BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD RAUZY

Nombres algébriques et substitutions

Bulletin de la S. M. F., tome 110 (1982), p. 147-178
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1982__110__147_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
110, 1982, p. 147-178.

NOMBRES ALGÉBRIQUES ET SUBSTITUTIONS

PAR

G. RAUZY (*)

RÉSUMÉ. — On établit un lien entre la répartition dans $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$ de la suite $(N\eta)_{N \in \mathbb{N}}$ (η vecteur à coordonnées dans un corps cubique) et une suite point fixe d'une substitution de longueur non constante.

ABSTRACT. — We set up a link between the distribution in $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$ of the sequence $(N\eta)_{N \in \mathbb{N}}$ (η with coordinates in a given cubic field), and a sequence which is the fixed point of a non constant length-substitution.

Introduction

Nous étendons ici à des éléments d'un corps cubique des résultats connus pour les nombres quadratiques et la rotation associée (*voir* par exemple [4]) et liés dans ce dernier cas à la périodicité de leur développement en fraction continue.

Introduisons pour cela une définition :

DÉFINITION. — *Le triplet* $\mathcal{M}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *est dit un morcellement de* $\mathbb{R}^2$ *modulo* $\mathbb{Z}^2$ *si :*

(i) *les* $\omega_k (k=1, 2, 3)$ *sont des ouverts connexes bornés;*

(ii) *les ensembles* $\omega_k+\mathbb{Z}^2$ *(c'est-à-dire l'ensemble des* $x+y$ *avec* x *dans* ω_k *et* y *dans* $\mathbb{Z}^2$*) sont mutuellement disjoints;*

(iii) $(\omega_1+\mathbb{Z}^2)\cup(\omega_2+\mathbb{Z}^2)\cup(\omega_3+\mathbb{Z}^2)$ *est dense dans* $\mathbb{R}^2$;

(iv) $\forall g \in \mathbb{Z}^2$, $g \neq 0 \Rightarrow \omega_k \cap (g+\omega_k)=\emptyset$ $(k=1, 2, 3)$.

(*) Texte reçu le 16 février 1981.

G. RAUZY, Faculté des Sciences de Luminy, Département de Mathématique-Informatique, 70, route Léon-Lachamp, 13288 Marseille Cedex 2.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1982/147/$ 5.00
© Gauthier-Villars

A un tel morcellement correspond une fonction « numéro » $\nu_{\mathcal{M}}$ définie sur $(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega^3)+\mathbb{Z}^2$ qui à tout x de cet ensemble associe l'unique entier k tel que x appartient à $\omega_k+\mathbb{Z}^2$.

La notation $\nu_{\mathcal{M}}(x)=k$ signifiera dans la suite que x appartient à l'ensemble $(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3)+\mathbb{Z}^2$ et que, bien entendu, son numéro est k.

Soit par ailleurs ζ l'unique racine réelle du polynôme : x^3+x^2+x-1 et soit $u=(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ le point fixe de la substitution Π telle que :

$$\Pi(1)=12, \qquad \Pi(2)=13, \qquad \Pi(3)=1$$

(*voir* définition précise dans le paragraphe 1).

Notre but est alors d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* η *un vecteur de coordonnées* (η_1, η_2) *telles que le triplet* $(1, \eta_1, \eta_2)$ *soit une base du module des entiers algébriques de* $\mathbb{Q}(\zeta)$. *Alors, il existe un morcellement* $\mathcal{M}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *modulo* $\mathbb{Z}^2$ *où les ouverts* ω_k $(k=1, 2, 3)$ *sont simplement connexes et tel que :*

$$\forall N\in\mathbb{N}, \quad \nu_{\mathcal{M}}(N\eta)=u_N.$$

Réciproquement, si $\mathcal{M}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ *est un morcellement de* $\mathbb{R}^2$ *modulo* $\mathbb{Z}^2$ *et si* η *est un vecteur de coordonnées* (η_1, η_2) *tel que :*

$$\forall N\in\mathbb{N}, \quad \nu_{\mathcal{M}}(N\eta)=u_N,$$

alors le triplet $(1, \eta_1, \eta_2)$ *est une base du module des entiers de* $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Ce théorème établit donc un lien entre la répartition d'une suite du type $(N\eta)_{N\in\mathbb{N}}$ où η est un vecteur à coordonnées algébriques, et les suites points fixes d'une substitution de longueur non constante. Ce résultat est à rapprocher de celui concernant les séries formelles algébriques sur un corps fini et les substitutions de longueur constante [2].

Il permet de préciser le comportement du point de vue répartition modulo $\mathbb{Z}^2$ de la suite $(N\eta)_{N\in\mathbb{N}}$: par exemple, les ensembles ω_k sont, de par les propriétés de la suite u, des ensembles *à reste borné*. Par ailleurs, la démonstration fera apparaître (*voir* notamment le lemme 4.2) des propriétés des entiers N pour lesquels $N\eta$ est très proche de 0 modulo $\mathbb{Z}^2$ qu'il serait intéressant d'étudier en elles mêmes.

La démonstration au cours des paragraphes 1 à 6 va consister à construire un morcellement pour un vecteur η particulier (que nous appellerons ξ) de coordonnées ζ et ζ^2; ce morcellement lié à un système privilégié de représentants de $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$ s'introduit naturellement à partir de la suite u et d'un système de numération qui lui est lié; il possède de nombreuses propriétés d'invariance qui sont tout juste effleurées ici, qui impliquent sans doute que la frontière de l'un quelconque des morceaux Ω_k du morcellement est de dimension de Hausdorff strictement supérieure à 1. Les paragraphes 7 et 8 sont consacrés à la réciproque dont les idées essentielles sont contenues dans les sous paragraphes 7.1 et 7.3.

Le lecteur pourra constater que beaucoup de raisonnements s'étendent aisément à des situations plus générales, d'autres étant par contre tout à fait spécifiques du cas particulier considéré : qu'il ne pense pas qu'il s'agit là d'un parti pris.

1. La suite u

1.1. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{A}^*$ l'ensemble des mots sur l'alphabet $\mathfrak{A}$, et soit Π l'application de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}^*$ définie par :

$$\Pi(1)=12, \qquad \Pi(2)=13, \qquad \Pi(3)=1.$$

Nous prolongeons Π en une application de $\mathfrak{A}^*$ dans $\mathfrak{A}^*$ en posant pour tout mot non vide $V=v_1 \ldots v_m$ de $\mathfrak{A}^*$:

$$\Pi(V)=\Pi(v_1) \ldots \Pi(v_m)$$

et en convenant que Π laisse fixe le mot vide.

Nous définissons également une application Π^* de $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{A}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite : $v=v_0 \ldots v_n \ldots$ associe la suite : $\Pi^*(v)=\Pi(v_0) \ldots \Pi(v_n) \ldots$

Π^* a alors un unique point fixe u :

$$u=12131211213\ldots$$

Nous désignons par U_0 le mot vide, et pour tout entier N strictement positif, par U_N le mot de $\mathfrak{A}^*$ formé des N premiers termes de u :

$$U_N=u_0 \ldots u_{N-1}.$$

1.2. Nous nous proposons d'étudier la fréquence d'apparition de chaque élément de $\mathfrak{A}$ dans la suite u. Introduisons pour cela une notation : soit k un élément de $\mathfrak{A}$, V un élément de $\mathfrak{A}^*$: nous désignons par $r_k(V)$ le nombre de fois où la lettre k figure dans le mot V, et par $r(V)$ le vecteur colonne de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $r_1(V)$, $r_2(V)$, $r_3(V)$.

Il est alors immédiat que :

$$\forall V \in \mathfrak{A}^*, \quad r(\Pi(V)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} r(V). \tag{12}$$

1.3. Soit V un mot non vide, nous allons étudier dans un premier temps $r(\Pi^n(V))$, c'est-à-dire la quantité : $A^n r(V)$, en désignant par A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que A est la matrice associée à la relation de récurrence :

$$v_{n+3} = v_{n+2} + v_{n+1} + v_n. \tag{13}$$

En ce sens que, quels que soient v_0, v_1, v_2, on a :

$$\begin{pmatrix} v_n+2 \\ v_n+1 \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

A a donc pour polynôme caractéristique le polynôme :

$$x^3 - x^2 - x - 1,$$

dont on vérifie aisément qu'il admet une seule racine réelle θ strictement supérieure à 1, et deux racines imaginaires conjuguées α et $\bar{\alpha}$. On a : $\alpha\bar{\alpha} = 1/\theta$.

Donc, α et $\bar{\alpha}$ ont un module strictement inférieur à 1 : θ est un nombre de Pisot. Remarquons, d'autre part, que le nombre ζ de l'introduction est l'inverse de θ.

1.4. Il résulte de théorèmes généraux sur les substitutions (*voir* par exemple [3]) que lorsque n tend vers l'infini, le vecteur $1/\theta^n r(\Pi^n(V))$ tend vers une limite qui, par suite de la relation (12), est un vecteur propre de A associé à la valeur propre θ. Ce résultat se prouve d'ailleurs aisément dans ce cas particulier en utilisant la forme générale d'une suite vérifiant la relation de récurrence (13).

On vérifie directement que le vecteur de coordonnées ζ, ζ^2, ζ^3 est un tel vecteur propre associé à la valeur propre θ, et que la somme de ses coordonnées est égale à 1.

Désignant par $l(V)$ la longueur du mot V, c'est-à-dire encore la somme $\sum_{k \in \mathfrak{A}} r_k(V)$, on en déduit alors que si V est non vide :

$$\frac{1}{l(V)} r(\Pi^n(V)) \to \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \\ \zeta^3 \end{pmatrix}.$$

Il est donc naturel d'introduire les quantités :

$$\Delta_k(V) = \zeta^k l(V) - r_k(V), \qquad k = 1, 2, 3.$$

Par ailleurs, $\sum_{k \in \mathfrak{A}} \Delta_k(V) = 0$.

Nous nous bornerons par conséquent à l'étude du vecteur colonne $\Delta(V)$ de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $\Delta_1(V)$ et $\Delta_2(V)$. On voit alors immédiatement que :

(14) $$\forall V \in \mathfrak{A}^*, \quad \Delta(\Pi(V)) = B\Delta(V),$$

où B désigne la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} -\zeta & -\zeta \\ 1-\zeta^2 & -\zeta^2 \end{pmatrix}.$$

1.5. Nous posons, pour $N \geqslant 0$,

$$\delta(N) = \Delta(U_N) = N \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1(U_N) \\ r_2(U_N) \end{pmatrix}$$

et appelons z le vecteur :

$$\delta(1) = \begin{pmatrix} \zeta - 1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}.$$

Nous désignons, par ailleurs, par $g(n)$ la longueur du mot $\Pi^n(1)$. g vérifie une relation de récurrence du type (13) avec :

$$g(0)=1, \qquad g(1)=2, \qquad g(2)=4.$$

D'autre part, quelque soit l'entier n, la suite u débute par le mot $\Pi^n(1)$, et par conséquent $U_{g(n)}=\Pi^n(1)$. De la relation (14) on en déduit :

$$(15) \qquad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \delta(g(n))=B^n z.$$

1.6. Remarquons maintenant que le polynôme caractéristique de B est le polynôme :

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})$$

et qu'il en résulte (en diagonalisant, ou en utilisant les résultats généraux sur les relations de récurrence) qu'il existe un vecteur a de $\mathbb{C}^2$ tel que :

$$(16) \qquad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \delta(g(n))=\alpha^n a+\bar{\alpha}^n \bar{a}.$$

En d'autres termes, $\delta(g(n))$ se déduit de α^n par une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Pour étudier $\delta(N)$, il nous faut maintenant décomposer U_N en mots du type $\Pi^n(1)$.

2. Un système de numération

2.1. Lemme. — *Soit N un entier strictement positif, et soit n l'unique élément de $\mathbb{N}$ tel que :*

$$g(n)\leqslant N<g(n+1).$$

Alors :

$$U_N=\Pi^n(1)\,U_{N-g(n)}.$$

Démonstration. — Le lemme se vérifie immédiatement pour $n=0$ et $n=1$. Supposons donc $n\geqslant 2$.

Comme u commence par $\Pi^n(1)$ et que $l(\Pi^n(1))\leqslant l(U_N)$, U_N commence par $\Pi^n(1)$, c'est-à-dire $U_N=\Pi^n(1)\,V$, où V est un mot de longueur $N-g(n)$.

Par ailleurs, u commence par $\Pi^{n+1}(1)$, de longueur $g(n+1)$ supérieure à N, donc $\Pi^{n+1}(1)$ commence par U_N. Mais :

$$\Pi^{n+1}(1)=\Pi^n(12)=\Pi^n(1)\Pi^n(2).$$

Donc $\Pi^n(2)$ commence par V. Mais :

$$\Pi^n(2)=\Pi^{n-1}(13)=\Pi^{n-2}(121)=\Pi^{n-2}(1)\Pi^{n-2}(2)\Pi^{n-2}(1)$$

et :

$$\Pi^n(1)=\Pi^{n-1}(12)=\Pi^{n-2}(1213)=\Pi^{n-2}(1)\Pi^{n-2}(2)\Pi^{n-2}(1)\Pi^{n-2}(3).$$

Donc $\Pi^n(1)$ commence par $\Pi^n(2)$ et *a fortiori* par V. V est donc le début de $\Pi^n(1)$, donc de u, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Comparant la longueur de $\Pi^n(2)$ et celle de $\Pi^n(1)$, en vertu des formules précédentes on en déduit également que :

$$\forall n\in N,\quad g(n+1)\leqslant 2g(n).$$

2.2. LEMME. — *Soit N un entier strictement positif. Il existe alors un entier s et un $s+1$ uplet $(n_0, \ldots, n_s)$ d'entiers tel que :*

(i) $0\leqslant n_0<n_1 \ldots <n_s$;

(ii) *pour aucun* $k=0, \ldots, s-2$ *on ne peut avoir* $n_{k+2}=n_k+2$;

(iii) $U_N=\Pi^{n_s}(1)\ldots\Pi^{n_0}(1)$.

Démonstration. — Nous supposons que $g(n)\leqslant N<g(n+1)$ et nous allons faire la démonstration par récurrence sur n. Le résultat étant évident avec $s=0$, $n_0=0$ pour $n=0$ (et donc $N=1$), nous supposons que $n\geqslant 1$.

D'après le lemme 2.1, on a alors $U_N=\Pi^n(1)\,U_{N-g(n)}$, et d'après la remarque faite en fin du paragraphe 2.1, $N-g(n)$ est strictement inférieur à $g(n+1)-g(n)$ donc à $g(n)$.

L'hypothèse de récurrence s'applique donc à $N-g(n)$ et on a par conséquent :

$$U_{N-g(n)}=\Pi^{n_s}(1)\ldots\Pi^{n_0}(1)$$

où $(n_0, \ldots, n_s)$ satisfait aux conditions (i) et (ii) du lemme. On en déduit que :

$$U_N=\Pi^n(1)\Pi^{n_s}(1)\ldots\Pi^{n_0}(1)$$

et il reste à montrer que $(n_0, \ldots, n_s, n)$ satisfait bien aux conditions (i) et (ii). Mais, tout d'abord :

$$N-g(n)=l(U_{N-g(n)})\geqslant l(\Pi^{n_s}(1))=g(n_s).$$

Comme $N-g(n)$ est strictement inférieur à $g(n)$, on en déduit que n_s est strictement inférieur à n, ce qui établit la propriété (i).

Pour vérifier (ii), il suffit de montrer qu'on ne peut avoir :

$$n=n_{s-1}+2, \qquad \text{soit} \quad n_{s-1}=n-2, \qquad n_s=n-1.$$

Mais on aurait alors :

$$\begin{aligned}\Pi^n(1)\Pi^{n_s}(1)\Pi^{n_{s-1}}(1) &\\ &= \Pi^{n-2}(\Pi^2(1))\Pi^{n-2}(\Pi(1))\Pi^{n-2}(1)\\ &=\Pi^{n-2}(1\,21312\,1)=\Pi^{n-2}(\Pi^3(1))=\Pi^{n+1}(1)\end{aligned}$$

et U_N commencerait par $\Pi^{n+1}(1)$, donc N serait supérieur à $g(n+1)$ ce qui est impossible par hypothèse.

2.3. Lemme. — *Soit N un entier strictement positif. Il existe alors un unique entier s et un unique* $s+1$*-uplet* $(n_0, \ldots, n_s)$ *satisfaisant aux conditions* (i) *et* (ii). *Il en résulte que si* $(n_0, \ldots, n_s)$ *est un s-uplet satisfaisant à ces conditions, et si N est l'entier défini par :*

$$N=\textstyle\sum_{j=0}^{s} g(n_j),$$

on a : $U_N=\Pi^{n_s}(1)\ \ldots\ \Pi^{n_0}(1)$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord par récurrence sur s que si $(n_0, \ldots, n_s)$ est un $s+1$-uplet satisfaisant aux conditions (i) et (ii) on a :

$$\textstyle\sum_{j=0}^{s} g(n_j)<g(n_s+1).$$

La propriété est évidente pour $s=0$ puisque g est strictement croissante.

Supposons la vraie pour tout $s+1$-uplet, et soit $(n_0, \ldots, n_{s+1})$ un $s+2$-uplet satisfaisant aux conditions (i) et (ii). Alors $(n_0, \ldots, n_s)$ satisfait aussi à ces conditions. Supposons tout d'abord :

$$n_{s+1}>1+n_s.$$

On a alors :

$$\textstyle\sum_{j=0}^{s+1} g(n_j) < g(n_s+1) + g(n_{s+1}) \leqslant g(n_{s+1}-1) + g(n_{s+1}) < g(n_{s+1}+1),$$

puisque g vérifie la relation de récurrence (13). Supposons maintenant que $n_{s+1} = 1 + n_s$.

Alors, ou bien $s=0$ et la propriété est immédiatement vérifiée toujours en vertu de la relation (13), ou bien $s \geqslant 1$ et $(n_0, \ldots, n_{s-1})$ est de nouveau un s-uplet satisfaisant aux conditions (i) et (ii), et par conséquent :

$$\textstyle\sum_{j=0}^{s-1} g(n_j) < g(n_{s-1}+1).$$

Mais, dans ce cas, on ne peut avoir :

$$n_{s-1} + 1 = n_s,$$

car le $s+2$-uplet $(n_0, \ldots, n_{s+1})$ ne satisferait pas à la condition (ii). On a donc :

$$\textstyle\sum_{j=0}^{s+1} g(n_j) < g(n_s-1) + g(n_s) + g(n_s+1) = g(n_{s+1}+1),$$

ce qui achève la démonstration de l'inégalité annoncée.

Si maintenant $(n_0, \ldots, n_s)$ est un s-uplet vérifiant les conditions (i) et (ii) et si N est l'entier défini par :

$$N = \textstyle\sum_{j=0}^{s} g(n_j),$$

il résulte de l'inégalité précédente que n_s est nécessairement le seul entier n vérifiant l'inégalité :

$$g(n) \leqslant N < g(n+1).$$

Par récurrence, on en déduit le résultat cherché.

2.4. Soit maintenant $\mathcal{N}$ l'ensemble des suites à termes dans $\{0, 1\}$ dans lesquelles ne figurent pas trois 1 consécutifs, et dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Il résulte de ce qui précède que *pour tout entier N de $\mathbb{N}$, il existe une unique suite $\varepsilon(N)$ de $\mathcal{N}$ telle que* :

$$N = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N)\, g(n) \tag{24}$$

(la somme est en fait une somme finie puisque $\varepsilon_n(N)$ est nul à partir d'un certain rang).

Nous avons donc là un système de numération : on voit aisément qu'il s'obtient en écrivant la suite des entiers dans le système binaire en enlevant tous les entiers dont l'écriture comporte trois 1 consécutifs, et en faisant correspondre à l'entier N l'écriture binaire du terme de rang N dans la suite ainsi obtenue.

2.5. L'addition ne s'exprime pas par un algorithme simple dans le système de numération précédent. Il y a cependant un cas où la somme s'exprime simplement :

LEMME. — *Si M et N sont deux éléments de $\mathbb{N}$ tels que la suite de terme général $\varepsilon_n(M)+\varepsilon_n(N)$ appartient à $\mathcal{N}$, alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n(M+N)=\varepsilon_n(M)+\varepsilon_n(N).$$

Démonstration. — Immédiate à partir de l'unicité du développement.

2.6. THÉORÈME. — *Soit N un entier de développement :*

$$N=\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) g(n).$$

Alors on a :

$$\delta(N)=\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(N) B^n z.$$

Démonstration. — Immédiate à partir de l'unicité du développement.

2.7. Donnons maintenant une propriété de $\mathcal{N}$.

Soient $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3$ les parties de $\mathcal{N}$ définies par :

$$\mathcal{N}_1=\{\varepsilon \in \mathcal{N},\ \varepsilon_0=0\},$$
$$\mathcal{N}_2=\{\varepsilon \in \mathcal{N},\ \varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1=0\},$$
$$\mathcal{N}_3=\{\varepsilon \in \mathcal{N},\ \varepsilon_0=1,\ \varepsilon_1=1\}.$$

Il est clair que $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3)$ forme une partition de $\mathcal{N}$. Appelons alors $\nu(N)$ l'unique élément de $\mathfrak{A}$ tel que le développement de N appartient à $\mathcal{N}_{\nu(N)}$.

LEMME. — $(\nu(N))_{N \in \mathbb{N}}=u$.

Démonstration. — On vérifie que $\nu(0)=1$ puisque le développement de 0 c'est-à-dire la suite dont tous les termes sont nuls appartient à $\mathcal{N}_1$.

Soit maintenant N strictement positif et soit n tel que :

$$g(n) \leqslant N < g(n+1).$$

On a alors d'après le lemme 2.1 :

$$U_N = \Pi^n(1)\, U_{N-g(n)}.$$

La dernière lettre de U_N c'est-à-dire u_{N-1} coïncide donc avec la dernière lettre de $U_{N-g(n)}$ c'est-à-dire $u_{N-g(n)-1}$.

Supposons maintenant $n \geqslant 2$; on a vu que $\Pi^n(2)$ est alors le début de u, et la propriété précédente reste encore vraie pour $N = g(n+1)$, car :

$$U_{g(n+1)} = \Pi^{n+1}(1) = \Pi^n(1)\,\Pi^n(2).$$

On a donc finalement en remplaçant $N-1$ par N :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall N \quad \text{tel que } g(n) \leqslant N < g(n+1),$$
$$u_N = u_{N-g(n)}.$$

Mais toujours en vertu du lemme 2.1, les développements de N et de $N-g(n)$ coïncident jusqu'au rang $n-1$. On a donc également :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall N \quad \text{tel que } g(n) \leqslant N < g(n+1),$$
$$\nu(N) = \nu(N - g(n)).$$

Il suffit maintenant pour achever la démonstration de vérifier que les suites $(\nu(N))_{N \in \mathbb{N}}$ et u coïncident jusqu'au terme de rang $g(2)-1$ ce qui est immédiat.

3. L'ensemble E

3.1. Nous désignons par E l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\delta(N)$, $N \in \mathbb{N}$, et par Ω l'intérieur de l'adhérence $\overline{E}$ de E.

Il résulte immédiatement de la relation (16) et du lemme 2.2 que E est l'image par une application linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$, de l'ensemble des sommes $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \alpha^n$, $(\varepsilon_n) \in \mathcal{N}$, et est en particulier borné.

Nous allons préciser ce résultat, en introduisant sur $\mathbb{R}^2$ une norme adaptée à la matrice B.

Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} + \zeta & \zeta \\ -(\alpha + \zeta) & -\zeta \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que :

$$MB=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \bar{\alpha}\end{pmatrix}M.$$

Si on prend pour norme d'un vecteur x de coordonnées x_1, x_2 la norme euclidienne associée au vecteur Mx, c'est-à-dire si on pose :

$$\|x\|=|(\alpha+\zeta)x_1+\zeta x_2|,$$

on aura alors :

$$\|Bx\| = |\alpha|\ \|x\|=\sqrt{\zeta}\,\|x\|. \tag{31}$$

3.2. $|\alpha|$ étant inférieur à 1, il résulte de l'inégalité (31) que toute série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n B^n z$, où la suite (c_n) est bornée, est convergente.

En particulier, l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ étant compact pour la topologie produit de la topologie discrète sur $\{0, 1\}$, il en résulte que tout élément de $\bar{E}$ s'écrit sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^n z,$$

où la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à l'adhérence $\overline{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{N}$ dans $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ pour la topologie précédente, c'est-à-dire encore à l'ensemble des suites ne comportant pas trois 1 consécutifs.

On en déduit alors :

LEMME. — *L'ensemble $\bar{E}$ est intérieur au carré ensemble des x de coordonnées x_1, x_2 tels que :* Max $(|x_1|, |x_2|)<1$.

Démonstration. — Soit x un élément de $\bar{E}$ de développement :

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n B^n z.$$

Par hypothèse, il n'existe aucun entier n tel que $\varepsilon_n=\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_{n+2}=1$. On peut donc écrire x sous la forme :

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} B^{3n} y_n,$$

où y_n appartient à l'ensemble F des 7 vecteurs :

$$0,\ z,\ Bz,\ B^2 z,\ z+Bz,\ z+B^2 z,\ Bz+B^2 z.$$

On en déduit que :

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{3n} \sup_{y \in F} \|y\|.$$

On vérifie alors immédiatement que :

$$\sup_{y \in F} \|y\| = \|z\| = \zeta^2$$

et on en déduit :

$$\|x\| \leqslant \frac{\zeta^2}{1-|\alpha|^3} < 0{,}50.$$

Par ailleurs, l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^2$ tels que $\|x\| < c$ est le domaine limité par une ellipse dont on vérifie (en déterminant l'ellipse tangente à l'un des côtés du carré) qu'elle est entièrement contenue dans le carré dès que :

$$c \leqslant 0{,}53,$$

ce qui implique le résultat.

3.3. En fait, nous n'avons pas besoin dans la suite d'un résultat aussi précis : ce qui est important (et peut se démontrer directement) est que aucun point de $\mathbb{Z}^2$ autre que l'origine n'appartient à $\overline{E}$. Nous en déduisons :

LEMME FONDAMENTAL. — *Soit ξ le vecteur de coordonnées ζ et ζ^2. Il existe un nombre strictement positif c tel que* :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall g \in \mathbb{Z}^2, \qquad \|N\xi - g\| < c \quad \Rightarrow \quad \delta(N) = N\xi - g.$$

Démonstration. — D'après ce qui précède il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall g \in \mathbb{Z}^2, \qquad \inf_{x \in E} \|g - x\| < c \quad \Rightarrow \quad g = 0,$$

$\delta(N) - N\xi$ étant par définition un élément de $\mathbb{Z}^2$, le lemme en découle.

3.4. COROLLAIRE. — *L'origine est point intérieur de $\overline{E}$, c'est-à-dire appartient à Ω.*

Démonstration. — 1, ζ, ζ^2 sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants. La suite $(N\xi)_{N \in \mathbb{N}}$ est alors dense dans $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$, et en particulier dans l'ensemble $\|x\| < c$ dès que c est suffisamment petit.

Prenant c comme dans le lemme précédent, on en déduit que les points $(\delta(N))_{N\in\mathbb{N}}$ sont denses dans cet ensemble, donc que $\overline{E}$ le contient.

3.5. Nous avons vu que tout point de $\overline{E}$ pouvait se représenter sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n B^n z \qquad \text{où} \qquad (\varepsilon_n)\in\overline{\mathcal{N}}.$$

Réciproquement, bien entendu, tout point de cette forme est un point de $\overline{E}$ puisque limite des points $\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_n B^n z$ qui appartiennent à E.

$\overline{\mathcal{N}}$ étant manifestement invariant par le « shift », il en résulte en particulier que, quel que soit l'entier n de $\mathbb{N}$, l'ensemble $B^n\overline{E}$ est inclus dans $\overline{E}$.

Soit maintenant N un élément de $\mathbb{N}$, et soit m un entier tel que :

$$\forall n\geqslant m, \quad \varepsilon_n(N)=0.$$

L'ensemble $\delta(N)+B^{m+2}\overline{E}$ est alors inclus dans $\overline{E}$. $\delta(N)$ étant un point intérieur de cet ensemble, il en résulte que *E est contenu dans l'intérieur Ω de $\overline{E}$ et que, par conséquent, $\overline{E}$ est l'adhérence de son intérieur.*

4. Les ensembles Ω_1, Ω_2, Ω_3.

4.1. Pour k appartenant à $\mathfrak{U}$, désignons par E_k l'ensemble des $\delta(N)$ avec N appartenant à $\mathcal{N}_k$, et par Ω_k l'intérieur de $\overline{E}_k$. Il est clair, vu le développement du paragraphe 3.2, que :

$$\overline{E}_1=B\overline{E}, \qquad \overline{E}_2=z+B^2\overline{E}, \qquad \overline{E}_3=z+Bz+B^3\overline{E}$$

et que :

$$\overline{E}=\overline{E}_1\cup\overline{E}_2\cup\overline{E}_3.$$

Par ailleurs, les résultats du paragraphe 3.5 s'étendent, évidemment, aux ensembles E_k de sorte que E_k est contenu dans Ω_k.

Le développement du paragraphe 3.2 n'est pas *a priori* unique; nous allons voir néanmoins qu'il y a « presque » unicité.

LEMME. — *Les ouverts Ω_1, Ω_2, Ω_3 sont mutuellement disjoints.*

Démonstration. — L'ensemble $\overline{E}$ est compact, il est donc mesurable et sa mesure de Lebesgue $\mu(\overline{E})$ est finie et non nulle puisque 0 est point intérieur de E.

On a évidemment $\mu(\overline{E}) \leqslant \mu(\overline{E}_1)+\mu(\overline{E}_2)+\mu(\overline{E}_3)$ l'égalité ne pouvant avoir lieu que si :

$$\forall i, j \in \mathfrak{U}, \qquad i \neq j \;\leftarrow\; \mu(\overline{E}_i \cap \overline{E}_j)=0.$$

Or, la matrice B étant de déterminant égal à ζ on a :

$$\mu(\overline{E}_1)=\zeta\mu(\overline{E}), \qquad \mu(\overline{E}_2)=\zeta^2\mu(\overline{E}), \qquad \mu(\overline{E}_3)=\zeta^3\mu(\overline{E}).$$

Comme ζ vérifie l'équation $1=\zeta+\zeta^2+\zeta^3$ on a bien l'égalité :

$$\mu(\overline{E})=\mu(\overline{E}_1)+\mu(\overline{E}_2)+\mu(\overline{E}_3),$$

ce qui entraîne en particulier que :

$$\forall i, j \in \mathfrak{A}, \qquad i \neq j \;\Rightarrow\; \mu(\Omega_j \cap \Omega_j)=0$$

et les Ω_k étant des ouverts la proposition énoncée dans le lemme.

4.2. Nous pouvons maintenant préciser le lemme fondamental du paragraphe 3.3.

LEMME. — *Il existe un nombre strictement positif c, tel que* :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall g \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$
$$\| N\xi - g \| < c\zeta^{m/2} \;\Rightarrow\; \forall n < m, \qquad \varepsilon_n(N)=0.$$

Démonstration. — Nous prenons pour c le nombre dont l'existence est prouvée dans le lemme fondamental, en le choisissant suffisamment petit pour que $\|x\| < c \Rightarrow x \in \Omega$. L'ensemble $\|x\| < c$ étant contenu dans Ω, il en résulte que son transformé par l'application B^m, c'est-à-dire l'ensemble $\|x\| < c\zeta^{m/2}$ est contenu dans $B^m\Omega$.

Par ailleurs :

$$\| N\xi - g \| < c\zeta^{m/2} \;\Rightarrow\; \| N\xi - g \| < c,$$

donc $\delta(N)=N\xi-g$.

Il reste donc à prouver que $\delta(N) \in B^m\Omega \Rightarrow \forall n < m$, $\varepsilon_n(N)=0$.

Pour toute suite $(k_1, \ldots, k_m)$ d'élément de $\mathfrak{A}$, définissons alors l'ensemble $\Omega(k_1, \ldots, k_m)$ par récurrence sur m de la manière suivante :

— si $m=1$,

$$\Omega(v)=\Omega_v;$$

– $\Omega(k_1, \ldots, k_m, 1) = B\,\Omega(k_1, \ldots, k_m)$,

$$\Omega(k_1, \ldots, k_m, 2) = z + B^2\,\Omega(k_1, \ldots, k_m),$$

$$\Omega(k_1, \ldots, k_m, 3) = z + Bz + B^3\,\Omega(k_1, \ldots, k_m).$$

On voit alors immédiatement par récurrence que les ensembles $\Omega(k_1, \ldots, k_m)$ (m fixe) sont mutuellement disjoints, et que si N est un entier tel que :

$$\exists\, n < m, \quad \varepsilon_n(N) = 1.$$

$\delta(N)$ appartient à un $\Omega(k_1, \ldots, k_m)$ où tous les k_j ne sont pas égaux à 1. Par conséquent :

$$\delta(N) \in B^m\,\Omega = \Omega(1, \ldots, 1) \;\Rightarrow\; \forall\, n < m, \qquad \varepsilon_n(N) = 0.$$

4.3. LEMME. – *Soient x et y des éléments de Ω, alors :*

$$y - x \in \mathbb{Z}^2 \;\Rightarrow\; y = x.$$

Démonstration. – Posons $y - x = g$. Ω étant ouvert, il en résulte que l'on peut choisir un entier M de $\mathbb{N}$ tel que $\delta(M)$ soit suffisamment proche de x pour que $\delta(M) + g$ appartienne à Ω.

Soit m un entier tel que $\forall\, n > m$, $\varepsilon_n(M) = 0$ et soit N un entier tel que :

$$\| \delta(N) - (\delta(M) + g) \| < c\,\zeta^{(m+2)/2}.$$

Il existe alors un élément h de $\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$(N - M)\,\xi - h = \delta(N) - (\delta(M) + g)$$

et d'après le lemme précédent, il en résulte que :

$$\forall\, n < m + 2, \quad \varepsilon_n(N - M) = 0.$$

Le lemme 2.5 sur l'addition s'applique donc et on en déduit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n(N) = \varepsilon_n(M) + \varepsilon_n(N - M),$$

d'où :

$$\delta(N) = \delta(M) + \delta(N - M)$$

et comme :

$$\delta(N-M)=(N-M)\xi-h,$$

on obtient finalement :

$$\|g\|=\|\delta(N-M)\|<c\zeta^{(m+2)/2},$$

ne qui entraîne, si m est choisi assez grand, $g=0$.

Remarque. — La démonstration reste valable si le point x est seulement supposé appartenir à $\overline{E}$. Bien entendu, toute classe de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ayant un représentant dans $\overline{E}$ (par suite de la densité de la suite $(N\xi)$ modulo $\mathbb{Z}^2$) à tout point de la frontière de $\overline{E}$ est associé un autre point différent du premier par un élément non nul de $\mathbb{Z}^2$.

5. Connexité et simple connexité

5.1. Le développement donné dans le paragraphe 3.2 n'est pas nécessairement unique : montrons en particulier que le point :

$$w=\sum_{n=0}^{\infty} B^n z,$$

appartient à $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \overline{E}_3$.

En effet, B annule son polynôme caractéristique qui est un diviseur de x^3-x^2-x-1.

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n+B^{n+1}+B^{n+2}=B^{n+3}$$

et on en déduit :

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} B^{3n} z=z+\sum_{n=1}^{\infty} B^{3n+1} z \quad =z+Bz+\sum_{n=1}^{\infty} B^{3n+2} z,$$

d'où le résultat.

5.2. LEMME. — *$\overline{E}$ est connexe.*

Démonstration. — $\overline{E}$ étant compact, il suffit de montrer qu'il est bien enchaîné. Pour toute suite $(k_1, \ldots, k_m)$ d'éléments de $\mathfrak{A}$ désignons alors par

$\overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$ l'adhérence de l'ensemble $\Omega(k_1, \ldots, k_m)$ introduit dans le paragraphe 4.2. On a donc :

$$\overline{E}(k_1, \ldots, k_m, 1) = B\overline{E}(k_1, \ldots, k_m),$$
$$\overline{E}(k_1, \ldots, k_m, 2) = z + B^2\,\overline{E}(k_1, \ldots, k_m),$$
$$\overline{E}(k_1, \ldots, k_m, 3) = z + B\,z + B^3\,\overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$$

et le diamètre de $\overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$ est égal à $\zeta^{(k_1+\ldots+k_m)/2}$ fois le diamètre de $\overline{E}$, et tend donc vers zéro quand m tend vers l'infini. Soit, par ailleurs, $w(k_1, \ldots, k_m)$ le point défini par :

$$w(1) = w(2) = w(3) = w,$$
$$w(k_1, \ldots, k_m, 1) = B\,w(k_1, \ldots, k_m),$$
$$w(k_1, \ldots, k_m, 2) = z + B^2\,w(k_1, \ldots, k_m),$$
$$w(k_1, \ldots, k_m, 3) = z + B\,z + B^3\,w(k_1, \ldots, k_m).$$

On voit aisément par récurrence que :

$$w(k_1, \ldots, k_m) \in \overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$$

et que :

$$w(1, k_2, \ldots, k_m) = w(2, k_2, \ldots, k_m) = w(3, k_2, \ldots, k_m)$$

donc que ce point appartient à $\bigcap_{j \in \mathfrak{A}} \overline{E}(j, k_2, \ldots, k_m)$.

Soient maintenant x et y deux points de $\overline{E}$; montrons par récurrence sur m qu'il existe une chaîne $(x_1, \ldots, x_N)$ d'éléments de $\overline{E}$ telle que :

(i) $x_1 = x$, $x_N = y$;

(ii) $\forall j = 1, \ldots, N-1$, $\exists (k_1, \ldots, k_m)$, x_j et x_{j+1} appartiennent à $\overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$.

C'est évident pour $m = 0$ (dans ce cas l'ensemble $\overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$ est $\overline{E}$). Supposons la propriété vraie pour m et montrons la pour $m+1$.

Soit donc $(x_1, \ldots, x_N)$ une chaîne possédant les propriétés 1 et 2, et soit j un élément de $\{1, \ldots, N-1\}$.

x_j et x_{j+1} appartiennent au même ensemble $\overline{E}(k_1, \ldots, k_m)$. Or :

$$\overline{E}(k_1, \ldots, k_m) = \bigcup_{k \in \mathfrak{A}} \overline{E}(k, k_1, \ldots, k_m).$$

Le point $w(k, k_1, \ldots, k_m)$ étant commun à ces trois ensembles il en résulte que x_j et ce point appartiennent à un même ensemble $\overline{E}(k, k_1, \ldots, k_m)$ et de même que ce point et x_{j+1} appartiennent aussi à un même ensemble $\overline{E}(k', k_1, \ldots, k_m)$ ce qui démontre bien la propriété.

Deux points quelconques de $\overline{E}$ peuvent donc être joints par une chaîne $(x_1, \ldots, x_N)$ telle que :

$$\forall j=1, \ldots, N-1, \quad \| x_{j+1}-x_j \| < \zeta^{m/2} \operatorname{diam}(\overline{E}),$$

ce qui démontre bien, m pouvant être pris arbitrairement grand, que $\overline{E}$ est bien enchaîné.

5.3. Lemme. — *Ω est simplement connexe.*

Démonstration. — Soit Γ une courbe de Jordan fermée, simple, contenue dans Ω. $\mathbb{R}^2-\Omega$ a deux composantes connexes : soit D la composante bornée (« l'intérieur » de Γ) et D' l'autre composante.

Il suffit de montrer que $D \subset \Omega$.

L'image $B\Gamma$ de Γ par l'application représentée par la matrice B est contenue dans $B\Omega=\Omega_1$. Γ étant compact, il existe donc un nombre réel r strictement positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad \inf_{y \in B\Gamma} \| x-y \| < r \quad \Rightarrow \quad x \in \Omega_1.$$

Soient BD et BD' les images de D et D' par l'application représentée par la matrice B, BD et BD' sont évidemment les composantes connexes de $\mathbb{R}^2-B\Gamma$.

Montrons maintenant que : $BD \cap \overline{E} \subset B\overline{E}$. Soit donc x_0 un point de $BD \cap \overline{E}$. x_0 appartient à l'un des trois ensembles $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{E}_3$.. S'il n'appartenait pas à $\overline{E}_1$, l'un des ensembles $\overline{E}_2$ ou $\overline{E}_3$ aurait par conséquent un point dans BD.

Soit $\overline{E}_k$ cet ensemble. $\overline{E}_k$ est connexe comme image continue de $\overline{E}$ qui est connexe en vertu du paragraphe précédent. Par ailleurs $\overline{E}_k$ n'a aucun point connu avec Ω_1 sinon $\Omega_k \cap \Omega_1$ ne serait pas vide puisque $\overline{E}_k$ est l'adhérence de Ω_k. En particulier $\overline{E}_k$ n'a aucun point dans l'ensemble des x tels que :

$$\inf_{y \in B\Gamma} \| x-y \| < r.$$

Il en résulte que $\overline{E}_k$ serait alors entièrement contenu dans BD. Le point w nommun aux ensembles $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{E}_3$ appartiendrait donc à BD. $\overline{E}_2$ et $\overline{E}_3$ auraient donc un point dans BD, ce qui en vertu du raisonnement précédent entraînerait que $\overline{E}_2$ et $\overline{E}_3$ seraient contenus dans BD.

On aurait donc : $BD' \cap \overline{E} \subset B\overline{E}$.

Soit alors x_1 l'un des points de $\overline{E}$ tel que :

$$\| x_1 \| = \sup_{x \in \overline{E}} \| x \|,$$

x_1 est évidemment dans BD', donc devrait être dans $B\overline{E}$. Le point $B^{-1} x_1$ appartiendrait alors à $\overline{E}$ ce qui est impossible puisque :

$$\| B^{-1} x_1 \| = \zeta^{-1/2} \| x_1 \| > \| x_1 \|.$$

On a donc bien $BD \cap \overline{E} \subset B\overline{E}$, c'est-à-dire encore $BD \cap \overline{E} = BD \cap B\overline{E}$. Remplaçant alors Γ par la courbe $B^{n-1}\Gamma$, qui est encore une courbe de Jordan fermée simple contenue dans Ω, on voit que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on a :

$$B^n D \cap \overline{E} = B^n D \cap B\overline{E}.$$

Il en résulte par récurrence sur n que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n D \cap \overline{E} = B^n D \cap B^n \overline{E}.$$

La propriété est vraie, en effet, pour $n=0$, et si elle est vraie pour n on a :

$$\begin{aligned} B^{n+1} D \cap \overline{E} = B^{n+1} D \cap B\overline{E} = B(B^n D \cap \overline{E}) \\ = B(B^n D \cap B^n \overline{E}) = B^{n+1} D \cap B^{n+1} \overline{E} \end{aligned}$$

et elle est donc vraie pour $n+1$.

Supposons maintenant qu'un point x de D n'appartienne pas à $\overline{E}$. Quand n tend vers l'infini $B^n x$ tend vers zéro. L'origine étant point intérieur de $\overline{E}$, il existe donc un entier n tel que $B^n x$ appartienne à $\overline{E}$, donc à $B^n \overline{E}$ d'après ce qui précède ce qui implique une contradiction.

D est donc contenu dans $\overline{E}$. Mais aucun point de la frontière de $\overline{E}$ ne peut être dans D car D étant ouvert, cela impliquerait l'existence dans D de points n'appartenant pas à $\overline{E}$. On a donc bien montré que D est contenu dans Ω.

6. Partie directe du théorème

6.1. Lemme $(1, \zeta, \zeta^2)$ *est une base d'entiers de* $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Démonstration. — Le discriminant $D(1, \zeta, \zeta^2)$ du $\mathbb{Z}$-module engendré par $(1, \zeta, \zeta^2)$ se calcule aisément (*voir*, par exemple [1], p. 129). On trouve $D(1, \zeta, \zeta^2) = -44 = -2^2 \times 11$.

Le discriminant du corps $\mathbb{Q}(\zeta)$ ne peut donc être que -11 ou -44, et dans ce dernier cas, le lemme est prouvé.

Mais $\mathbb{Q}(\zeta+1) = \mathbb{Q}(\zeta)$ et $\zeta+1$ est racine du polynôme :

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 2.$$

Le théorème d'Eisenstein montre alors que 2 est ramifié dans $\mathbb{Q}(\zeta)$ donc divise le discriminant ce qui achève la démonstration.

6.2. *Démonstration du théorème* (partie directe). — Soit η le vecteur de coordonnées η_1 et η_2, où $(1, \eta_1, \eta_2)$ est une base d'entiers de $\mathbb{Q}(\zeta)$.

On a donc :

$$\eta_1 = a_1 + b_1\zeta + c_1\zeta,$$
$$\eta_2 = a_2 + b_2\zeta + c_2\zeta^2,$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ et :

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Si C est la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

de déterminant ± 1 on a donc :

$$\eta \in \mathbb{Z}^2 + C\xi$$

et plus généralement :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad N\eta \in \mathbb{Z}^2 + CN\xi = \mathbb{Z}^2 + C\delta(N).$$

D'après les lemmes 4.1 et 4.3, $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ est un morcellement de $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$. En outre, d'après le lemme 5.3 les Ω_k sont simplement connexes.

La matrice C étant inversible dans le groupe des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$, il en résulte qu'en désignant par ω_k l'image de Ω_k dans l'application linéaire correspondante, le triplet $\mathcal{M}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est encore un morcellement de $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$, et qu'en outre les ω_k sont simplement connexes.

Par ailleurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad N\eta \in \mathbb{Z}^2+\omega_k \quad \Rightarrow \quad \delta(N) \in \Omega_k,$$

en vertu du lemme 2.7 on a donc bien :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \nu_{\mathcal{M}}(N\eta)=u_N.$$

6.3. *Remarque.* — Une étude plus précise des points frontières de Ω conduirait à démontrer l'isomorphisme entre les systèmes dynamiques suivants :

(i) $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de la translation associée au vecteur η;

(ii) la clôture de l'orbite de u selon le « shift » (modulo une identification de certains points), munie du shift;

(iii) l'ensemble $\overline{\mathcal{N}}$ (modulo une identification de certains points), muni de la transformation continue qui prolonge l'addition de 1 sur $\mathbb{N}$ (identifié à $\mathcal{N}$).

En particulier, les systèmes (ii) et (iii) sont strictement ergodiques.

7. Réciproque partielle

7.1. Commençons par démontrer un lemme plus ou moins classique.

LEMME. — *Soit γ un nombre réel, tel que la suite $(g(n)\gamma)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro modulo* 1. *Alors γ est un entier du corps $\mathbb{Q}(\zeta)$.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe une suite $(p(n))_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ telle que :

$$g(n)\gamma-p(n) \to 0, \qquad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

g vérifiant la relation de récurrence (13), il en résulte que :

$$p(n+3)-p(n+2)-p(n+1)-p(n),$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Cette quantité appartenant à $\mathbb{Z}$ est donc nulle à partir d'un certain rang, et p vérifie donc la relation (13) à partir de ce rang.

Posons alors :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^n, \qquad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n,$$

f et g sont toutes deux en vertu de ce qui précède des fractions rationnelles dont le dénominateur est le polynôme $P=x^3+x^2+x-1$, et le numérateur un polynôme à coefficients entiers.

Plus précisément :

$$f(z)=\frac{F(z)}{P(z)}, \qquad g(z)=\frac{G(z)}{P(z)},$$

avec $F(z)=-(1+z+z^2)$, G à coefficients entiers.

Par ailleurs, la différence $\gamma g(n)-p(n)$ est bornée, la fraction rationnelle $\gamma f-g$ n'admet donc pas de pôle dans le disque unité.

Dans ce disque P a pour zéro ζ. Calculant alors les résidus de f et g en ce pôle on en déduit :

$$\gamma=\frac{G(\zeta)}{F(\zeta)}.$$

Mais $F(\zeta)=-1/\zeta$, d'où $\gamma=\zeta\, G(\zeta)$ et G étant à coefficients entiers, il en résulte bien que γ est un entier du corps $\mathbb{Q}(\zeta)$.

7.2. Soit maintenant $\mathcal{M}=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ un morcellement de $\mathbb{R}^2 \bmod \mathbb{Z}^2$ et soit η un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées η_1, η_2.

Nous supposons que :

$$\forall N\in\mathbb{N}, \quad \nu_{\mathcal{M}}(N\eta)=u_N$$

et nous allons dans un premier temps montrer que η_1 et η_2 appartiennent au corps $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Introduisons tout d'abord quelques notations.

Nous désignons par F l'ensemble des valeurs d'adhérence des points de la forme $N\eta+g$ où $N\in\mathbb{N}$, $g\in\mathbb{Z}^2$.

Il est aisé de voir que F est un sous groupe additif fermé de $\mathbb{R}^2$ (c'est évident si on peut choisir N dans $\mathbb{Z}$, et classique de passer à $\mathbb{N}$).

Pour tout élément k de $\mathfrak{A}$, nous désignons par F_k l'ensemble :

$$F_k=\overline{\omega_k+\mathbb{Z}^2}\cap F,$$

$\mathcal{M}$ étant un morcellement, $F_k\cap F_h$ pour $k\neq h$ n'a pas de point intérieur.

Il en résulte que F_k est l'ensemble des valeurs d'adhérence des points de la forme $N\eta+g$, où $u_N=k$, $g\in\mathbb{Z}^2$.

Enfin, nous désignons par G l'ensemble des x tels que :

$$\forall k\in\mathfrak{A},\quad x+F_k\subset F_k.$$

On voit aisément alors que :

$$x\in G\quad\Rightarrow\quad\forall k\in\mathfrak{A},\qquad x+F_k=F_k.$$

En particulier, G est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$F\supset G\supset\mathbb{Z}^2.$$

7.3. Dans un premier stade montrons que, l'ensemble des points d'accumulation modulo $\mathbb{Z}^2$ de la suite $(g(n)\eta)_{n\in\mathbb{N}}$ est contenu dans G. On a vu, en effet, au paragraphe 2.1 que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a :

$$\forall N\in\mathbb{N},\qquad g(n)\leqslant N<g(n+1)\quad\Rightarrow\quad u_N=u_{N-g(n)}.$$

On a donc pour tout entier M tel que $0\leqslant M<g(n+1)-g(n)$:

$$g(n)\eta+M\eta\in\mathbb{Z}^2+\omega_{u_M}.$$

Si x est un point d'accumulation de $(g(n)\eta)$ modulo $\mathbb{Z}^2$, on a par passage à la limite en tenant compte du fait que $g(n+1)-g(n)$ tend vers l'infini avec n :

$$\forall M\in\mathbb{N},\quad x+M\eta\in\overline{\mathbb{Z}^2+\omega_{u_M}}.$$

Les points de la forme $M\eta+g$ où $u_M=k$ et $g\in\mathbb{Z}^2$ sont denses dans F_k d'après le paragraphe 7.2, on a donc :

$$\forall k\in\mathfrak{A},\quad x+F_k\subset F_k,$$

ce qui établit le résultat.

7.4. Désignons par $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire ordinaire sur $\mathbb{R}^2$ qui à x et y de coordonnées respectives x_1, x_2 et y_1, y_2 associe :

$$\langle x,y\rangle=x_1\,y_1+x_2\,y_2$$

et, soit $G^{\perp}$ le sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$y \in G^{\perp} \Leftrightarrow \forall x \in G, \qquad \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Alors, $\forall y \in G^{\perp}$, $\langle \eta, y \rangle$ *est un entier algébrique de* $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Il suffit, en effet, de montrer d'après le lemme 7.1 que la suite $(g(n)\langle \eta, y \rangle)$ tend vers zéro modulo 1.

Soit γ un point d'accumulation de cette suite. Il existe donc une suite n_j telle que : $g(n_j)\langle \eta, y \rangle \to \gamma$ modulo 1 quand $j + \infty$.

Quitte à extraire de n_j une suite partielle, on peut supposer que $(g(n_j)\eta)$ converge vers x mod $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire qu'il existe une suite (p_j) d'éléments de $\mathbb{Z}^2$ telle que :

$$g(n_j)\langle \eta, y \rangle - \langle p_j, y \rangle \to \langle x, y \rangle \qquad \text{quand} \quad j \to \infty.$$

Comme G contient $\mathbb{Z}^2$, $\langle p_j, y \rangle$ appartient à $\mathbb{Z}$, et d'après ce qui précède $\langle x, y \rangle$ appartient à $\mathbb{Z}$.

On a donc bien finalement $\gamma \in \mathbb{Z}$.

7.5. Remarquons que G contenant $\mathbb{Z}^2$, $G^{\perp}$ est contenu dans $\mathbb{Z}^2$. Pour démontrer que η est à coordonnées algébriques, il suffit donc de montrer que $G^{\perp}$ contient deux vecteurs indépendants.

Mais tout d'abord on ne peut avoir $G^{\perp} = \{0\}$.

En effet, G étant fermé est l'ensemble des x tels que :

$$\forall y \in G^{\perp}, \quad \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent si on avait $G^{\perp} = \{0\}$ on aurait $G = \mathbb{R}^2$, et, vu la définition de G, on aurait donc quel que soit l'élément k de :

$$F_k = \mathbb{R}^2,$$

ce qui est impossible.

Par ailleurs, $G^{\perp}$ étant contenu dans $\mathbb{Z}^2$ est un groupe discret. Si l'espace vectoriel engendré par $G^{\perp}$ n'était pas de dimension 2, il existerait alors un élément y de $\mathbb{Z}^2$ non nul d'après ce qui précède et tel que :

$$G^{\perp} = \mathbb{Z}\, y.$$

$\langle \eta, y \rangle$ est d'après le paragraphe 7.4 un entier algébrique de $\mathbb{Q}(\zeta)$ donc, d'après le lemme 6.1, il existe trois entiers a, b, c tels que :

$$\langle \eta, y \rangle = a + b\zeta + c\zeta^2,$$

b et c ne peuvent être simultanément nuls, sinon on aurait :

$$\langle \eta, y \rangle \in \mathbb{Z},$$

d'où également :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \langle N\eta, y \rangle \in \mathbb{Z}$$

et y étant un générateur de $G^{\perp}$:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad N\eta \in G.$$

Il en résulterait, 0 étant élément de F_1, que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad N\eta \in F_1,$$

ce qui est contradictoire avec le fait que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \nu_{\mathcal{M}}(N\eta) = u_N,$$

qui entraîne que $N\eta$ est un point *intérieur* à F_{u_N}.

Soit maintenant k un élément de $\mathfrak{A}$, et x un élément de Ω_k de coordonnées x_1 et x_2. Il existe une suite (N_j) avec $u_{N_j} = k$ telle que $(\delta(N_j))$ converge vers x. Quitte à extraire de (N_j) une sous suite on peut supposer que $(N_j \eta)$ converge modulo $\mathbb{Z}^2$ vers un point x' qui appartient évidemment à F_k.

Comme :

$$\langle N\eta, y \rangle = Na + bN\zeta + cN\zeta^2$$

et que :

$$\forall g \in \mathbb{Z}^2, \quad \langle g, y \rangle \in \mathbb{Z},$$

il en résulte que $\langle x', y \rangle - (bx_1 + cx_2)$ appartient à $\mathbb{Z}$.

Soit alors x'' un point tel que :

$$\langle x'', y \rangle = bx_1 + cx_2.$$

La différence $\langle x' - x'', y \rangle$ appartient à $\mathbb{Z}$, et y étant un générateur de $G^{\perp}$ il en résulte que $x' - x''$ appartient à G, donc x'' à F_k.

On a donc prouvé que si x de coordonnées x_1, x_2 appartient à Ω_k, tout point x'' tel que :

$$\langle x'', y \rangle = bx_1 + cx_2,$$

appartient à F_k.

Soit alors I_k l'image de Ω_k par l'application qui à x associe bx_1+cx_2, b et c n'étant pas tous deux nuls, I_k est un ouvert non vide simplement connexe puisque Ω_k l'est. I_k est donc un intervalle ouvert non vide.

Par ailleurs, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 \cap \overline{\Omega}_3$ est non vide d'après le paragraphe 5.1. Les intervalles $\overline{I}_k$ ont donc un point commun. Il en résulte qu'il existe deux éléments k et h de $\mathfrak{A}$ tels que :

$$k \neq h, \qquad I_k \cap I_h \neq \emptyset.$$

L'ensemble des x'' tels que :

$$\langle x'', y \rangle \in I_k \cap I_h,$$

est donc un ouvert non vide contenu dans $F_k \cap F_h$ ce qui est contradictoire.

8. Fin de la démonstration de la réciproque

8.1. Nous conservons les notations du paragraphe précédent et supposons donc que l'espace vectoriel engendré par $G^\perp$ est $\mathbb{R}^2$.

D'après le paragraphe 7.4, à tout élément y de $G^\perp$ est associé de manière unique un triplet (a, b, c) d'éléments de $\mathbb{Z}$ tels que :

$$\langle \eta, y \rangle = a + b\zeta + c\zeta^2.$$

Nous désignons par $T(y)$ le vecteur de coordonnées (b, c) ainsi associé à y; on a donc :

$$\forall y \in G^\perp, \quad \langle \eta, y \rangle - \langle \xi, T(y) \rangle \in \mathbb{Z}.$$

T est évidemment un homomorphisme du groupe $G^\perp$ dans le groupe $\mathbb{Z}^2$. $G^\perp$ étant discret donc libre, on peut prolonger T en une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ en lui-même.

Nous noterons T^* la transposée de cette application, et on aura donc :

$$\forall y \in G^\perp, \quad \langle \eta, y \rangle - \langle T^*(\xi), y \rangle \in \mathbb{Z},$$

c'est-à-dire encore :

$$\eta - T^*(\xi) \in G.$$

8.2. De la relation précédente on tire :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad N\eta - T^*(N\xi) \in G$$

et compte tenu du fait que $T^*(\mathbb{Z}^2)$ est contenu dans G :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad N\eta - T^*(\delta(N)) \in G.$$

Utilisant la densité des points $N\eta$ modulo $\mathbb{Z}^2$ et $\delta(N)$ dans respectivement F_k et Ω_k, et utilisant l'invariance de F_k par translation de vecteur dans G on en déduit comme au paragraphe 7.5 :

$$\forall k \in \mathfrak{A}, \quad F_k = \overline{G + T^*(\Omega_k)}.$$

8.3. Nous en déduisons dans un premier temps que $F = \mathbb{R}^2$.

F étant un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^2$, il suffit pour celà de montrer qu'il a un point intérieur. F contenant F_k, il suffit de montrer d'après le paragraphe 8.2 que T^* n'est pas dégénérée.

T^* n'est pas identiquement nulle, sinon T le serait et $\langle \eta, y \rangle$ serait alors dans $\mathbb{Z}$ pour tout élément y de $G^\perp$, donc, $G^\perp$ engendrant $\mathbb{R}^2$, η serait à coordonnées rationnelles; mais, alors la suite $(\nu_{\mathscr{A}}(N\eta))$ serait périodique ce qui est contradictoire.

Si donc T^* est dégénérée, l'image de T^* est un sous-espace vectoriel de dimension 1.

Un raisonnement analogue à celui fait à la fin du paragraphe 7.5 montre alors qu'il existe deux éléments k et h de $\mathfrak{A}$ tels que :

$$k \neq h \qquad \text{et} \qquad T^*(\Omega_k) \cap T^*(\Omega_h) \neq \emptyset.$$

Cet ensemble est un ouvert de l'image de T^*. Il existe donc un entier N tel que :

$$\delta(N) \in \Omega_k \text{ (c'est-à-dire } u_N = k) \quad \text{et} \quad T^*(\delta(N)) \in T^*(\Omega_h).$$

Mais il existe alors un élément g de $\mathbb{Z}^2$ tel que le point $N\eta - g$ appartienne à ω_k. Le point $T^*(\delta(N))$ s'en déduisant par une translation de vecteur, un élément de G, est donc un point intérieur de F_k, qui doit en même temps appartenir à F_h, ce qui est contradictoire.

8.4. Nous allons maintenant utiliser le fait que les ω_k sont bornés et connexes pour montrer que nécessairement $G = \mathbb{Z}^2$

Tout d'abord, vu que, d'après le paragraphe 5.1, l'ensemble $\bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 \cap \bar{\Omega}_3$ n'est pas vide, il résulte du paragraphe 8.3 l'existence de trois éléments g_1, g_2, g_3 de $\mathbb{Z}^2$ tels que :

$$\overline{(\omega_1+g_1)} \cap \overline{(\omega_2+g_2)} \cap \overline{(\omega_3+g_3)} \neq \emptyset.$$

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $g_1=g_2=g_3=0$.

Supposons maintenant qu'il existe un élément x de G qui ne soit pas dans $\mathbb{Z}^2$.

Soit k un élément de $\mathfrak{A}$. Vu le résultat du paragraphe précédent on a :

$$F_k=\overline{\omega_k+\mathbb{Z}^2}$$

et en particulier :

$$x+\omega_k \subset \overline{\omega_k+\mathbb{Z}^2}$$

ω_k étant borné :

$$\overline{\omega_k+\mathbb{Z}^2}=\bar{\omega}_k+\mathbb{Z}^2$$

et il existe donc un élément g de $\mathbb{Z}^2$ tel que :

$$(x+\omega_k) \cap (\omega_k+g) \neq \emptyset.$$

Posant $y=x-g$, y n'est pas nul (et dépend *a priori* de k) et :

$$(y+\omega_k) \cap \omega_k \neq \emptyset.$$

ω_k étant connexe, il en résulte que l'ensemble $(y+\omega_k) \cup \omega_k$ est connexe, et de proche en proche que l'ensemble W_k défini par :

$$W_k=\bigcup_{n\in Z}(ny+\omega_k),$$

est un ouvert connexe.

Les W_k sont mutuellement disjoints (puisque intérieurs aux F_k) et un raisonnement élémentaire de topologie plane montre alors qu'il existe un élément k de $\mathfrak{A}$ tels que les deux ensembles W_i, W_j (où $\{i,j,k\}=\mathfrak{A}$) sont « de part et d'autre » de l'ensemble « infini dans les deux sens » W_k.

En particulier :

$$W_i \cap W_j=\emptyset$$

et *a fortiori* :

$$\omega_i \cap \omega_j = \emptyset,$$

ce qui est la contradiction recherchée.

8.5. Comme $T^*(\mathbb{Z}^2) \subset G$, le résultat du paragraphe précédent implique que :

$$T^*(\mathbb{Z}^2) \subset \mathbb{Z}^2.$$

Pour terminer la démonstration de la réciproque du théorème il suffit donc de montrer que :

$$T^*(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2.$$

Supposons le contraire c'est-à-dire supposons l'existence d'un élément x de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$T^*(x) \in \mathbb{Z}^2, \qquad \text{mais} \quad x \notin \mathbb{Z}^2.$$

Tout ce qui précède s'applique en particulier au cas où on aurait pris au départ $\omega_k = \Omega_k \, (k \in \mathfrak{A})$ et $\eta = \xi$.

En particulier le résultat du paragraphe 8.3 prouve que si y est un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathfrak{A}, \quad y + \Omega_k \subset \overline{\Omega_k + \mathbb{Z}^2},$$

on a nécessairement :

$$y \in \mathbb{Z}^2.$$

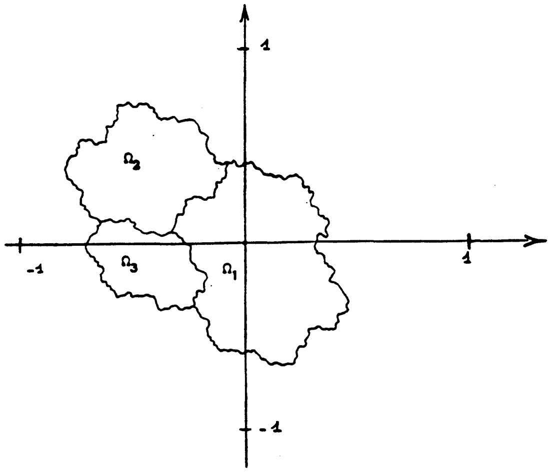
x n'appartenant pas à $\mathbb{Z}^2$, il existe donc un entier k et un élément y de Ω_k tels que :

$$x + y \notin \overline{\Omega_k + \mathbb{Z}^2}.$$

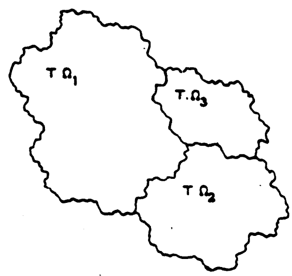
Il existe donc un élément h de $\mathfrak{A}$, tel que :

$$h \neq k \qquad \text{et} \qquad x + y \in \overline{\Omega_h + \mathbb{Z}^2}.$$

$T^*(y)$ est alors un point intérieur à F_k et comme $T^*(x)$ appartient à $\mathbb{Z}^2$ il en est de même du point $T^*(x) + T^*(y) = T^*(x+y)$. Ce point appartenant à F_h avec $h \neq k$ on a donc une contradiction.

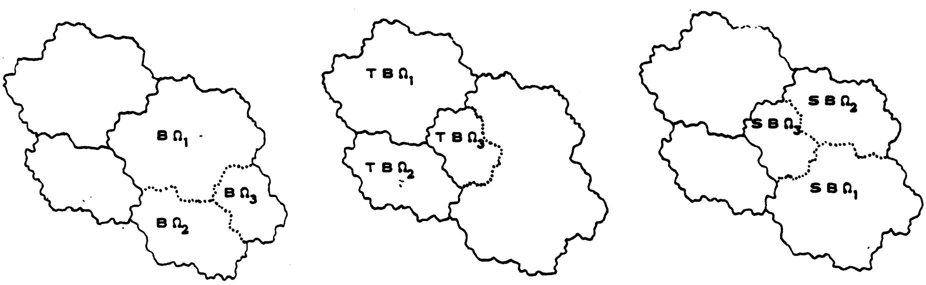


Le morcellement
$\mathscr{M}=(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$.



L'« échange de morceaux » T
défini sur Ω par :
$Tx=x+\xi$
(modulo $\mathbb{Z}^2$).

Remarque. — Ω possède un centre de symétrie : le point $w/2$.



La transformation S induite sur Ω_1 par la transformation T est encore un échange de morceaux $(B\Omega_1, B\Omega_2, B\Omega_3)$.

On a :

$$SB=BT$$

En outre :

$$\nu_{\mathscr{M}}(B\Omega_1)=1, \qquad \nu_{\mathscr{M}}(TB\Omega_1)=2, \qquad SB\Omega_1=T^2 B\Omega_1,$$

$$\nu_{\mathscr{M}}(B\Omega_2)=1, \qquad \nu_{\mathscr{M}}(TB\Omega_2)=3, \qquad SB\Omega_2=T^2 B\Omega_2,$$

$$\nu_{\mathscr{M}}(B\Omega_3)=1, \qquad SB\Omega_3=TB\Omega_3.$$

Ceci rend évidente la propriété :

$$\forall N\in\mathbb{N}, \quad \nu_{\mathscr{M}}(T^N 0)=\nu_{B\mathscr{M}}(S^N 0)=u_N.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (E.). — *Theory of algebraic numbers*, Göttingen, 1959.

[2] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDÈS-FRANCE (M.) et RAUZY (G.). — Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 108, 1980, p. 401-419.

[3] DEKKING (M.), MICHEL (P.) et KEANE (M.). — *Séminaire sur les substitutions*, Rennes, 1977.

[4] RAUZY (G.). — Une généralisation du développement en fraction continue, *Séminaire Delonge-Pisot-Poitou*, 1976-1977.