dans ce cadre, des deux problèmes essentiels de la Théorie des fonctions arithmétiques : mesure de répartition et valeur moyenne.

THÉORÈME 1. — *Si* $\theta :]0, 1[\to R$ *est bornée, alors* $F(n;\, \theta)/\tau(n)$ *possède une mesure de répartition.*

THÉORÈME 2. — *Si* $\theta : [0, 1] \to R$ *est de classe* C^2, *alors on a la formule asymptotique :*

(3) $$\sum_{n \leqslant x} F(n;\, \theta) = x \log x \left\{ \theta(1) + O\left(\frac{\log \log \log x}{(\log x)^{\delta} \sqrt{\log \log x}} \right) \right\},$$

où l'exposant δ, *défini par :*

(4) $$\delta = 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0{,}086071\ldots,$$

est optimal dès que $t\theta'(t)$ *est monotone sur* $[0, 1]$.

En appliquant le théorème 1 à la fonction caractéristique de l'intervalle $[1/2, 1]$ on obtient que $(1/\tau(n))$ card $\{ i : d_{i+1} \leqq 2 d_i \}$ possède une mesure de

(*) Nous utilisons ici et dans la suite la notation p. p. (presque partout) pour signifier que la relation mentionnée a lieu sur une suite d'entiers de densité asymptotique unité.

répartition; la continuité en 0 de cette mesure impliquerait la conjecture d'ERDÖS [1].

Lors du symposium de DURHAM en 1979, l'ordre normal de la fonction :

$$g(n) := \mathrm{card}\{i : d_i \mid d_{i+1}\},$$

a fait l'objet d'une controverse entre ERDÖS et MONTGOMERY, le premier conjecturant que $g(n)=o(\tau(n))$ p. p. et le second que $g(n)>c\,\tau(n)$ pour une une suite d'entiers de densité positive. Nous avons prouvé dans [4] une forme plus forte de la conjecture de MONTGOMERY : la densité inférieure de la suite des entiers n tels que $g(n)>c\,\tau(n)$ tend vers 1 lorsque c tend vers 0. L'existence de la mesure de répartition de $g(n)/\tau(n)$, conjecturée dans [4], découle du Théorème 1 : Il suffit de choisir pour θ la fonction caractéristique de $\{1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$. De plus, le résultat de [4] signifie que la mesure ainsi obtenue est continue en 0. Il en va de même, pour chaque $r>0$, de la fonction :

$$k_r(n) := F(n;\, t \to t^r) = \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} (d_i/d_{i+1})^r;$$

en effet, si $P^-(n)$ désigne le plus petit facteur premier de n, alors $P^-(n)\,d_i \mid n$ (et donc $d_{i+1} \leqslant P^-(n)\,d_i$) pour au moins $\tau(n)/2$ valeurs de i, d'où :

$$k_r(n) \geqslant \tau(n)/2(P^-(n))^r;$$

d'après un résultat classique, il s'ensuit que la densité de l'ensemble des n tels que $k_r(n)<\varepsilon\tau(n)$ est $\ll r/\log 1/\varepsilon$.

Dans le cas de $\theta(t)=t^r$, nous pouvons également préciser la formule (3) quant à la dépendance en r.

THÉORÈME 3. — *Uniformément pour* $r \log x \gg 1$, *on a :*

$$\sum_{n\leqslant x} k_r(n) = x(\log x - K_r(x) + O(1)), \tag{5}$$

où $K_r(x)$ *est une quantité qui satisfait, pour tout* $\varepsilon>0$, *à la double inégalité :*

$$e^{-\varepsilon r} L_1(\log x) \ll_\varepsilon \frac{K_r(x)}{(r \log x)^{1-\delta}} \ll (1+r^\delta)\, L_2\,((r/(r+1)) \log x), \tag{6}$$

avec :

$$L_1(v) := \exp\{-c(\varepsilon)\sqrt{(\log v \log\log v)}\},$$
$$L_2(v) := (\log v)^{-1/2} \log\log v.$$

On étend sans difficulté la formule (3) aux fonctions θ qui sont bien approchables par des éléments de $C^2([0, 1])$, comme par exemple la fonction caractéristique d'un intervalle. La fonction caractéristique de $\{1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ n'entre pas dans cette catégorie, et partant une méthode entièrement différente doit être développée pour étudier la valeur moyenne de $g(n)$. Nous prouvons le résultat suivant.

THÉORÈME 4. — *Pour tout* $\varepsilon>0$ *et* $x>x_0(\varepsilon)$, *on a :*

$$x(\log x)^{\beta-\varepsilon}<\sum_{n\leqslant x} g(n)\ll x(\log x)^{\alpha}(\log\log x)^{-1/2}, \tag{7}$$

où l'on a posé $\beta=2z-1-2z\log z=0{,}844\,673\dots$, *pour* $z=(y-2\log y)^{-1}$, $y=(\sqrt{5}-1)/2$, *et où* $\alpha=1-\delta=0{,}913\,928\dots$.

La fonction arithmétique :

$$f(n):=\operatorname{card}\{i\in[1, \tau(n)[: (d_i, d_{i+1})=1\},$$

a été introduite par ERDÖS et HALL dans [2]. Elle n'est pas du type (2) et l'on ne connaît actuellement ni son ordre moyen ni son ordre normal. On a :

$$\sum_{n\leqq x} f(n)=\sum_{1\leqq u<v\leqq x,\,(u,v)=1} A(x; u, v),$$

où $A(x; u, v)$ désigne le nombre des entiers $\leqslant x$ qui sont multiples de u et de v mais d'aucun w, $u<w<v$. Or, il est très malaisé d'estimer $A(x; u, v)$ en général : par exemple $A(x; u, v)=0$ si $[u, v]$ possède un diviseur dans $]u, v[$. Cette situation illustre bien les difficultés inhérentes aux problèmes de ce type. ERDÖS et SIMONOVITS ont montré que pour tout $\varepsilon>0$ et $k\geqslant k_0(\varepsilon)$ on a :

$$(\sqrt{2}-\varepsilon)^k\leqslant\max\{f(n) : \omega(n)=k\}\leqslant(2-c)^k,$$

où $\omega(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers distincts de n et c une constante positive. Trivialement $f(n)\geqslant\omega(n)$ pour tout n, et ERDÖS et HALL conjecturent dans [2] que l'ordre moyen de f dépasse toute puissance fixe de $\log\log n$.

Nous établissons les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 5. — *Pour presque tout entier* n, *on a :*

$$f(n)<(\log n)^{\log 2-(1/2)+o(1)}. \tag{8}$$

THÉORÈME 6. — *On a la majoration asymptotique :*

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) \ll x\,(\log x)^{\alpha}\,\frac{\log\log\log x}{\sqrt{\log\log x}} \tag{9}$$

où l'on a posé $\alpha=1-\delta=0{,}913\,928...$.

2. Notations

Nous désignons par $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier n et par $\Omega(n)$ le nombre de ses facteurs premiers comptés avec leur ordre de multiplicité.

La lettre p est utilisée exclusivement pour désigner un nombre premier. $a\mid b$ signifie que a divise b; $v_p(a)$ désigne la valuation p-adique de a.

Le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier de n est noté $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$). Par convention, $P^+(1)=1$, $P^-(1)=+\infty$.

Pour chaque valeur des paramètres réels ρ, σ, $2\leqslant\rho\leqslant\sigma$, on note $\chi(n;\sigma)$ (resp. $\chi(n;\rho,\sigma)$) la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers n tels que $P^-(n)\geqslant\sigma$ (resp. tels que $p\mid n \Rightarrow p\notin[\rho,\sigma]$). On pose :

$$\tau(n;\sigma) := \sum_{d\mid n}\chi(d;\sigma), \qquad \Omega(n;\sigma) := \sum_{p<\sigma} v_p(n).$$

Le symbole $\sum_{d,d'}^{\rho}$ indique une sommation restreinte aux couples d'entiers (d,d') satisfaisant à $d\neq d'$ et $\rho^{-1}<d'/d<\rho$. On convient qu'une somme (resp. un produit) vide est nulle (resp. égal à 1).

Les lettres c, c_1, c_2, ..., désignent des constantes absolues positives. Les constantes impliquées par les symboles $\ll$ de VINOGRADOV et O de LANDAU sont également absolues — une éventuelle dépendance en fonction des paramètres α, β, ... étant indiquée sous la forme $\ll_{\alpha,\beta,\ldots}$ ou $O_{\alpha,\beta,\ldots}$.

Enfin, la densité asymptotique (resp. densité asymptotique inférieure, supérieure) d'une suite d'entiers A est notée dens A (resp. $\underline{\text{dens}}\,A$, $\overline{\text{dens}}\,A$).

3. Lemmes

LEMME 1. — *Pour* $t\geqslant 2$, *on pose :*

$$t_i=\exp(t^i), \qquad I(i)=\,]t_i,\,t_{i+1}],$$
$$P_i=\prod_{p\in I(i)} p, \qquad A_i=\{n\in N : (n,P_i)=1\}.$$

Alors, si $0<\varepsilon<1/2$, *et*, $k\geqslant t\,(\log(1/\varepsilon)+c_0)$, *on a :*

$$\operatorname{dens}\{\cup_{i=1}^{k}A_i\}\geqslant 1-\varepsilon.$$

Démonstration. — Le principe d'inclusion-exclusion permet d'écrire la densité en question sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_j\leqslant k}\prod_{s=1}^{j}\prod_{p\in I(i_s)}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$
$$=1-\prod_{j=1}^{k}\left(1-\prod_{p\in I(j)}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\geqslant 1-c\left(1-\frac{1}{t}\right)k.$$

Cela implique la conclusion annoncée avec $c_0=\log c$.

LEMME 2. — *Soit* $0<\alpha\leqslant 1/5$, $0<\eta<1$, $\xi\geqslant\xi_0(\alpha,\eta)$, $\sigma\geqslant 2$. *Il existe une suite d'entiers B telle que :*

(i) $$\underline{\operatorname{dens}}\,B\geqslant 1-(\log\xi)^{-9\alpha^2/10},$$

(ii) $$\sum_{d\mid n}\chi(d;\sigma)\chi^*(d)\geqq(1-\eta)\tau(n;\sigma),$$

pour tout n de B, où χ^* *désigne la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers d satisfaisant à :*

(10) $$\sup\left\{\left|\frac{\Omega(d;u)-(1/2)\log(\log u/\log\sigma)}{(1/2)\log(\log u/\log\sigma)}\right|:\ \exp(\log\xi.\log\sigma)\leqslant u\leqslant d\right\}\leqslant\alpha.$$

A une modification sans importance près, ce résultat est un cas particulier du lemme 4 de [4].

LEMME 3. — *Conservons les hypothèses et les notations du lemme précédent, et posons, pour tout* ρ, $2\leqslant\rho\leqslant\sigma$:

$$f(n):=\frac{\chi(n;\rho,\sigma)}{\tau(n;\sigma)}\sum_{d,d'\mid n}^{\rho}\chi(dd';\sigma)\chi^*(d).$$

Alors, pour tout $\lambda>0$ *on a :*

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\ll_{\alpha,\lambda}x\left\{(\log\xi)^{\lambda}\left(\frac{\log\rho}{\log\sigma}\right)^2+o(1)\right\}.$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition 4 de [4] – en conservant explicite la dépendance en ρ dans les calculs. Nous laissons les détails au lecteur. Le lemme suivant découle immédiatement du Lemme 3 de [8] ou du Lemme 11 de l'Appendice.

LEMME 4. – *Si* $2 \leqslant \rho \leqslant \sigma \leqslant x$, *on a :*

$$\operatorname{card}\left\{n \leqslant x : \prod_{p<\rho} p^{\nu_p(n)} > \sigma\right\} \ll x \exp\left(-c\frac{\log \sigma}{\log \rho}\right).$$

LEMME 5. – *Si h est une fonction multiplicative réelle satisfaisant pour tout p à :*

$$0 \leqslant h(p^j) \leqslant \lambda_1 \lambda_2^j, \qquad (j=0, 1, 2, \ldots),$$

avec $\lambda_1 \geqslant 0$ *et* $0 \leqslant \lambda_2 < 2$, *alors on a :*

$$\sum_{n \leq x} h(n) \ll x \prod_{p \leq x} (1-p^{-1}) \sum_{j=0}^{\infty} h(p^j) p^{-j}.$$

Ce résultat est dû à HALBERSTAM ET RICHERT [5].

LEMME 6. – *Si* $0 < \alpha, \varepsilon, \eta, z < 1$, *et* $\sigma \geqslant \sigma_0(\alpha, \varepsilon, \eta, z)$, *on a :*

$$\sum_{n \leqslant x} z^{\Omega(n)} \chi(n; \sigma) \sum_{d \mid n} (\varepsilon + \chi_z^*(d) - 1) \gg \varepsilon x (\log x)^{2z-1} \{(\log \sigma)^{-2z} + o(1)\}, \tag{11}$$

où χ_z^* *est la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers d* satisfaisant à :

$$\sup\{|\Lambda(d; u)| : \exp\{(\log \sigma)^{1+\eta}\} \leqslant u \leqslant d\} \leqslant \alpha,$$

avec :

$$\Lambda(d; u) := \frac{\Omega(d; u) - z \log(\log u/\log \sigma)}{z \log(\log u/\log \sigma)}.$$

Démonstration. – Il suffit de considérer le cas où σ est fixé et x tend vers l'infini.

D'une part, on a d'après un théorème de SELBERG [6] :

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqslant x} z^{\Omega(n)} \chi(n; \sigma) \tau(n) &\sim \frac{x}{\Gamma(2z)} (\log x)^{2z-1} \prod_{p<\sigma}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2z} \prod_{p \geqslant \sigma}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{2z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1) z^j}{p^j} \\ &\gg x (\log x)^{2z-1} \{(\log \sigma)^{-2z} + o(1)\}.\end{aligned} \tag{12}$$

D'autre part, posons $u_k := \exp\{e^k(\log\sigma)^{1+\eta}\}$, $(k=0, 1, 2, \ldots)$. On vérifie sans peine que si $|\Lambda(d;u)|>\alpha$ pour au moins un $u\geqslant u_0$, et $\sigma\geqslant\sigma_1(\alpha,\eta)$, alors il existe un $k\geqslant 0$ tel que $|\Lambda(d;u_k)|>\alpha/2$. Cette dernière condition implique :

$$v^{\Omega(d;\,u_k)}\left(\frac{\log u_k}{\log\sigma}\right)^{-z(1-\alpha/2)\log v}+w^{\Omega(d;\,u_k)}\left(\frac{\log u_k}{\log\sigma}\right)^{-z(1+\alpha/2)\log w}>1,$$

pour tous v, w, $0<v<1<w<2$. Or, le lemme 5 fournit l'estimation :

$$\sum\nolimits_{n\leqslant x} z^{\Omega(n)}\chi(n;\sigma)\sum\nolimits_{d|n} y^{\Omega(d;\,u)}\ll_y x(\log x)^{2z-1}(\log\sigma)^{-z(1+y)}(\log u)^{z(y-1)},$$

pour $0<y<2$, et $\sigma\leqslant u\leqslant x$; en choisissant $v=1-\alpha/2$ et $w=1+\alpha/2$, on obtient donc :

$$\sum\nolimits_{n\leqslant x} z^{\Omega(n)}\chi(n;\sigma)\sum\nolimits_{d|n}(1-\chi_z^*(d))$$

$$\ll_\alpha x\frac{(\log x)^{2z-1}}{(\log\sigma)^{2z}}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{\log u_k}{\log\sigma}\right)^{-z\,Q(\alpha/2)}+\left(\frac{\log u_k}{\log\sigma}\right)^{-z\,Q(-\alpha/2)}\right\}$$

$$\ll_{\alpha,\,z} x(\log x)^{2z-1}(\log\sigma)^{-2z}\{(\log\sigma)^{-\eta zQ(\alpha/2)}+(\log\sigma)^{-\eta zQ(-\alpha/2)}\},$$

où l'on a posé $Q(t) := (1+t)\log(1+t)-t$. Compte tenu de (12), cela implique la conclusion annoncée.

LEMME 7. — *En conservant les hypothèses et notations du lemme précédent, et, en supposant de plus que :*

(13) $$z<(\alpha+y-2(1+\alpha)\log y)^{-1},\qquad y := \frac{\sqrt{(5+4\alpha)}-1}{2},$$

on a la majoration asymptotique :

$$\sum\nolimits_{n\leqslant x} z^{\Omega(n)}\chi(n;\sigma)\sum\nolimits_{d,\,d'|n}^{2}\chi_z^*(d)\chi_z^*(d')\ll_{\alpha,\,z} x(\log x)^{2z-1}(\log\sigma)^{-\lambda(z)},$$

avec :

(14) $$\lambda(z) := 1+2z(1+\eta(1+\alpha)\log y).$$

Démonstration. — Soit $S(x)$ la quantité à majorer. On a :

$$S(x)=\sum\nolimits_{d,\,d'\leqslant x}^{2} A(d,d')\sum\nolimits_{m\leqslant x/[d,\,d']}\chi(m;\sigma)\,z^{\Omega(m)},$$

où l'on a posé :

$$A(d, d') = z^{\Omega([d, d'])}\chi(dd'; \sigma)\chi_z^*(d)\chi_z^*(d').$$

D'où, en estimant la somme intérieure par le Lemme 5 :

$$\begin{aligned} S(x) &\ll (\log \sigma)^{-z} \textstyle\sum_{d, d' \leqslant x}^2 A(d, d') \dfrac{x}{[d, d']}\left(\log \dfrac{2x}{[d, d']}\right)^{z-1}, \\ &\ll (\log \sigma)^{-z} \textstyle\sum_{d, d' \leqslant x}^2 A(d, d') \sum_{r \leqslant x/[d, d']} (\log 2r)^{z-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Après avoir remarqué que, pour $k \geqslant 1$, $u \geqslant \sigma$, et $0 < y \leqslant 1$, on a :

$$\chi_z^*(k) \leqq y^{\Omega(k;\, u)}(\log u)^{-\psi}(\log \sigma)^{(1-\eta)\psi}, \tag{16}$$

avec :

$$\psi := z(1+\alpha)\log y,$$

on majore l'expression (15) en écrivant $d = mt$, $d' = m'\,t$, et en employant (16) pour $k = mt$ avec $u = m$, et pour $k = m'\,t$ avec $u = m'$; à ce stade, on note que les conditions $m'/m \in [1/2, 2]$, $m \neq m'$, et $\chi(mm'; \sigma) = 1$ excluent la possibilité $m = m' = 1$, et, donc, impliquent bien $m, m' \geqq \sigma$. Après interversion de sommations, on traite successivement les sommes intérieures en t, r, m' à l'aide du Lemme 5. Les calculs sont assez longs mais ne présentent pas de difficultés majeures — aussi n'avons-nous pas jugé utile de les reproduire ici. On obtient :

$$S(x) \ll x(\log x)^{2z-1}(\log \sigma)^D \textstyle\sum_{\sigma \leqslant m \leqslant 2\sqrt{x}} (yz)^{\Omega(m)}(\log m)^E \dfrac{\chi(m; \sigma)}{m},$$

avec :

$$\begin{aligned} D &:= 2(1-\eta)\psi - z(y^2+y+1), \\ E &:= -2\psi + z(y^2+y-1) - 1. \end{aligned}$$

La somme en m peut encore s'écrire :

$$\int_\sigma^{2\sqrt{x}} (\log w)^E \frac{dF(w)}{w}, \tag{17}$$

avec :

$$F(w) := \textstyle\sum_{m \leqslant w} (yz)^{\Omega(m)}\chi(m; \sigma) \ll w(\log \sigma)^{-yz}(\log w)^{yz-1},$$

d'après le Lemme 5. Une intégration par parties montre alors que, si $E + yz < 0$, l'expression (17) est $\ll_{\alpha, y, z} (\log \sigma)^E$, d'où :

$$S(x) \ll_{\alpha, y, z} x(\log x)^{2z-1}(\log \sigma)^{D+E}.$$

On a bien $D+E=-\lambda(z)$; on choisit alors y de façon à rendre minimale l'expression $E+yz=z(y^2+2y-1-2(1+\alpha)\log y)-1$; cela fournit la condition (13) et complète la démonstration.

LEMME 8. — *Soit $H(x, y, z)$ le nombre des entiers $\leqq x$ ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[y, z[$. Sous l'hypothèse :*

$$8 \leqslant 2y \leqslant z \leqslant \min\{y^{3/2}, x^{1/2}\} \tag{18}$$

et, en définissant u par la relation $z=y^{1+u}$, on a :

$$xu^{\delta} L_1(1/u) \leqslant H(x, y, z) \leqslant xu^{\delta} L_2(1/u), \tag{19}$$

où la constante positive δ est définie par (3), et, où l'on a posé :

$$L_1(v) := \exp\{-c_1\sqrt{(\log v . \log\log 2v)}\},$$
$$L_2(v) := c_2(\log v)^{-1/2} \log\log 2v.$$

Si l'on remplace, dans (18), $2y$ par $(1+\varepsilon)y$, la formule (19) reste valable à condition de considérer c_1 et c_2 comme des fonctions de ε. De plus, dans le cas où $z=O(y)$, on peut omettre, quitte à modifier c_2, le facteur $\log\log 2v$ *dans* $L_2(v)$.

C'est le théorème 1 de [8]. Le résultat suivant généralise la borne supérieure de (19); on peut le démontrer en adaptant la démarche suivie dans [8]; nous donnons les détails dans l'Appendice.

LEMME 9. — *Soit $\varepsilon(n; y, z)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers n ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[y, z[$. On pose, pour $0<t<2$:*

$$H(x, y, z; t) = \sum_{n \leqslant x} \varepsilon(n; y, z)\, t^{\Omega(n)}.$$

Sous l'hypothèse (18), et, en définissant u par la relation $z=y^{1+u}$, on a :

$$H(x, y, z; t) \ll_t x(\log x)^{t-1} u^{G(t)} (\log 1/u)^{K(t)}, \tag{20}$$

avec :

$$G(t) := \begin{cases} 1-t & \text{si } 0<t\leqslant 1/\log 4, \\ t-\log(et\log 2)/\log 2 & \text{si } 1/\log 4\leqslant t\leqslant 1/\log 2, \\ 0 & \text{si } 1/\log 2\leqslant t<2. \end{cases}$$

et :

$$K(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t<1/\log 2, \\ 0 & \text{si } t\geqslant 1/\log 2. \end{cases}$$

De plus, dans le cas où $z=O(y)$, on peut prendre $K(t)=0$ même si $t<1/\log 2$.

4. Démonstration du Théorème 1

Le point fondamental est la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — *Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une application $n \to a(n;\varepsilon)$ à valeurs entières, et un réel $T(\varepsilon)$ tels que :*

(i) $\overline{\text{dens}}\{n : a(n;\varepsilon)>T(\varepsilon)\}\leqslant\varepsilon$;

(ii) $\overline{\text{dens}}\left\{n : \left|\dfrac{F(n;\theta)}{\tau(n)}-\dfrac{F(a(n;\varepsilon);\theta)}{\tau(a(n;\varepsilon))}\right|>\varepsilon\right\}\ll\varepsilon$;

(iii) *pour chaque entier a la suite des entiers n tels que $a(n;\varepsilon)=a$ possède une densité asymptotique $\beta(a;\varepsilon)$.*

Dans un premier temps, admettons ce résultat et montrons comment le Théorème 1 s'en déduit. Pour $0\leqq u\leqq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
S(x;u):&=\text{card}\{n\leqslant x : \mathrm{F}(n;\theta)\leqslant u\tau(n)\}\\
&\leqq\text{card}\{n\leqq x : F(a(n;\varepsilon);\theta)\leqq(u+\varepsilon)\tau(a(n;\varepsilon))\}+O(\varepsilon x)\\
&\leqslant\textstyle\sum_{a\leqslant T(\varepsilon),\, F(a;\theta)\leqslant(u+\varepsilon)\tau(a)}\text{card}\{n\leqslant x : a(n;\varepsilon)=a\}+O(\varepsilon x)\\
&\leqslant x\{\textstyle\sum_{a\leqslant T(\varepsilon),\, F(a;\theta)\leqslant(u+\varepsilon)\tau(a)}\beta(a;\varepsilon)+O(\varepsilon)+O(1)\}.
\end{aligned}$$

et, similairement :

$$S(x;u)\geqslant x\{\textstyle\sum_{a\leqslant T(\varepsilon),\, F(a;\theta)\leqslant(u-\varepsilon)\tau(a)}\beta(a;\varepsilon)+O(\varepsilon)+o(1)\}.$$

En faisant tendre, dans ces inégalités, successivement x vers l'infini et ε vers zéro, on obtient que :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}S(x;u)=\nu(u),$$

en tout point de continuité de la fonction ν définie par :

$$\nu(u):=\limsup_{\varepsilon\to 0}\textstyle\sum_{a\leqslant T(\varepsilon),\, F(a;\theta)\leqslant u\tau(a)}\beta(a;\varepsilon).$$

Preuve de la proposition 1. — Fixons un $\varepsilon>0$ et donnons nous un paramètre $t=t(\varepsilon)$ dont la valeur explicite sera fixée plus loin.

Reprenons les notations du lemme 1, et posons :

$$k:=[t(\log(2/\varepsilon)+c_0)]+1,\qquad A_i':=A_i\cap(\textstyle\bigcap_{1\leqslant j<i}A_j^c),\quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

Nous définissons l'application $a(n;\,\varepsilon)$ par :

$$a(n;\,\varepsilon)=\begin{cases}\prod_{p\leqslant t_i} p^{v_p(n)} & \text{si}\quad n\in A'_i,\\ n & \text{si}\quad n\in N\setminus\bigcup_{i=1}^k A_i.\end{cases}$$

D'après le Lemme 1, dens $(N\setminus\bigcup_{i=1}^k A_i)\leqq\varepsilon/2$, et d'après le Lemme 4 :

$$\text{dens}\{n\in A'_i : a(n;\,\varepsilon)>t_{k+2}\}\ll\exp(-ct^{k+2-i}).$$

La condition (i) est donc satisfaite pour ε assez petit avec $T(\varepsilon)=t_{k+2}$, quitte à supposer que :

(21) $$t\geqslant\log 1/\varepsilon.$$

La condition (iii) est également remplie, avec :

$$\beta(a;\,\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\prod_{p\leqslant t_{i+1}}\left(1-\dfrac{1}{p}\right) & \text{si}\quad a\in A'_i,\\ 0 & \text{si}\quad a\in N\setminus\bigcup_{i=1}^k A_i.\end{cases}$$

Il reste à établir le point (ii). Nous allons montrer que, si l'on écarte certaines suites de densité supérieure $O(\varepsilon)$, on a :

(22) $$\left|\frac{F(n;\,\varepsilon)}{\tau(n)}-\frac{F(a;\,\varepsilon)}{\tau(a)}\right|\ll\varepsilon,$$

avec $a=a(n;\,\varepsilon)$, pour tous les n restants.

Nous pouvons nous restreindre aux entiers de $A:=\bigcup_{i=1}^k A_i$, que nous décomposons canoniquement sous la forme $n=ab$, avec $a=a(n;\,\varepsilon)$. Si $j=j(n)$ est l'unique indice de $[1,k]$ tel que $n\in A'_j$, nous définissons $\rho=\rho(n)=\exp(t^{j+1/3})$ et $\sigma=\sigma(n)=t_{j+1}$. En remarquant que $\chi(n;\,\rho,\sigma)=1$ pour tout n de A, on obtient grâce au lemme 3 :

$$\sum_{n\leqslant x,\, n\in A'_j}\frac{1}{\tau(b)}\sum\nolimits^{\rho}_{d,\, d'|b}\chi^*(d)\ll_{\alpha,\lambda} x((\log\xi)^{\lambda}\,t^{-4/3}+o(1)).$$

De plus, d'après le lemme 2, on a pour $\xi\geqslant\xi_0(\alpha,\,\eta/2)$:

$$\Sigma_{d|b}(1-\chi^*(d))\leqslant\frac{1}{2}\eta\tau(b),$$

sauf au plus pour une suite d'entiers de densité supérieure $O((\log \xi)^{-9\alpha^2/10})$. Ici χ^* désigne la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers satisfaisant la condition (10). Pour $n \in A$, posons :

$$\Psi(n) := \operatorname{card}\{d \mid b : \exists d' \mid b,\, d \neq d',\, d/\rho < d' < \rho d\}.$$

On a :

$$\Psi(n) \leqslant \frac{1}{\tau(b)} \sum\nolimits_{d,\, d' \mid b}^{\rho} \chi^*(d) + \frac{1}{\tau(b)} \sum\nolimits_{d \mid b} (1 - \chi^*(d)).$$

Pour $\xi \geqslant \xi_0(\alpha, \eta/2)$, il vient donc :

$$\overline{\text{dens}}\{n \in A'_j : \Psi(n) > \eta\} \ll_{\alpha, \lambda} (\log \xi)^{\lambda} t^{-4/3} \eta^{-1} + (\log \xi)^{-9\alpha^2/10}.$$

En choisissant $\alpha = 1/6$, $\log \xi = t^{60}$, $\lambda = 1/720$, on obtient que cette majoration est $O(t^{-6/5})$ pourvu que :

$$t \geqslant t_0(\eta) > \max\{\eta^{-20}, (\log \xi_0(1/6, \eta/2))^{1/60}\}.$$

Cela implique :

$$\overline{\text{dens}}\{n \in A : \Psi(n) > \eta\} \ll k t^{-6/5} \ll t^{-1/5} \log 1/\varepsilon.$$

en prenant $\eta = \varepsilon$, on voit finalement que, pour $t \geqslant t_0(\varepsilon)$:

$$\overline{\text{dens}}\{n \in A : \Psi(n) > \varepsilon\} \ll \varepsilon^4 \log 1/\varepsilon \ll \varepsilon.$$

Maintenant, nous avons encore par le Lemme 4 :

$$\overline{\text{dens}}\{n \in A : a \geqslant \rho\} \ll k \exp(-ct^{1/3}) \ll \varepsilon$$

et par le Lemme 5 :

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x : n \in A,\, \varepsilon\tau(a) \leqslant 1\} \leqslant \sum\nolimits_{n \leqslant x} \frac{\tau(n; t_1)}{\varepsilon\tau(n)} \ll x t^{-1/2} \varepsilon^{-1} < x \varepsilon^9.$$

Pour achever la démonstration de la proposition 1, il nous suffit donc d'établir que l'on a (22) sous les hypothèses suivantes :

$$n = ab, \qquad a < \rho < P^-(b), \qquad \Psi(n) \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \tau(a) > 1/\varepsilon.$$

Désignons respectivement par :

$$1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_r = a \qquad \text{et} \qquad 1 = b_1 < b_2 < \ldots < b_s = b,$$

les suites croissantes des diviseurs de a et b. On a :

$$F(n; \theta) = \sum\nolimits_{j=1}^{s} \sum\nolimits_{b_j \leqslant d_i < b_{j+1}} \theta(d_i/d_{i+1}), \tag{23}$$

avec la convention $b_{s+1}=+\infty$. Répartissons alors les indices j en deux classes J_1 et J_2, définies par :

$$J_1:=\{1\}\cup\{j\in]1,s]:\min(b_j/b_{j-1},b_{j+1}/b_j)>a\},\qquad J_2:=[1,s]\setminus J_1.$$

Si j est dans J_1, les diviseurs d_i de n qui appartiennent à l'intervalle $[b_j, b_{j+1}[$ sont exactement les $b_j a_v$, pour $1\leqslant v\leqslant r$; la somme intérieure de (23) est alors égale à $F(a;\theta)+O(1)-$ le terme $O(1)$ provenant du diviseur $d_i=b_j a_r$. De plus, la condition sur $\Psi(n)$ implique que card $J_2\leqslant \varepsilon s$; cela montre que la contribution au membre de droite de (23) des j appartenant à J_2 est $O(\varepsilon rs)=O(\varepsilon\tau(n))$. Il vient donc :

$$\begin{aligned}F(n;\theta)&=(\text{card } J_1)(F(a;\theta)+O(1))+O(\varepsilon\tau(n))\\&=sF(a;\theta)+O(\varepsilon s\,|F(a;\theta)|+s+\varepsilon\tau(n))=sF(a;\theta)+O(\varepsilon\tau(n)+s).\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par $\tau(n)=\tau(a)s$, et en tenant compte du fait que $1/\tau(a)<\varepsilon$, on obtient (22), ce qui termine la démonstration.

5. Démonstration des Théorèmes 2 et 3

Posons $\varphi(t)=t\theta'(t)$. Pour $1\leqslant k<\tau(n)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^{d_k}\frac{dz}{z^2}\int_1^z\varphi'(y/z)\varepsilon(n;y,z)\,dy&=\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\displaystyle\int_{d_i}^{d_{i+1}}\frac{dz}{z}\int_{1/z}^{d_i/z}\varphi'(t)\,dt\\&=\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\displaystyle\int_{d_i}^{d_{i+1}}((d_i/z^2)\theta'(d_i/z)-(1/z^2)\theta'(1/z))\,dz\\&=(k-2)\theta(1)-\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\theta(d_i/d_{i+1})+\theta(1/d_k).\end{aligned}$$

Si $k=\tau(n)/2+O(1)$, la symétrie autour de $\sqrt{n}$ des diviseurs de n implique :

$$F(n;\theta)=2\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}\theta(d_i/d_{i+1})+O(1).$$

En prenant $k=[\tau(n)/2]$ et en remarquant que, pour $n\leqslant x$, on a $d_k\leqslant\sqrt{x}$ et :

$$\begin{aligned}&\int_{d_k}^{\sqrt{x}}\frac{dz}{z^2}\int_1^z\varphi'(y/z)\varepsilon(n;y,z)\,dy\\&\qquad=O\left(\int_{d_k}^{\sqrt{n}}\frac{dz}{z^2}\int_1^{d_k}dy+\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{x}}\frac{dz}{z}\right)=O(\log 2x/n),\end{aligned}$$

on obtient par sommation sur n :

(24)
$$\sum_{n\leqslant x} F(n;\,\theta)=\theta(1)\,x\log x-2\int_1^{\sqrt{x}}\int_1^{\sqrt{x}}\varphi'(y/z)\,H(x,\,y,\,z)\frac{dy\,dz}{z^2}+O(x).$$

On en déduit la formule (3) en majorant $H(x, y, z)$ par x pour $y\leqslant z^{2/3}$, par le membre de droite de (19) pour $z^{2/3}<y\leqslant z/2$, et par $O(x(\log z)^{-\delta}L_2(\log z))$ pour $z/2<y\leqslant z$. De plus, la minoration du lemme 8 montre que, si $\varphi'(t)$ est de signe constant, l'exposant δ du terme reste de (3) ne peut pas être amélioré.

Dans le cas de $\theta(t)=t^r$, on a $\varphi'(t)=r^2\,t^{r-1}$; la formule (6) découle alors de (24) et du Lemme 8 par un calcul élémentaire : la majoration est effectuée comme précédemment et la minoration est obtenue en se restreignant au domaine d'intégration $z^{2/3}<y\leqq ze^{-\varepsilon/2}$ et en utilisant la borne inférieure fournie par le Lemme 8.

6. Démonstration du Théorème 4

Notre majoration de la valeur moyenne de $g(n)$ repose sur la remarque suivante : pour tout entier n, on a :

$$g(n)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon(n;\,2^k,\,2^{k+1})=\operatorname{card}\{k\in N : \exists\, d\mid n,\ 2^k\leqslant d<2^{k+1}\}.$$

En effet, si $d_i\mid d_{i+1}$, alors $d_{i+1}/d_i\geqslant 2$ et d_i et d_{i+1} n'appartiennent pas au même intervalle $[2^k, 2^{k+1}[$. En se restreignant, grâce à la symétrie autour de $\sqrt{n}$ des diviseurs de n, aux entiers k tels que $2^k\leqslant\sqrt{n}$, il vient donc :

$$\sum_{n\leqslant x} g(n)\leqslant 2\sum_{k\leqslant \log x/\log 4} H(x,\,2^k,\,2^{k+1})$$
$$\ll x\sum_{k\leqq \log x/\log 4} k^{-\delta}(\log k)^{-1/2}\ll x(\log x)^{1-\delta}(\log\log x)^{-1/2},$$

d'après le Lemme 8.

La minoration est plus délicate. L'inégalité fondamentale est :

(25) $$g(2n)\geqslant\operatorname{card}\{i : 2\,d_{i-1}\leqslant d_i\leqslant d_{i+1}/2\}.$$

En effet, pour chaque indice i compté dans le membre de droite, d_i et $2\,d_i$ sont des diviseurs consécutifs de $2\,n$. Réintroduisons la fonction χ_z^* définie au Lemme 6. D'après (25), on a encore :

$$g(2n) \geqslant \tau(n) - 2\sum_{d_{i+1}<2d_i} 1$$

$$\geqslant \tau(n) - 2\sum_{d_{i+1}<2d_i} (\chi_z^*(d_i)\chi_z^*(d_{i+1}) + 2 - \chi_z^*(d_i) - \chi_z^*(d_{i+1})),$$

d'où :

$$(26) \qquad g(2n) \geqslant 4\sum_{d|n}(\chi_z^*(d) - 3/4) - 2\sum_{d,\,d'|n}^{2} \chi_z^*(d)\chi_z^*(d').$$

Multiplions les deux membres de cette inégalité par $z^{\Omega(n)}\chi(n;\sigma)$ et sommons pour $n \leqslant x$; en choisissant η assez petit pour que la quantité $\lambda(z)$ définie par (14) soit $> 2z$, et en appliquant le Lemme 6 (avec $\varepsilon = 1/4$) et le lemme 7, on obtient que, sous l'hypothèse (13) et pour $\sigma \geqq \sigma_1(\alpha, \eta, z)$, on a : pour $\sigma \geqslant \sigma_1(\alpha, \eta, z)$, on a :

$$(27) \qquad \sum_{n \leqslant x} z^{\Omega(n)}\chi(n;\sigma)\, g(2n) \gg_{\sigma,\, z} x(\log x)^{2z-1}.$$

Maintenant, considérons la fonction caractéristique $\gamma(n; z)$ de l'ensemble des entiers $n \leqslant x$ satisfaisant à :

$$\Omega(n) > 2z \log\log x - (\log\log x)^{2/3}.$$

C'est un résultat bien connu (dont le Lemme 5 permet d'ailleurs une preuve rapide) que l'on a l'estimation asymptotique :

$$\sum_{n \leqslant x}(1 - \gamma(n; z))\,\tau(n)\, z^{\Omega(n)} = o(x(\log x)^{2z-1}).$$

La relation (27) implique donc :

$$x(\log x)^{2z-1} \ll_{\sigma,\, z} \sum_{n \leqslant x} \gamma(n; z)\, g(2n)\, z^{\Omega(n)} \ll (\log x)^{2z\log z + o(1)} \sum_{n \leqslant x} g(2n),$$

Comme l'on peut choisir, dans les lemmes 6 et 7, α et η arbitrairement petits, on voit que z peut être pris aussi proche que l'on voudra de $(y_0 - 2\log y_0)^{-1}$, avec $y_0 = (\sqrt{5-1})/2$.

Le résultat annoncé en découle.

7. Étude de $f(n)$

Nous nous proposons dans cette section de prouver les Théorèmes 5 et 6. Nous introduisons à cette fin deux fonctions auxiliaires :

$$\rho_1(n) := \max\{d : d \mid n,\ d^2 \leqslant n\}$$

et :

$$\rho_2(n) := n/\rho_1(n) = \min\{d : d \mid n,\ d^2 \geqslant n\}.$$

Si (d, d'), $d<d'$, est un couple de diviseurs consécutifs et premiers entre eux de n, on a $\rho_1(dd')=d$, $\rho_2(dd')=d'$, et, en posant $m=dd'$, $r=n/m$:

$$k \mid r \Rightarrow k \notin J(m) := \bigcup_{v \mid m}]\rho_1(m)/v,\ \rho_2(m)/v[.$$

Comme $J(m) \supseteq]1, \rho_2(m)/\rho_1(m)[$, on a $P^-(r) \geqslant \rho_2(m)/\rho_1(m)$; il vient donc, pour $0<t<2$:

$$\sum_{n \leqslant x} f(n)\, t^{\Omega(n)} \leqslant \sum_{mr \leqslant x} \chi(r;\ \rho_2(m)/\rho_1(m))\, t^{\Omega(mr)},$$

$$(28) \qquad \ll_t x \sum_{m \leqslant x} (\log(2\rho_2(m)/\rho_1(m)))^{-t} (\log(2x/m))^{t-1} \frac{t^{\Omega(m)}}{m},$$

d'après le Lemme 5.

Posons :

$$M(x;\ s,\ t) := \sum_{m \leqslant x,\ \rho_2(m)/\rho_1(m) < s} t^{\Omega(m)}.$$

Si m est compté dans $M(x;\ s,\ t)$, on a $m/s < \rho_1(m)^2 \leqslant m$; on peut donc écrire, avec les notations des lemmes 8 et 9, et pour $s \leqslant \sqrt{x}$;

$$M(x;\ s,\ t) - M(x/2;\ s,\ t) \leqslant \sum_{m \leqslant x} \epsilon(m;\ \sqrt{(x/2s)},\ \sqrt{x})\, t^{\Omega(m)} + \sqrt{x}$$

$$= H(x,\ \sqrt{(x/2s)},\ \sqrt{x};\ t) + \sqrt{x} \ll_t x(\log x)^{t-1} \left(\frac{\log 2s}{\log x}\right)^{G(t)} L\left(\frac{\log x}{\log s};\ t\right);$$

où l'on a posé :

$$L(v;\ t) = \begin{cases} (\log v)^{-1/2} \log\log 2v & \text{si } t=1, \\ (\log v)^{K(t)} & \text{si } t \neq 1. \end{cases}$$

Cela implique :

$$(29) \qquad M(x;\ s,\ t) \ll_t x(\log x)^{t-1-G(t)} (\log 2s)^{G(t)}\, L\left(\frac{\log x}{\log s};\ t\right),$$

d'où :

$$N(x;\ t) := \sum_{m \leqslant x} (\log(2\rho_2(m)/\rho_1(m)))^{-1}\, t^{\Omega(m)}$$

$$= t \int_1^x M(x;\ s,\ t)(\log 2s)^{-t-1} \frac{ds}{s}$$

$$\ll_t x(\log x)^{V(t)} (\log\log x)^{W(t)} L(\log x;\ t),$$

avec :

$$V(t) := t-1-G(t)+\max(0, G(t)-t), \qquad W(t) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t=1/2 \\ 0 & \text{si} \quad t\neq 1/2 \end{cases}.$$

Dans l'estimation de l'intégrale en s, nous avons utilisé (29) pour $s \leqslant \sqrt{x}$, et la majoration triviale $M(x; s, t) \ll_t x(\log x)^{t-1}$ pour $s > \sqrt{x}$.

Maintenant, par (28) on a :

$$\text{(30)} \quad \sum_{n\leqslant x} f(n)\, t^{\Omega(n)} \ll_t \int_1^x (\log x/w)^{t-1} \frac{dN(w;\, t)}{w}$$
$$\ll_t x(\log x)^{V(t)+t}(\log\log x)^{Z(t)} L(\log x;\, t),$$

où l'on a posé :

$$Z(t) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t<1/2, \\ 2 & \text{si} \quad t=1/2, \\ 0 & \text{si} \quad t>1/2. \end{cases}$$

En choisissant $t=1$ dans (30) on obtient le Théorème 6. De plus, il découle de (30) que :

$$\sum\nolimits'_{n\leqslant x} f(n) \ll_t x(\log x)^{V(t)+t-\log t+o(1)},$$

où l'apostrophe signifie que la sommation est restreinte aux entiers $n \leqslant x$ satisfaisant à :

$$\text{(31)} \qquad |\Omega(n) - \log\log x| < \varepsilon(x) \log\log x,$$

où $\varepsilon(x)$ est une quantité tendant vers zéro.

Le choix optimal $t=1/2$ fournit la majoration du Théorème 5 : pour chaque $\varepsilon>0$ le nombre des entiers $n \leqq x$ satisfaisant à (31) et pour lesquels :

$$f(n) > (\log x)^{\log 2-(1/2)+\varepsilon},$$

ne dépasse pas :

$$(\log x)^{-\log 2+(1/2)-\varepsilon} \sum\nolimits'_{n\leqslant x} f(n) \ll_\varepsilon x(\log x)^{-\varepsilon/2} = o(x).$$

APPENDICE

Nous nous proposons ici de prouver le Lemme 9. Les deux résultats auxiliaires suivants sont nécessaires.

LEMME 10. — *Désignons par a un entier générique satisfaisant à $P^+(a) \leqslant \rho$. On a pour $0<t<2$, et, $2 \leqslant \rho \leqslant x$:*

$$\sum_{a \leqslant x} t^{\Omega(a)} \ll_t x \exp\left\{-c\frac{\log x}{\log \rho}\right\}\frac{(\log \rho)^t}{\log x},$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned}\sum_{a \leqslant x} t^{\Omega}(a) \sum_{p \mid a} \log p &= \sum_{a \leqslant x} t^{\Omega(a)+1} \sum_{p \leqslant \min\{\rho, x/a\}} \log p \\ &\ll_t \rho \sum_{a \leqslant x/\rho} t^{\Omega(a)} + x \sum_{x/\rho < a \leqslant x} t^{\Omega(a)}/a \\ &\ll_t x\left(\frac{x}{\rho}\right)^{-\alpha} \prod_{p \leqslant \rho}(1+tp^{\alpha-1}) \ll_t x \exp\left\{-c\frac{\log x}{\log \rho}\right\}(\log \rho)^t,\end{aligned}$$

en choisissant $\alpha = c'/\log \rho$.

Cela implique le résultat souhaité pour la partie de la somme initiale correspondant aux entiers a tels que $\sum_{p \mid a} \log p > (1/2)$ *log x*; pour l'autre partie, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{a \leqslant x, \Pi_{p \mid a} p \leqslant \sqrt{x}, p \mid a} t^{\Omega(a)} &\leqslant x^{3/4} \sum_{a \leqslant x} t^{\Omega(a)} a^{-1/4} \Big(\prod_{p \mid a} p\Big)^{-1} \\ &\leqslant x^{3/4} \prod_{p \leqslant \rho}\Big(1+\sum_{j=1}^{\infty} t^j p^{-(1+j/4)}\Big) \ll_t x^{3/4}.\end{aligned}$$

Cette dernière majoration étant compatible, quitte à réduire la valeur de c, avec la borne annoncée, cela achève la démonstration.

LEMME 11. — *Désignons par $n(\rho)$ le plus grand diviseur de n satisfaisant à $P^+(d) \leqslant \rho$. On a uniformément pour $2 \leqslant \rho \leqslant \sigma \leqslant x$, et $0<t<2$;*

$$\sum_{n \leqslant x, n(\rho) > \sigma} t^{\Omega(n)} \ll_t x \exp\left\{-c\frac{\log \sigma}{\log \rho}\right\}(\log x)^{t-1}.$$

Démonstration. — Décomposons canoniquement chaque entier n sous la forme $n = ab$, avec $P^+(a) \leqslant \rho < P^-(b)$. La quantité à majorer est égale à :

$$\sum_{ab \leqslant x, a > \sigma} t^{\Omega(ab)} \ll_t \sum_{\sigma < a \leqslant x/\rho} t^{\Omega(a)} \frac{x}{a}\left(\log \frac{x}{a}\right)^{t-1} (\log \rho)^{-t} + \sum_{x/\rho < a \leqslant x} t^{\Omega(a)},$$

d'après le Lemme 5. Les deux termes de cette majoration sont aisément estimés à l'aide du Lemme 10.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Lemme 9. Posons $s=\log 1/u$, et décomposons chaque entier n sous la forme canonique $n=abm$, avec :

$$P^+(a)\leqslant y^u<P^-(b)\leqslant P^+(b)\leqslant z<P^-(m).$$

Nous scindons alors la somme $H(x, y, z;\, t)$ en trois parties, H_1, H_2, H_3, correspondant respectivement aux conditions supplémentaires :

(H_1) $$a>y^{su/c},$$

(H_2) $$\Omega(b)>rs,$$

(H_3) $$a\leqslant y^{su/c},\qquad \Omega(b)\leqslant rs,$$

où r est un paramètre réel dont la valeur sera choisie ultérieurement en fonction de t, et où c désigne la constante apparaissant au Lemme 11.

D'après le Lemme 11, on a :

$$H_1\ll_t ux(\log x)^{t-1}.$$

Pour tout v, $1<v<2/t$, on peut écrire :

$$H_2\leqslant \textstyle\sum_{n\leqslant x} t^{\Omega(n)}v^{\Omega(b)-rs}\ll_{t,\,v} u^{t(1-v)+r\log v}x(\log x)^{t-1},$$

d'après le Lemme 5. De plus, si $0<w\leqq 1$, on a également :

$$H_3\ll_t su^{1+t(1-2w)+r\log w}\, x(\log x)^{t-1}.$$

En effet, si n possède un diviseur, disons kd avec $k\mid a$ et $d\mid b$, dans $[y,\ y^{1+u}[$ et si $a\leqslant y^{su/c}$, on a nécessairement $y^{1-su/c}\leqslant d<y^{1+u}$. Le lemme 5 et une sommation d'Abel permettent alors d'établir la majoration :

$$H_3\leqslant \textstyle\sum_{n\leqslant x} t^{\Omega(n)}\sum_{d\mid b,\, y^{1-su/c}\leqslant d<y^{1+u}} w^{\Omega(b)-rs}.$$

Si $t\leqslant 1/\log 4$, on choisit $w=1$ et r suffisamment grand pour que la borne supérieure établie pour H_2 soit compatible avec le résultat annoncé.

Si $1/\log 4\leqslant t<1/\log 2$, on choisit $r=1/\log 2$, $v=r/t$, et $w=r/2t$; les majorations de H_2 et H_3 sont alors identiques, au facteur s près, et l'exposant de u est bien celui qui figure dans l'énoncé du Lemme 9.

Si $1/\log 2\leqslant t<2$, la majoration (20) est la majoration triviale — qui découle d'ailleurs directement du Lemme 5.

Le cas où $z=O(y)$ se ramène à celui où $z\leqslant hy$ avec $h<2$ grâce à la majoration :

$$H(x, y, z; t)\leqq\sum\nolimits_{1\leqq j\leqq((\log(z/y))/\log h)+1} H(x, h^{j-1}y, h^{j}y; t) \ll \max\nolimits_{y\leqslant y'<z} H(x, y', hy'; t).$$

Pour obtenir le résultat annoncé, on applique la méthode précédente à $H(x, y', hy'; t)$ en prenant en compte le fait que le facteur a est maintenant égal à 1 pour tout n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ERDÖS (P.). — On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 54, 1948, p. 685-692.

[2] ERDÖS (P.) et HALL (R. R.). — On some unconventional problems on the divisors of integers, *J. Austral. Math. Soc.*, series A, t. 25, 1978, p. 479-485.

[3] ERDÖS (P.) et HALL (R. R.). — The propinquity of divisors, *Bull. London Math. Soc.*, t. 11, 1979, p. 304-307.

[4] ERDÖS (P.) et TENENBAUM (G.). — Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier, *Ann. Inst. Fourier*, t. 31, 1, 1981, p. 17-37.

[5] HALBERSTAM (H.) et RICHERT (H.-E.). — On a result of R. R. HALL, *J. Number Theory*, (1), t. 11, 1979, p. 76-89.

[6] SELBERG (A.). — Note on a paper by L. G. SATHE, *J. Indian Math. Soc.*, t. 18, 1954, p. 83-87.

[7] TENENBAUM (G.). — Lois de répartition des diviseurs, 5, *J. London Math. Soc.* (2), t. 20, 1979, p. 165-176.

[8] TENENBAUM (G.). — Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, *Compositio Math.*, à paraître.