Philippe Turpin

Produits tensoriels d'espaces vectoriels topologiques

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 3-13
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__3_0>

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 3-13

PRODUITS TENSORIELS D'ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

PAR

PHILIPPE TURPIN (*)

RÉSUMÉ. — Si $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ sont des espaces (F)-normés, la plus grande (F)-semi-norme $\|.\|$ sur $E\otimes F$ vérifiant $\|x\otimes y\|\leqslant \sup(\|x\|, \|y\|)$ est une (F)-norme. Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques séparés, $E\otimes F$ est séparé pour la topologie vectorielle $\mathscr{T}$ la plus fine rendant continue l'application $(x, y) \to x\otimes y$ de $E\times F$ dans $E\otimes F$, et complet si E et F sont complets. Les bornés de $(E\otimes F, \mathscr{T})$ sont en outre localisés.

ABSTRACT. — If $(E, \|.\|)$ and $(F, \|.\|)$ are (F)-normed spaces, the greatest (F)-semi-norm $\|.\|$ on $E\otimes F$ verifying $\|x\otimes y\|\leqslant \sup(\|x\|, \|y\|)$ is an (F)-norm. If E and F are Hausdorff topological vector spaces, let $\mathscr{T}$ be the finest linear topology on $E\otimes F$ for which the mapping $(x, y) \to x\otimes y$ is continuous on $E\times F$. Then $\mathscr{T}$ is shown to be Hausdorff, complete if E and F are complete, and $\mathscr{T}$-bounded sets are located.

On établit dans cet article que, sur le produit tensoriel $E\otimes F$ de deux espaces vectoriels topologiques séparés E et F il existe une topologie tensorielle séparée, c'est-à-dire une topologie vectorielle séparée rendant continue l'application $(x, y) \to x\otimes y$ de $E\times F$ dans $E\otimes F$. On résoud ainsi un problème de L. Waelbroeck ([8], [10]).

Ce résultat n'est nullement mystérieux si par exemple E ou F est séparé par son dual (*voir* d'autres cas en [10]) mais il est probablement nouveau dans le cas général.

On l'obtient en prouvant que si $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ sont des espaces (F)-normés la plus grande (F)-semi-norme $\|.\|$ sur $E\otimes F$ vérifiant $\|x\otimes y\|\leqslant\|x\|\vee\|y\|$ est une (F)-norme.

On considère aussi la topologie tensorielle $\mathscr{T}$ la plus fine sur $E\otimes F$. On localise les bornés de $(E\otimes F, \mathscr{T})$ et on montre que $(E\otimes F, \mathscr{T})$ est complet quand E et F sont séparés et complets.

(*) Texte reçu le 20 juin 1980.

P. TURPIN, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Département de Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1982/ 3 /$ 5.00

Rappelons qu'une *(F)-semi-norme* d'un espace vectoriel X (réel ou complexe, comme toujours dans cet article) est une application w de X dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant pour $x\in X$, $y\in X$ et t scalaire $w(x+y)\leqslant w(x)+w(y)$, $w(tx)\leqslant w(x)$ si $|t|\leqslant 1$ et $\lim_{t\to 0} w(tx)=0$. On dit que w est une *(F)-norme* quand $x=0$ dès que $w(x)=0$.

Un *espace (F)-normé*, ou *(F)-semi-normé*, (X, w), noté aussi X, est un espace vectoriel X muni d'une (F)-norme, ou d'une (F)-semi-norme, w et de la topologie vectorielle définie par w.

On emploiera pour a et b réels les notations :

$$a\vee b=\sup(a, b), \qquad a\wedge b=\inf(a, b).$$

1. La (F)-semi-norme $u\otimes_\vee v$

1.1. Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques nous disons qu'une (F)-semi-norme w sur $E\otimes F$ est *$\otimes$-continue* quand l'application $(x, y)\to x\otimes y$ de $E\times F$ dans $(E\otimes F, w)$ est continue. Il suffit pour cela que $w(x\otimes y)$ tende vers 0 quand x et y tendent vers 0 dans E et F.

1.2. E et F étant maintenant des espaces (F)-semi-normés, de (F)-semi-normes u et v, soit $u\otimes_\vee v$ la (F)-semi-norme de $E\otimes F$ définie par :

$$u\otimes_\vee v(z)=\inf\{\textstyle\sum_{n=1}^N u(x_n)\vee v(y_n) \mid z=\sum_{n=1}^N x_n\otimes y_n, x_n\in E, y_n\in F, N\geqslant 1\},$$

pour tout $z\in E\otimes F$.

C'est la plus grande (F)-semi-norme sur $E\otimes F$ vérifiant $u\otimes_\vee v(x\otimes y)\leqslant u(x)\vee v(y)$ pour tout $(x, y)\in E\times F$. Elle est donc $\otimes$-continue. Notons :

$$E\otimes_\vee F,$$

l'espace $E\otimes F$ muni de la (F)-semi-norme $\otimes$-continue $u\otimes_\vee v$.

1.3. Théorème. — *Si u et v sont des (F)-normes, $u\otimes_\vee v$ est aussi une (F)-norme.*

On doit montrer que $z=0$ si $z\in E\otimes F$ et $u\otimes_\vee v(z)=0$. Cela est clair si E et F sont de dimension finie (*voir* par exemple 1.6 ci-dessous). Le cas général se réduit à celui-ci grâce au lemme suivant (formule (2)).

1.4. — Lemme. — *Soient E_0 et F_0 des sous-espaces vectoriels de E et F de dimension finie r et soit $z\in E_0\otimes F_0$. Si on identifie z à un élément de $E\otimes F$ on a* *alors, u et v étant des (F)-semi-normes de E et F :*

(1) $\inf\{\sup_{1\leq i\leq r} u(e_i)\vee v(f_i) \mid z=\sum_{i=1}^{r} e_i\otimes f_i,\ e_i\in E_0,\ f_i\in F_0\}\leqslant u\otimes_{\vee} v(z)$,

d'où, en notant u_0 et v_0 les restrictions de u et v à E_0 et F_0 :

(2) $$u\otimes_{\vee} v(z)\leqslant u_0\otimes_{\vee} v_0(z)\leqslant r(u\otimes_{\vee} v(z)).$$

Démonstration. — Considérons une décomposition $z=\sum_{n=1}^{N} x_n\otimes y_n$ de z où $x_n\in E$ et $y_n\in F$. Extrayons du système de vecteurs $(x_n)_{1\leqslant n\leqslant N}$, de rang m, un m-uple $X=(x'_h)_{1\leqslant h\leqslant m}$ maximisant $|\det X|$, ce déterminant étant bien sûr calculé relativement à quelque base de l'espace vectoriel engendré par les x_n. On a alors $x_n=\sum_{h=1}^{m} b_{n,h}x'_h$ pour $1\leqslant n\leqslant N$, les formules de Cramer impliquant :

(3) $$|b_{n,h}|\leqslant 1,$$

d'où $z=\sum_{h=1}^{m} x'_h\otimes y'_h$ où :

(4) $$y'_h=\sum_{n=1}^{N} b_{n,h}y_n.$$

Procédant de la même façon à partir du système de vecteurs $(y'_h)_{1\leqslant h\leqslant m}$, de rang s, on trouve $z=\sum_{i=1}^{s} e_i\otimes f_i$ où les f_i sont extraits des y'_h et linéairement indépendants et où les e_i vérifient :

(5) $$e_i=\sum_{h=1}^{s} a_{h,i}x'_h,\qquad |a_{h,i}|\leqslant 1,$$

et sont aussi linéairement indépendants. D'après (3), (4), (5) on a :

$$u(e_i)\leqslant\sum_{n=1}^{N} u(x_n),\qquad v(f_i)\leqslant\sum_{n=1}^{N} v(y_n),$$

d'où $u(e_i)\vee v(f_i)\leqslant\sum_{n=1}^{N} u(x_n)\vee v(y_n)$. En outre $s\leqslant r$ et les e_i et f_i appartiennent nécessairement à E_0 et F_0 (*voir* par exemple [1] p. 170). Cela donne (1) et par suite (2).

Poursuivons par quelques remarques; E et F sont toujours munis de (F)-semi-normes u et v.

1.5. Si f est une application bilinéaire de $E\times F$ dans un espace (F)-semi-normé (X, w), se factorisant canoniquement par l'application linéaire $g: E\otimes F\to X$ et si $a>0$ et $K\in\mathbf{R}_+$ les conditions de Lipschitz en zéro suivantes sont équivalentes.

(i) $w(f(x,y))\leqslant K(u(x)\vee v(y))$ dès que $u(x)\vee v(y)<a$;

(ii) $w(g(z))\leqslant K(u\otimes_{\vee} v)(z)$ dès que $u\otimes_{\vee} v(z)<a$.

1.6. Si $0<p\leqslant 1$ une *p-semi-norme* (resp. une *p-norme*) d'un espace vectoriel X est une (F)-semi-norme (resp. une (F)-norme) w de X vérifiant $w(tx)=t^p w(x)$ pour tout $t>0$ et tout $x\in X$.

On voit alors que si $1/2\leqslant p\leqslant 1$, toute p-semi-norme $\otimes$-continue w sur $E\otimes F$ est continue sur $E \otimes_\vee F$.

D'après 1.5 il suffit d'observer que l'application bilinéaire canonique de $E\times F$ dans $(E\otimes F, w)$ est lipschitzienne en zéro. Or soit $a>0$ tel que $w(x\otimes y)<1$ dès que $u(x)\vee v(y)<2a$. Si $0<u(x)<a$ et $0<v(y)<a$ on a par sous-additivité :

$$u(au(x)^{-1}x)<(1+au(x)^{-1})u(x)<2a$$

et de même $v(av(y)^{-1}y)<2a$. On a donc :

$$w(x\otimes y)\leqslant a^{-2p}u(x)^p v(y)^p\leqslant a^{-2p}(u(x)\vee v(y))^{2p}\leqslant a^{-1}(u(x)\vee v(y))$$

dès que $u(x)\vee v(y)<a$.

1.7. Si u et v sont des p-semi-normes, avec $0<p\leqslant 1$, on a pour tout $z\in E\otimes F$:

$$u \otimes_\vee v(z)=\inf\Big\{\textstyle\sum_{n=1}^N (u(x_n)\,v(y_n))^{1/2} \;\Big|\; z=\sum_{n=1}^N x_n\otimes y_n,\, x_n\in E,\, y_n\in F,\, N\geqslant 1\Big\} \tag{6}$$

et pour tout $(x,y)\in E\times F$:

$$u \otimes_\vee v(x\otimes y)=(u(x)\,v(y))^{1/2}. \tag{7}$$

La fonction $u \otimes_\vee v$ est une $p/2$-semi-norme de $E\otimes F$ car, pour $t>0$, $u \otimes_\vee v(tz)$ est la borne inférieure des $\sum_{n=1}^N u(t^{1/2}x_n)\vee v(t^{1/2}y_n)$ tels que $z=\sum_{n=1}^N x_n\otimes y_n$. Or pour une $p/2$-semi-norme w les conditions $w(x\otimes y)\leqslant u(x)\vee v(y)$ et $w(x\otimes y)\leqslant(u(x)\,v(y))^{1/2}$ sur $E\otimes F$ sont équivalentes. Par suite $u \otimes_\vee v$ est la plus grande $p/2$-semi-norme de $E\otimes F$ vérifiant cette dernière condition, c'est-à-dire la $p/2$-semi-norme donnée par le second membre de (6).

Notons qu'on obtient ainsi l'existence d'une $p/2$-norme $\otimes$-continue sur $E\otimes F$ si E et F sont des espaces p-normés. Mais on verra mieux ailleurs [6].

La formule (7) se déduit du lemme 1.4, qui donne :

$$u \otimes_\vee v(x\otimes y)=\inf\{u(tx)\vee v(t^{-1}y)\mid t>0\}.$$

1.8. Si u et v sont maintenant des (F)-semi-normes arbitraires de E et F, la relation ci-dessus (valide dans ce cas) entraîne pour $x \in E$ et $y \in F$:

$$u(x) \wedge v(y) \leqslant u \otimes_{\vee} v(x \otimes y) \leqslant u(x) \vee v(y).$$

Cela montre que si $v(y) \neq 0$ l'application $x \rightarrow x \otimes y$ de E dans $E \otimes F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques de E sur un sous-espace de $E \otimes_{\vee} F$.

1.9. Nous aurons besoin du lemme suivant. Pour tout entier $r \geqslant 1$ posons :

$$G_r = \{ \sum_{n=1}^{r} x_n \otimes y_n \mid x_n \in E, y_n \in F \}.$$

LEMME. — *Si E et F sont des espaces (F)-normés complets, G_r est un sous-ensemble complet de $E \otimes_{\vee} F$.*

Il suffit de montrer que toute suite $(z_h)_{h \geqslant 1}$ de G_r vérifiant $\sum_{h=1}^{\infty} u \otimes_{\vee} v(z_{h+1} - z_h) < \infty$ converge vers un point de G_r, u et v étant les (F)-normes de E et F.

Or en posant $z_0 = 0$ on a $z_h - z_{h-1} = \sum_{n=N_{h-1}}^{N_h - 1} x_n \otimes y_n$ pour une suite strictement croissante d'entiers N_h, avec $N_0 = 0$, et pour des $x_n \in E$, $y_n \in F$ vérifiant $\sum_{n=0}^{\infty} u(x_n) \vee v(y_n) < \infty$. Posons :

$$H((x_n)) = \{ \sum_{n=0}^{\infty} t_n x_n \mid t_n \text{ scalaire, } \sup |t_n| \leqslant 1 \}.$$

Ces séries convergent grâce aux majorations $u(t_n x_n) \leqslant u(x_n)$. Les ensembles $H((x_n))$ et $H((y_n))$ sont des compacts de E et F respectivement. Comme :

$$z_h = \sum_{n=0}^{N_h} x_n \otimes y_n$$

appartient à G_r on trouve comme en 1.4 des points :

$$e_{h,i} \in H((x_n)) \quad \text{et} \quad f_{h,i} \in H((y_n)), \qquad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

vérifiant :

$$z_h = \sum_{i=1}^{r} e_{h,i} \otimes f_{h,i}$$

pour tout $h \geqq 1$. Or l'ensemble des $\sum_{i=1}^{r} e_i \otimes f_i$ où $e_i \in H((x_n)$ et $f_i \in H((y_n))$ pour tout i, avec r fixe, est un compact de $E \otimes_{\vee} F$ puisque $u \otimes_{\vee} v$ est une (F)-norme $\otimes$-continue. La suite (z_h) converge donc vers un point de ce compact, contenu dans G_r.

1.10. Si E et F sont des espaces (F)-normés, de (F)-normes u et v, soit $E \hat{\otimes}_{\vee} F$ l'espace (F)-normé complété de l'espace (F)-normé $E \otimes_{\vee} F$. Notons encore $u \otimes_{\vee} v$ la (F)-norme de $E \hat{\otimes}_{\vee} F$ (qui prolonge celle de $E \otimes_{\vee} F$).

PROPOSITION. — *Tout* $z \in E \hat{\otimes}_\vee F$ *admet un développement en série* $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n$, *avec* $x_n \in E$ *et* $y_n \in F$ *pour tout* n, *et on a :*

$$u \otimes_\vee v(z) = \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} u(x_n) \vee v(y_n) \mid z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \otimes y_n, x_n \in E, y_n \in F \}.$$

On sait bien en effet que si X_0 est un sous-espace vectoriel dense d'un espace (F)-normé $(X, \| . \|)$, alors tout $z \in X$ admet un développement $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ avec $z_n \in X_0$, et que $\| z \|$ est la borne inférieure des $\sum_{n=1}^{\infty} \| z_n \|$, $z = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n \in X_0$. La proposition s'en déduit aisément.

Remarque. — Si E_0 et F_0 sont des sous-espaces vectoriels denses de E et F munis des (F)-normes u_0 et v_0 induites par u et v, l'injection canonique f_0 de $E_0 \otimes_\vee F_0$ dans $E \otimes_\vee F$ est isométrique et se prolonge en une isométrie linéaire f de $E_0 \hat{\otimes}_\vee F_0$ sur $E \hat{\otimes}_\vee F$.

Le prolongement continu f de f_0 est *a priori* une contraction (application lipschitzienne avec la constante $K=1$) linéaire. En outre l'application bilinéaire canonique de $E_0 \times F_0$ dans $E_0 \hat{\otimes}_\vee F_0$ se prolonge en une application bilinéaire b de $E \times F$ dans $E_0 \hat{\otimes}_\vee F_0$ vérifiant $u_0 \otimes_\vee v_0(b(x,y)) \leqslant u(x) \vee v(y)$. Par suite b se factorise par une contraction linéaire $g : E \hat{\otimes}_\vee F \to E_0 \hat{\otimes}_\vee F_0$ inverse de f.

2. La topologie tensorielle la plus fine

2.1. Une *topologie tensorielle* sur le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux espaces vectoriels topologiques E et F est une topologie vectorielle sur $E \otimes F$ telle que l'application $(x, y) \to x \otimes y$ de $E \times F$ dans $E \otimes F$ soit continue.

2.2. THÉORÈME. — *Si* E *et* F *sont des espaces vectoriels topologiques séparés, il existe une topologie tensorielle séparée sur* $E \otimes F$.

Plus précisément soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de (F)-semi-normes de E telle que l'ensemble des $\{ x \in E \mid u_i(x) < a \}$, $i \in I$, $a > 0$, constitue une base de voisinages de l'origine dans E. Soit $(v_j)_{j \in J}$ une famille de (F)-semi-normes de F vérifiant la même propriété pour F.

Alors l'ensemble des (F)-semi-normes $u_i \otimes_\vee v_j$, $i \in I$, $j \in J$, définit sur $E \otimes F$ une topologie tensorielle séparée $\mathscr{S}$.

Comme pour le théorème 1.3 on se ramène au cas où E et F sont de dimension finie. Si alors w est une norme de $E \otimes F$ on peut trouver $i \in I$ et $j \in J$ tels que w soit $\otimes$-continue pour u_i et v_j et $u_i \otimes_\vee v_j$ est alors une (F)-norme de $E \otimes F$ d'après 1.6.

2.3. Soit $\mathscr{S}$ la topologie tensorielle la plus fine sur le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux espaces vectoriels topologiques E et F.

Il est clair qu'une application linéaire de $E\otimes F$ dans un espace vectoriel topologique X est continue pour $\mathscr{T}$ si et seulement si l'application bilinéaire associée de $E\times F$ dans X est continue.

Donnons une famille de (F)-semi-normes de $E\otimes F$ définissant la topologie $\mathscr{T}$.

Soit $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{V}$) un ensemble de (F)-semi-normes continues de E (resp. F) tel que toute (F)-semi-norme continue de E (resp. F) soit continue par rapport à quelque (F)-semi-norme $u\in\mathscr{U}$ (resp. $v\in\mathscr{V}$).

Et soit Φ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ croissantes, concaves, continues et nulles en 0.

Pour tous $u\in\mathscr{U}$, $v\in\mathscr{V}$ et $\varphi\in\Phi$ les fonctions $\varphi(u) : x \to \varphi(u(x))$ et $\varphi(v)$ sont des (F)-semi-normes continues de E et F.

Proposition. — *La topologie tensorielle $\mathscr{T}$ la plus fine sur $E\otimes F$ peut être définie par l'ensemble des (F)-semi-normes $\varphi(u)\otimes_\vee\varphi(v)$, $u\in\mathscr{U}$, $v\in\mathscr{V}$, $\varphi\in\Phi$.*

Soit en effet w une (F)-semi-norme $\otimes$-continue (c'est-à-dire $\mathscr{T}$-continue) de $E\otimes F$. Il existe alors $u\in\mathscr{U}$ et $v\in\mathscr{V}$ telles que l'application $(x, y) \to x\otimes y$ de $(E,u)\times(F,v)$ dans $(E\otimes F, w)$ soit continue. La fonction :

$$\psi(t)=\sup\{w(x\otimes y)\,|\,x\in E, y\in F, u(x)\vee v(y)\leqq t\},$$
$$t\in\mathbf{R}_+,$$

à valeurs dans $[0, \infty]$, est nulle et continue en 0. Il existe une fonction $\varphi\in\Phi$ majorant $1\wedge\psi$. On a alors, pour tout $(x,y)\in E\times F$, $1\wedge w(x\otimes y)\leqslant\varphi(u(x))\vee\varphi(v(y))$ d'où $1\wedge w\leqslant\varphi(u)\otimes_\vee\varphi(v)$ ce qui montre que w est continue relativement à $\varphi(u)\otimes_\vee\varphi(v)$.

Observons aussi que $\mathscr{T}$ est la topologie vectorielle la plus fine sur $E\otimes F$ faisant tendre vers 0 la base de filtres des :

$$U\otimes V=\{x\otimes y\,|\,x\in U, y\in V\},$$

où U et V parcourent les filtres des voisinages de l'origine de E et de F. La topologie $\mathscr{T}$ admet donc pour système fondamental de voisinages de zéro les ensembles de la forme :

$$\bigcup_{N\geqslant 0}\sum_{n=0}^{N} U_n\otimes V_n,$$

où les U_n et V_n sont des voisinages de l'origine dans E et F (*voir* [9], p. 6).

2.4. Théorème. — *Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques séparés et complets, $E\otimes F$ est un espace vectoriel topologique séparé et complet pour la topologie tensorielle $\mathscr{T}$ la plus fine.*

Démonstration. — Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ des familles de (F)-semi-normes de E et F définissant respectivement les topologies de E et F. On suppose (c'est toujours possible) que si $\alpha\in I$ et $\beta\in I$ on peut trouver $i\in I$ vérifiant $u_\alpha(x)\vee u_\beta(x)\leqslant u_i(x)$ pour tout $x\in E$ et que $(v_j)_{j\in J}$ remplit la même condition pour F.

D'après 2.2 la topologie tensorielle $\mathscr{S}$ sur $E\otimes F$ définie par les (F)-semi-normes $u_i \otimes_\vee v_j$, $i\in I, j\in J$, est séparée.

Les ensembles équilibrés $G_r\subset E\otimes F$, $r\geqslant 1$ entier, définis en 1.9 (ensembles des tenseurs de rang au plus égal à r) vérifient $G_r+G_r\subset G_{2r}$ et $E\otimes F=\bigcup_{r\geqslant 1} G_r$. Le théorème résulte alors des lemmes (*a*) et (*b*) suivants (*voir* [5], p. 42).

Lemme (*a*). — *La topologie $\mathscr{T}$ est la topologie vectorielle la plus fine sur $E\otimes F$ coïncidant avec $\mathscr{S}$ sur chaque G_r.*

Soit en effet $z_0\in G_r$, soit $|\,.\,|$ une (F)-semi-norme continue de $(E\otimes F, \mathscr{T})$ et soit $\varepsilon>0$. Il existe $\eta>0$, $i\in I$ et $j\in J$ tels que $|x\otimes y|\leqslant\varepsilon/2r$ dès que $x\in E$, $y\in F$ et $u_i(x)\vee v_j(y)\leqslant\eta$. Soit $z\in G_r$ tel que $u_i \otimes_\vee v_j(z-z_0)<\eta$. Alors $z-z_0\in G_{2r}$ et (lemme 1.4) $z-z_0=\sum_{n=1}^{2r} e_n\otimes f_n$ pour des $e_n\in E$ et $f_n\in F$ vérifiant $u_i(e_n)\vee v_j(f_n)<\eta$ d'où $|e_n\otimes f_n|\leqslant\varepsilon/2r$ et $|z-z_0|\leqslant\varepsilon$. La restriction de $|\,.\,|$ à G_r est donc continue pour la topologie induite par $\mathscr{S}$.

Lemme (*b*). — *Chacun des G_r est complet dans $(E\otimes F,\mathscr{S})$.*

En écrivant $i\leqslant i'$ quand $u_i\leqslant u_{i'}$ pour i et i' dans I, et de même pour J, E (resp. F) est la limite projective du système projectif filtrant des espaces (F)-normés complets $(E_i, u_i^\bullet)$, $i\in I$ (resp. $(F_j, v_j^\bullet)$, $j\in J$), séparés-complétés des (E, u_i) (resp. (F, v_j)), pour des contractions linéaires $p_{ii'} : E_{i'}\to E_i$, $i\leqslant i'$ (resp. $q_{jj'} : F_{j'} \to F_j, j\leqslant j'$).

Soit T l'espace vectoriel topologique limite projective des espaces (F)-normés $E_i \otimes_\vee F_j$ pour les applications linéaires $p_{ii'}\otimes q_{jj'}$ de $E_{i'} \otimes_\vee F_{j'}$ dans $E_i \otimes_\vee F_j$, $i\leqslant i'$ dans I, $j\leqslant j'$ dans J, qui sont continues d'après 1.5.

Les applications linéaires canoniques $p_i : E \to E_i$ et $q_j : F \to F_j$ vérifient :

$$u_i^\bullet(p_i(x))=u_i(x),\qquad x\in E;$$
$$v_j^\bullet(q_j(y))=v_j(y),\qquad y\in F.$$

Les applications linéaires continues $p_i\otimes q_j$ de $(E\otimes F,\mathscr{S})$ dans $E_i\otimes_\vee F_j$, $i\in I$, $j\in J$, se factorisent par une injection linéaire continue f de $(E\otimes F,\mathscr{S})$ dans T.

Si $G_{i,j,r}$ est l'ensemble des tenseurs de $E_i \otimes F_j$ de rang au plus égal à r et si $T_r = T \cap \prod_{i,j} G_{i,j,r}$, alors $f(G_r) = T_r$ pour tout $r \geqslant 1$. Car si T_r contient $t = (t_{i,j})$ on peut trouver $h \in I$ et $k \in J$ tels que, pour $i \geqslant h$ et $j \geqslant k$, les $t_{i,j}$ aient tous même rang $s \leqslant r$, d'où $t_{i,j} \in E_i^0 \otimes F_j^0$ pour des espaces vectoriels $E_i^0 \subset E_i$ et $F_j^0 \subset F_j$ de dimension s. On voit alors (*cf.* [1], p. 170) que les p_{hi} et q_{kj}, $i \geqslant h$, $j \geqslant k$, induisent des bijections de E_i^0 sur E_h^0 et de F_j^0 sur F_k^0 : d'une décomposition $t_{h,k} = \sum_{n=0}^{s} x_n^h \otimes y_n^k$ dans $E_h^0 \otimes F_k^0$ on déduit aisément un système cohérent de décompositions $t_{i,j} = \sum_{n=0}^{s} x_n^i \otimes y_n^j$, $i \in I$, $j \in J$, d'où $t \in f(G_r)$.

En vertu du lemme 1.9 les $G_{i,j,r}$ sont complets dans $E_i \otimes_\vee F_j$ donc T_r est complet dans T.

Il suffit alors de constater que la topologie $\mathscr{S}$ sur $E \otimes F$ est l'image réciproque par f de la topologie de T, grâce à :

$$u_i \otimes_\vee v_j = (u_i^\bullet \otimes_\vee v_j^\bullet) \circ p_i \otimes q_j. \tag{8}$$

La (F)-semi-norme du premier membre majore celle du second car :

$$(u_i^\bullet \otimes_\vee v_j^\bullet)(p_i(x) \otimes p_j(y)) \leqslant u_i(x) \vee v_j(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

Inversement soit $z \in E \otimes F$ et soit $a > u_i^\bullet \otimes_\vee v_j^\bullet\, (p_i \otimes q_j(z))$. Comme $p_i(E)$ et $q_j(F)$ sont denses dans E_i et F_j il résulte de la remarque 1.10 que $a > \sum_{n=1}^{N} u_i^\bullet(x_n) \vee v_j^\bullet(y_n)$ pour des $x_n \in p_i(E)$ et des $y_n \in q_j(F)$ vérifiant :

$$p_i \otimes q_j(z) = \sum_{n=1}^{N} x_n \otimes y_n,$$

d'où $a > u_i \otimes_\vee v_j(z')$ si :

$$z' = \sum_{n=1}^{N} x'_n \otimes y'_n$$

avec :

$$x_n = p_i(x'_n) \quad \text{et} \quad y_n = q_j(y'_n), \quad x'_n \in E, \quad y'_n \in F.$$

Mais $z - z'$ est dans le noyau $p_i^{-1}(0) \otimes F + E \otimes q_j^{-1}(0)$ de $p_i \otimes q_j$, d'où $u_i \otimes_\vee v_j(z - z') = 0$ et donc $a > u_i \otimes_\vee v_j(z)$ ce qui donne (8).

Remarque. — Si, sous les hypothèses du théorème 2.4, E_0 et F_0 sont des sous-espaces vectoriels topologiques denses de E et F et si $E_0 \otimes F_0$ est muni de la topologie tensoricIle la plus fine, alors $(E \otimes F, \mathscr{T})$ est l'espace vectoriel topologique complété de $E_0 \otimes F_0$.

En effet, pour tout espace vectoriel topologique séparé complet X, toute application bilinéaire continue de $E_0 \times F_0$ dans X admet un prolongement bilinéaire continu unique à $E \times F$ [2].

2.5. Théorème. — *Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques séparés et si B est un borné de $E \otimes F$ pour la topologie tensorielle $\mathscr{T}$ la plus fine, alors* $\sup \{ \operatorname{rang}(z) \mid z \in B \} < \infty$.

Démonstration. — Soient $E^{\wedge}$ et $F^{\wedge}$ les complétés de E et F et soit $\hat{G_r}$ (resp. G_r) l'ensemble des tenseurs de $E^{\wedge} \otimes F^{\wedge}$ (resp. $E \otimes F$) de rang au plus égal à r. D'après le lemme 2.4 (b), $\hat{G_r}$ est fermé dans $E^{\wedge} \otimes F^{\wedge}$ pour la topologie tensorielle la plus fine. La remarque ci-dessus montre donc que $G_r = E \otimes F \cap \hat{G_r}$ est fermé dans $(E \otimes F, \mathscr{T})$, et le lemme 2.4 ($a$) donne alors le résultat (*voir* (5), p. 42).

Cela montre que $(E \otimes F, \mathscr{T})$ n'est pas localement convexe si E et F sont de dimension infinie et métrisables.

En effet si A et B sont des bornés de E et F engendrant des sous-espaces de dimension infinie, $C = A \otimes B$ est borné pour $\mathscr{T}$ mais d'après le théorème 2.5 l'enveloppe convexe de C n'est pas bornée pour $\mathscr{T}$.

2.6. Disons qu'un espace vectoriel topologique H est *evt-tonnelé* quand, pour tout espace vectoriel topologique X, tout ensemble simplement borné d'applications linéaires continues de H dans X est équicontinu ou, de façon équivalente ([9], p. 10-15) quand, pour tout espace vectoriel topologique métrisable et complet X, toute application linéaire de H dans X à graphe fermé est continue.

Si E et F sont métrisables et complets, $E \otimes F$ est evt-tonnelé pour la topologie tensorielle $\mathscr{T}$ la plus fine.

En effet, tout ensemble simplement borné d'applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans un espace vectoriel topologique X est équicontinu.

On a vu en [5], p. 157, qu'un espace vectoriel topologique H est evt-tonnelé s'il est complet, evt-bornologique (autrement dit si toute application linéaire bornée de H dans un espace vectoriel topologique quelconque X est continue) et si, pour tout borné B de H, il existe une suite de nombres $a_n > 0$ telle que $\bigcup_{N \geq 0} \sum_{n=0}^{N} a_n B$ soit encore borné dans H.

L'espace $(E \otimes F, \mathscr{T})$ ci-dessus est evt-tonnelé (et également complet et evt-bornologique) mais ses bornés ne vérifient pas cette dernière propriété quand E et F sont de dimension infinie, d'après le théorème 2.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki (N.). — *Élements de Mathématique*, Algèbre, chap. 2, Hermann, Paris, 1962.

[2] Bourbaki (N.). — *Éléments de Mathématique*, Topologie générale, chap. 3, Hermann, Paris, 1960.

[3] Gramsch (B.). — Integration und holomorphe Funktionen in lokalbeschränkten Räumen, *Math. Annalen*, vol. 162, 1965, p. 190-210.

[4] Gramsch (B.). — Tensorprodukte und Integration vektorwertige Funktionen, *Math. Zeitschrift*, vol. 100, 1967, p. 108-122.

[5] Turpin (Ph.). — Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux, *Dissertationes Math.*, vol. 131, PWN, Varsovie, 1976.

[6] Turpin (Ph.). — *Représentation fonctionnelle des espaces vectoriels topologiques* (à paraître).

[7] Vogt (D.). — Integrationstheorie in p-normierten Raümen, *Math. Annalen*, vol. 173, 1967, p. 219-232.

[8] Waelbroeck (L.). — The tensor product of a locally pseudo-convex and a nuclear space, Colloquium on Nuclear Spaces and Ideals in Operator Algebras, *Studia Math.*, vol. 38, 1970, p. 101-104.

[9] Waelbroeck (L.). — Topological Vector Spaces and Algebras, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 230, Springer, Berlin, 1971.

[10] Waelbroeck (L.). — Topological vector spaces, Summer School on Topological Vector Spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 331, p. 1-40, Springer, Berlin, 1973.