BULLETIN DE LA S. M. F.

GILLES ROYER

Étude des opérateurs de Schrödinger à potentiel aléatoire en dimension 1

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 27-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__27_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 27-48

ÉTUDE DES OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER À POTENTIEL ALÉATOIRE EN DIMENSION 1

PAR

GILLES ROYER (*)

RÉSUMÉ. — Grâce à des arguments différents, on prouve de nouveau le théorème de localisation de GOL'SHEID MOLCHANOV et PASTUR : soit q une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des fonctions continues et positives sur $\mathbf{R}$; si q est suffisamment aléatoire et est stationnaire, presque sûrement, les vecteurs propres de l'opérateur autoadjoint $f \mapsto -f''+qf$ engendrent $L^2(\mathbb{R})$.

ABSTRACT — With the help of different arguments, we prove again the GOL'SHEID MOLCHANOV and PASTUR localisation Theorem: let q denotes a stationary random variable taking its values in the space of continuous positives functions on $\mathbf{R}$; if the randomness of q is sufficient, almost surely, the eigenfunctions of the selfadjoint operator $f \mapsto -f''+qf$ generate $L^2(\mathbb{R})$.

Introduction

Dans l'article [2], I. YA. GOL'SHEID, S. A. MOLCHANOV et L. A. PASTUR ont montré que le spectre des opérateurs de Schrödinger unidimensionnels à potentiel aléatoire était presque sûrement purement ponctuel, au moins pour une vaste classe de tels opérateurs : c'est le théorème de localisation; ce travail fut complété par l'article [5] où MOLCHANOV établit la localisation exponentielle, c'est-à-dire la décroissance exponentielle des fonctions propres. Un résultat analogue pour des opérateurs discrétisés, c'est-à-dire opérant dans $l^2(\mathbb{Z})$ au lieu de $L^2(\mathbb{R})$, établi par une méthode différente, est contenu dans les travaux [3] et [4] de H. KUNZ et B. SOUILLARD.

(*) Texte reçu le 27 novembre 1980.

Gilles ROYER, Université Pierre-et-Marie-Curie, Équipe d'Analyse, Tour 46, 4, place Jussieu 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1982/ 27 /$ 5.00
© Gauthier-Villars

Dans le présent article, on se propose de traiter à nouveau le cas continu en adaptant les idées de KUNZ et SOUILLARD, tout particulièrement l'idée qui consiste à introduire et calculer des mesures comptabilisant les vecteurs propres et les valeurs propres des opérateurs de Schrödinger dans une boîte finie. On obtient une relation simple permettant de calculer ces mesures en fonction d'autres mesures associées à un problème de Cauchy aléatoire (*voir* plus bas le théorème 1.7); la démonstration en est rapide si on utilise un calcul déjà important dans les articles [2] et [5] mais la formule obtenue est bien plus parlante et maniable que celle qui lui correspond dans ces articles.

Divers ingrédients nous permettent d'autres améliorations : l'emploi du critère de localisation de KUNZ et SOUILLARD, une formule exprimant l'invariance des calculs par la symétrie $x \rightarrow -x$ de l'espace, l'emploi d'une méthode hilbertienne pour prouver la stricte positivité de l'exposant de Lyapounov. On dégage ainsi quelques hypothèses simples entraînant la validité du théorème de localisation exponentielle. Ces hypothèses sont vérifiées dans le modèle utilisé par GOL'SHEID MOLCHANOV et PASTUR et permettent d'envisager de traiter d'autres modèles.

1. Principe général de démonstration

Introduisons quelques conventions. Si E est un espace vectoriel, $\mathbb{P}(E)$ désignera l'espace projectif associé et on notera $\dot{x}$ l'élément de $\mathbb{P}(E)$ qui est la direction d'un élément x de E. On fera usage de l'espace $\mathbb{P}_\Lambda$, Λ désignant l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, égal par définition à $\mathbb{P}(\mathscr{C}^2([a, b]), \mathbb{R}))$, dont on notera les éléments θ, ainsi que de $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Il est commode d'identifier $\mathbb{P}^1$ à $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ en repérant la direction d'un vecteur (x_1, x_2) à l'aide de φ défini par $\mathrm{tg}(\varphi) = x_2/x_1$; aussi appelera-t-on φ les éléments de $\mathbb{P}^1$; l'espace $\mathbb{P}^1$ possède une seule probabilité invariante par rotation, que l'on désignera par $(1/\pi)\, d\varphi$, faute de mieux.

Tous les espaces considérés dans le présent travail sont munis de topologies séparées naturelles que l'on ne précisera pas à chaque fois; les mesures qu'on envisagera sont des mesures sur les tribus boréliennes correspondantes.

OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER UNIDIMENSIONNELS

Voici quelques rappels au sujet des opérateurs de Schrödinger. Fixons une fonction continue et positive q sur $\mathbb{R}$, appelée potentiel; il existe un seul opérateur autoadjoint H sur l'espace de Hilbert complexe $L^2(\mathbb{R})$ tel que $H\Psi$ soit défini pour tout Ψ appartenant à $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact) et que $H\Psi = -\Psi'' + q\Psi$ (*voir* [6], théorème 10.28).

En outre on va considérer comme dans [2] des opérateurs associés à un intervalle fermé borné Λ et à des conditions au bord arbitraires; on appelle conditions au bord de Λ un couple φ^-, φ^+ d'éléments de l'espace $\mathbb{P}^1$, qu'on va considérer ici comme une partie de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$; on leur associe le sous-espace $\mathscr{D}_\Lambda(\varphi^-, \varphi^+)$ de $L^2(\Lambda)$ formé des fonctions complexes f indéfiniment dérivables vérifiant : $(f'(a), f(a))^\bullet = \varphi^-$ et $(f'(b), f(b))^\bullet = \varphi^+$ (on considère ici que la relation "$0^\bullet = \varphi$" est vérifiée). Il existe un seul opérateur autoadjoint $H_\Lambda(\varphi^-, \varphi^+)$ dont le domaine contienne $\mathscr{D}_\Lambda(\varphi^-, \varphi^+)$ et qui soit défini sur ce domaine par la même formule que H.

Désignons par $E_\Lambda(\varphi^-, \varphi^+, d\lambda)$ la mesure spectrale de cet opérateur, par $E(d\lambda)$ celle de H. Cette mesure spectrale étant associée à un opérateur différentiel elliptique admet une représentation à l'aide de fonctions propres généralisées (*voir* [13] et [15]). On aura précisément besoin du résultat suivant :

1.1. THÉORÈME. — *Il existe une fonction réelle F sur $\mathbb{R}^3$, borélienne et symétrique par rapport aux deux premières variables, et une mesure de Radon positive (non bornée) σ, telles que :*

1° *pour toutes fonctions Ψ_1 Ψ_2 de carré intégrable et à support compact; et θ continue à support compact, on ait :*

$$\int \theta(\lambda)\langle \Psi_2, E(d\lambda)\Psi_1\rangle = \int \theta(\lambda)\Psi_2(x)\Psi_1(y)F(x, y, \lambda)\,dx\,dy\,\sigma(d\lambda);$$

2° *x et y étant fixé, la fonction $F(x, y, .)$ appartient à $L^1_{\text{loc}}(\sigma)$;*

3° *pour σ-presque tout λ, pour tout y :*

$$\left(-\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (q-\lambda)\right)F(x, y, \lambda) = 0.$$

Cet énoncé est une forme un peu moins précise des théorèmes 6.1 et 7.1 de [14] (p. 140 et 150) : il n'y a qu'à prendre σ égale à la somme des mesures ξ et η intervenant dans ces théorèmes. L'énoncé ci-dessus ne détermine évidemment pas de manière unique le couple (σ, F); par contre, on définit une mesure de Radon (non bornée) en posant :

$$E(x, y, d\lambda) = F(x, y, \lambda)\,\sigma(d\lambda),$$

qu'on pourrait d'ailleurs noter heuristiquement « $\langle \delta_x, E(d\lambda)\delta_y \rangle$ ». De même, pour tous x et y appartenant à Λ on peut définir une mesure $E_\Lambda(\varphi^-, \varphi^+, x, y, d\lambda)$; ici l'expression heuristique donnée ci-dessus a un sens évident, étant donné que l'opérateur $H_\Lambda(\varphi^-, \varphi^+)$ possède un spectre discret et des fonctions propres continues. De la construction même de la mesure σ donnée dans [14] (p. 142) résulte :

1.2. Proposition. — *Pour tout choix de* x, y, φ^-, φ^+, *la mesure* $E_\Lambda(\varphi^-, \varphi^+, x, y, d\lambda)$ *converge vaguement vers* $E(x, y, d\lambda)$ *lorsque* Λ *tend vers* $\mathbb{R}$ (*c'est-à-dire* $a \to -\infty$, $b \to +\infty$).

Opérateurs de Schrödinger aléatoires

Supposons donnés un espace probabilisé (Ω, μ) et une application mesurable q de Ω dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ (on continuera à désigner aussi par q des éléments de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$). Soit $H(\omega)$ l'opérateur de Schrödinger associé au potentiel $q(\omega)$; on a ainsi défini une variable aléatoire à valeurs dans l'espace des opérateurs autoadjoints de $L^2(\mathbb{R})$ qu'on appelle opérateur de Schrödinger aléatoire. Dans tout le paragraphe 1, on pourrait supposer presque sans inconvénient que $\Omega = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, q étant l'identité, mais on ne le fera pas et, au contraire, on notera $\tilde{\mu}$ la probabilité image $q(\mu)$. Soit T_t le groupe des translations dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, $(T_t f(x) = f(x-t))$; dans toute la suite on supposera l'hypothèse suivante vérifiée :

(H_1) *la probabilité* $\tilde{\mu}$ *est invariante et ergodique sous l'action du flot* T_t; *de plus, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\int \sup_{0 \leq s \leq t} (q(s))\, \tilde{\mu}(dq) < \infty$.

Le théorème suivant est une adaptation directe d'un critère de Kunz et Souillard (corollaire 4.5 de [4]). Son énoncé suppose réglée une question de mesurabilité par rapport à ω, ce qu'on peut faire à l'aide des méthodes du chapitre 2 de [9].

1.3. Théorème. — *Supposons que, pour tout intervalle ouvert borné* A, *il existe une constante* $\chi(A)$ *strictement positive et* C *tels que, pour tous* x *et* y, *on ait :*

$$\int_\Omega \int_A |E(\omega, x, y, d\lambda)|\, \mu(d\omega) \leq C \exp -(\chi(A)\,|x-y|).$$

Le spectre de $H(\omega)$ *est alors presque sûrement purement ponctuel.*

Démonstration. — En multipliant les deux membres de l'inégalité par $\exp((1/2)\chi(A)|x|)$ et en intégrant par rapport à dx, compte tenu de la définition de $E(x, y, .)$ on obtient que pour tout y l'intégrale :

$$\int_\Omega \int_A \int_{\mathbb{R}} |F(\omega, x, y, \lambda)| \exp((1/2)\chi(A)|x|)\, \sigma(\omega, d\lambda)\, \mu(d\omega)\, dx$$

est finie. Il en résulte que, pour tout y, pour μ-presque tout ω, sauf pour un ensemble de λ négligeable pour la mesure $\sigma(\omega, d\lambda)$, la fonction $x \mapsto F(\omega, x, y, \lambda)$ est intégrable pour la mesure dx multipliée par un poids exponentiel; comme elle satisfait à l'équation $-f'' + (q(\omega) - \lambda) f = 0$ et que $q(\omega)$ est presque sûrement à croissance tempérée cela entraîne qu'elle appartient à $L^2(\mathbb{R})$ (cette affirmation sera justifiée en détail à la fin de la démonstration du théorème 3.5); elle est donc une « fonction propre », peut-être nulle, de $H(\omega)$, correspondant au coefficient λ. Seule nous intéresse en réalité la restriction de $\sigma(\omega, d\lambda)$ à l'ensemble des λ tels que la fonction $F(\omega, ., ., \lambda)$ ne soit pas identiquement nulle; d'après le raisonnement précédent, cette restriction est portée par l'ensemble des valeurs propres de $H(\omega)$; comme ce dernier est dénombrable (au plus) la restriction envisagée de $\sigma(\omega, d\lambda)$ est atomique.

Dans [4] le critère précédent est vu de manière agréable comme une conséquence d'une caractérisation de la localisation, due à Ruelle; pour qu'on puisse également utiliser de manière simple ce critère de Ruelle dans le cas continu, il faudrait, semble-t-il, que son énoncé puisse être adapté au cas de normes L^1 (*voir* [8]).

On va par la suite chercher à estimer les moyennes mises en œuvre dans le théorème 1.3 au moyen de quantités analogues associées à un opérateur de Schrödinger aléatoire dans un intervalle fini Λ; on a en fait intérêt à considérer un opérateur dont non seulement le potentiel est aléatoire mais aussi les conditions au bord; formellement, ceci correspond à la donnée d'une mesure de probabilité α sur $\mathbb{P}^1 \times \Omega \times \mathbb{P}^1$ et de l'application $(\varphi^-, \omega, \varphi^+) \mapsto H_\Lambda(\omega, \varphi^-, \varphi^+)$ ce dernier terme étant l'opérateur de Schrödinger dans $L^2(\Lambda)$ associé au potentiel $q(\omega)$ et aux conditions au bord φ^-, φ^+.

1.4. Proposition. — *Soit α une mesure de probabilité sur $\mathbb{P}^1 \times \Omega \times \mathbb{P}^1$ se projetant suivant μ sur Ω. Pour tout intervalle ouvert borné A et pour tous x et y, la limite inférieure pour Λ tendant vers $\mathbb{R}$ de*

$$\iint_A |E_\Lambda(\omega, \varphi^-, \varphi^+, x, y, d\lambda)|\, \alpha(d\omega, d\varphi^-, d\varphi^+),$$

majore :

$$\iint_A |E(\omega, x, y, d\lambda)| \mu(d\omega).$$

Ce résultat s'obtient facilement à l'aide de la proposition 1.2 et du lemme de Fatou.

Comptabiliser les fonctions propres

On va maintenant décrire une construction qui est cruciale dans le présent travail et qui, comme on l'a dit, est empruntée à [4]. Pour chaque choix de ω, φ^-, φ^+, on sait que le spectre de $H_\Lambda(\omega, \varphi^-, \varphi^+)$ est constitué d'une suite de valeurs propres λ_n, $n \in \mathbb{N}$, qu'on peut supposer strictement croissante (on peut, par exemple, démontrer ce résultat par la méthode de Prüfer dont les calculs nous serons justement utiles plus loin au lemme 1.6 : *voir* [11], page 128). Soit θ_n l'espace propre réel correspondant à λ_n; il est facile de voir que θ_n est un espace de dimension 1 et que les fonctions propres sont de classe $\mathscr{C}^2$; il est donc naturel de considérer les θ_n comme des éléments de l'espace projectif $\mathbb{P}_\Lambda$. On va associer à la probabilité α une mesure σ-finie positive $\mathscr{S}(\alpha)$ sur $\mathbb{P}_\Lambda \times \mathbb{R}$ qui comptabilise les couples direction propre, valeur propre au sens suivant : étant donnés une partie borélienne A de $\mathbb{P}_\Lambda \times \mathbb{R}$ et un indice i prenant les valeurs entières positives ainsi que la valeur $+\infty$, on considère l'ensemble B_i des triplets $(\varphi^-, \omega, \varphi^+)$ tels que $H_\Lambda(\omega, \varphi^-, \varphi^+)$ ait exactement i couples d'éléments propres (θ, λ) appartenant à A, et l'on veut que : $\mathscr{S}(\alpha; A) = \sum_i i\,\alpha(B_i)$, en convenant de $0 \times \infty = 0$.

Il est clair que cela revient à définir $\mathscr{S}(\alpha)$ comme la somme des lois des variables aléatoires (θ_n, λ_n), n parcourant $\mathbb{N}$; le prochain lemme montrera que cette définition est valide et que la mesure obtenue est σ-finie; pour l'énoncer, faisons quelques conventions : comme $H_\Lambda(\omega, ., .)$ ne dépend que de la restriction v à Λ du potentiel $q(\omega)$, on désignera aussi cet opérateur par $H_\Lambda(v, ., .)$ et on appelera S_n l'application de $\mathbb{P}^1 \times \mathscr{C}(\Lambda) \times \mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}_\Lambda \times \mathbb{R}$ qui, à φ^-, v, φ^+ fait correspondre le couple θ_n, λ_n.

1.5. Lemme. — *Les applications S_n sont injectives et boréliennes; leurs images sont des boréliens deux à deux disjoints.*

Démonstration. — Si une fonction Ψ non nulle vérifie $-\Psi'' + (v - \lambda)\Psi = 0$ pour deux valeurs v_1 et v_2 du potentiel, c'est que ces deux valeurs coïncident; en effet, il vient $v_1(x) = v_2(x)$ en tout point x où Ψ est non nul; or l'ensemble des zéros de Ψ est fini, car s'il avait un point d'accumulation y, on aurait

$\Psi(y)=\Psi'(y)=0$ et donc $\Psi=0$ par l'unicité des solutions de l'équation différentielle. On en déduit aussitôt que les S_n sont injectives et que leurs images sont disjointes.

D'autre part, la réunion G des graphes des S_n est un fermé, puisque c'est l'ensemble des couples $((\varphi^-, v, \varphi^+), (\dot{\Psi}, \lambda))$ vérifiant $-\Psi''+(v-\lambda)\Psi=0$ ainsi que $(\Psi'(a), \Psi(a))^{\bullet}=\varphi^-$, $(\Psi'(b), \Psi(b))^{\bullet}=\varphi^+$; le graphe de S_0 est l'intersection de G avec l'ensemble des couples du type précédent tels que :

$$\forall\ f\in\mathscr{D}_\Lambda(v, \varphi^-, \varphi^+),\quad \langle f, (H_\Lambda-\lambda I)f\rangle\geqslant 0$$

qui est un borélien; donc le graphe de S_0 est borélien, ce qui implique que S_0 est borélienne (*voir* [9], corollaire du lemme 13, page 107); puisque c'est aussi une application injective, son image est borélienne ([9], théorème 5, page 101). On opère de façon analogue pour examiner les autres fonctions S_n.

On peut évidemment étendre la définition de $\mathscr{S}(\alpha)$ au cas où α est une mesure positive bornée. On va maintenant définir des mesures d'un type plus simple au moyen d'un problème de Cauchy aléatoire. Désignons par G_Λ^λ l'application de $\mathbb{P}^1\times\Omega$ dans $\mathbb{P}_\Lambda$ qui à φ^-, ω fait correspondre la solution $\bar{f}^{\bullet}$ du « problème de Cauchy » suivant :

$(f'(a), f(a))^{\bullet}=\varphi^-$ et $-f''+(q(\omega)-\lambda)f=0$ (bien que f ne soit pas unique, $\bar{f}^{\bullet}$ l'est). De même, on définit une application D_Λ^λ de $\Omega\times\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}_\Lambda$ en résolvant un problème de Cauchy à l'extrémité droite de Λ :

$$(f'(b), f(b))^{\bullet}=\varphi^+,\qquad -f''+(q(\omega)-\lambda)f=0.$$

Il est utile de remarquer que les images de G_Λ^λ et de D_Λ^λ sont contenues dans la partie borélienne $\tilde{\mathbb{P}}_\Lambda$ de $\mathbb{P}_\Lambda$ formé des éléments $\bar{f}^{\bullet}$ tels que pour tout point x, $f'(x)$ ou $f(x)$ soit non nul. En effet, sur $\tilde{\mathbb{P}}_\Lambda$, on peut définir, pour x et y appartenant à Λ, deux fonctions réelles $\sigma(x, y)$ et $\gamma(x, y)$ par les équations :

$$\sigma(x, y, \bar{f}^{\bullet})=((f'(y))^2+(f(y))^2)^{1/2}((f'(x))^2+(f(x))^2)^{-1/2}$$

et :

$$\gamma(x, y, \bar{f}^{\bullet})=(f(y))((f'(x))^2+(f(x))^2)^{-1/2},$$

et ces fonctions seront importantes par la suite.

L'application G_Λ^λ permet de définir pour toute mesure positive bornée M sur $\mathbb{P}^1\times\Omega$ une mesure $G_\Lambda^\lambda(M)$ sur $\mathbb{P}_\Lambda$.

1.6. LEMME. — *A toute fonction f appartenant à* $\mathscr{C}^2(\Lambda, \mathbb{R})$ *on peut associer de manière unique deux fonctions u et r appartenant à* $\mathscr{C}^1(\Lambda, \mathbb{R})$ *vérifiant :*

$$0 \leqslant u(a) < \pi, \qquad f' = r\cos(u) \quad et \quad f = r\sin(u);$$

l'équation $-f'' + (q-\lambda)f = 0$, *équivaut au couple :*

$$u' = \cos^2(u) + (\lambda - q)\sin^2(u), \tag{1}$$

$$r' = (1/2)\, r \sin(2u)(1 + q - \lambda). \tag{2}$$

Si u_λ *désigne la solution de* (1) *pour des valeurs fixées de* $u(a)$ *et* q, *et si* $z = d/d\lambda(u_\lambda)$ *on a :*

$$r^2(b)\, z(b) = \int_a^b r^2(x)\sin^2(u(x))\, dx. \tag{3}$$

La relation (3) va jouer un rôle important ici comme dans [2] et [5]; elle vient du fait que z satisfait à :

$$z' = -z\sin(2u)(1+q-\lambda) + \sin^2(u),$$

d'où l'on tire $(r^2 z)' = r^2 \sin^2(u)$.

1.7. THÉORÈME. — *Pour toute mesure M positive et bornée sur* $\mathbb{P}^1 \times \Omega$, *on a l'égalité suivante entre mesures sur* $\mathbb{P}_\Lambda \times \mathbb{R}$ *:*

$$\mathscr{S}_\Lambda((M \otimes d\varphi;\, d\theta,\, d\lambda) = \left(\int_a^b (\gamma(b, x, \theta))^2\, dx\right) G_\Lambda^\lambda(M;\, d\theta)\, d\lambda.$$

Dans cette formule $M \otimes d\varphi$ désigne la mesure sur $\mathbb{P}^1 \times \Omega \times \mathbb{P}^1$ produit tensoriel de M par $d\varphi$; il faut surmonter l'incohérence des notations : $d\varphi$ et, au deuxième membre, $d\lambda$ désignent des mesures (de Lebesgue sur $\mathbb{R}/\pi Z$ et sur $\mathbb{R}$ respectivement), tandis que les autres d signifient « petit ensemble » ou « véhicule d'intégration ».

Démonstration. — Chacun des membres de la relation à établir est une fonction de M qui est linéaire et, plus précisément, qui commute avec l'opération d'intégration d'une famille de mesures. Il suffit donc d'établir la formule lorsque M est une mesure de Dirac en un point (φ_0^-, ω_0), fixé par la suite. On voit alors que les deux membres sont des mesures sur $\mathbb{P}_\Lambda \times \mathbb{R}$ qui, si l'on écrit plutôt $\mathbb{R} \times \mathbb{P}_\Lambda$, sont portées par le graphe de l'application $\lambda \mapsto G_\Lambda^\lambda(\varphi_0^-, \omega_0)$; il suffit donc de démontrer l'égalité des deux distributions de λ. Au premier membre, il s'agit de calculer la mesure qui comptabilise les valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger aléatoire, le caractère aléatoire étant ici simplement dû au fait que la condition au bord droite est distribuée suivant la loi $d\varphi$.

Soit θ_λ égal à $G_\Lambda^\lambda(\varphi_0^-, \omega_0)$ et f_λ tel que $\bar{f}_\lambda^{\bullet}=\theta_\lambda$; si l'on associe à f_λ les fonctions $u_\lambda, r_\lambda, z_\lambda$ comme dans le lemme 1.6, on voit que λ est valeur propre de $H_\Lambda(\omega, \varphi^-, \varphi)$ si et seulement si $u_\lambda(b)$ est égal modulo π à φ, et que :

$$(1)\quad \frac{du}{d\lambda}(\lambda, b)=z_\lambda(b)=(r_\lambda^{-2}(b))\int_a^b r_\lambda^2(x)\sin^2(u_\lambda(x))\,dx$$
$$=\int_a^b \gamma^2(b, x, \theta_\lambda)\,dx>0.$$

On voit donc que l'application qui à λ fait correspondre la classe modulo π de $u_\lambda(b)$ est injective sur des intervalles A suffisamment petits et donc que la restriction à A de la mesure qui comptabilise les valeurs propres est $|du/d\lambda(\lambda, b)|\,d\lambda$; c'est la formule souhaitée, en vertu de (1). La démonstration est terminée puisque $\mathbb{R}$ est réunion d'intervalles du type qu'on vient d'envisager.

1.8. Théorème. — *Pour toute mesure positive bornée μ sur Ω, on a l'égalité suivante entre mesures sur $\mathbb{P}_\Lambda$:*

$$D_\Lambda^\lambda(\mu\otimes d\varphi^+)=\sigma^2(b, a)\,G_\Lambda^\lambda(d\varphi^-\otimes\mu).$$

Démonstration. — On peut prouver ce résultat comme le théorème 1.7 en commençant par supposer que μ est une mesure de Dirac mais il est plus intéressant de le déduire dudit théorème; on ne perd rien à supposer que $\Omega=\mathscr{C}(\mathbb{R})$, ce qui permet de faire opérer dans Ω la symétrie J de $\mathbb{R}$ par rapport au milieu de Λ, comme on la fera d'ailleurs opérer de manière évidente dans d'autres espaces; d'autre part, soit s la symétrie $\varphi\mapsto-\varphi$ de $\mathbb{P}^1$. On a :

$$(1)\qquad D_\Lambda^\lambda(Jq, s\varphi)=J(G_\Lambda^\lambda(q, \varphi))\qquad \text{pour}\quad q\in\Omega,\quad \varphi\in\mathbb{P}^1.$$

Comme par ailleurs les deux extrémités de Λ jouent le même rôle dans la définition des mesures (en oubliant une petite intervention de s) on peut écrire :

$$\mathscr{S}_\Lambda(d\varphi^-\otimes\mu\otimes d\varphi^+)=J(\mathscr{S}_\Lambda(d\varphi^-\otimes J(\mu)\otimes d\varphi^+),$$

puis, d'après 1.7 :

$$=\left(\int_a^b \gamma^2(b, x, J\theta)\,dx\right)G_\Lambda^\lambda(d\varphi^-\otimes J(\mu);\ J(d\theta))\,d\lambda,$$

enfin, d'après (1) :

$$=\left(\int_a^b \gamma^2(a, x, \theta)\,dx\right)D_\Lambda^\lambda(d\varphi^+\otimes\mu;\, d\theta)\,d\lambda.$$

En confrontant à nouveau avec 1.7, on obtient l'égalité souhaitée pour presque tout λ. Pour finir, on remarque que les deux membres de cette égalité sont des fonctions continues de λ pour la topologie de la convergence étroite des mesures sur $\mathbb{P}_\Lambda$: en effet, l'application G_Λ^λ est continue ainsi que D_Λ^λ et on vérifie que l'ensemble des points de discontinuité de $\sigma(b, a)$ est négligeable pour D_Λ^λ (et on applique [9], théorème 1, p. 375).

2. Comportement asymptotique des solutions du problème de Cauchy

Au début du présent paragraphe, un « niveau d'énergie » λ appartenant à $\mathbb{R}$ est fixé et on ne le fera pas en général figurer dans les notations.

Exposants de Lyapounov

Soient q une fonction continue fixée sur $\mathbb{R}$, x et y deux réels; on désigne par $S(q, x, y)$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même qui, au vecteur (u_1, u_2), fait correspondre le vecteur $(f'(y), f(y))$ que définit l'unique solution f du problème de Cauchy suivant :

$$f'(x)=u_1, \qquad f(x)=u_2, \qquad -f''+(q-\lambda)f=0;$$

on vérifie facilement que $S(q, x, y)$ est une application de déterminant 1, c'est-à-dire un élément du groupe $SL(\mathbb{R}^2)$; il est évident que :

$$S(q, x, y)=S(q, z, y)\,S(q, x, z).$$

Posons :

$$S(q, t)=S(q, 0, t);$$

on a :

$$S(q, (t+t'))=S(T_t q, t')\,S(q, t),$$

autrement dit, avec les notations de l'hypothèse H_1, on est en présence d'un cocycle de matrices défini sur le système dynamique $(\tilde{\mu}, T_t)$. D'autre part, si on note $\|\,.\,\|$ la norme uniforme des matrices associée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$, le lemme 1.6, par son équation (2), implique :

2.1. LEMME. — *Pour n'importe quel choix de λ, q et $t \geqslant 0$:*

$$\|S(q,\, t)\| \leqslant \exp((1/2)(1+|\lambda|+\sup_{0\leqslant s\leqslant t} q(s))\, t).$$

De plus $\|S(q,\, t)\|$ est plus grande que 1; de ces estimations, de l'hypothèse H_1 et du théorème ergodique sous-additif résulte l'existence de l'exposant caractéristique de Lyapounov :

$$J = \lim_{t\to+\infty} (1/t) \log(\|S(.,\, t)\|),$$

la limite étant valable presque sûrement et aussi dans $L^1(\tilde{\mu})$.

PROCESSUS DE MARKOV

La stricte positivité de J est un élément essentiel pour la validité du théorème de localisation; il s'agit de l'établir et même une propriété un peu plus forte; pour cela, on va se restreindre une fois pour toutes au cas markovien, au sens de l'hypothèse suivante :

(H_2) *L'espace mesurable Ω est égal à $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathscr{V})$ où $\mathscr{V}$ est une partie borélienne d'un espace métrique séparable complet, le processus V_t défini par $V_t(\omega)=\omega(t)$ est markovien et stationnaire, et enfin le potentiel est donné grâce à une fonction continue et positive F sur $\mathscr{V}$ par $q(\omega,\, t)=F(\omega(t))$.*

On remarquera que le processus $q(.,\, t)$ n'est pas forcément markovien, si bien qu'on perdrait des modèles intéressants en supposant que $\mathscr{V}=\mathbb{R}^+$ et que F est l'identité.

Notons S^t la variable aléatoire $S(q(.),\, t)$; d'après la propriété de cocycle, $(V_t,\, S^t)$ est un processus de Markov à valeurs dans $\mathscr{V}\times SL(\mathbb{R}^2)$; de plus, pour chaque $\varphi \in \mathbb{P}^1$, le processus $(V_t,\, S^t\varphi)$ est aussi de Markov à valeurs dans $V\times \mathbb{P}^1$; quand φ varie les processus obtenus ont le même semi-groupe de transition $\mathscr{N}_t : \mathscr{N}_t(v_0,\, \varphi_0;\, dv_1,\, d\varphi_1)$ est l'image de la probabilité conditionnelle $\mu(d\omega \mid V_0=v_0)$ par l'application $\omega \mapsto (V_t(\omega),\, S^t(\omega)\,\varphi_0)$.

Soit μ_0 la mesure sur $\mathscr{V}$ qui est la valeur commune des $V_t(\mu)$; comme la probabilité conditionnelle envisagée ci-dessus n'est définie que modulo les ensembles μ_0-négligeables, on voit qu'on a employé l'expression « semi-groupe de transition » en un sens faible; malgré cela on vérifie qu'on a de la sorte un semi-groupe d'opérateurs de $L^1(\mu_0,\, \mathscr{C}(\mathbb{P}^1))$, ce qui permet de considérer pour toute probabilité β sur $\mathbb{P}^1$ qui se projette suivant μ_0 sur $\mathscr{V}$, le processus de Markov de noyau de transition $\mathcal{N}_t$ et qui part au temps a avec la distribution initiale β (le mot « temps » est emprunté à la terminologie habituelle de la théorie des processus). On désignera par $E_a(\beta; g)$ l'espérance d'une fonction g pour ce processus; on considérera que E_a est une mesure sur $\Omega \times \mathscr{C}^1([a, +\infty[, \mathbb{P}^1)$ et on étendra cette construction aux mesures positives bornées β déduites des probabilités envisagées précédemment par multiplication par une constante.

De même, pour $t>0$, posons $S^{*t}(\omega)=S(q(\omega), 0, -t)$; les processus $t \mapsto (V_{-t}, S^{*t}\varphi)$ ont un noyau de transition commun $\mathcal{N}^{*t}$; on introduit $E_b^*(\beta; .)$ qui est l'opérateur d'espérance pour le processus partant de b en arrière avec mesure de départ β et noyau de transition arrière $\mathcal{N}_t^*$; autrement dit, on construit une mesure sur $\Omega \times \mathscr{C}^1(]-\infty, b], \mathbb{P}^1)$ de telle manière que pour $x \leqslant y \leqslant b$, l'espérance conditionnelle correspondante :

$$\mathbb{E}(g(V_x, \Phi_x) \mid V_y=v, \Phi_y=\varphi)$$

soit égale à $\mathcal{N}_{y-x}^*(v, \varphi; g)$; ici et de manière générale, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note Φ_t la fonction de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{P}^1)$ dans $\mathbb{P}^1$ qui est l'évaluation des fonctions au point t.

Si μ est une mesure réversible, il y a une relation simple entre $\mathcal{N}_t$ et $\mathcal{N}_t^*$, autrement non. Il existe évidemment un lien entre les processus qu'on vient de construire et les noyaux G_Λ et D_Λ du paragraphe 1 : notant pour $x \in \Lambda$ et $\theta=\Psi^\bullet \in \hat{\mathbb{P}}_\Lambda$, par $\theta(x)$ l'élément $(\Psi'(x), \Psi(x))^\bullet$ de $\mathbb{P}^1$, on peut énoncer tout d'abord :

2.2. LEMME. — *L'application qui fait correspondre à $\theta \in \hat{\mathbb{P}}_\Lambda$ la fonction $x \mapsto \theta(x)$ appartenant à $\mathscr{C}^1(\Lambda, \mathbb{P}^1)$ est une bijection biborélienne.*

Cet énoncé paraphrase la première partie du lemme 1.6, $\theta(x)$ correspondant à la classe modulo π de $u(x)$. Soit Θ la bijection inverse de celle définie ci-dessus; soit β une mesure positive bornée sur $\mathscr{V} \times \mathbb{P}^1$ se projetant suivant $k\,\mu_0$ et M la mesure sur $\mathbb{P}^1 \times \Omega$ image de $E(\beta; .)$ par $I \times \Theta_a$ (suivi de la symétrie triviale : $\Omega \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1 \times \Omega$); il est alors clair que $G_\Lambda(M)$ est égale à l'image par Θ de la projection canonique de $E_a(\beta)$ sur $\mathscr{C}^1(\Lambda, \mathbb{P}^1)$. Un énoncé analogue relie les noyaux D_Λ et E_b^*.

En principe, la bijection Θ dépend de Λ mais il n'y a pas d'inconvénient à ne pas le marquer; de plus on oubliera par la suite certaines projections canoniques évidentes dans l'écriture des formules, conformément à l'usage de confondre une fonction et ses valeurs.

2.3. THÉORÈME. — *Pour tous $s \leqq t$, l'image sur*

$$\mathscr{C}([s, t]), \mathscr{V}) \times \mathscr{C}^1([s, t]), \mathbb{P}^1)$$

de la mesure $E_t^*(\mu_0 \otimes d\varphi)$ est absolument continue par rapport à l'image de $E_s(\mu_0 \otimes d\varphi)$, la densité correspondante étant $\sigma^{-2}(s, t, \Theta)$.

Ce théorème n'est pas tout à fait un corollaire du théorème 1.8 car il porte sur la loi jointe des ω et des solutions de problèmes de Cauchy et non pas seulement sur la loi de ces dernières (on peut noter quand même que si F est l'identité, ω est déterminé par toute solution de l'équation différentielle). Mais chacune des démonstrations proposées plus haut pour 1.8 s'adapte trivialement au cas des lois jointes.

RAYONS SPECTRAUX

La méthode que nous allons employer pour montrer la stricte positivité de l'exposant de Lyapounov a une de ses origines dans l'article [1]. Elle utilise le rayon spectral d'un semi-groupe de contractions dans un espace de Hilbert; il se trouve que ce rayon spectral intervient dans les calculs de manière plus directe que l'exposant lui-même (ceci sera précisé plus loin). Introduisons le cocycle sur $SL(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{P}^1$ défini par $\sigma(g, x^{\cdot}) = \|gx\| / \|x\|$ pour $x \in \mathbb{R}^2$, la norme étant euclidienne. Considérons la famille d'opérateurs de $L^2(\mu_0 \otimes d\varphi)$ définie pour t positif par :

$$(\mathscr{T}_t^{\lambda} f)(v, \varphi) = \mu(\sigma^{-1}(S_{\lambda}^t, \varphi) f(V_t, S^t \varphi) \mid V_0 = v),$$

formule qu'on peut aussi écrire avec les notations introduites plus haut :

$$= E_0(\delta_{(v, \varphi)}; \sigma(t, 0, \Theta) f(V_t, \Theta_t)).$$

En se servant du fait que le module de quasi-invariance de la mesure $d\varphi$ sous l'action du groupe $SL(\mathbb{R}^2)$ est σ^{-2}, on vérifie que $\mathscr{T}_t$ est un semi-groupe de contractions de $L^2(\mu_0 \otimes d\varphi)$. Soit R son rayon spectral : $\lim_{t \to \infty} \| \mathscr{T}_t \|^{(1/t)}$; comme $\sigma(g, \varphi) \leqslant \|g\|$, il est facile de voir que $J \geqslant -\log(R)$; donc J est strictement positif, à moins que R ne vaille 1. Pour exploiter cette remarque, on va employer un procédé de discrétisation pour se ramener au cas des cocycles discrets de matrices traité en détail dans [10] et [7]. Et pour que le cocycle discrétisé satisfasse aux hypothèses de ces articles, on supposera réalisée l'hypothèse suivante, qu'on pourrait d'ailleurs raffiner :

(H_3) *Il existe un nombre s strictement positif tel que :*

1° *la marginale* $(V_0, V_s)\,\mu$ *(qui est une mesure sur* $\mathscr{V}^2$*) soit absolument continue par rapport au produit* $\mu_0 \otimes \mu_0$*, la densité étant de carré intégrable et strictement positive;*

2° *le support de l'image de* $\tilde{\mu}$ *sur* $\mathscr{C}([0, s])$ *contient beaucoup de fonctions constantes, au sens où l'ensemble de ces constantes contient un ouvert de* $\mathbb{R}$.

2.4. THÉORÈME. — *L'hypothèse* H_3*, jointe à* H_1 *et* H_2*, implique que, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, le rayon spectral correspondant* $R(\lambda)$ *est strictement plus petit que* 1 *(et donc* $J(\lambda) > 0$*).*

Démonstration. — Désignons par $\mathscr{W}$ l'espace $\mathscr{C}([0, s], \mathscr{V})$ et soit $W_n(\omega)$ la restriction de ω à $\mathscr{C}([ns, (n+1)s])$; il est clair que W_n est un processus de Markov stationnaire prenant ses valeurs dans $\mathscr{W}$; nous noterons N son noyau de transition. Comme la matrice $S^s(\omega)$ ne dépend que de la restriction de ω à $[0, s]$, S^s définit une application m de $\mathscr{W}$ dans $SL(\mathbb{R}^2)$ et, en posant $M_n = m \circ W_n$, on a : $S^{ns} = M_n \ldots M_0$. On est donc en présence des produits de matrices aléatoires considérés dans [10] et [7] (sauf que dans ce dernier article, M_n elle même était une chaîne de Markov).

Comme dans [7], considérons l'opérateur $\mathscr{T}$ de $L^2(\nu_0 \otimes d\varphi)$, où $\nu_0 = W_0(\mu)$, donné par :

$$\mathscr{T} g(w, \varphi) = \int_{\mathscr{W}} \sigma^{-1}(m(w'), \varphi)\, g(w', m(w')\varphi)\, N(w, dw').$$

La fonction $\mathscr{T} g$ ne dépend de w que par l'intermédiaire de $w(s)$ et sur l'espace des fonctions de ce type $\mathscr{T}$ s'identifie à l'opérateur $\mathscr{T}_s$ défini auparavant; le rayon spectral de $\mathscr{T}$ est donc égal à R.

D'autre part, l'hypothèse H_3 implique, d'après la propriété de Markov, que la projection orthogonale dans $L^2(\mu)$ de l'espace des fonctions ne dépendant que des V_t pour $t \geq s$ sur l'espace des fonctions ne dépendant que des V_t pour $t \leq 0$ est une application de Hilbert-Schmidt qui diminue la norme de toutes les fonctions sauf les constantes; il en est de même, *a fortiori*, de N, en tant qu'opérateur dans L^2. Donc, d'après la démonstration du théorème 2.4 de [7], si $R = 1$, il existerait une probabilité sur $\mathbb{P}^1$ laissée presque sûrement invariante par la matrice M_0. Montrons que c'est impossible.

On calcule $M_0(w)$ si w vaut la constante c sur $[0, s]$; on trouve pour $c < \lambda$:

$$M_0(c) = A(s(\lambda - c)^{1/2}) \quad \text{avec} \quad A(u) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -u\sin(u) \\ u^{-1}\sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix}$$

et une formule analogue, avec des fonctions hyperboliques, pour $c > \lambda$. Il suffit de montrer que les matrices $M_0(c)$ ne laissent pas de probabilité invariante lorsque c parcourt un intervalle qu'on peut supposer, soit majoré, soit minoré par λ. Ce deuxième cas est le plus facile à régler : $M_0(c)$ a deux valeurs propres réelles encadrant 1, donc toute probabilité qu'elle laisse invariante est portée par les deux points de $\mathbb{P}^1$ que définissent les directions propres; il suffit de vérifier que ces directions varient avec c. Dans le premier cas on peut procéder comme suit; comme $(A(u))^n = A(nu)$, on voit, en prenant d'abord u irrationnel pour exploiter l'ergodicité des translations irrationnelles du tore, que le groupe fermé G engendré par le support de $M_0(\mu)$ contient toute les matrices :

$$\begin{pmatrix} \cos(v) & -u\sin(v) \\ u^{-1}\sin(v) & \cos(v) \end{pmatrix},$$

pour v quelconque et u parcourant un ouvert. A partir de là, il n'est pas difficile de voir que G coïncide avec $SL(\mathbb{R}^2)$ parce qu'il contient un ouvert de ce groupe, et ne peut donc laisser de probabilité invariante (il est probable que l'on puisse conclure avec seulement deux valeurs de c : *voir* [12]).

Le résultat que nous venons d'établir n'est pas suffisant pour établir le théorème de localisation car il faudrait aussi étudier comment $R(\lambda)$ dépend de λ, ce que je ne sais pas faire dans un cadre aussi général que celui où nous sommes placés. Mais de manière assez surprenante des opérateurs à peine plus compliqués que les $\mathcal{T}_t^\lambda$ vont permettre de conclure très rapidement; soit K une partie de $\mathbb{R}$, bornée et de frontière négligeable, $d\lambda_K$ la restriction de la mesure de Lebesgue à K; on introduit un semi-groupe de contractions de $L^2(d\lambda_K \otimes \mu_0 \otimes d\varphi)$ en posant :

$$\forall\ \lambda \in K, \quad \mathcal{T}_t^K f(\lambda, ., .) = \mathcal{T}_t^\lambda (f(\lambda, ., .)).$$

2.5. THÉORÈME. — *Le rayon spectral $R(K)$ du semi-groupe $\mathcal{T}_t^K$ est strictement plus petit que* 1.

Démonstration. — Il est clair qu'on ne perd rien à supposer K compact; ensuite on se ramène au cadre discret déjà utilisé pour établir 2.4, en introduisant l'opérateur $\mathcal{T}_K$ de $L^2(d\lambda_K \otimes \nu_0 \otimes d\varphi)$ par :

$$\mathcal{T}_K f(\lambda, w, \varphi) = \int \sigma^{-1}(m_\lambda(w'), \varphi) f(\lambda, w', m_\lambda(w')\varphi) N(w, dw').$$

Enfin on reprend presque mot pour mot la preuve du théorème 2.4 de [7] (p. 54-55) dans ce cadre un peu plus compliqué; en voici les principales étapes.

On raisonne par l'absurde en supposant que $R(K)=1$; il existe alors une suite de vecteurs positifs normalisés Ψ_n vérifiant :

(1) $$\lim \langle \mathscr{T}_K \Psi_n, \Psi_n \rangle = 1.$$

Si l'on pose :

$$f_n(w) = \left(\int \Psi_n^2(\lambda, w, \varphi)\, d\lambda\, d\varphi \right)^{1/2},$$

$$y_n = f_n^{-1} \Psi_n, \qquad \alpha(dw, dw') = N(w, dw')\, \nu_0(dw),$$

et enfin :

$$J_n(w, w') = \int \sigma^{-1}(m_\lambda(w'), \varphi)\, y_n(\lambda, w', m_\lambda(w')\varphi)\, y_n(\lambda, w, \varphi)\, d\lambda\, d\varphi$$

(on note que J_n est majorée par 1), on a :

$$\langle \mathscr{T}_K \Psi_n, \Psi_n \rangle = \int J_n(w, w') f_n(w) f_n(w')\, \alpha(dw, dw').$$

En utilisant le fait que N est un opérateur compact de $L^2(\nu_0)$, on montre que (1) implique la convergence de f_n vers 1 dans L^2; en extrayant une sous-suite, on se ramène au cas où la relation suivante est vérifiée :

(2) J_n converge vers 1 presque sûrement par rapport à la mesure α.

On considère alors la famille $\rho_n(w)$ de probabilités sur $K \times \mathbb{P}^1$ donnée par : $\rho_n(w, d\lambda, d\varphi) = y_n^2(\lambda, w, \varphi)\, d\lambda\, d\varphi$. La relation (2) entraîne que, presque sûrement par rapport à α, la mesure différence de $\rho_n(w, d\lambda, d\varphi)$ et de $\rho_n(w', d\lambda, m_\lambda(w')\, d\varphi)$ converge vers 0 au sens de la variation totale; la dernière mesure écrite est, par définition, l'image de $\rho_n(w', ., .)$ par la bijection $(\lambda, \varphi) \mapsto (\lambda, (m_\lambda(w'))^{-1}\varphi)$ de $K \times \mathbb{P}^1$; vérifions que cette bijection est continue : le lemme 2.1 montrant une continuité par rapport à φ qui est uniforme par rapport à λ, il suffit d'établir la continuité en λ, φ étant fixé, ce qui se déduit de l'étude de la dépendance en λ des solutions du problème de Cauchy pour l'équation $-f'' + (q-\lambda) f = 0$ (*voir* [11]). Par un procédé combinant limite vague et combinaisons convexes ([7], 2.7), on déduit de la suite $\rho_n(w)$ une famille $\Pi(w)$ de probabilités sur $K \times \mathbb{P}^1$ vérifiant $\Pi(w, d\lambda, d\varphi) = \Pi(w', d\lambda, m_\lambda(w')\, d\varphi)$, pour presque tout couple (w, w'). Mais comme N^2 diminue la norme de toute fonction non constante, cette égalité ne peut être vérifiée que si les mesures Π ne dépendent en fait pas de w (*voir* le lemme 2.9 de [7]). On obtient donc une mesure Π sur $K \times \mathbb{P}^1$ telle que :

$$\Pi(d\lambda, d\varphi) = \Pi(d\lambda, m_\lambda(w)\, d\varphi) \quad \text{pour } \nu_0\text{-presque tout } w. \tag{3}$$

Soit $\Pi_\lambda(d\varphi)$ une désintégration de Π par rapport à la projection de $K \times \mathbb{P}^1$ sur K. L'égalité (3) implique que, pour presque tout λ, Π_λ est laissée invariante par les matrices $m_\lambda(w)$ où w parcourt le support de ν_0 : pour le voir il suffit de considérer une suite dense dans ce support. Or on a vu, en démontrant le théorème 2.4, que pour aucun λ une telle probabilité invariante ne peut exister.

3. Théorème de localisation exponentielle

Considérons l'opérateur de Schrödinger stochastique H_Λ correspondant à la mesure $\alpha_\Lambda = d\varphi^- \otimes \mu \otimes d\varphi^+$ (*cf.* § 1); soit A une partie mesurable bornée de $\mathbb{R}$; on va estimer pour x et y appartenant à Λ, disons pour préciser $x \leqslant y$, l'espérance :

$$\rho_\Lambda(x, y, A) := \alpha_\Lambda\left(\textstyle\sum_{\lambda_n \in A} |\Psi_n(x)\Psi_n(y)|\right),$$

où Ψ_n est « la » suite des fonctions propres normalisée de H_Λ; à l'aide de $\theta_n := \Psi_n^\bullet$, cela s'écrit aussi :

$$= \alpha_\Lambda\left(\textstyle\sum_{\lambda_n \in A} |\gamma(a, x, \theta_n)\gamma(a, y, \theta_n)| \left(\displaystyle\int_a^b \gamma^2(a, x, \theta_n)\, dx\right)^{-1}\right.$$

$$= \int_{\lambda \in A} \left(\int_a^b \gamma^2(a, x, \theta)\, dx\right)^{-1} |\gamma(a, x, \theta)\gamma(a, y, \theta)|\, \mathscr{S}(\alpha_\Lambda; d\theta, d\lambda)$$

$$= \int_A d\lambda \int |\gamma(b, x, \theta)\gamma(b, y, \theta)|\, G_\Lambda^\lambda((d\varphi \otimes \mu); d\theta),$$

ceci d'après la définition de $\mathscr{S}(\alpha_\Lambda)$, le théorème 1.7, et grâce à une heureuse simplification. On obtient donc, par l'identification consécutive au lemme 2.2 :

3.1. FORMULE :

$$\rho_\Lambda(x, y, A) = \int_A E_a((d\varphi \otimes \mu_0); |\gamma(b, x, \Theta)\gamma(b, y, \Theta)|)\, d\lambda.$$

Avant d'exploiter cette formule, on va s'intéresser à nouveau aux processus sur $\mathscr{V} \times \mathbb{P}^1$ introduits au paragraphe 2.

3.2. LEMME. — *Les noyaux de transition $\mathscr{N}_t^\lambda$ et $\mathscr{N}_t^{*\lambda}$ transforment pour tout λ et $t>0$ la mesure $\mu_0 \otimes d\varphi$ en une mesure qui lui est absolument continue.*

On notera $n_t(\lambda, v, \varphi)$ et $n_t^*(\lambda, v, \varphi)$ les densités de Radon-Nikodym correspondantes.

Démonstration. — Démontrons la propriété pour $\mathscr{N}_t^{*\lambda}$; la mesure $\mathscr{N}_t^{*\lambda}(\mu_0 \otimes d\varphi)$ étant l'image par (V_0, Φ_0) de la mesure $E_t(\mu_0 \otimes d\varphi; .)$, la formule de symétrie 2.3, appliquée pour $s=0$, montre qu'elle est absolument continue par rapport à $\mu_0 \otimes d\varphi$, la densité se calculant par espérance conditionnelle :

$$n_t(\lambda, v, \varphi)=E_t(\delta_{(v, \varphi)}; \sigma^{-2}(0, t, \Theta)).$$

On peut d'ailleurs démontrer le lemme plus géométriquement comme une simple conséquence de la quasi-invariance de la mesure $d\varphi$ sous l'action du groupe $SL(\mathbb{R}^2)$.

Considérons la norme éventuellement infinie $k(t, A)$ donnée par :

$$k^2(t, A)=\int_A d\lambda \int n_t^2(\lambda, v, \varphi)\, \mu_0(dv)\, d\varphi$$

et définissons $k^*(t, A)$ de manière analogue. Nous pouvons maintenant énoncer notre dernière hypothèse :

(H_4) *Pour tout intervalle ouvert borné A les limites supérieures lorsque t tend vers l'infini de $k(t, A)$ et $k^*(t, A)$ sont finies.*

3.3. PROPOSITION. — *Pour tout intervalle ouvert borné A, si x, y appartiennent à Λ et $x \leqslant y$, on a :*

$$\rho_\Lambda(x, y, A) \leqslant k(x-a, A) \,\| \mathscr{T}_{y-x}^A \|\, k^*(b-y, A).$$

Démonstration. — On part de la formule 3.1 que l'on peut écrire aussi, à l'aide du théorème de symétrie 2.5 :

$$\rho_\Lambda(x, y, A)=\int_A E_b^{*\lambda}((d\mu_0 \otimes d\varphi);\, |\gamma(a, x, \Theta)\gamma(a, y, \Theta)|)\, d\lambda,$$

où encore puisque la fonction $\gamma(a, x, \Theta)\gamma(a, y, \Theta)$ ne dépend que des Θ_t pour $a \leqslant t \leqslant y$:

$$= \int_A E_y^{*\lambda}(\mathcal{N}_{b-y}^{*\lambda}(\mu_0 \otimes d\varphi); |\gamma(a, x, \Theta)\gamma(a, y, \Theta)|)\, d\lambda,$$

et en appliquant de nouveau le théorème de symétrie et la relation :

$$|\gamma(u, v, \Theta)| = |\sin|(\Theta_v)\sigma(u, v, \Theta),$$

$$= \int_A E_a^{\lambda}((\mu_0 \otimes d\varphi);\, n_{b-y}^{*\lambda}(V_y, \Theta_y)|\sin|(\Theta_y)\sigma(y, x, \Theta))\, d\lambda$$

$$= \int_A E_x^{\lambda}((\mu_0 \otimes d\varphi);\, n_{x-a}^{\lambda}(V_x, \Theta_x)\, n_{b-y}^{*\lambda}(V_y, \Theta_y)$$

$$\times |\sin(\Theta_x)\sin(\Theta_y)|\,\sigma(y, x, \Theta))\, d\lambda.$$

On trouve enfin en revenant à la définition des opérateurs $\mathcal{T}_t^A$:

$$\rho_\Lambda(x, y, A) \leq \langle n_{x-a}, \mathcal{T}_{y-x}^A n_{b-y}^* \rangle$$

le produit scalaire étant celui de $L^2(d\lambda_A \otimes \mu_0 \otimes d\varphi)$.

Il est intéressant de noter que la majoration fournie par le lemme vaut aussi pour l'espérance :

$$\tau_\Lambda(x, y, A) = \alpha_\Lambda (\textstyle\sum_{\lambda_n \in A} (\Psi_n'^2(x) + \Psi_n^2(x))^{1/2} (\Psi_n'^2(y) + \Psi_n^2(y))^{1/2});$$

la démonstration est la même.

3.4. THÉORÈME. — *Sous les quatre hypothèses énoncées précédemment, presque sûrement, l'opérateur de Schrödinger H a un spectre purement ponctuel, et les fonctions propres correspondantes décroissent exponentiellement. Plus précisément, si A est un intervalle ouvert borné, presque sûrement, toute fonction propre Ψ dont la valeur propre associée appartient à A vérifie :*

$$\overline{\lim}_{|x| \to \infty} |x|^{-1} \log(|\Psi'(x)| + |\Psi(x)|) \leq \log(R(A)).$$

Démonstration. — On va montrer que le critère 1.3 est satisfait pour la valeur $\chi(A) = -\log(R(A)) + \varepsilon$, ε étant n'importe quel nombre vérifiant $0 < \varepsilon < -\log(R(A))$ (on sait que $R(A) < 1$ d'après le théorème 1.5). Posons :

$$\rho(x, y, A) = \pi^2 \iint_A |E(\omega, x, y, d\lambda)|\, \mu(d\omega);$$

on voit immédiatement que la proposition 1.4 s'écrit :

$$\rho(x, y, A) \leq \underline{\lim}_{\Lambda \to \mathbf{R}}\, \rho_\Lambda(x, y, A),$$

le terme ρ_Λ coïncidant avec celui défini au début du présent paragraphe. Donc, d'après la proposition 3.3 et l'hypothèse H_4, il existe une constante C_A telle que pour tous points x et y on ait $\rho(x, y, A) \leqslant C_A \| \mathscr{T}^A_{|x-y|} \|$. Il suffit de revenir à la définition d'un rayon spectral pour en déduire l'estimation 1.3.

Maintenant nous savons que le spectre est purement ponctuel; notons spp(H) l'ensemble des valeurs propres de H, et pour $\lambda \in \mathrm{spp}(H)$, Ψ_λ « le » vecteur propre normalisé correspondant [1]; ρ est donné par la formule :

$$\rho(x, y, A) = \pi^2 \mu(\textstyle\sum_{\lambda \in \mathrm{spp}(H) \cap A} |\Psi_\lambda(x)\Psi_\lambda(y)|)$$

et on a vu ci-dessus que $\rho(x, y, A) \leqslant C \exp -(\chi(A)|x-y|)$. D'après le théorème de Fubini, ceci entraîne, pour tout $\eta > 0$, tout x, presque sûrement, pour tout $\lambda \in A \cap \mathrm{spp}(H)$, que l'intégrale :

$$\int |\Psi_\lambda(x)| . |\Psi_\lambda(y)| \exp((\chi(A)-\eta)|x-y|)\, dy$$

est finie, et même que :

$$\int |\Psi_\lambda(y)| \exp(\chi(A)-\eta)|y|)\, dy$$

est presque sûrement finie car $\Psi_\lambda(x)$ ne saurait être nul pour tous les x rationnels. *A fortiori*, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1) \qquad \int_n^{n+1} |\Psi_\lambda(y)|\, dy \leqslant C_1 \exp((-\chi(A)+\eta)n),$$

C_1 étant une variable aléatoire (et une inégalité analogue existe pour n négatif). D'autre part, d'après l'hypothèse H_1, il existe presque sûrement une constante $C(\omega)$ telle que :

$$\sup_{n \leqslant s \leqslant n+1} q(\omega, s) \leqslant C_2(\omega)(1+n^2).$$

En utilisant l'équation différentielle satisfaite par Ψ_λ, ceci implique aussitôt l'existence d'une variable aléatoire C_3 telle que, pour $\lambda \in A$:

$$(2) \qquad \int_n^{n+1} |\Psi''_\lambda(y)|\, dy \leqslant C_3(1+n^2)\exp((-\chi(A)+\eta)n);$$

---

[1] On peut montrer que le spectre discret est simple; de toute façon le raisonnement qui suit ne dépend pas de cette propriété.

on conclut grâce aux inégalités (1) et (2) et au lemme élémentaire suivant : il existe une constante K telle que pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur [0, 1] on ait :

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}(|f(t)|+|f'(t)|)\leqslant K\int_0^1(|f(t)|+|f''(t)|)\,dt.$$

Discussion des hypothèses

La dernière hypothèse qui nous a été nécessaire pour établir le théorème de localisation, c'est-à-dire H_4, est moins anodine que les autres car elle porte sur les processus à valeurs dans $\mathscr{V}\times\mathbb{P}^1$ régissant le potentiel et les solutions du problème de Cauchy et non pas seulement sur le processus qui définit le potentiel. Cependant on peut vérifier H_4 directement dans le modèle envisagé par GOL'SHEID MOLCHANOV et PASTUR qui consiste à prendre pour processus (μ, V_t) le mouvement brownien stationnaire sur une variété $\mathscr{V}$ riemannienne compacte et connexe, et pour F une fonction indéfiniment dérivable qui n'est plate en aucun point (on peut aussi compliquer en introduisant une dérive). Rappelons le principe du raisonnement (*voir* [2]) : les noyaux $\mathscr{N}_t^\lambda$ forment alors le semi-groupe de transition d'un processus de diffusion dont le générateur infinitésimal est un opérateur elliptique dégénéré; on peut cependant vérifier le critère d'hypoellipticité de Hörmander : il en résulte que $\mathscr{N}_t^\lambda$ admet une densité; précisément, on a pour $t>0$:

$$\mathscr{N}_t^\lambda(v, \varphi; dv', d\varphi')=p_t^\lambda(v, \varphi, v', \varphi')\,dv'\,d\varphi',$$

où p_t^λ est une fonction indéfiniment dérivable sur $(\mathscr{V}\times\mathbb{P}^1)^2$; on peut de plus vérifier la continuité jointe par rapport à λ ([5], p. 75; on voit facilement que p^λ en tant que distribution dépend continûment de λ; il faut probablement aussi utiliser une uniformité par rapport à λ d'estimations d'équicontinuité du type du paragraphe 7 de [16]). Donc, par compacité, la borne supérieure pour $\lambda\in A$, v et $v'\in\mathscr{V}$, φ et $\varphi'\in\mathbb{P}^1$, de p_t est finie; comme elle décroît évidemment avec t en vertu de la propriété de semi-groupe de p_t, l'hypothèse H_4 se déduit de la relation :

$$n_t^\lambda(\lambda, v', \varphi')=\int p_t^\lambda(v, \varphi, v', \varphi')\,dv\,d\varphi.$$

Il semble bien probable que H_4 soit vérifiable dans des situations un peu différentes en prenant par exemple $\mathscr{V}$ non compacte ou F moins régulière. D'autre part il est clair que les techniques que nous avons utilisées s'adaptent à des modèles où les potentiels ne sont plus continus, par exemple en escalier.

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie suivante est incomplète sur les plans historique et physique; on peut la compléter à l'aide de celle de [4].

[1] DERRIENIC (Y.) et GUIVARC'H (Y.). — Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 277, série A, 1973, p. 613-615.

[2] YA. GOL'SHEID (I.), MOLCHANOV (S. A.) et PASTUR (L. A.). — A random one-dimensinal Schrödinger operator has a pure point spectrum, *Funct. Anal. Appl.*, vol. 11-1, 1977, p. 1-10.

[3] KUNZ (H.) et SOUILLARD (B.). — Random Schrödinger operators and the theory of disordered systems, *Actes du colloque « Random fields... »*, juin 1979, Esztergom, Hongrie.

[4] KUNZ (H.) et SOUILLARD (B.). — Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires, *Comm. Math. Phys.*, vol. 78, 1980, p. 201-246.

[5] MOLCHANOV (S. A.). — The structure of eigenfunctions of one-dimensional unordered structures, *Math. U.S.S.R. Izvestija*, vol. 12-1, 1978, p. 69-101.

[6] REED (M.) et SIMON (B.). — *Methods of modern mathematical physic*, Acad. Press New York, 1972.

[7] ROYER (G.). — Croissance exponentielle de produits markoviens de matrices aléatoires, *Ann. Inst. H.- Poincaré*, vol. 16-1, 1980, p. 49-62.

[8] RUELLE (D.). — A remark on bound states in potential scattering, *Nuov. Cim.*, vol. 61 A, 1969, p. 655.

[9] SCHWARTZ (L.). — *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Oxford Univ. Press, 1973.

[10] VIRTSER (A. D.). — Sur les produits de matrices et les opérateurs aléatoires, paru en russe dans *Th. Proba. Appl.*, 1979, p. 361-370.

[11] ROSEAU (M.). — *Equations différentielles*, Masson, Paris, 1975.

[12] YOSHIOKA (Y.). — On the singularity of spectral measures of a semi-infinite random system, *Proc. Jap. Acad.*, 1973, p. 655.

[13] GUELFAND (I. M.) et CHILOV (G. E.). — *Les distributions*, traduction de S. Vasilach, Dunod, Paris, t. 3, 1965.

[14] LEVITAN (B. M.) et SARGSJAN (I. S.). — Introduction to spectral theory, *Translations of math. monographs*, 39, Amer. Math. Soc, 1975.

[15] BROWDER (F. E.). — The eigenfunction expansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator, *Proc. N.A.S.* vol. 40, 1954, p. 454.

[16] BONY (J.-M.). — Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, *Ann. Inst. Fourier* vol. 19-1, 1969, p. 277-304.