Bulletin de la S. M. F.

Jean Giraud

Forme normale d'une fonction sur une surface de caractéristique positive

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 109-124

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__109_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 109-124.

FORME NORMALE D'UNE FONCTION SUR UNE SURFACE DE CARACTÉRISTIQUE POSITIVE ([1])

PAR

JEAN GIRAUD (*)

RÉSUMÉ. — En caractéristique positive, dire que $f=0$ est un diviseur à croisements normaux ne dit à peu près rien sur l'ensemble des zéros de df. C'est pourquoi nous proposons une condition plus forte et montrons qu'on peut la réaliser par éclatement de points lorsque l'espace de définition de f est régulier de dimension 2.

ABSTRACT. — In positive characteristic, the condition that $f=0$ is a normal crossing divisor does not say much about the set of zeros of the differential df. That's why we propose a stronger condition. When f is defined over a regular scheme of dimension 2, we show that this condition can be realized after a finite number of blowing up whose centers are closed points.

Introduction

Soit f une fonction sur un schéma régulier X et soit $E(f)$ l'ensemble des points où df s'annule. En caractéristique nulle, f est constante sur chaque composante connexe de $E(f)$. En appliquant à $f-c$ le théorème de désingularisation de Hironaka, on peut donc trouver une modification $e: X' \to X$ telle que X' soit régulier et $f'=(f-c)e$ soit localement un monôme dans des coordonnées convenables de X', ce qui permet de déterminer la structure de l'annulateur de df'. En caractéristique $p>0$, on sait seulement que la restriction de f à la partie régulière d'une composante irréductible de $E(f)$ est une puissance p-ième; c'est pourquoi l'énoncé usuel de désingularisation (qui reste conjectural) ne donne pas une information suffisante sur df'. Au paragraphe 1, nous donnons une condition qui dit

(*) Texte reçu le 8 juin 1982, révisé le 15 avril 1983.

J. GIRAUD, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex.

([1]) Ce travail a été fait à Purdue University à l'automne 1980, où j'ai profité de la fréquentation stimulante de S. S. ABHYANKAR.

que df est aussi simple qu'on peut espérer. Au paragraphe 2, nous montrons dans 2.4 qu'on peut réaliser cette condition par éclatement de points fermés lorsque $\dim X = 2$ et lorsque O_X est de rang fini sur O_X^p. Par la même occasion, nous donnons un énoncé de désingularisation pour une forme différentielle qui n'est pas supposée exacte (2.7, 2.10). Observons pour terminer que l'on déduit aisément de 2.4 que l'on peut désingulariser par une suite d'éclatements à *centres réguliers* une surface d'équation $z^p = f(x, y)$: *voir* par exemple comment ABHYANKAR utilise le théorème 9 de [1].

1. Préliminaires

1.1. Dans ce qui suit, on considère un schéma régulier X de caractéristique $p>0$ et un entier n tels que le module Ω_X des différentielles de X relativement à F_p soit localement libre de rang n, ce qui signifie que le morphisme de Frobenius est fini et plat de rang p^n. Notre hypothèse est stable par localisation étale, passage au complété ou éclatement de X de centre régulier. On dit qu'une suite $(x_1, \ldots, x_r)$ d'éléments de $O_X(X)$ est *différentiellement libre* (resp. un système de coordonnées différentielles de X) si le module $\sum O_X\, dx_i$ est localement facteur direct de Ω_X (resp. si les dx_i forment une base de Ω_X). Pour qu'un sous-schéma fermé E de X soit un diviseur à croisements normaux, il faut et il suffit que, pour tout $\xi \in X$, il existe un voisinage ouvert X' de ξ et une suite différentiellement libre $(x_1, \ldots, x_r)$ d'éléments de $O_X(X')$ tels que l'idéal de $E \cap X'$ soit engendré par un monôme $x^a = x_1^{a(1)} \ldots x_r^{a(r)}$, $a(i) \in \mathbb{N}$. Observons que les x_i qui sont nuls au point ξ forment une partie d'un système régulier de paramètres et que les $a(i)$ correspondants sont déterminés par la condition que x^a soit une équation locale de E. Les autres exposants peuvent être remplacés par zéro sans changer E. On note :

(1) $$\Omega_X(E),$$

le module des formes différentielles ayant au pis des pôles logarithmiques aux points de E. Pour toute fonction $f \in O_X(X)$, on définit l'idéal :

(2) $$J(X, f, E) = \text{annulateur du morphisme } O_X \to \Omega_X(E), \qquad u \mapsto u\, df.$$

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées différentielles et si $E = \operatorname{div}(x^a)$ les dx_i/x_i avec $a(i) \neq 0$ et les dx_j avec $a(j) = 0$ forment une base de $\Omega_X(E)$ et par suite l'idéal $J(X, f, E)$ est engendré par les $x_i\, \partial f/\partial x_i$ avec $a(i) \neq 0$ et les $\partial f/\partial x_j$

avec $a(j)=0$. Pour simplifier, on pose :

(4) $$J(X,f)=J(X,f,\emptyset).$$

DÉFINITION 1.2. — *Soit $f\in O_X(X)$. On pose :*

(1) $$E(f)=\{\xi\in X,\ df\in \underline{m}_{X,\xi}\Omega_X\}=(\mathrm{Spec}(O_X/J(X,f)))_{\text{réd}}$$

et on considère les conditions :

($\star$) *$E(f)$ est un diviseur à croisements normaux;*

($\star\star$) *$E(f)$ est un diviseur à croisements normaux et $J(X,f,E(f))$ est l'idéal d'un diviseur à croisements normaux.*

1.3. Observons que si on a ($\star$), alors f n'est pas une puissance p-ième parce que $E(g^p)=X$ n'est pas un diviseur de X, (à moins que X ne soit vide...); de plus, on a $(\mathrm{Spec}(O_X/J(X,f,E(f))))_{\text{réd}}=E(f)$.

Nous verrons dans (1.5) que ($\star\star$) signifie que, localement pour la topologie étale, on a $f=g^p+x^a$, où $x=(x_1,\ldots,x_r)$ sont différentiellement libres et où le monôme x^a satisfait à une condition supplémentaire, due au fait que voici : *pour qu'un monôme x^a satisfasse à ($\star$), il faut et il suffit que :*

(1) $a\neq 0 \bmod p$ et pour tout couple (i,j), avec $i\neq j$ et $a(i)=a(j)=1$, on a $\mathrm{div}(x_i)\cap\mathrm{div}(x_j)=\emptyset$.

Dans ce cas, on a aussi ($\star\star$) et $J(X,f,E(f))$ est engendré par $\prod_{a(i)\geqslant 2}x_i^{a(i)}$.

1.4. Soit $f\in O_X(X)$ et soit ξ un point de X. On peut trouver des coordonnées différentielles $x=(x_1,\ldots,x_n)$ d'un voisinage ouvert affine $X'=\mathrm{Spec}(R)$ de ξ telles que :

(i) $(x_1,\ldots,x_s)$ est un système régulier de paramètres de $O_{X,\xi}$ et l'on a $0\leqslant s\leqslant n$.

(ii) les monômes x^a, avec $0\leqslant a(i)<p$ (*ce qui s'écrit $a\ll p$*) forment une base de R sur R^p.

On a donc un développement unique :

(1) $$f=\textstyle\sum_{a\ll p}f_a^p\,x^a,\ f_a\in R.$$

Pour $0\leqslant i\leqslant s$, on pose :

(2) $$r(i)=\inf\{\mathrm{ord}_{x_i}f_a,\ a\ll p,\ a\neq 0\},$$

(3) $$K(i)=\{a\in\mathbf{N}^{\mathbf{N}},\ a\ll p,\ a\neq 0,\ \mathrm{ord}_{x_i}f_a=r(i)\},$$

(4) $$s(i)=\inf\{a(i),\ a\in K(i)\},\qquad A(i)=pr(i)+s(i).$$

Nous allons voir que pour $0 \leqslant i \leqslant s$, on a :

(5) $$A(i) = \operatorname{ord}_{x_i}(f - f_0^p),$$

(6) $$A(i) \leqslant \operatorname{ord}_{x_i}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f\right) \quad \text{avec égalité si} \quad s(i) \neq 0,$$

(7) $$A(i) \leqslant \operatorname{ord}_{x_i}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \operatorname{ord}_{x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) \quad \text{pour} \quad j \neq i,$$

(8) $$\text{si } s(i) = 0, \text{ il existe } j \neq i \quad \text{tel que} \quad A(i) = \operatorname{ord}_{x_i}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} f\right),$$

(9) $$A(i) = \sup\{\operatorname{ord}_{x_i}(f - g^p),\ g \in R\}.$$

On a $gr_{x_i}(R) = (R/x_i R)[X_i]$, d'où une base de $gr_{x_i}(R)$ sur $(R/x_i R)^p$ formée des $X_i^k x^a$, avec $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a(j) < p$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$ et $a(i) = 0$. On en tire immédiatement (5) (6) et (7). Quant à (8), on peut supposer que $f \notin R^p$, sinon la formule est triviale, on a donc $K(i) \neq \emptyset$, d'où un $a \in K(i)$ avec $a(i) = 0$, mais $a \neq 0$, donc il existe j tel que $a(j) \neq 0$, d'où la conclusion.

Enfin, on déduit (9) de (5) en observant qu'en ajoutant une puissance p-ième à f, on ne change pas les coefficients f_a pour $a \neq 0$.

Proposition 1.5. — *Soit $f \in O_X(X)$ et soit $\xi \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *il existe un voisinage ouvert X' de ξ tel que la restriction de f à X' satisfasse* (★★);

(ii) *il existe un voisinage ouvert affine $X' = \operatorname{Spec}(R)$ du point ξ, des éléments $g, x_1, \ldots, x_r, u$ de R et des entiers naturels $a(1), \ldots, a(r)$ tels que, dans R, on ait $f = g^p + x^a u$ avec les conditions supplémentaires suivantes :*

(*a*) *$x_1, \ldots, x_r$ est une partie d'un système régulier de paramètres au point ξ;*

(*b*) *$a(i) \geqslant 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$;*

(*c*) *au moins une des deux conditions suivantes est satisfaite :*

$(c-1)$ *$a \neq 0$ mod p et u est une unité;*

$(c-2)$ *$x_1, \ldots, x_r$, u sont différentiellement libres.*

Prouvons que (ii) $\Rightarrow$ (i). Puisque $a(i) \geqslant 2$, on a $E(f) \supset \operatorname{div}(x_1 \ldots x_r)$. Dans le cas $(c-1)$ on étend $(x_1, \ldots, x_r)$ en des coordonnées différentielles $(x_1, \ldots, x_m)$ et on choisit i tel que $a(i) \neq 0$ mod p et on a :

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = x^a \left(a(i) u + x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

ce qui prouve à la fois que $E(f) \subset \operatorname{div}(x_1 \ldots x_r)$ et que x^a engendre $J(X, f, E(f))$. Dans le cas $(c-2)$, on étend $(u, x_1, \ldots, x_r)$ en des coordonnées différentielles $(u, x_1, \ldots, x_m)$ et on a encore :

$$E(f) \subset \operatorname{div}(x_1 \ldots x_r) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = x^a,$$

d'où la conclusion.

Pour prouver que (i) $\Rightarrow$ (ii), on utilise 1.4 en faisant en sorte que $E(f) = \operatorname{div}(x_1 \ldots x_r)$, avec $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$. Je dis que l'on a $A(i) \geqslant 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. En effet, par choix des x_i, on sait que x_i divise chacun des $\partial f / \partial x_j$; si $s(i) = 0$, d'après 1.4(8), il existe $j \neq i$ tel que :

$$\mathrm{A}(i) = \operatorname{ord}_{x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

donc $A(i) \geqslant 1$, mais ici $A(i) = pr(i)$, donc $a(i) \geqslant p$. Si $s(i) \neq 0$, d'après 1.4(6), on a :

$$A(i) = \operatorname{ord}_{x_i}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \geqslant 2.$$

D'après 1.4(5), on a $f = f_0^p + hu$ avec $h = x_1^{A(1)} \ldots x_r^{A(r)}$ et $u \in R$. Aux notations près, nous avons donc prouvé les conditions (a) et (b) de 1.5(ii). En vertu de ($\star\star$), nous savons que $J(X, f, E(f))$ est engendré par un monôme en $x_1, \ldots, x_r$ dont les exposants ne peuvent être que les $A(i)$ d'après 1.4(6), (7), (8); on a donc $J(X, f, E(f)) = hR$. Puisque $J(X, f, E(f))$ est engendré par les :

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = h\left(A(i)\, u + x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \qquad 0 \leqslant i \leqslant r,$$

et par les :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = h \frac{\partial u}{\partial x_j}, \qquad r < j \leqslant n,$$

il n'y a que deux possibilités : ou bien il existe :

$$j > r \qquad \text{tel que} \quad \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

soit une unité, et l'on a $(c-2)$, ou bien il existe :

$$i \leqslant r \qquad \text{tel que} \quad A(i)u + x_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

soit une unité et l'on a $(c-1)$. Donc (i) $\Rightarrow$ (ii).

Observons que df ne s'annule pas au point ξ si, et seulement si, on a $(c-2)$ avec $r=0$. Par ailleurs, dans le cas $(c-1)$, quitte à passer à un revêtement étale, on peut absorber l'unité dans les monômes, en effet, l'un des $a(i)$ étant non nul modulo p, on résoud $u = v^{a(i)}$ et l'on remplace x_i par $x_i v$. Enfin, dans le cas $(c-2)$, si l'image de f dans le corps résiduel du point ξ est une puissance p-ième, on peut ajouter une puissance p-ième à f de façon que u soit nul au point ξ, après quoi $(x_1, \ldots, x_r, u)$ devient une partie d'un système régulier de paramètres au point ξ.

Remarque 1.6. — Soit *E un diviseur à croisements normaux de X*, soit Y un sous-schéma fermé régulier de X et soit $e : X' \to X$ l'éclatement de X de centre Y. On dit que Y est *combinatoire pour* E si, au voisinage de tout point ξ de Y, Y est l'intersection des composantes de E qui le contiennent; ceci signifie qu'on peut trouver un système régulier de paramètres $(x_1, \ldots, x_t)$ de $O_{X,\xi}$ et des entiers $s \leqslant r \leqslant t$ tels que l'idéal de Y soit $(x_1, \ldots, x_s)$ et $E = \operatorname{div}(x_1 \ldots x_r)$, au voisinage de ξ. Dans ce cas, $e^{-1}(E)$ est un diviseur à croisements normaux et on a :

$$e^*(\Omega_X(E)) = \Omega_X(e^{-1}(E)). \tag{1}$$

En effet, on peut recouvrir X' par des ouverts :

$$X'(i) = \operatorname{Spec}(O_X[u_1, \ldots, u_s]/(x_i - u_i;\ x_j - u_i u_j, j \neq i)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant s, \tag{2}$$

et si l'on complète x en des coordonnées différentielles $(x_1, \ldots, x_n)$, on voit que $(u_1, \ldots, u_s, x_{s+1}, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées différentielles de $X'(i)$ et l'on a les formules :

$$dx_i/x_i = du_i/u_i, \qquad dx_j/x_j = du_j/u_j + du_i/u_i \qquad \text{si} \quad j \neq i, \tag{3}$$

qui prouvent (1) d'où l'on déduit que, pour tout $f \in O_X(X)$, on a :

$$J(X, f, E)\, O_{X'} = J(X', f \circ e, e^{-1}(E)). \tag{4}$$

Par suite, *si l'on a* ($\star\star$) *et si le centre d'éclatement Y est combinatoire pour* $E(f)$, *alors on a* ($\star\star$) *pour* $f \circ e$.

Soit à nouveau Y un sous-schéma fermé régulier de X. On dit que Y est à *croisements normaux* avec E, si, pour tout point ξ de Y, il existe des entiers $r \leqslant s \leqslant t$ et une partie d'un système régulier de paramètres au point ξ, notée $(x_1, \ldots, x_t)$ telle que $E = \operatorname{div}(x_1, \ldots, x_s)$ et telle que l'idéal de Y soit $(x_{r+1}, \ldots, x_t)$. Si $e : X' \to X$ est l'éclatement de X de centre Y, alors $e^{-1}(Y \cup E) = E'$ est un diviseur à croisements normaux de X'. En particulier, *si* $f \in O_X(X)$ *satisfait à* $(\star)$ *et si* Y *est contenu dans* $E(f)$ *et à croisements normaux avec* $E(f)$ (avec les notations ci-dessus, cela signifie que $r < s$), *alors* $f' = f \circ e$ *satisfait également à* $(\star)$, car $E(f') = e^{-1}(E(f))$.

Il paraît raisonnable d'espérer que, pour tout schéma régulier X tel que Ω_X soit localement libre de rang n et toute $f \in O_X(X)$, il existe une modification $e : X' \to X$, obtenue par une suite d'éclatements à centres réguliers telle que $f' = f \circ e$ satisfasse à $(\star\star)$. C'est en tout cas vrai si $\dim(X) = 2$ comme nous allons voir au paragraphe suivant.

2. Formes différentielles à deux variables

La condition $(\star\star)$ introduite plus haut pour une fonction f porte en fait sur sa différentielle df; pour montrer qu'on peut la réaliser par éclatement, nous allons prouver le théorème analogue pour une forme différentielle. La démonstration que nous allons donner est valable en caractéristique nulle, mais, dans ce cas, le résultat est bien connu ([2], [4], [5]). Dans tout ce paragraphe, *X désigne un schéma régulier de dimension 2 et de caractéristique $p > 0$ tel que Ω_X soit localement libre de rang fini.*

2.1. Pour tout idéal non nul I de O_X, le bidual $B(I)$ de I est un idéal inversible et l'on a une suite exacte :

(1) $$0 \to I \to B(I) \to C(I) \to 0,$$

où $C(I)$ est de longueur finie. On pose :

(2) $$D(I) = I \,.\, B(I)^{-1} \qquad \text{et on a} \qquad C(I) = O_X / D(I),$$

ce qui permet, pour tout point fermé ξ de X de définir deux entiers :

(3) $$m(I, \xi) = \operatorname{ord}_M(D(I)), \qquad c(I, \xi) = \operatorname{long}(O_{X,\xi} / D(I)\, O_{X,\xi}),$$

où $M = m_{X,\xi}$ est l'idéal maximal du point ξ. Il est clair que ces deux nombres ne changent pas si l'on multiplie I par un idéal inversible.

LEMME 2.1.1. — *Soit X un schéma régulier de dimension* 2, *soit ξ un point fermé de X et soit $e : X' \to X$ l'éclatement de X de centre ξ. Soit encore I un idéal de O_X et soit $I' = IO_{X'}$. Si on pose $m = m(I, \xi)$, on a :*

(1) $$\sum_{e(\xi')=\xi} (k(\xi') : k(\xi)).c(I', \xi') \leqslant c(I, \xi) - m(m+1)/2.$$

En effet, on peut supposer que $B(I) = O_X$, donc $D(I) = I$ est de colongueur finie, ce qui donne des inclusions :

(2) $$I' \subset B(I') \subset O_{X'}, \qquad I \subset e_*(I') \subset e_*(B(I')) \subset e_*(O_{X'}) = O_X.$$

Par suite, on a $c(I, \xi) = \text{long}(O_X/I) \geqslant \text{long}(O_X/e_*(I'))$ et l'on a une suite exacte :

(3) $$0 \to e_*(B(I'))/e_*(I') \to 0_X/e_*(I') \to 0_X/e_*(B(I')) \to 0.$$

Puisque I' est engendré par ses sections, on a $\mathbb{R}^1\, e_*(I') = 0$ et le premier terme est donc $e_*(B(I')/I')$ dont la longueur est le membre de gauche de (1). Par ailleurs, puisque I est de colongueur finie, l'idéal inversible $B(I')$ est l'idéal d'un multiple du diviseur exceptionnel; plus précisément, on a $B(I') = M^m\, O_{X'}$ puisque $m = \text{ord}_M(I)$ et $I' = IO_{X'}$. Donc $e_*(B(I')) = M^m$ et $\text{long}(O_X/M^m) = m(m+1)/2$, ce qui prouve (1).

2.2. Soit maintenant ω une forme différentielle de degré 1 sur X; on note $E(\omega)$ l'ensemble des points $\xi \in X$ tels que $\omega \in m_{X,\,\xi}\, \Omega_X$ et l'on considère la condition :

($\star$) $E(\omega)$ est un diviseur à croisements normaux.

Si cette condition est satisfaite, on peut considérer l'idéal :

(1) $J(X, \omega, E(\omega)) =$ annulateur de $O_X \to \Omega_X(E(\omega))$, $u \mapsto u\omega$ (1.1(1)),

et la condition :

($\star\star$) on a ($\star$) et $J(X, \omega, E(\omega))$ est l'idéal d'un diviseur à croisements normaux.

Si ξ est un point au voisinage duquel on a ($\star$), on considère les entiers :

(2) $m(X, \omega, \xi) = m(J(X, \omega, E(\omega)), \xi)$

et $c(X, \omega, \xi) = c(J(X, \omega, E(\omega)), \xi)$.

Enfin, l'ensemble des points au voisinage desquels on a $(\star\star)$ est un ouvert dont le complémentaire est un fermé de dimension zéro noté :

$$(3) \qquad \operatorname{Sing}(X, \omega).$$

Par définition, si $\omega = df$, on a $E(f) = E(\omega)$ et $J(X, f, E(f)) = J(X, \omega, E(\omega))$, *cf.* 1.1(2).

LEMME 2.3. — *Soit* ξ *un point de* $\operatorname{Sing}(X, \omega)$ *au voisinage duquel on a* $(\star)$. *Soit* $e : X' \to X$ *l'éclatement de* X *de centre* ξ *et soit* $\omega' = e^*(\omega)$. *En tout point de* $E = e^{-1}(\xi)$, *on a* $(\star)$. *Posons* $m = m(X, \omega, \xi)$.

(i) *Si* ξ *est un point de croisement de* $E(\omega)$, *on a :*

$$(1) \qquad \sum_{\xi' \in E} (k(\xi') : k(\xi)) . c(X', \omega', \xi') \leqslant c(X, \omega, \xi) - m(m+1)/2.$$

(ii) *Si* ξ *n'est pas un point de croisement de* $E(\omega)$ *et si* $\xi' \in E$, *on a :*

$$(2) \qquad (k(\xi') : k(\xi)) . c(X', \omega', \xi') \leqslant c(X, \omega, \xi) - m(m-1)/2.$$

(iii) *Si* $\omega = df$, *si* ξ *n'est pas un point de croisement, si* $\xi' \in \mathrm{E}$, *avec* $c(X', \omega', \xi') = c(X, \omega, \xi)$, *alors* $m = 1$ *et* ξ' *est le point de croisement de* $\mathrm{E}(\omega')$.

Avant de prouver ce lemme, montrons qu'il entraîne le résultat annoncé au paragraphe 1.

THÉORÈME 2.4. — *Soit* X *un schéma régulier de caractéristique* $p > 0$ *et de dimension* 2 *tel que* Ω_X *soit de rang fini et soit* $f \in O_X(X)$ *qui n'est pas une puissance p-ième. Il existe un morphisme* $u : X' \to X$, *obtenu par une suite d'éclatements de points fermés, tel que* fu *satisfasse* $(\star\star)$ *en tout point de* X'.

On définit par récurrence $(e_n : X_n \to X_{n-1}, S_n, f_n)$, $n \geqslant 1$, par $(X_0, f_0) = (X, f)$

$$S_n = \operatorname{Sing}(X_{n-1}, df_{n-1}), \qquad e_n : X_n \to X_{n-1},$$

est l'éclaté du fermé (réduit de dimension zéro) S_n dans X_{n-1} et $f_n = f_{n-1} \circ e_n$. Puisque l'on n'éclate que des points de $E(df_{n-1})$, $E(df_n)$ est le sous-schéma réduit sous-jacent à l'image inverse de $E(df_{n-1})$ donc aussi le sous-schéma réduit sous-jacent à l'image inverse de $E(df)$. D'après un résultat bien connu, cette image inverse est un diviseur à croisements normaux pour n assez grand, donc aussi $E(df_n)$ et l'on a donc $(\star)$ pour n assez grand. Le lemme 2.3 donne donc la conclusion. Prouvons-le.

2.5. Pour prouver 2.3(i), il suffit d'appliquer 2.1.1 parce que, dans ce cas, on a $J(X', \omega', E(\omega')) = J(X, \omega, E(\omega)) O_{X'}$. Pour prouver 2.3(ii), on peut remplacer X par le spectre de $R=O_{X,\xi}$ et supposer que $E(\omega)=\mathrm{div}(x)$ avec $x\in M$, $x\notin M^2$ et $M=m_{X,\xi}$. Choisissons $y\in M$ tel que (x, y) soit un système régulier de paramètres de R et tel que ξ' appartienne à l'ouvert $X''=\mathrm{Spec}(R')$ de X', où $R'=R[z]/(x-yz)$. A vrai dire, ceci n'est pas possible si $R/M=\mathbb{F}_2$, et si ξ' est l'unique point rationnel au-dessus de ξ qui n'est pas un point de croisement, mais on élimine ce cas en remplaçant X par un revêtement fini étale convenable. On complète (x, y) en des coordonnées différentielles $(x, y, u_1, \ldots, u_k)$ de X et alors $(z, y, u_1, \ldots, u_k)$ sont des coordonnées différentielles de X'', avec :

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z} \qquad \text{et} \qquad E(\omega')=\mathrm{div}(zy).$$

Posons $J=J(X, \omega, E(\omega))$. Puisque $E(\omega)=\mathrm{div}(x)$, on a $B(J)=x^a R$, avec $a\geqslant 1$, et par suite :

$$\omega=x^a\left(A\frac{dx}{x}+B\,dy+\textstyle\sum_{1\leqslant h\leqslant k} C_h\,du_h\right),$$

où A, B et les C_h sont premiers entre eux dans leur ensemble, ce qui s'écrit également $D(J)=(A, B, C_h)R$. Sur l'ouvert X'', on a :

$$\omega'=e^*(\omega)=y^a z^a\left((A+yB)\frac{dy}{y}+A\frac{dz}{z}+\textstyle\sum C_h\,du_h\right)$$

et si l'on pose $J'=J(X'', \omega', E(\omega'))$, on aura $J'=y^a z^a(A+yB, A, C_h)R'$, d'où finalement :

(1) $\quad H'=D(J')=y^{-m'}(A+yB, A, C_h)R'$ avec $m'=\mathrm{ord}_M(A+yB, A, C_h)$,

(2) $\quad H=D(JR')=y^{-m}(A, B, C_h)R'$ avec $m=\mathrm{ord}_M(A, B, C_h)$.

Les idéaux H et H' sont de colongueur finie, à support dans le diviseur exceptionnel $E=e^{-1}(\omega)$ et l'on a :

(3) $\quad \mathrm{long}_R(R'/H')=\sum_{\eta\in E\cap X''}(k(\eta):k(\xi))\,c(X', \omega', \eta)$
$$\geqslant(k(\xi'):k(\xi)).c(X', \omega', \xi')$$

et d'après 2.1.1 :

(4) $$\mathrm{long}_R(R'/H)\leqslant c(X, \omega, \xi)-m(m+1)/2.$$

(A) Si $\mathrm{ord}_M(B)<\mathrm{ord}_M(A, C_h)$, on a $m=\mathrm{ord}_M(B)$ et $m'=m+1$. d'où $H\subset H'\subset R'$ et l'on déduit de (3) et (4) que :

(5) $$(k(\xi'):k(\xi)).c(X', \omega', \xi')\leqslant c(X, \omega, \xi)-m(m+1)/2.$$

(B) Si $\mathrm{ord}_M(B) \geqslant \mathrm{ord}_M(A, C_h)$, on a $m' = m = \mathrm{ord}_M(A, C_h)$ et $H' \subset H \subset R'$ et de plus, H/H' est un quotient de $R'/(yR' + y^{-m}(A, C_h)R')$. Or $R'/yR' = K[Z]$, où $K = R/M$ est le corps résiduel et où Z est la classe de z. Soit alors $\varphi \in (A, C_h) R$ dont l'ordre au point ξ est m et soit $F(X, Y)$ sa forme initiale. La classe mod. yR' de $y^{-m}\varphi$ est $Y^{-m} F(YZ, Y)$, qui est un polynôme en Z de degré $\leqslant m$, donc $\mathrm{long}_R(H/H') \leqslant m$. De ceci et de (3) et (4), on déduit 2.3(ii).

2.6. Prouvons 2.3(iii). Dans le cas (A) de 2.5, on a l'inégalité 2.5(5). On peut donc supposer que l'on est dans le cas (B) de 2.5 et d'après 2.3(2), on a $m = 1$. Nous revenons aux notations de la partie (B) de 2.5 et nous posons $f'_x = \partial f/\partial x, f'_y = \partial f/\partial y, f'_h = \partial f/\partial x_h$, en sorte que l'on a $xf'_x = x^a A, f'_y = x^a B$, $f'_h = x^a C_h$ et comme $m = 1$, on a également :

$$a + 1 = \mathrm{ord}_M(xf'_x; f'_h, 1 \leqslant h \leqslant k) \leqslant \mathrm{ord}_M(f'_y),$$

la formule 2.5(1) nous dit que le point ξ' annule l'idéal :

$$H' = z^{-a} y^{-a-1}(xf'_x + yf'_y, xf'_x, f_h) R'. \tag{1}$$

Il suffit de démontrer qu'avec les conditions indiquées, le seul zéro de H' est le point de croisement. Un calcul immédiat montre que ceci signifie que l'on a :

$$(xf'_x + yf'_y, xf'_x, f_h) R \subset x^{a+1} R + M^{a+2},$$

ce que nous allons démontrer. Considérons le développement introduit dans 1.4 :

$$f = \sum f^p_{i,j,b} x^i y^j u^b \qquad (i, j, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \qquad (i, j, b) \ll p, \tag{2}$$

et posons :

$$r = \inf\{\mathrm{ord}_M f_{i,j,b}, (i, j, b) \neq (0, 0, 0)\},$$

$$Q = \{(i, j, b) \neq (0, 0, 0), r = \mathrm{ord}_M f_{i,j,b}\}, \tag{4}$$

$$s = \inf\{i + j, (i, j, b) \in Q\}. \tag{5}$$

On a $r \neq \infty$ parce que $f \notin R^p$; autrement dit Q n'est pas vide. Je dis que :

$$pr + s = \mathrm{ord}_M(f - f^p_{0,0,0}) = \mathrm{ord}_M(xf'_x, yf'_y, f'_h). \tag{6}$$

Pour le voir observons que les classes $U_1, \ldots, U_k$ de $u_1, \ldots, u_k$ dans le corps résiduel $K = R/M$ forment une p-base de K sur K^p et que l'on a donc une base de $gr_M(R)=K[X, Y]$ sur K^p formées des monômes $X^i Y^i U^b$, $(i, j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}^k$, $b\ll p$. Or on a :

(7) $$f=f^p_{0,0,0}+g+g', \qquad g'\in M^{pr+s+1},$$

avec :

(8) $$g=\sum\nolimits_{(i,j,b)\in Q} f^p_{i,j,b}\, x^i y^j u^b, \qquad g\neq 0,$$

ce qui donne immédiatement (6).

On a donc $a+1=pr+s$; d'après (1.4), (6), (7), (8), (9)), x^a divise g, ce qui fait que pour $(i, j, b)\in Q$, on a $j\leqslant 1$ et donc $(i, j)=(s, 0)$, ou $(s-1, 1)$. En fait, le couple $(s-1, 1)$ n'apparaît pas, car on aurait alors $\mathrm{ord}_M(f'_y)<a+1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc x^{a+1} divise g. D'après la formule (6), on a $\mathrm{ord}_M g'_h\geqslant \mathrm{ord}_M g$, d'où l'on tire que, modulo M^{a+2}, toutes les fonctions xf'_x, yf'_y et f'_h sont divisibles par x^{a+1}, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 2.7. — Pour une forme qui n'est pas exacte, on ne peut espérer obtenir la condition $(\star\star)$ par éclatement de points fermés : étudier $x^a(ydx-x^c dy)$, $a\geqslant 1$, $c\geqslant 2$, et le changement de variables $x=t$, $y=t^k z$, $k\geqslant 1$. On s'intéresse alors à l'idéal :

(1) $$J(X, \omega)=\text{annulateur de } O_X\to\Omega_X, \qquad u\mapsto u\,\omega,$$

aux entiers définis en 2.1(3) :

(2) $$\mu(X, \omega, \xi)=m(J(X, \omega), \xi), \qquad \chi(X, \omega, \xi)=c(J(X, \omega), \xi), \qquad \xi\in X,$$

et à l'ensemble fermé de dimension zéro :

(3) $$R\,\mathrm{Sin}\,g(X, \omega)=\{\xi\in X, \qquad \mu(X, \omega, \xi)\neq 0\}.$$

Localement, le bidual $BJ(X, \omega)$ est engendré par le pgcd des coefficients de ω dans une base de Ω_X, ce qui permet de définir, à une unité près, la forme réduite $R\omega=\omega/h$, où h est ce pgcd, et l'on a alors $E(R\omega)=R\,\mathrm{Sin}\,g(X, \omega)$. *Nous supposons désormais* que $\dim X=\mathrm{rang}\,\Omega_X=2$, *autrement dit, le complété de l'anneau local de tout point fermé est un anneau de séries formelles à deux variables sur un corps parfait.* Pour un point $\xi\in R\,\mathrm{Sin}\,g(X, \omega)$, considérons la condition :

$(\star\star\star)$ on a $(\star)$ et il existe un système régulier de paramètres (x, y) tel que $\omega=x^a y^b(A\,x\,dy+B\,y\,dx)$, avec $(A, B)\,O_{X,\xi}=O_{X,\xi}$ et $a+b\geqslant 1$.

LEMME 2.8. — *Si ξ est un point de croisement de $E(\omega)$ au voisinage duquel on a* $(\star\star)$, *alors on a* $(\star\star\star)$.

Puisque ξ est un point de croisement, on a $\omega = x^c y^d (U\,dx + V\,dy)$ avec $c \geqslant 1$, $d \geqslant 1$, et le pgdc de U, V vaut 1.

On a aussi :

$$\omega = x^c y^d \left(x\,U \frac{dx}{x} + y\,V \frac{dy}{y} \right)$$

et le condition $(\star\star)$ nous dit que l'idéal :

$$J(X, \omega, E(\omega)) = x^c y^d (x\,U, y\,V)\,O_X$$

est principal, donc de la forme $x^{c+e}\, y^{d+f}\, O_X$, avec $e+f \geqslant 1$; d'où :

$$\omega = x^{c+e-1}\, y^{d+f-1} (y\,U'\,dx + x\,V'\,dy),$$

d'où la conclusion.

LEMME 2.9. — *Soit ξ un point de $R\,\mathrm{Sing}(X, \omega)$ au voisinage duquel on a* $(\star\star\star)$. *Soit $e : X' \to X$ l'éclatement de X de centre ξ, soit $E = e^{-1}(\xi)$ et $M = \underline{m}_{X,\xi}$. En tout point de $E \cap R\,\mathrm{Sing}(X', \omega')$, on a* $(\star\star\star)$. *Si $A + B \in M$, il n'y a pas de tel point.*

On a donc $\omega = x^a y^b (Ax\,dy + By\,dx)$, avec $(A, B)R = R$, $R = O_{X,\xi}$, et par symétrie, il suffit d'examiner le changement de variable $y = xz$, qui donne :

$$\omega' = x^{a+b} z^b ((A+B)\,xz\,dx + Ax^2\,dz) = x^{a+b+1} z^b ((A+B)\,z\,dx + Ax\,dz).$$

Si $A+B$ est une unité, comme x est nul en tous les points de E, il est clair que le seul point de $R\,\mathrm{Sing}(X', \omega')$ est $x = z = 0$ et l'on a bien $(\star\star\star)$. *Si* $A + B \in M$, dans l'anneau $R' = R[z]/(y - xz)$ on a $A + B = x\,C$ et donc $\omega' = x^{a+b+2} z^b (Cz\,dx + A dz)$; puisque A ou B est une unité et que $A+B$ n'en est pas une, alors A est une unité, donc $R\,\mathrm{Sing}(X', \omega')$ est vide.

THÉORÈME 2.10. — *Soit X un schéma régulier de caractéristique $p > 0$ tel que* $\dim X = \mathrm{rang}\,\Omega_X = 2$. *Il existe un morphisme $s : X' \to X$, obtenu par une suite d'éclatement de points fermés tel que, en tout point ξ' de $R\,\mathrm{Sing}(X', s^*(\omega))$, on ait la condition* $(\star\star\star)$ *pour l'image inverse de ω dans le spectre du compété de $O_{X',\xi'}$.*

Tout d'abord, en éclatant les points où l'on n'a pas $(\star)$, on finit par obtenir cette condition, qui est stable par éclatement de points de $E(\omega)$. Ensuite, par éclatement de points où l'on n'a pas $(\star\star)$, on finit par obtenir que l'on ait ou bien $(\star\star)$, ou bien ξ n'est pas un point de croisement de $E(\xi)$ et $m(X, \omega, \xi)=1$: appliquer 2.3. Aux points de croisement où l'on a $(\star\star)$, on a également $(\star\star\star)$ comme on vient de voir. Examinons d'abord les points $\xi \in R\,\mathrm{Sin}\,g(X, \omega)$ où l'on a $(\star)$ et $m(X, \omega, \xi)=1$. Posons $X_0=\mathrm{Spec}(R)$, $R=O_{X,\xi}$, $\omega_0=\omega$ et définissons par récurrence $e_n : X_n \to X_{n-1}$ comme l'éclaté de X_{n-1} de centre $\mathrm{Sin}\,g(X_{n-1}, \omega_{n-1})$, avec $\omega_n=e_n^*(\omega_{n-1})$. En vertu de 2.3, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$ et tout $\xi_{n+1} \in \mathrm{Sin}\,g(X_{n+1}, \omega_{n+1})$, on a :

$$c(X_{n+1}, \omega_{n+1}, \xi_{n+1})=c(X_n, \omega_n, \xi_n)$$

avec $\xi_n=e_{n+1}(\xi_{n+1})$. Il en résulte que, pour tout $\xi_N \in \mathrm{Sin}\,g(X_N, \omega_N)$ le point ξ_N n'est pas un point de croisement de $E(\omega_N)$ et que, pour tout $k \geqslant 1$, il existe au plus un point $\xi_{N+k} \in \mathrm{Sin}\,g(X_{N+k}, \omega_{N+k})$ se projetant sur ξ_N, ce point est rationnel sur ξ_N et en outre il n'est pas un point de croisement de $E(\omega_{N+k})$. Soit $\hat{R}$ le complété de $R=O_{X_N, \xi_N}$ et soit $x \in \hat{R}$ tel que $E(\omega_N)=\mathrm{div}(x)$. Puisque les ξ_{N+k} sont rationnels sur ξ_N et ne sont jamais un point de croisement de $E(\omega_{N+k})$, qui est l'image inverse de $E(\omega_N)$, il existe $y \in \hat{R}$ tel que pour tout $k \geqslant 0$, le point $\hat{\xi}_{N+k}$ soit sur le transformé strict de la courbe $y=0$ et (x, y) est un système régulier de paramètres de $\hat{R}$. On a :

$$\omega_N=x^a\left(A\frac{dx}{x}+Bdy\right) \qquad \text{avec} \quad \mathrm{ord}_M(A, B)=1.$$

De plus, puisque :

$$c(X_{N+1}, \omega_{N+1}, \xi_{N+1})=c(X_N, \omega_N, \xi_N)>0,$$

d'après l'argument de 2.5(A), on sait que $\mathrm{ord}_M(A, B) \leqslant \mathrm{ord}_M(B)$, donc $\mathrm{ord}_M(A)=1$. Nous allons en déduire que y divise A. Au point ξ_{N+k}, on a un système de coordonnées locales $(x, z=yx^{-k})$ et l'on a donc :

$$dy=zkx\frac{kdx}{x}+x^k\,dz \qquad \text{avec} \quad E(\omega_{N+k})=\mathrm{div}(x)$$

et :

$$\omega_{N+k}=x^a((A+kzx^k)\frac{dx}{x}+x^k\,B\,dz).$$

Soit r la multiplicité d'intersection de A et y supposée finie. Si on pose $k=r$, on a $A=x^k A'$, $A'\in O_{X_{N+k}}$, ξ_{N+k} et A' est une unité au voisinage du point ξ_{N+k}; or :

$$\omega_{N+k}=x^{a+k}\left((A'+kz\,B)\frac{dx}{x}+B\,dy\right),$$

donc $c(X_{N+k}, \omega_{N+k}, \xi_{N+k})=0$ ce qui est une contradiction; donc y divise A; on a donc bien $\omega_N=x^{a-1}$ $(A'\,y\,dx+xB\,dy)$ où A' est une unité parce que $\mathrm{ord}_M(A'\,y)=1$; autrement dit, à partir du moment où la suite $c_n=c(X_n, \omega_n, \xi_n)$ devient stationnaire avec $c_n\neq 0$, on a la condition $(\star\star\star)$.

Il reste à examiner les points où l'on a $(\star\star)$ mais qui ne sont pas des points de croisement. Notons encore e : $X'\to X$ l'éclaté de X de centre ξ. Les points de $R\,\mathrm{Sin}\,g(X', \omega')$ satisfont encore à $(\star\star)$ d'après 2.3, donc le point de croisement satisfait à $(\star\star\star)$ d'après 2.8. Nous allons voir qu'il y a au plus un point de R Sing(X', ω') qui ne soit pas un point de croisement et qu'il est rationnel sur ξ. On a $E(\omega)=\mathrm{div}(x)$, $\omega=x^a\left(A\dfrac{dx}{x}+B\,dy\right)$

et A ou B est une unité car on a supposé$(\star\star)$. Si A est une unité, la forme réduite $R\,\omega=x^{a-1}(A\,dx+Bx\,dy)$, est non singulière. Supposons donc que B soit une unité. Les points considérés sont dans l'ouvert :

$$X''=\mathrm{Spec}(R'),\qquad R'=R[z]/(y-xz),\qquad dy=xz\frac{dx}{x}+x\,dz,$$

donc :

$$\omega'=x^a\left((A+y\,B)\frac{dx}{x}+Bx\,dz\right).$$

Posons $r=\mathrm{ord}_M(A+y\,B)$. Dans R', on a $A+y\,B=x^r A'$, où x ne divise pas A' et :

$$\omega'=x^{a+1}\left(x^{r-1}A'\frac{dx}{x}+B\,dz\right).$$

Par suite, si $r\geqslant 2$, $R\,\mathrm{Sin}\,g\,(X'', \omega')$ est vide car B est une unité et si $r=1$, il existe au plus un point dans $R\,\mathrm{Sin}\,g\,(X'', \omega')$ et il est rationnel. Le seul cas où l'on puisse ne pas obtenir la condition$(\star\star\star)$ par éclatement est donc celui d'une infinité de points avec $(\star\star)$, qui ne sont pas des points croisement et se projettent les uns sur les autres. Quitte à passer au complété, on peut donc trouver une courbe $y=0$ dont le transformé strict passe par tous les points en question.

Si y divise A, on a la condition($\star\star\star$). Dans le cas contraire, on introduit $s=\operatorname{long}(O_{X,\xi}/(A, y))$ qui est fini et non nul car $y\nmid A$ et $A\in \underline{m}_{X,\xi}$. D'après le calcul qui précède, on a $r=1$, avec $r=\operatorname{ord}_M(A+yB)$ et après un éclatement, on a :

$$\omega'=x^{a+1}\left(A'\frac{dx}{x}+B\,dz\right) \qquad \text{avec} \quad A'=(A+yB)/x.$$

On a donc $s'=s-1$, ce qui signifie que, après s éclatements, le coefficient de dx/x est devenu une unité, donc le point n'appartient plus à $R\operatorname{Sing}(X, \omega)$ et l'on a une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR (S.). – Uniformization in a p-cyclic extension of a two-dimensional regular local domain of residue field characteristic p, *Wiss. Abh. des Landes Nordrhein-Westfallen. Band*, vol. 33, 1966, p. 243-317.

[2] DULAC (H.). – Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, *J. École Polytechnique*, vol. 2, section 9, 1904, p. 141-158.

[3] KUNZ (E.). – Characterization of regular local rings of characteristic p, *Amer. J. Math.*, vol. 91, 1969, p. 772-784.

[4] MATTEI (J. F.) et MOUSSU (R.). – Holonomie et intégrales premières, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 13, 1980, p. 489-523.

[5] SEIDENBERG (A.). – Reduction of the singularities of the equation $A\,dy=B\,dx$, *Amer. J. Math.*, 1968, p. 248-269.

[6] YUAN (Shuen). – Finite dimensional inseparable algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 149, 1970, p. 577-587.