BULLETIN DE LA S. M. F.

GILLES CHRISTOL

Systèmes différentiels linéaires p-adiques, structure de Frobenius faible

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 83-122

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__83_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
109, 1981, p. 83-122.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES p-ADIQUES, STRUCTURE DE FROBENIUS FAIBLE

PAR

GILLES CHRISTOL (*)

RÉSUMÉ. — Nous montrons l'existence d'une structure de Frobenius faible associée à tout système différentiel linéaire. Étant donné une matrice U dont les coefficients sont des fonctions analytiques (p-adiques) dans le disque « ouvert » $D(0, 1^-)$ et telle que les coefficients de la matrice $\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1}$ soient des fractions rationnelles, ce résultat revient à décomposer la matrice U en produit infini : $\prod_{h=0}^{\infty} \mathbf{H}_h(x^{p^h})$ où les $\mathbf{H}_h$ sont des matrices dont les coefficients sont des éléments analytiques dans $D(0, 1^-)$.

ABSTRACT. — We prove the existence of a weak Frobenius structure for each linear differential system. Let U be a matrix whose coefficients are (p-adic) analytic functions in the "open" disk $D(0, 1^-)$ and let us suppose that the coefficients of $\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1}$ are rational fractions. This result is equivalent to the decomposition of U in an infinite product $\prod_{h=0}^{\infty} \mathbf{H}_h(x^{p^h})$ where $\mathbf{H}_h$ are matrices whose coefficients are analytic elements on $D(0, 1^-)$.

0. Introduction

Dans une conférence à la table ronde d'analyse non archimédienne [3], DWORK a proposé, pour étendre la notion de structure cristalline, de construire une « opération de Frobenius » qui agisse sur les équations différentielles linéaires. Le but de cet article est de montrer l'existence d'une telle opération et d'en étudier les propriétés. Nous généralisons ainsi les résultats de DWORK et ROBBA [5] établis pour les équations du premier ordre.

p est un nombre premier fixé et le « corps de base » est de caractéristique nulle et muni d'une norme ultramétrique telle que $|p| < 1$. Soit U une matrice carrée inversible dont les coefficients sont des fonctions analytiques au

(*) Texte reçu le 19 septembre 1979, révisé le 17 mars 1980.
Gilles CHRISTOL, 5, allée des Gradins, 91350 Grigny.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/83 /$ 5.00
© Gauthier-Villars

voisinage de 0, on sait (DWORK, p-adic cycles, *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 37, lemme 3.1 par exemple) que la condition :

(0.1) les coefficients de $\mathbf{U}(x)\,\mathbf{U}^{-1}(x^p)$ et de $\mathbf{U}(x^p)\,\mathbf{U}^{-1}(x)$ sont des éléments analytiques (en x) bornés par 1 dans le disque

$$D(0, 1^-)=\{x;\ |x|<1\}$$

(c'est-à-dire des limites uniformes sur $D(0, 1^-)$ de fractions rationnelles sans pôle dans ce disque)

implique les deux propriétés suivantes :

(0.2) les coefficients de $\mathbf{U}$ (et de $\mathbf{U}^{-1}$) sont des fonctions analytiques dans le disque $D(0, 1^-)$;

(0.3) les coefficients de $\mathbf{U}'\,\mathbf{U}^{-1}$ sont des éléments analytiques dans le disque $D(0, 1^-)$.

($\mathbf{U}'$ est la matrice obtenue en dérivant par rapport à x chacun des coefficients de $\mathbf{U}$.)

Démonstration. — (0.2) soit r le plus petit rayon de convergence des coefficients de $\mathbf{U}$, la condition (0.1) montre que les coefficients de $\mathbf{U}$ convergent pour $|x^p|<r$ c'est-à-dire $|x|<r^{1/p}$ donc $r^{1/p}\leqslant r$ et $1\leqslant r$.

(0.3) notons $\|\mathbf{U}(x)\|$ la norme du « plus grand » des coefficients de $\mathbf{U}(x)$ et posons :

$$\|\mathbf{U}\|_r=\sup_{|x|<r}\|\mathbf{U}(x)\|.$$

Si $\mathbf{U}(x^p)=\mathbf{V}(x)$ on a $\|\mathbf{V}\|_r=\|\mathbf{U}\|_{r^p}\leqslant\|\mathbf{U}\|_r$. Soit $\mathbf{H}_m=\mathbf{U}(x)\mathbf{U}^{-1}(x^{p^m})$, il vient :

$$\|\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1}-\mathbf{H}'_m\mathbf{H}_m^{-1}\|_r\leqslant\|p^m x^{p^m-1}\mathbf{U}'(x^{p^m})\mathbf{U}^{-1}(x^{p^m})\|_r\leqslant|p|^m\|\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1}\|_r,$$

on en déduit $\|\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1}\|_r=\|\mathbf{H}'_m\mathbf{H}_m^{-1}\|_r$ et comme les coefficients de $\mathbf{H}'_m\mathbf{H}_m^{-1}$, qui se calculent à partir de ceux de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}^{-1}$, sont des éléments analytiques dans $D(0, 1^-)$, donc bornés dans ce disque, on peut faire tendre r vers 1. On voit alors que les coefficients de $\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1}$ sont les limites uniformes sur $D(0, 1^-)$ de ceux de $\mathbf{H}'_m\mathbf{H}_m^{-1}$.

La structure de Frobenius faible donne une réciproque faible à cette implication : étant donnée une matrice $\mathbf{U}$ qui vérifie (0.2) et (0.3), il existe une matrice $\mathbf{U}_1$ qui vérifie (0.2) et (0.3) et telle que les coefficients de $\mathbf{U}_1(x^p)\,\mathbf{U}^{-1}(x)$ soient des éléments analytiques dans le disque $D(0, 1^-)$. En outre nous démontrerons (proposition 10.1) que $\mathbf{U}_1$ est unique (modulo la multiplication à gauche par une matrice inversible dont les coefficients ainsi que ceux de son inverse sont des éléments analytiques dans $D(0, 1^-)$) et nous étudierons le prolongement des coefficients de $\mathbf{U}'_1\,\mathbf{U}_1^{-1}$ et de $\mathbf{U}_1(x^p)\,\mathbf{U}^{-1}(x)$. Plus précisément nous introduisons un corps $\mathscr{H}^\Delta$ d'éléments analytiques (§ 6) tel que, lorsque les coefficients de $\mathbf{U}'\,\mathbf{U}^{-1}$ appartiennent à $\mathscr{H}^\Delta$, il en soit de même des coefficients de $\mathbf{U}'_1\,\mathbf{U}_1^{-1}$ et de $\mathbf{U}_1(x^p)\,\mathbf{U}^{-1}(x)$. (Dans cette introduction nous nous contentons d'exposer le cas $\Delta = \complement D(0, 1^-)$.)

On peut itérer le procédé ci-dessus et construire une suite de matrices $\mathbf{U}_h$ vérifiant (0.2) et (0.3) et telle que les coefficients de $\mathbf{U}_h(x^p)\,\mathbf{U}_{h-1}^{-1}(x) = \mathbf{H}_h(x)$ soient des éléments analytiques dans $D(0, 1^-)$. On peut choisir les $\mathbf{U}_h$ de telle sorte que $\mathbf{H}_h(0) = \mathbf{I}$ (matrice identité), on obtient :

$$\mathbf{U} = \prod_{h=0}^{\infty} \mathbf{H}_h(x^{p^h})$$

car dans ces conditions le produit infini converge (x-adiquement).

Nous aurons une réciproque forte (structure de Frobenius forte) à notre implication si nous pouvons démontrer que, pour un certain h, les coefficients de $\mathbf{U}(x^{p^h})\,\mathbf{U}^{-1}(x)$ sont des éléments analytiques dans $D(0, 1^-)$. Autrement dit, si la suite H_h peut être choisie périodique. Ceci n'est pas vrai en général et nous montrerons dans un prochain article que l'existence (ou non existence) d'une structure de Frobenius forte est très liée à la nature algébrique des coefficients de $\mathbf{U}$.

Exemples (en dimension 1). — Soit $a \in \mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{U} = (1-x)^a$, on trouve $\mathbf{U}_1 = (1-x)^{a_1}$ avec $a_1 = (a-i)/p$ et i choisi dans $\mathbf{Z}$ pour que $a_1 \in \mathbf{Z}_p$. [$\mathbf{U}^1(x^p)$ $\mathbf{U}^{-1}(x) = (1-x^p)(1-x)^{-pa_1}(1-x^i)$ comme $a_1 \in \mathbf{Z}_p$ et :

$$(1-x^p)(1-x)^{-p} = 1 + p\ldots,$$

il est facile de vérifier que $\mathbf{U}_1(x^p)\,\mathbf{U}^{-1}(x)$ est bien un élément analytique dans $D(0, 1^-)$.] Dans ce cas on voit immédiatement qu'il y a structure de Frobenius forte si et seulement si $a \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p$ c'est-à-dire si et seulement si $\mathbf{U}$ est une fonction algébrique. Un autre exemple, de nature très différente, est donné par $\mathbf{U} = \exp \pi x$ avec $\pi^{p-1} = -p$ (*voir* [3]). En plus du cas classique de la connexion de Gauss Manin (*voir* Travaux de DWORK par N. KATZ, *Sém. Bourbaki*, 24e année, 1971/1972, n° 409, par exemple) on trouvera une exemple explicite de structure de Frobenius (forte) pour une équation différentielle ayant un point singulier irrégulier dans [11].

Soit $\mathbf{A}$ une $\mu \times \mu$ matrice dont les coefficients sont dans l'anneau $\mathscr{H}$. Au système différentiel $\mathbf{U}'\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{A}$ nous associons le « $\mathscr{H}$-module avec connexion » $(\mathfrak{M}, \nabla)$ où $\mathfrak{M}$ est un module libre de dimension μ sur $\mathscr{H}$ muni d'une base (e) et où ∇ est la connexion sur $\mathfrak{M}$ définie par $\nabla(d/dx)(e) = \mathbf{A}(e)$. Il est facile de vérifier que la transformation $\mathbf{U} \to \mathbf{U}(x^p)$ définit un foncteur φ

sur la catégorie des $\mathscr{H}^{\Delta}$-modules avec connexion. Nous sommes amenés à démontrer que sur la sous-catégorie des « modules normalisés » (ceux qui correspondent au cas où U vérifie (0.2) et (0.3)) ce foncteur est essentiellement surjectif (existence de U_1) et pleinement fidèle (unicité de U_1). C'est l'objet de la partie III.

La méthode utilisée est celle exposée dans [1] mais l'utilisation de « bonnes bases » de $\mathfrak{M}$ permet d'en généraliser l'emploi. La construction de ces bonnes bases fait l'objet du paragraphe 8. Elles apparaissent comme bases d'un certain « module local » $(\mathfrak{M}_0, \nabla)$ (étudié au paragraphe 7) sur l'anneau $\mathscr{O}_0^{\Delta}$ des éléments de $\mathscr{H}^{\Delta}$ qui n'ont pas de singularité dans le disque $D(0, 1^-)$.

L'existence des $(\mathfrak{M}_0, \nabla)$ provient d'un résultat purement algébrique (th. 4.7) et se démontre en deux étapes de natures très différentes : passage de $\mathscr{O}_0^{\Delta}$ à son corps des fractions $\mathscr{H}_0^{\Delta}$ (éléments analytiques n'ayant que des pôles dans $D(0, 1^-)$) examiné paragraphe 4 et passage de $\mathscr{H}_0^{\Delta}$ à $\mathscr{H}^{\Delta}$ (*voir* § 3). Outre ces résultats la partie I rassemble un certain nombre de résultats classiques ([2], [7], ou [8]) ou triviaux mais qui précisent nos notations.

Signalons que nos résultats ne permettent pas de résoudre la conjecture initiale de Dwork que nous rappelons en utilisant les notations du reste de cet article :

Conjecture. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *un objet normalisé de* $MC\,(k(x))$. *Il existe un objet* $(\mathfrak{N}, \nabla')$ *de* $MC\,(k(x))$ *tel que :*

$$\operatorname{rang}(\mathfrak{M}, \nabla) = \operatorname{rang}(\mathfrak{N}, \nabla') \qquad \text{et} \qquad ((\mathfrak{M}, \nabla) \otimes \mathscr{H}^{\Delta})^{*} = (\mathfrak{N}, \nabla') \otimes \mathscr{H}^{\Delta}.$$

(Δ est la réunion des classes résiduelles de Ω qui ne sont pas ordinaires pour $(\mathfrak{M}, \nabla)$ et rang $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est défini par :

$$\operatorname{rang}(\mathfrak{M}, \nabla) = \textstyle\sum_{\alpha \in \Omega} \operatorname{rang}_{\alpha}(\mathfrak{M}, \nabla),$$

$$\operatorname{rang}_{\alpha}(\mathfrak{M}, \nabla) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \text{ (ordre du pôle de } A_n \text{ en } \alpha),$$

A_n matrice qui représente $(d/dx)^n$ dans une base de $\mathfrak{M}$. On vérifie facilement que rang $(\mathfrak{M}, \nabla)$ ne dépend pas de la base qui a servi à définir les A_n.)

Ce travail doit beaucoup aux idées et aux suggestions de B. Dwork et à celles de P. Robba à qui est due en particulier la démonstration du théorème 8.3 que nous donnons ici et qui simplifie considérablement la démonstration primitive.

NOTATIONS

	Définition	*Voir* §
$\mathbf{k}[x]$,	anneau des polynômes à coefficients dans k	
$\mathbf{k}(x)$,	corps des fractions de $\mathbf{k}[x]$	
$\mathbf{k}$-anneau différentiel		1
$\mathrm{Der}(\mathscr{H})$,		1
Application linéaire horizontale		1 (1.2)
$MC(\mathscr{H})$,	catégorie des modules avec connexion	1
$S((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})$,	ensemble des solutions de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ dans $\mathscr{K}$	2
Objet entièrement soluble dans un corps		2
Objet entièrement soluble dans un anneau		4
$M_\mu(\mathscr{H})$,	ensemble des matrices $\mu \times \mu$ à coefficients dans $\mathscr{H}$	
$\mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{H})$,	ensemble des éléments inversibles de $M_\mu(\mathscr{H})$	
Matrice représentant $(D)^n$ dans une base		5
$\mathbf{k}, \Omega, \overline{\mathbf{k}}, \overline{\Omega}$,		6.1
t	point générique	6.1
$D(a, r^-)$, $D(\alpha, 1^-)$, $D(\infty, r^-)$		6.2
$\mathscr{H}(\mathfrak{A})$,	ensemble des éléments analytiques sur $\mathfrak{A}$	6.3
$\mid \; \mid_{\mathfrak{A}}$,	norme de la convergence uniforme sur $\mathfrak{A}$	6.3
$\Delta, \overline{\Delta}$,		6.4
Δ-superadmissible		6.4
$\mathscr{H}^\Delta$,		6.5
$\mathcal{O}_\alpha^\Delta$,		6.6
D_α,	d/dx si $\alpha \neq \infty$ et $-x^2 \, d/dx$ si $\alpha = \infty$	6.6
$\mid \; \mid_E$,	norme de Gauss	6.7
E,		6.7
$\mid \; \mid_{a, r}$,		6.7
$\Vert \; \Vert$, $\Vert \; \Vert_{\mathfrak{A}}$, $\Vert \; \Vert_{a, r}$, $\Vert \; \Vert_E$		6.8
$\mathscr{A}_\alpha$,	anneau des fonctions analytiques dans $D(\alpha, 1^-)$	6.9
$\mathscr{K}_\alpha$,	corps des fractions de $\mathscr{A}_\alpha$	6.9
$\mathscr{H}_\alpha^\Delta$,	corps des fractions de $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$	6.9
$(\mathfrak{M}_\alpha, \nabla)$,		6.9
$MCN(\mathscr{H}^\Delta)$,	catégorie des modules normalisés sur $\mathscr{H}^\Delta$	7
σ,		9
$\varphi(f)$, $\psi(f)$,		9
φ,	foncteur sur $MC(\mathscr{H}^\Delta)$ et $MCN(\mathscr{H}^\Delta)$	9
∂,	$x d/dx$	9

I. – Propriétés algébriques

1. Modules avec connexion

Soit $\mathbf{k}$ un corps de caractéristique nulle. Nous appellerons $\mathbf{k}$-anneau différentiel un anneau commutatif $\mathscr{H}$ qui contient $\mathbf{k}$ muni d'un ensemble de dérivations Der $(\mathscr{H})$ tel que :

– Der$(\mathscr{H})$ est un $\mathscr{H}$-module libre de dimension 1;

– si D est une dérivation non nulle de Der$(\mathscr{H})$ et si $\mathfrak{a}$ est un élément de $\mathscr{H}$, on a $D\mathfrak{a}=0$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ appartient à $\mathbf{k}$.

Dans la suite de ce paragraphe $\mathscr{H}$ sera un $\mathbf{k}$-anneau différentiel.

Etant donné un $\mathscr{H}$-module $\mathfrak{M}$, une connexion ∇ sur $\mathfrak{M}$ est une application $\mathscr{H}$-linéaire de Der$(\mathscr{H})$ dans $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{M})$ qui vérifie, pour $D\in \mathrm{Der}(\mathscr{H})$, $\mathfrak{a}\in\mathscr{H}$, et $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}$:

$$(1.1) \qquad \nabla(D)(\mathfrak{a}\mathfrak{m})=D(\mathfrak{a})\,\mathfrak{m}+\mathfrak{a}\,\nabla(D)(\mathfrak{m}).$$

Si $\mathfrak{M}$ est un $\mathscr{H}$-module muni d'une connexion, nous le considérerons implicitement comme un module sur le sous-anneau de $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{M})$ engendré par $\mathscr{H}$ et Der$(\mathscr{H})$, c'est-à-dire sur $\mathscr{H}$ [Der$(\mathscr{H})$].

Soit $(\mathfrak{M}, \nabla)$ et $(\mathfrak{N}, \nabla')$ deux $\mathscr{H}$-modules munis de connexions, une application $\mathscr{H}$-linéaire s de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ est dite horizontale si elle vérifie, pour $D\in\mathrm{Der}(\mathscr{H})$ et $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}$:

$$(1.2) \qquad s(\nabla(D)(\mathfrak{m}))=\nabla'(D)(s(\mathfrak{m})).$$

Nous noterons $MC(\mathscr{H})$ la catégorie abélienne dont les objets sont les $\mathscr{H}$-modules de type fini munis de connexion et les morphismes les applications $\mathscr{H}$-linéaires horizontales (on vérifie que $MC(\mathscr{H})$ est une sous-catégorie de la catégorie des $\mathscr{H}$ [Der$(\mathscr{H})$]-modules de type fini).

La catégorie $MC(\mathscr{H})$ a un produit tensoriel :

$$(\mathfrak{M}, \nabla)\otimes(\mathfrak{N}, \nabla')=(\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{N}, \nabla'')$$

défini, pour $D\in\mathrm{Der}(\mathscr{H})$, $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}$, par :

$$(1.3) \qquad \nabla''(D)(\mathfrak{m}\otimes\mathfrak{n})=\nabla(D)(\mathfrak{m})\otimes\mathfrak{n}+\mathfrak{m}\otimes\nabla'(D)(\mathfrak{n})$$

et un Hom intérieur :

$$\mathrm{Hom}((\mathfrak{M}, \nabla), (\mathfrak{N}, \nabla'))=(\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}), \nabla'')$$

défini, pour $D \in \mathrm{Der}(\mathscr{H})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ et $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$, par :

$$\nabla''(D)(f)(\mathfrak{m}) = \nabla'(D)(f(\mathfrak{m})) - f(\nabla(D)(\mathfrak{m})). \tag{1.4}$$

On définit de même la r-ième puissance extérieure :

$$\wedge^r(\mathfrak{M}, \nabla) = (\wedge^r \mathfrak{M}, \nabla')$$

en posant, pour $D \in \mathrm{Der}(\mathscr{H})$ et $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r \in \mathfrak{M}$:

$$(1.5) \quad \nabla'(D)(\mathfrak{m}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{m}_r) = \nabla(D)(\mathfrak{m}_1) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{m}_r + \ldots + \mathfrak{m}_1 \wedge \ldots \wedge \nabla(D)(\mathfrak{m}_r).$$

Soit Ω un sur-corps de $\mathbf{k}$ et $\mathscr{K}$ un Ω-anneau différentiel. Nous dirons que $\mathscr{K}$ contient $\mathscr{H}$ ($\mathscr{K} \supset \mathscr{H}$) si $\mathscr{H}$ est un sous-anneau de $\mathscr{K}$ et si, pour toute dérivation D de $\mathrm{Der}(\mathscr{H})$, il existe une dérivation $\hat{D}$ de $\mathrm{Der}(\mathscr{K})$ dont la restriction à $\mathscr{H}$ soit D. Dans ces conditions $\mathscr{K}$ est un $\mathscr{H}$-module, l'application linéaire $D \to \hat{D}$ définit une connexion sur $\mathscr{K}$ que nous appellerons « prolongement des dérivations ».

Si $\mathscr{K}$ est un Ω-anneau différentiel qui contient $\mathscr{H}$ et si $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H})$, nous obtenons (par « extension des scalaires ») un objet :

$$(\mathfrak{M}, \nabla) \otimes \mathscr{K} = (\mathscr{K} \otimes \mathfrak{M}, \nabla)$$

de $MC(\mathscr{K})$, en posant, pour $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{a} \in \mathscr{K}$ et $D \in \mathrm{Der}(\mathscr{H})$:

$$\nabla(\hat{D})(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{m}) = \hat{D}(\mathfrak{a}) \otimes \mathfrak{m} + \mathfrak{a} \otimes \nabla(D)(\mathfrak{m}). \tag{1.3 bis}$$

De même, par une formule analogue à (1.4), on définit un objet :

$$\mathrm{Hom}((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K}) = (\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathfrak{M}, \mathscr{K}), \nabla)$$

de $MC(\mathscr{K})$.

Inversement, si $(\mathfrak{N}, \nabla) \in MC(\mathscr{K})$ et si $\mathfrak{M}$ est un $\mathscr{H}$-module stable par $\nabla(\hat{D})$, pour $D \in \mathrm{Der}(\mathscr{H})$, contenu dans $\mathfrak{N}$, la restriction de ∇ à $\mathrm{Der}(\mathscr{H})$ (encore notée ∇) fait de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ un objet de $MC(\mathscr{H})$. Dans ces conditions nous dirons que $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est contenu dans $(\mathfrak{N}, \nabla)$. Par exemple, en admettant l'abus de notation : $\mathfrak{m} = 1 \otimes \mathfrak{m}$, $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est contenu dans $\mathscr{K} \otimes (\mathfrak{M}, \nabla)$.

2. Espace vectoriel des solutions

Dans ce paragraphe, $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{K}$) est un $\mathbf{k}$ (resp. Ω)-corps différentiel tel que $\mathscr{K} \supset \mathscr{H}$ et $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H})$.

PROPOSITION 2.1. — *Si $\mathscr{K}$ est un* $\mathbf{k}$*-corps différentiel et si* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *est un objet de* $MC(\mathscr{K})$, *il existe* $\mathfrak{m}$ *dans* $\mathfrak{M}$ *tel que* $\mathfrak{m}, \nabla(D)(\mathfrak{m}), \ldots, [\nabla(D)]^{\mu-1}(\mathfrak{m})$ *forme une base de* $\mathfrak{M}$ *sur* $\mathscr{K}$ (μ *est la dimension de* $\mathfrak{M}$ *sur* $\mathscr{K}$).

On trouvera la démonstration de ce résultat dans JACOBSON, 1934, *Ann. of Math.*, vol. 38, 1937 ou [2], II.1.3. □

Une solution s de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ dans $\mathscr{K}$ est une application $\mathscr{K}$-linéaire horizontale de $\mathfrak{M}$ dans $\mathscr{K}$ (c'est-à-dire vérifiant (1.2) avec ∇' connexion « prolongement des dérivations »). Autrement dit une solution s de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ dans $\mathscr{K}$ est un élément de $\operatorname{Hom}((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})$ qui vérifie $\nabla(D)(s)=0$ pour une, donc pour toute, dérivation de $\operatorname{Der}(\mathscr{K})$.

PROPOSITION 2.2. — *Les solutions* $s_1, \ldots, s_r$ *de* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *dans* $\mathscr{K}$ *sont linéairement indépendantes sur* Ω *si et seulement si l'application* $\mathscr{K}$*-linéaire* $(s_1, \ldots, s_r)$ *de* $\wedge^r_{\mathscr{K}} \mathfrak{M}$ *dans* $\wedge^r_{\mathscr{K}} \mathscr{K}^r$ *(définie par :*

$$(s_1, \ldots, s_r)(\mathfrak{m}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{m}_r) = (s_1(\mathfrak{m}_1), \ldots, s_r(\mathfrak{m}_1)) \wedge \ldots \wedge (s_1(\mathfrak{m}_r), \ldots, s_r(\mathfrak{m}_r)))$$

est nulle.

S'il existe des α_i dans Ω, donc dans $\mathscr{K}$, non tous nuls, tels que $\sum \alpha_i s_i = 0$, pour tout $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{M}$ on a $\sum \alpha_i s_i(\mathfrak{m}) = 0$. Pour tout $(\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r)$ dans $\mathfrak{M}^r$ on a donc $\det(s_i(\mathfrak{m}_j))=0$ c'est-à-dire $(s_1, \ldots, s_r)(\mathfrak{m}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{m}_r)=0$.

Réciproquement, d'après la proposition 2.1, il existe $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{M}$ tel que $\mathfrak{m}$, $\nabla(D)(\mathfrak{m}), \ldots, [\nabla(D)]^{\mu-1}(\mathfrak{m})$ soit une base de $\mathfrak{M}$. Par hypothèse nous avons :

$$(s_1, \ldots, s_r)(\mathfrak{m} \wedge \nabla(D)(\mathfrak{m}) \wedge \ldots \wedge [\nabla(D)]^{r-1}(\mathfrak{m}))=0$$

ce qui est équivalent à l'égalité suivante, où i et j varient de 1 à r :

$$0=\det(s_i([\nabla(D)]^{j-1}(\mathfrak{m})))=\det(D^{j-1}(s_i(\mathfrak{m}))). \tag{2.1}$$

Quitte à changer de r, nous pouvons supposer que l'égalité (2.1) n'est pas vraie pour $r-1$ (donc en se limitant à $s_1, \ldots, s_{r-1}$). Nous en déduisons qu'il existe dans $\mathscr{K}$ des c_i tels que, pour $0 \leqslant j \leqslant r-1$, on ait :

$$D^j(s_r(\mathfrak{m}))=\textstyle\sum_{i=1}^{r-1} c_i D^j(s_i(\mathfrak{m})). \tag{2.2, j}$$

En appliquant D à (2.2.j) et en soustrayant (2.2, $j+1$) on obtient :

$$\textstyle\sum_{i=1}^{r-1} D(c_i) D^j(s_i(\mathfrak{m}))=0 \qquad (0 \leqslant j \leqslant r-2).$$

Ce système homogène ayant un déterminant non nul, il vient : $D(c_i)=0$. Les c_i sont des constantes de $\mathscr{K}$ c'est-à-dire sont dans Ω. Il existe donc des $c_i \in \Omega$

tels que $\sum_{i=0}^{r} c_i\, s_i\,(\mathfrak{m})=0$ (avec $c_r=-1$ dans (2.2, 0)). $\{[\nabla(D)]^j(\mathfrak{m})\}$ étant une base de $\mathfrak{M}$, tout $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{M}$ s'écrit $\mathfrak{n}=\sum \mathfrak{a}_j\,[\nabla(D)]^j(\mathfrak{m})$ avec $\mathfrak{a}_j \in \mathscr{K}$. On en déduit :

$$\sum c_i s_i(\mathfrak{n})=\sum c_i \sum \mathfrak{a}_j s_i\,([\nabla(D)]^j(\mathfrak{m}))$$
$$=\sum \mathfrak{a}_j D^j[\sum c_i s_i(\mathfrak{m})]=0 \text{ c'est-à-dire } \sum c_i s_i=0. \quad \square$$

Nous noterons $S\,((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})$ l'ensemble des solutions de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ dans $\mathscr{K}$.

COROLLAIRE 2.3. — *$S\,((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})$ est un espace vectoriel sur Ω de dimension* $\dim_{\mathscr{K}} \mathfrak{M}$ *au plus.*

C'est évident puisque $\wedge_{\mathscr{K}}^{r} \mathfrak{M}=0$ pour r supérieur à $\dim_{\mathscr{K}} \mathfrak{M}$. $\square$

PROPOSITION 2.4. — *$S\,(?, \mathscr{K})$ est un foncteur contravariant exact à gauche de $MC(\mathscr{K})$ dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur Ω.*

A tout morphisme $(\mathfrak{M}, \nabla) \xrightarrow{i} (\mathfrak{N}, \nabla')$ de $MC(\mathscr{K})$ on associe l'application linéaire i^* de $S\,((\mathfrak{N}, \nabla'), \mathscr{K})$ dans $S\,((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})$ définie par $i^*(s)=s \circ i$. Étant donné une suite exacte de $MC(\mathscr{K})$:

$$0 \to (\mathfrak{N}, \nabla') \xrightarrow{i} (\mathfrak{M}, \nabla) \xrightarrow{p} (\mathfrak{R}, \nabla'') \to 0 \tag{2.3}$$

on associe la suite d'espaces vectoriels sur k :

$$0 \to S((\mathfrak{R}, \nabla''), \mathscr{K}) \xrightarrow{p^*} S((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K}) \xrightarrow{i^*} S((\mathfrak{N}, \nabla'), \mathscr{K}). \tag{2.4}$$

Cette suite est exacte car d'une part : $i^* \circ p^*\,(s)=s \circ p \circ i=0$ d'autre part, lorsque $i^*(s)=0$, s étant alors nulle sur les images des éléments de $\mathfrak{N}$, donne par passage au quotient une solution s' de $(\mathfrak{R}, \nabla'')$ dans $\mathscr{K}$ telle que $s=s' \circ p=p^*(s')$. $\square$

Remarque. — En général i^* n'est pas surjectif. Nous allons donner une condition suffisante pour qu'il en soit ainsi.

DÉFINITION. — Lorsque $\dim_{\Omega} S\,((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})=\dim_{\mathscr{K}} \mathfrak{M}$ on dit que $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}$ (ou a une solution complète dans $\mathscr{K}$).

COROLLAIRE 2.5. — *Étant donné la suite exacte* (2.3), *si* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *est entièrement soluble dans* $\mathscr{K}$, $(\mathfrak{N}, \nabla')$ *et* $(\mathfrak{R}, \nabla'')$ *sont aussi entièrement solubles dans* $\mathscr{K}$. *Dans ce cas l'application i^* de* (2.4) *est une surjection.*

La suite exacte (2.4) montre :

$$\dim_{\Omega} S\,((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K}) \leqslant \dim_{\Omega} S((\mathfrak{N}, \nabla'), \mathscr{K})+\dim_{\Omega} S((\mathfrak{R}, \nabla''), \mathscr{K}). \tag{2.5}$$

Le corollaire 2.3 permet de majorer le second membre de (2.5) par :

$$\dim_{\mathscr{H}} \mathfrak{N} + \dim_{\mathscr{H}} \mathfrak{R} = \dim_{\mathscr{H}} \mathfrak{M} = \dim_{\Omega} S((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K}).$$

Nous avons donc en fait égalité dans (2.5) et dans la majoration ce qui permet de conclure. $\square$

3. Changement du corps des scalaires

Dans ce paragraphe nous considérons la situation suivante : $\mathscr{H}_0$ et $\mathscr{H}$ sont des $\mathbf{k}$-corps différentiels tels que $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H}$, $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H})$ et $\mathfrak{M}_0$ est un $\mathscr{H}_0$-espace vectoriel de dimension finie contenu dans $\mathfrak{M}$ stable par $\nabla(\hat{D})$ pour $D \in \mathrm{Der}(\mathscr{H}_0)$ ($\hat{D}$ est le prolongement de D qui appartient à $\mathrm{Der}(\mathscr{H})$) si bien que $(\mathfrak{M}_0, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H}_0)$ contenu dans $(\mathfrak{M}, \nabla)$. Nous allons donner un résultat qui permettra, dans certains cas, de contrôler la dimension de $\mathfrak{M}_0$ sur $\mathscr{H}_0$.

Par exemple supposons que $\mathscr{H}$ soit une extension finie de $\mathscr{H}_0$ (le prolongement des dérivations est alors unique), $\mathscr{H}$ muni de la connexion « prolongement des dérivations » appartient à $MC(\mathscr{H}_0)$. Posons $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 = \mathscr{H}$; dans ce cas particulier, bien que $\dim_{\mathscr{H}} \mathfrak{M} = 1$, $\dim_{\mathscr{H}_0} \mathfrak{M}_0 = [\mathscr{H} : \mathscr{H}_0]$ est quelconque.

Nous faisons donc une hypothèse supplémentaire sur $(\mathfrak{M}_0, \nabla)$.

PROPOSITION 3. — *Soit $\mathscr{K}_0$ et $\mathscr{K}$ deux Ω-corps différentiels tels que : $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{K}$, $\mathscr{H}_0 \subset \mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K}$ et $\mathscr{K}_0 \cap \mathscr{H} = \mathscr{H}_0$. Si $(\mathfrak{M}_0, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}_0$ alors $\dim_{\mathscr{H}_0} \mathfrak{M}_0 \leqslant \dim_{\mathscr{H}} \mathfrak{M}$.*

Le $\mathscr{H}$-espace vectoriel engendré par $\mathfrak{M}_0$ est clairement stable par $\nabla(D)$ pour $D \in \mathrm{Der}(\mathscr{H})$. Nous pouvons supposer que c'est $\mathfrak{M}$ lui-même c'est-à-dire que $\dim_{\mathscr{H}} \mathfrak{M} \leqslant \dim_{\mathscr{H}_0} \mathfrak{M}_0$.

Si $s \in S((\mathfrak{M}_0, \nabla), \mathscr{K}_0)$, s se prolonge (par $s(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{m}) = \mathfrak{a}\, s(\mathfrak{m})$) en un élément de $S(\mathscr{H} \bigotimes_{\mathscr{H}_0} (\mathfrak{M}_0, \nabla), \mathscr{K})$. Ce prolongement est une application Ω-linéaire injective donc :

$$\dim_{\Omega} S(\mathscr{H} \bigotimes_{\mathscr{H}_0} (\mathfrak{M}_0, \nabla), \mathscr{K}) \geqslant \dim_{\Omega} S((\mathfrak{M}_0, \nabla), \mathscr{K}_0). \tag{3.1}$$

Comme $(\mathfrak{M}_0, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}_0$ nous avons :

$$\dim_{\Omega} S((\mathfrak{M}_0, \nabla), \mathscr{K}_0) = \dim_{\mathscr{H}_0} \mathfrak{M}_0 = \dim_{\mathscr{H}} \mathscr{H} \bigotimes_{\mathscr{H}_0} \mathfrak{M}_0. \tag{3.2}$$

On a vu que $\mathscr{H} \bigotimes_{\mathscr{H}_0} (\mathfrak{M}_0, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H})$, à l'aide du corollaire 2.3 les relations (3.1) et (3.2) montrent qu'il est entièrement soluble dans $\mathscr{K}$, et nous avons l'égalité dans (3.1).

On vérifie immédiatement que l'application $\mathscr{H}$-linéaire p de $\mathscr{H}\otimes_{\mathscr{H}_0}\mathfrak{M}_0$ dans $\mathfrak{M}$ définie par : $p(\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{m})=\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ est horizontale et surjective. Nous définissons donc $(\mathfrak{N}, \nabla')$ dans $MC(\mathscr{H})$ par la suite exacte :

(3.3) $$0\to(\mathfrak{N}, \nabla')\to\mathscr{H}\otimes_{\mathscr{H}_0}(\mathfrak{M}_0, \nabla)\xrightarrow{p}(\mathfrak{M}, \nabla)\to 0$$

($\mathfrak{N}$ est alors l'espace vectoriel des $\mathscr{H}$ relations liant les éléments de $\mathfrak{M}_0$). Le corollaire 2.5 montre que $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}$. Par ailleurs si $s\in S((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})$, on a $p^*(s)\in S(\mathscr{H}\otimes_{\mathscr{H}_0}(\mathfrak{M}_0, \nabla), \mathscr{K})$, comme on a égalité dans (3.1), $p^*(s)$ s'obtient par prolongement d'un élément $\bar{s}$ de $S((\mathfrak{M}_0, \nabla), \mathscr{K}_0)$. Si $\mathfrak{m}$ appartient à $\mathfrak{M}_0$ on en déduit :

$$s(\mathfrak{m})=s[p(1\otimes\mathfrak{m})]=p^*(s)(1\otimes\mathfrak{m})=\bar{s}(\mathfrak{m})\in\mathscr{K}_0.$$

Nous considérons une base $(\mathfrak{m}_i)$ de $\mathfrak{M}$ sur $\mathscr{H}$ formée d'éléments de $\mathfrak{M}_0$, nous montrons que c'est aussi une base de $\mathfrak{M}_0$ sur $\mathscr{H}_0$ ce qui achèvera la démonstration. Si $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_0\subset\mathfrak{M}$, il existe des $\mathfrak{a}_i$ dans $\mathscr{H}$ tels que $\mathfrak{m}=\sum\mathfrak{a}_i\mathfrak{m}_i$. Soit alors (s_j) une base de $S((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})$, nous avons :

(3.4) $$s_j(\mathfrak{m})=\sum\mathfrak{a}_i\, s_j\,(\mathfrak{m}_i).$$

Comme $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}$, la proposition 2.1 exprime que $\det(s_j(\mathfrak{m}_i))$ est non nul, c'est-à-dire que le système (3.4) est de Cramer. Les $\mathfrak{a}_i$ s'expriment donc comme des fractions rationnelles en $s_j(\mathfrak{m})$ et $s_j(\mathfrak{m}_i)$ donc appartiennent à $\mathscr{K}_0$, c'est-à-dire à $\mathscr{K}_0\cap\mathscr{H}=\mathscr{H}_0$. □

4. Module avec connexion sur un anneau principal

Dans ce paragraphe $\mathcal{O}$ est un **k**-anneau différentiel principal. Nous supposons que les éléments $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}$ vérifient la condition suivante où $(\mathfrak{a})$ désigne l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par $\mathfrak{a}$:

(4.1) $D(\mathfrak{a})\in(\mathfrak{a})$ pour tout $D\in\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a}$ est inversible.

Proposition 4.1. — *Soit $(\mathfrak{M}, \nabla)$ un objet de $MC(\mathcal{O})$ et $\mathfrak{m}$ un élément de $\mathfrak{M}$. Il existe, pour toute dérivation D de* Der $(\mathcal{O})$, *un nombre entier h tel que :*

$$[\nabla(D)]^{h+1}(\mathfrak{m})=\textstyle\sum_{i=0}^{h}\mathfrak{a}_i[\nabla(D)]^i(\mathfrak{m})$$

avec $\mathfrak{a}_i$ dans $\mathcal{O}$.

Notons $\mathfrak{M}_i(\mathfrak{m})$ le $\mathcal{O}$-module engendré par $\mathfrak{m}$, $\nabla(D)(\mathfrak{m})$, ..., $[\nabla(D)]^i(\mathfrak{m})$. Les $\mathfrak{M}_i(\mathfrak{m})$ forment une suite croissante de sous-modules de $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ étant de type fini sur l'anneau principal $\mathcal{O}$ est noethérien, il existe donc h tel que $\mathfrak{M}_{h+1}(\mathfrak{m})=\mathfrak{M}_h(\mathfrak{m})$. □

PROPOSITION 4.2. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *un objet de* $MC(\mathcal{O})$ *et* $(\mathfrak{N}, \nabla)$ *un sous-objet. Étant donné* $\mathfrak{m}$ *dans* $\mathfrak{M}$, *s'il existe* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathcal{H}$, *non nul, tel que* $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ *appartienne à* $\mathfrak{N}$ *alors* $\mathfrak{m}$ *appartient à* $\mathfrak{N}$.

Nous reprenons les notations de la proposition 4.1. L'ensemble $\{\mathfrak{a}\in\mathcal{O};\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{M}_i(\mathfrak{m})\in\mathfrak{N}\}$ est un idéal de $\mathcal{O}$, notons-le $(\mathfrak{a}_i)$. Par hypothèse $(\mathfrak{a}_0)$ est non nul, montrons par récurrence que $(\mathfrak{a}_i)$ est non nul. Pour $0\leqslant j\leqslant i$, on a $\mathfrak{a}_i^2[\nabla(D)]^j(\mathfrak{m})\in\mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ étant, par définition, stable par $\nabla(D)$, il vient :

$$2\,D(\mathfrak{a}_i)\,\mathfrak{a}_i[\nabla(D)]^j(\mathfrak{m})+\mathfrak{a}_i^2[\nabla(D)]^{j+1}(\mathfrak{m})\in\mathfrak{N}$$

comme le premier terme appartient à $\mathfrak{N}$, nous en déduisons que $\mathfrak{a}_i^2$ appartient à $(\mathfrak{a}_{i+1})$ ce qui établit la récurrence.

La proposition 4.1 affirme que $[\nabla(D)]^{h+1}(\mathfrak{m})$ appartient à $\mathfrak{M}_h(\mathfrak{m})$, c'est-à-dire $\mathfrak{a}_h[\nabla(D)]^{h+1}(\mathfrak{m})\in\mathfrak{N}$. Pour $i\leqslant h$ on a donc :

$$\mathfrak{a}_h[\nabla(D)]^i(\mathfrak{m})\in\mathfrak{N}$$

c'est-à-dire

$$D(\mathfrak{a}_h)[\nabla(D)]^i(\mathfrak{m})+\mathfrak{a}_h[\nabla(D)]^{i+1}(\mathfrak{m})\in\mathfrak{N},$$

ce qui donne $D(\mathfrak{a}_h)[\nabla(D)]^i(\mathfrak{m})\in\mathfrak{N}$. Autrement dit $D(\mathfrak{a}_h)$ appartient à $(\mathfrak{a}_h)$. Comme ceci est vrai pour toute dérivation de $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$, la condition (4.1) affirme que $\mathfrak{a}_h$ est inversible, donc $(\mathfrak{a}_h)=(1)$. Comme $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_h(\mathfrak{m})$, il vient $\mathfrak{m}\in\mathfrak{N}$. □

COROLLAIRE 4.3. — *Pour tout objet* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *de* $MC(\mathcal{O})$, *le* $\mathcal{O}$*-module* $\mathfrak{M}$ *est libre.*

La proposition 4.2 appliquée avec $\mathfrak{N}=O$, montre que $\mathfrak{M}$ est sans torsion. $\mathfrak{M}$ étant un module de type fini sur un anneau principal, on sait alors qu'il est libre. □

Si $\mathcal{H}$ est le corps des fractions de $\mathcal{O}$, toute dérivation de $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ s'étend de manière unique à $\mathcal{H}$. Nous construisons ainsi l'ensemble $\mathrm{Der}(\mathcal{H})$. Inversement si $\mathcal{H}$ est un $\mathbf{k}$-corps différentiel et si $\mathcal{O}$ est un anneau principal dont le corps des fractions est $\mathcal{H}$, nous posons :

$$\mathrm{Der}(\mathcal{O})=\{D\in\mathrm{Der}(\mathcal{H});\ D(\mathcal{O})\subset\mathcal{O}\}.$$

Si $\mathbf{k}\subset\mathcal{O}$ et si $\mathrm{Der}(\mathcal{O})\neq O$, nous munissons ainsi $\mathcal{O}$ d'une structure de $\mathbf{k}$-anneau différentiel. En effet, si $D\in\mathrm{Der}(\mathcal{H})$, l'ensemble $I=\{\mathfrak{a}\in\mathcal{H};\ \mathfrak{a}D\in\mathrm{Der}(\mathcal{O})\}$ est un idéal fractionnaire non nul de $\mathcal{O}$, donc $I=\mathfrak{b}\mathcal{O}$ avec $\mathfrak{b}\in\mathcal{H}$. Comme $\mathrm{Der}(\mathcal{O})=ID$, $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ est un module libre de dimension 1 sur $\mathcal{O}$ engendré par $\mathfrak{b}D$.

PROPOSITION 4.4. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *et* $(\mathfrak{N}, \nabla')$ *deux objets de* $MC(\mathcal{O})$. *Si* $\mathcal{K}\otimes(\mathfrak{M}, \nabla)$ *et* $\mathcal{K}\otimes(\mathfrak{N}, \nabla')$ *sont isomorphes dans* $MC(\mathcal{K})$, $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *et* $(\mathfrak{N}, \nabla')$ *sont isomorphes dans* $MC(\mathcal{O})$ ($\mathcal{K}$ *corps des fractions de* $\mathcal{O}$).

Nous considérons $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ comme des sous-modules de $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$ et $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}$. D'après le corollaire 4.3 nous savons qu'il existe une $\mathcal{O}$-base $(\mathfrak{m}_i)$ de $\mathfrak{M}$, $(\mathfrak{m}_i)$ est aussi une $\mathcal{K}$-base de $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$. Par hypothèse il existe une application $\mathcal{K}$-linéaire horizontale φ de $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$ dans $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}$ qui est surjective. Étant donné $\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}\subset\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}$, il existe des $\mathfrak{a}_i\in\mathcal{K}$ tels que :

$$\mathfrak{n}=\varphi\left(\sum \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{m}_i\right).$$

Il existe $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{O}$, non nul, tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_i\in\mathcal{O}$ pour tout i (par exemple en prenant pour $\mathfrak{a}$ le produit des dénominateurs des $\mathfrak{a}_i$ non nuls). Il vient alors :

$$\mathfrak{a}\mathfrak{n}=\mathfrak{a}\,\varphi\left(\sum \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{m}_i\right)=\varphi\left(\sum \mathfrak{a}\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{m}_i\right)\in\varphi(\mathfrak{M}). \tag{4.2}$$

$\varphi(\mathfrak{M})$ est un $\mathcal{O}$-module stable par les $\nabla'(D)$ pour $D\in\mathrm{Der}(\mathcal{O})$. Il en est de même pour $\varphi(\mathfrak{M})\cap\mathfrak{N}$. Comme $\varphi(\mathfrak{M})\cap\mathfrak{N}$ est un sous-module du module libre $\mathfrak{N}$ sur l'anneau principal $\mathcal{O}$, $\varphi(\mathfrak{M})\cap\mathfrak{N}$ est un module libre de dimension inférieure à celle de $\mathfrak{N}$. Par suite $(\varphi(\mathfrak{M})\cap\mathfrak{N}, \nabla')$ est un objet de $MC(\mathcal{O})$ contenu dans $(\mathfrak{N}, \nabla')$. La proposition 4.2 et la relation (4.2) montrent que $\mathfrak{n}$ appartient à $\varphi(\mathfrak{M})\cap\mathfrak{N}$. Nous avons donc démontré que $\mathfrak{N}$ est contenu dans $\varphi(\mathfrak{M})$. On démontrerait de la même manière que $\mathfrak{M}\subset\varphi^{-1}(\mathfrak{N})$. φ (qui est aussi $\mathcal{O}$-linéaire) est donc un isomorphisme horizontal de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$. □

PROPOSITION 4.5. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *un objet de* $MC(\mathcal{O})$ *et* $(\mathfrak{N}, \nabla)$ *un sous-objet. On a* $\dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{N}\leqslant\dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{M}$, *l'égalité ne pouvant avoir lieu que lorsque* $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$.

$\mathcal{K}$ étant le corps des fractions de $\mathcal{O}$, $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$. On trouve :

$$\dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{N}=\dim_{\mathcal{K}}\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}\leqslant\dim_{\mathcal{K}}\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}=\dim_{\mathcal{O}}\mathfrak{M}. \tag{4.3}$$

L'égalité dans (4.3) ne peut avoir lieu que si $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}=\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$. La connexion sur $\mathfrak{N}$ étant la restriction de celle sur $\mathfrak{M}$, le plongement canonique de $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}$ dans $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$ est horizontal. Si $\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}=\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}$ c'est donc que $(\mathcal{K}\otimes\mathfrak{N}, \nabla)$ et $(\mathcal{K}\otimes\mathfrak{M}, \nabla)$ sont isomorphes dans $MC(\mathcal{K})$. D'après la proposition 4.4 cet isomorphisme donne par restriction un isomorphisme de $(\mathfrak{N}, \nabla)$ et $(\mathfrak{M}, \nabla)$ on a donc $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$.

Remarque. — $\mathfrak{M}$ est un module libre sur un anneau principal, le sous-module $\mathfrak{N}$ est donc un module libre de dimension inférieure ou égale. Le fait nouveau lorsque $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}$ sont munis de connexion est qu'il ne peut y avoir égalité des dimensions si les modules ne sont pas égaux.

PROPOSITION 4.6. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *un objet de* $MC(\mathcal{O})$. *Il existe* $\mathfrak{m}$ *dans* $\mathfrak{M}$ *tel que les* $[\nabla(D)]^i(\mathfrak{m})$ $(0 \leqslant i$, *D générateur de* $\mathrm{Der}(\mathcal{O}))$ *engendrent* $\mathfrak{M}$ (*en tant que* $\mathcal{O}$-*module*).

Si $\mathscr{H}$ est le corps des fractions de $\mathcal{O}$, d'après la proposition 2.1 il existe $\mathfrak{n}$ dans $\mathscr{H} \otimes \mathfrak{M}$ tel que les $[\nabla(D)]^i(\mathfrak{n})$ engendrent (sur $\mathscr{H}$) $\mathscr{H} \otimes \mathfrak{M}$. Soit $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{O}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{n} \in \mathfrak{M}$ (si $\mathfrak{n} = \sum \mathfrak{a}_i \otimes \mathfrak{m}_i$ avec $\mathfrak{m}_i \in \mathfrak{M}$ on peut prendre, pour $\mathfrak{a}$, le produit des dénominateurs des $\mathfrak{a}_i$ de telle sorte que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_i \in \mathcal{O}$) et soit $\mathfrak{N}$ le $\mathcal{O}$-module engendré par les $[\nabla(D)]^i(\mathfrak{a}\mathfrak{n})$. Toute dérivation D' de $\mathrm{Der}(\mathcal{O})$ étant de la forme $\mathfrak{b}D$ avec $\mathfrak{b} \in \mathcal{O}$, $\mathfrak{N}$ est stable par $\nabla(D')$ et $(\mathfrak{N}, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathcal{O})$ visiblement contenu dans $(\mathfrak{M}, \nabla)$. Par ailleurs, comme $\mathfrak{a}^{-1} \in \mathscr{H}$, on a $\mathscr{H} \otimes \mathfrak{N} = \mathscr{H} \otimes \mathfrak{M}$ ce qui montre comme dans la proposition 4.5 que $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. La proposition est démontrée en posant $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\mathfrak{n}$. □

Remarque. — D'après la proposition 4.1 $\mathfrak{m}$ satisfait à une équation différentielle *unitaire* à coefficients dans $\mathcal{O}$ d'ordre $h+1$. Si μ est la dimension de $\mathfrak{M}$, on a évidemment $1+h \geqslant \mu$. La proposition 2.1 exprime que dans le cas d'un $\mathbf{k}$-corps différentiel on peut toujours choisir $\mathfrak{m}$ de telle sorte que $1+h=\mu$. Ce n'est plus le cas en général comme le montre l'exemple suivant (vérification assez longue laissée au lecteur) : $\mathcal{O} = k[x]$, $\mathrm{Der}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}\, d/dx$ $\mathfrak{M} = \mathcal{O}$-module de dimension 2 de base $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, ∇ définie par : $\nabla(D)(\mathfrak{m}) = x^2\, \mathfrak{n}$, $\nabla(D)(\mathfrak{n}) = x\, \mathfrak{m}$.

DÉFINITIONS. — Nous notons $\mathscr{H}$ le corps des fractions de $\mathcal{O}$. Soit $\mathscr{K}$ un Ω-corps différentiel qui contient $\mathcal{O}$ (et donc $\mathscr{H}$). Un objet $(\mathfrak{M}, \nabla)$ de $MC(\mathcal{O})$ est dit entièrement soluble dans $\mathscr{K}$ s'il en est ainsi de $\mathscr{H} \otimes (\mathfrak{M}, \nabla)$. Si $\mathscr{A}$ est un Ω-anneau différentiel de corps des fractions $\mathscr{K}$, on dira que $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{A}$ s'il est entièrement soluble dans $\mathscr{K}$ et si, pour tout $s \in S(\mathscr{H} \otimes (\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K})$ et tout élément $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ on a :

$$s(\mathfrak{m}) = s(1 \otimes \mathfrak{m}) \in \mathscr{A}.$$

THÉORÈME 4.7. — *Soit* $\mathcal{O}$ *un* $\mathbf{k}$-*anneau différentiel principal vérifiant la condition* (4.1) *et soient* $\mathscr{H}$ (*resp.* $\mathscr{K}_0$, $\mathscr{K}$) *des* $\mathbf{k}$ (*resp.* Ω)-*corps différentiels qui vérifient* : $\mathcal{O} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{K}$, $\mathcal{O} \subset \mathscr{K}_0 \subset \mathscr{K}$ *et tels que* $\mathscr{K}_0 \cap \mathscr{H}$ *soit le corps des fractions de* $\mathcal{O}$. *Étant donné un objet* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *de* $MC(\mathscr{H})$, *il existe un objet* $(\mathfrak{N}, \nabla)$ *maximal parmi les objets de* $MC(\mathcal{O})$ *entièrement solubles dans* $\mathscr{K}_0$ *qui sont contenus dans* $(\mathfrak{M}, \nabla)$. *On a* $\dim_{\mathcal{O}} \mathfrak{N} \leqslant \dim_{\mathscr{H}} \mathfrak{M}$.

Si $(\mathfrak{N}_1, \nabla)$ et $(\mathfrak{N}_2, \nabla)$ sont deux objets de $MC(\mathcal{O})$ contenus dans $(\mathfrak{M}, \nabla)$, $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ est un $\mathcal{O}$-module contenu dans $\mathfrak{M}$ stable par les $\nabla(D)$ pour $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{O})$. $(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2, \nabla)$ est donc aussi un objet de $MC(\mathcal{O})$ contenu dans $(\mathfrak{M}, \nabla)$.

Supposons maintenant que $(\mathfrak{N}_1, \nabla)$ et $(\mathfrak{N}_2, \nabla)$ sont entièrement solubles dans $\mathscr{K}_0$ et montrons qu'il en est de même de $(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, \nabla)$. Soit $\mathscr{H}_0=\mathscr{K}_0\cap\mathscr{H}$ le corps des fractions de $\mathcal{O}$. Nous posons : $\overline{\mathfrak{N}}_i=\mathscr{H}_0\oplus\mathfrak{N}_i$ $(i=1, 2)$, $(\overline{\mathfrak{N}}_i, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H}_0)$. Nous construisons $(\overline{\mathfrak{N}}_1\oplus\overline{\mathfrak{N}}_2, \nabla)$ en posant :

$$\nabla(D)(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2)=\nabla(D)(\mathfrak{n}_1)+\nabla(D)(\mathfrak{n}_2).$$

On vérifie immédiatement que :

$$S((\overline{\mathfrak{N}}_1\oplus\overline{\mathfrak{N}}_2, \nabla), \mathscr{K}_0)=S((\overline{\mathfrak{N}}_1, \nabla), \mathscr{K}_0)\oplus S((\overline{\mathfrak{N}}_2, \nabla), \mathscr{K}_0).$$

Par hypothèse $(\overline{\mathfrak{N}}_i, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}_0$, il en est de même de $(\overline{\mathfrak{N}}_1\oplus\overline{\mathfrak{N}}_2, \nabla)$. Dans $MC(\mathscr{H}_0)$, $(\overline{\mathfrak{N}}_1+\overline{\mathfrak{N}}_2, \nabla)$ s'injecte canoniquement dans $(\overline{\mathfrak{N}}_1\oplus\overline{\mathfrak{N}}_2, \nabla)$ et est donc, d'après le corollaire 2.5, entièrement soluble dans $\mathscr{K}_0$. Il en est de même de $(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2, \nabla)$ puisque $\mathscr{H}_0\otimes(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2)=\overline{\mathfrak{N}}_1+\overline{\mathfrak{N}}_2$.

Si $(\mathfrak{N}_i, \nabla)$ sont les objets de $MC(\mathcal{O})$ contenus dans $(\mathfrak{M}, \nabla)$ et entièrement solubles dans $\mathscr{K}_0$, on peut ainsi construire la suite croissante $(\sum_{j=0}^{i}\mathfrak{N}_j, \nabla)$ de ces objets. Par ailleurs la proposition 3 s'applique et donne :

$$\dim_{\mathcal{O}}\textstyle\sum_{j=0}^{i}\mathfrak{N}_j=\dim_{\mathscr{H}_0}\sum_{j=0}^{i}\overline{\mathfrak{N}}_j\leqslant\dim_{\mathscr{H}}\mathfrak{M}.$$

La suite $\dim_{\mathcal{O}}\sum_{j=0}^{i}\mathfrak{N}_j$ est donc stationnaire ce qui implique d'après la proposition 4.5 que la suite des modules $\sum_{j=0}^{i}\mathfrak{N}_j$ elle-même est stationnaire. L'objet $(\mathfrak{N}=\sum\mathfrak{N}_i, \nabla)$ existe donc et vérifie les propriétés annoncées. □

5. Bases

Dans ce paragraphe $\mathscr{H}$ est un **k**-anneau différentiel. On nòte $M_\mu(\mathscr{H})$ l'ensemble des matrices $\mu\times\mu$ à coefficients dans $\mathscr{H}$ et $\mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{H})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

Soit M un $\mathscr{H}$-module libre de dimension μ, et $(\mathfrak{M}, \nabla)$ un objet de $MC(\mathscr{H})$. Si (e) est une base de $\mathfrak{M}$ et si $D\in\mathrm{Der}(\mathscr{H})$, la matrice $\mathbf{A}$ qui représente D dans la base (e) est un élément de $\mathfrak{M}_\mu(\mathscr{H})$ défini par :

$$\nabla(D)(e)=\mathbf{A}(e). \tag{5.1}$$

Étant donnés deux objets $(\mathfrak{M}, \nabla)$ et $(\mathfrak{N}, \nabla')$ de $MC(\mathscr{H})$ tels que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ soient des modules libres, soit (e) (resp. (f)) une base de $\mathfrak{M}$ (resp. de $\mathfrak{N}$) et soit $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$) la matrice qui représente D dans la base (e) (resp. (f)). Si s est une application linéaire de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ représentée par la matrice $\mathbf{H}$ dans les bases (e) et (f), on a, en notant $D\mathbf{H}$ la matrice obtenue en appliquant D à chaque coefficient de $\mathbf{H}$:

$$\nabla'(D)(s(e))=\nabla'(D)(\mathbf{H}(f))=D\mathbf{H}(f)+\mathbf{H}\nabla'(D)(f)=(D\mathbf{H}+\mathbf{HB})(f),$$
$$s(\nabla(D)(e))=s(\mathbf{A}(e))=\mathbf{A}\,s(e)=\mathbf{AH}(f).$$

D'après la relation (1.2) s est horizontale si et seulement si $\mathbf{H}$ vérifie :

$$D\mathbf{H}=\mathbf{AH}-\mathbf{HB}. \tag{5.2}$$

En particulier $(\mathfrak{M}, \nabla)$ et $(\mathfrak{N}, \nabla')$ seront isomorphes dans $MC(\mathscr{H})$ si et seulement si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ont même dimension μ et s'il existe une matrice $\mathbf{H}$ dans $\mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{H})$ qui vérifie (5.2). Par exemple, si $(\mathfrak{N}, \nabla')=(\mathfrak{M}, \nabla)$ et si s est l'identité, (5.2) est la relation que satisfait la matrice $\mathbf{H}$ de changement de base $((e)=\mathbf{H}(f))$.

Avec les mêmes notations, nous dirons que la matrice $\mathbf{A}_n$ représente D^n dans la base (e) si :

$$[\nabla(D)]^n(e)=\mathbf{A}_n(e). \tag{5.3}$$

Comme :

$$\mathbf{A}_{n+1}(e)=\nabla(D)\,(\mathbf{A}_n(e))=D\mathbf{A}_n(e)+\mathbf{A}_n\nabla(D)(e)=(D\mathbf{A}_n+\mathbf{A}_n\mathbf{A})(e)$$

les matrices $\mathbf{A}_n$ vérifient la relation de récurrence :

$$\mathbf{A}_{n+1}=D\mathbf{A}_n+\mathbf{A}_n\mathbf{A},\ \mathbf{A}_0=\mathbf{I} \qquad (\text{et } \mathbf{A}_1=\mathbf{A}). \tag{5.4}$$

En particulier, si $\mathbf{A}\in \mathrm{M}_\mu(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est un $\mathbf{k}$-anneau différentiel et si $D\in \mathrm{Der}(\mathcal{O})$, on a $\mathbf{A}_n\in \mathrm{M}_\mu(\mathcal{O})$.

Soit (f) une autre base et soit $\mathbf{H}$ la matrice de changement de base $((e)=\mathbf{H}(f))$, la formule de Leibnitz donne :

$$\mathbf{A}_n(e)=[\nabla(D)]^n(\mathbf{H}(f))=\textstyle\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} D^m\mathbf{H}[\nabla(D)]^{n-m}(f).$$

Ce qui s'écrit, en notant $\mathbf{B}_n$ la matrice représentant D^n dans la base (f) :

$$\mathbf{A}_n/n!=[\textstyle\sum_{m=0}^n (D^m\mathbf{H}/m!)(\mathbf{B}_{n-m}/(n-m)!)]\,\mathbf{H}^{-1}. \tag{5.5}$$

PROPOSITION 5. — *Soit $\mathscr{A}$ un Ω-anneau différentiel qui contient $\mathscr{H}$ et soit $(\mathfrak{M}, \nabla)$ un objet de $MC(\mathscr{H})$. Si $\mathbf{A}$ est la matrice représentant la dérivation $D\in \mathrm{Der}(\mathscr{H})$ dans la base (e) de $\mathfrak{M}$, $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{A}$ si et seulement s'il existe une matrice $\mathbf{U}$ de $M_\mu(\mathscr{A})$ telle que $D\mathbf{U}=\mathbf{AU}$ et* $\det \mathbf{U} \neq 0$.

Si s est une application $\mathscr{H}$-linéaire de $\mathfrak{M}$ dans $\mathscr{A}$, s est horizontale si et seulement si le vecteur (colonne) $s(e)$ vérifie :

$$D\,s(e)=s(\nabla(D)(e))=s(\mathbf{A}(e))=\mathbf{A}\,s(e).$$

Supposons $(\mathfrak{M}, \nabla)$ entièrement soluble dans $\mathscr{A}$ et soit s_i μ solutions linéairement indépendantes de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ dans $\mathscr{A}$. La matrice $\mathbf{U}$ dont les vecteurs colonnes sont les $s_i(e)$ vérifie les conditions demandées.

Inversement soit s_i l'application linéaire de $\mathfrak{M}$ dans $\mathscr{A}$ telle que $s_i(e)$ soit le i-ième vecteur colonne de $\mathbf{U}$. Comme det $(s_i(e))\neq 0$ les s_i sont linéairement indépendantes et comme $D\mathbf{U}=\mathbf{AU}$ les s_i sont horizontales. Dans ces conditions $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{A}$. $\square$

II. – Systèmes différentiels sur un corps d'éléments analytiques

6. Notations

6.1. A partir de maintenant $\mathbf{k}$ sera un corps algébriquement clos de caractéristique nulle complet pour une valuation non archimédienne. p désignera la caractéristique *non nulle* du corps des restes $\overline{\mathbf{k}}$ de $\mathbf{k}$. Ω sera un sur-corps de $\mathbf{k}$ algébriquement clos et complet pour une valuation qui prolonge celle de $\mathbf{k}$. Si $a\in\Omega$, $|a|\leqslant 1$, nous noterons $\overline{a}$ son image dans le corps des restes $\overline{\Omega}$ de Ω. Nous supposerons qu'il existe dans Ω un « point générique » c'est-à-dire un élément t tel que $|t|=1$ et tel que $\overline{t}$ soit transcendant sur $\overline{\mathbf{k}}$.

6.2. Pour $a\in\Omega$ et r réel positif, nous posons :

$$D(a, r^-)=\{x\in\Omega;\ |x-a|<r\}.$$

Si $\alpha\in\overline{\Omega}$ nous noterons $D(\alpha, 1^-)$ l'ensemble des éléments entiers de Ω dont l'image dans $\overline{\Omega}$ est α. Le disque $D(t, 1^-)=D(\overline{t}, 1^-)$ est appelé disque générique. Ce disque ne contient aucun élément de $\mathbf{k}$. Enfin nous posons :

$$D(\infty, r^-)=\{x\in\Omega;\ |x|>1/r\}.$$

6.3. Pour chaque ensemble borné $\mathfrak{A}$ de Ω tel que $d(\mathfrak{A}, \complement\mathfrak{A})>0$ (ou pour la réunion d'un tel ensemble avec un $D(\infty, r^-)$) $\mathscr{H}(\mathfrak{A})$ désignera l'anneau des éléments analytiques à coefficients dans $\mathbf{k}$ sur $\mathfrak{A}$ c'est-à-dire le complété, pour la topologie de la convergence uniforme sur $\mathfrak{A}$, de l'ensemble des fractions rationnelles de $\mathbf{k}(x)$ n'ayant pas de pôle dans $\mathfrak{A}$. $\mathscr{H}(\mathfrak{A})$ est une algèbre de Banach pour la norme $|\mathfrak{a}|_{\mathfrak{A}}=\sup_{x\in\mathfrak{A}}|\mathfrak{a}(x)|$ (pour les généralités sur les éléments analytiques, *voir* [6], § I 3. 4).

6.4. Δ sera une réunion de disques $D(\alpha, 1^-)$ avec $\alpha\in\bar{\mathbf{k}}\cup\infty$ fixée dans la suite. Nous notons $\bar{\Delta}$ l'image de Δ dans $\bar{\Omega}$ (on a donc $\Delta=\bigcup_{\alpha\in\bar{\Delta}} D(\alpha, 1^-)$). Un sous-ensemble $\mathfrak{A}$ de Ω est dit Δ-superadmissible s'il est le complémentaire de la réunion de Δ et d'un nombre fini de disques $D(a, r_a^-)$ avec $r_a<1$. Les ensembles Δ-superadmissibles sont des quasi connexes. Si $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ sont deux ensembles Δ-superadmissibles, il en est de même de $\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2$ et $\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{A}_2$ (qui est non vide). Nous identifierons $\mathfrak{a}_1\in\mathscr{H}(\mathfrak{A}_1)$ et $\mathfrak{a}_2\in\mathscr{H}(\mathfrak{A}_2)$ si $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$ sur $A_1\cap A_2$ (pour cela il suffit que $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$ sur un disque de rayon non nul contenu dans $A_1\cap A_2$). Avec ces notations on sait que :

$$\mathscr{H}(\mathfrak{A}_1\cap\mathfrak{A}_2)\supset\mathscr{H}(\mathfrak{A}_1)\cup\mathscr{H}(\mathfrak{A}_2)$$

et :

$$\mathscr{H}(\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2)=\mathscr{H}(\mathfrak{A}_1)\cap\mathscr{H}(\mathfrak{A}_2).$$

6.5. Nous posons :

$$\mathscr{H}^\Delta=\bigcup_{\mathfrak{A}\ \Delta\text{-superadmissible}}\mathscr{H}(\mathfrak{A}).$$

$\mathscr{H}^\Delta$ a une structure de $\mathbf{k}$-algèbre. Si $\mathfrak{a}\in\mathscr{H}^\Delta$, $\mathfrak{a}\neq 0$, $\mathfrak{a}\in\mathscr{H}(\mathfrak{A})$ pour $\mathfrak{A}$ Δ-superadmissible, on sait alors (par exemple [6], proposition II.3) que $\mathfrak{a}$ n'a dans $\mathfrak{A}$ qu'un nombre fini de zéros. Par suite, si $\mathfrak{B}$ est l'ensemble Δ-superadmissible obtenu en retirant de $\mathfrak{A}$ des disques de rayons $0<r<1$ qui contiennent ces zéros, on a $(1/\mathfrak{a})\in\mathscr{H}(\mathfrak{B})\subset\mathscr{H}^\Delta$ ce qui montre que $\mathscr{H}^\Delta$ est un corps. Chaque $\mathscr{H}(\mathfrak{A})$ est stable par la dérivation d/dx, il en est de même de $\mathscr{H}^\Delta$. Nous poserons Der $(\mathscr{H}^\Delta)=\mathscr{H}^\Delta\, d/dx$, $\mathscr{H}^\Delta$ sera donc un $\mathbf{k}$-corps différentiel.

6.6. Si $\alpha\notin\bar{\Delta}$, nous notons $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$ l'anneau des éléments de $\mathscr{H}^\Delta$ qui n'ont pas de singularité dans $D(\alpha, 1^-)$ c'est-à-dire ceux qui appartiennent à un $\mathscr{H}(\mathfrak{A})$ avec $\mathfrak{A}\supset D(\alpha, 1^-)$. Nous posons :

$$\operatorname{Der}(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)=\{D\in\operatorname{Der}(\mathscr{H}^\Delta);\ D\mathcal{O}_\alpha^\Delta\subset\mathcal{O}_\alpha^\Delta\}.$$

Comme, pour $\alpha\neq\infty$, $x\in\mathcal{O}_\alpha^\Delta$ on vérifie immédiatement que $\operatorname{Der}(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)=\mathcal{O}_\alpha^\Delta\, d/dx$. Si $\alpha=\infty$, en remarquant que, pour $\mathfrak{a}\in\mathscr{H}^\Delta$,

$$\mathfrak{a}\in\mathcal{O}_\alpha^\Delta \quad\Leftrightarrow\quad \mathfrak{a}(1/x)\in\mathscr{H}(D(0, 1^-))$$

on trouve que Der $(\mathcal{O}_\infty^\Delta)=x^2\mathcal{O}_\infty^\Delta\, d/dx$. $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$ est ainsi muni d'une structure de $\mathbf{k}$-anneau différentiel. Dans la suite nous noterons D_α le générateur de

Der$(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$ défini par $D_\alpha = d/dx$ si $\alpha \neq \infty$ et $D_\infty = -x^2\, d/dx$. Le corps des fractions de $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$ sera noté $\mathcal{H}_\alpha^\Delta$.

L'élément $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$ est inversible (dans $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$) si et seulement s'il n'a pas de zéro dans $D(\alpha, 1^-)$. Comme le nombre de zéros de $\mathfrak{a}$ dans $D(\alpha, 1^-)$ est fini on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} P$ avec $\mathfrak{u}$ inversible et P dans $\mathbf{k}[x]$. On voit donc que tout idéal de $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$ est principal et engendré par un polynôme de $\mathbf{k}[x]$ dont les zéros sont dans $D(\alpha, 1^-)$ (pour $\alpha = \infty$ on remplace x par $1/x$). Soit $\mathfrak{a}$ un élément de $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$ tel que $D_\alpha\, \mathfrak{a} \in (\mathfrak{a})$. Notons P le polynôme qui engendre l'idéal $(\mathfrak{a})$. On trouve $D_\alpha P \in (P)$ ce qui donne P divise dP/dx d'où $P = 1$. $\mathfrak{a}$ est donc inversible. Autrement dit $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$ vérifie les conditions du paragraphe 4 (en particulier la condition (4.1)).

6.7. Les éléments de $\mathbf{k}(x)$ n'ont de singularités que dans la clôture algébrique de $\mathbf{k}$. Tout élément analytique à coefficients dans $\mathbf{k}$ appartient donc à $\mathcal{H}(D(t, 1^-))$. La norme $|.|_{D(t,1^-)}$ s'appelle norme de Gauss, nous la noterons $|.|_E$. Le complété de $\mathbf{k}(x)$ pour cette norme est le corps $E = \mathcal{H}(D(t, 1^-))$. Comme $\mathbf{k}(x) \subset \mathcal{H}^\Delta$, E est aussi le complété de $\mathcal{H}^\Delta$ pour la norme de Gauss.

Si $a \in \Omega \cup \infty$ et si $r < 1$, nous posons, pour $\mathfrak{a}$ élément analytique dans la couronne $D(a, 1^-) - D(a, r^-)$;

$$|\mathfrak{a}|_{a,r} = |\mathfrak{a}|_{D(a,1^-)-D(a,r^-)}.$$

On démontre alors que $|\mathfrak{a}|_E = \lim_{r \to 1} |\mathfrak{a}|_{a,r}$ (pour plus de détails sur cette situation on peut consulter [5], § 2.6). De plus, si $\mathfrak{a}$ appartient à $\mathcal{H}(D(a, 1^-))$, on a

$$|\mathfrak{a}|_{a,r} = |\mathfrak{a}|_{D(a,1^-)} = |\mathfrak{a}|_E.$$

6.8. On définit une norme d'algèbre sur $M_\mu(\mathbf{k})$ en posant :

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{i,j} |\mathbf{A}_{ij}|,$$

où $\mathbf{A}_{ij}$ désignent les coefficients de la matrice $\mathbf{A}$. De la même manière on définit la norme $\|\mathbf{A}\|_E$ (resp. $\|\mathbf{A}\|_{\mathfrak{A}}$, $\|\mathbf{A}\|_{a,r}$) sur $M_\mu(E)$ (resp. $M_\mu(\mathcal{H}(\mathfrak{A}))$, $M_\mu(\mathcal{H}(D(a, 1^-) - D(a, r^-))))$.

6.9. $\mathcal{A}_\alpha$ désignera l'anneau des fonctions analytiques dans $D(\alpha, 1^-)$ a coefficients dans Ω, et $\mathcal{K}_\alpha$ le corps des fractions de $\mathcal{A}_\alpha$ (corps des fonctions méromorphes dans $D(\alpha, 1^-)$). (Dans ces définitions α peut appartenir soit à Ω soit à $\overline{\Omega}$). Si $a \notin \Delta$ et si $r < 1$, nous notons $\mathcal{K}_{a,r}$ le corps des fonctions méromorphes (à coefficients dans Ω) dans la couronne $D(a, 1^-) - D(a, r^-)$.

Si $|a-b| \leqslant r < 1$, on a $\mathscr{K}_{a,r}=\mathscr{K}_{b,r}$ et si $\rho > r$, on a $\mathscr{K}_{a,\rho} \supset \mathscr{K}_{a,r}$ (en identifiant une fonction à sa restriction). Par suite $\bigcup_{r<1} \mathscr{K}_{a,r}$ est un corps qui ne dépend que de $\bar{a}$ et que nous noterons $\mathscr{K}_{\bar{a},1}$. En posant $\mathrm{Der}(\mathscr{K}_{.,.})=\mathscr{K}_{.,.}\, d/dx$ on munit les $\mathscr{K}_{a,r}$ et $\mathscr{K}_{a,1}$ d'une structure de Ω-corps différentiels. On constate que, pour $\alpha \notin \Delta$, $\mathscr{H}^{\Delta} \subset \mathscr{K}_{\alpha,1}$ et que $\mathscr{K}_{\alpha}=\mathscr{K}_{\alpha,0} \subset \mathscr{K}_{\alpha,1}$.

PROPOSITION 6. — *Le corps $\mathscr{H}^{\Delta} \cap \mathscr{K}_{\alpha}$ est le corps des fractions $\mathscr{H}^{\Delta}_{\alpha}$ de l'anneau $\mathcal{O}^{\Delta}_{\alpha}$.*

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux éléments de $\mathscr{A}_{\alpha}$ tels que $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} \in \mathscr{H}^{\Delta}$, nous voulons démontrer que $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} \in \mathscr{H}^{\Delta}_{\alpha}$. Comme $\alpha \notin \bar{\Delta}$, $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ est un élément de $\mathscr{H}(\mathfrak{A})$ où $\mathfrak{A}$ est un ensemble Δ-superadmissible qui contient donc une couronne $D(\beta, 1^-)-D(\beta, r^-)$ avec $\beta \in \Omega \cup \infty$ et $\bar{\beta}=\alpha$. Par ailleurs, donnons-nous ρ tel que $r < \rho < 1$. $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des éléments de $\mathscr{H}(D(\beta, \rho^-))$ et il existe un polynôme P de $\mathbf{k}(x)$ tel que $\mathfrak{b}=P\mathfrak{b}_1$ où $\mathfrak{b}_1$ est un élément inversible de $\mathscr{H}(D(\beta, \rho^-))$. Par suite $P\mathfrak{a}/\mathfrak{b}=\mathfrak{a}/\mathfrak{b}_1$ est un élément de

$$\mathscr{H}(D(\beta, \rho^-)) \cap \mathscr{H}(\mathfrak{A})=\mathscr{H}(D(\beta, \rho^-) \cup \mathfrak{A})).$$

Comme $D(\beta, \rho^-) \cup \mathfrak{A}$ est un ensemble Δ-superadmissible qui contient $D(\alpha, 1^-)$, on a démontré que $P\mathfrak{a}/\mathfrak{b} \in \mathcal{O}^{\Delta}_{\alpha}$, on a aussi $P \in \mathcal{O}^{\Delta}_{\alpha}$ ce qui montre bien $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} \in \mathscr{H}^{\Delta}_{\alpha}$. $\square$

Nous avons vu que $\mathcal{O}$ vérifiait la condition (4.1), le résultat précédent montre que nous pouvons appliquer le théorème 4.7 avec $\mathcal{O}=\mathcal{O}^{\Delta}_{\alpha}$, $\mathscr{H}=\mathscr{H}^{\Delta}$, $\mathscr{K}_0=\mathscr{K}_{\alpha}$ et $\mathscr{K}=\mathscr{K}_{\alpha,1}$. Si $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H}^{\Delta})$, nous noterons $(\mathfrak{M}_{\alpha}, \nabla)$ l'objet de $MC(\mathcal{O}^{\Delta}_{\alpha})$ entièrement soluble dans $\mathscr{K}_{\alpha}$ contenu dans $(\mathfrak{M}, \nabla)$ et qui est maximal pour cette propriété.

7. Objets normalisés

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à un objet $(\mathfrak{M}, \nabla)$ de $MC(\mathscr{H}^{\Delta})$. μ désignera la dimension de $\mathfrak{M}$ sur $\mathscr{H}$.

Étant donné $\alpha \in \bar{\Omega} \cup \infty$, le disque $D(\alpha, 1^-)$ est dit ordinaire (pour $(\mathfrak{M}, \nabla)$) si $\alpha \notin \bar{\Delta}$ et s'il existe une base de $\mathfrak{M}$ telle que la matrice représentant D_{α} dans cette base appartienne à $M_{\mu}(\mathcal{O}^{\Delta}_{\alpha})$.

Par exemple, les éléments de $E \supset \mathscr{H}^{\Delta}$ n'ayant pas de singularité dans $D(t, 1^-)$, on a $\mathscr{H}^{\Delta}=\mathcal{O}^{\Delta}_{t}$; le disque $D(t, 1^-)$ est donc toujours un disque ordinaire.

PROPOSITION 7.1. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *un objet de* $MC(\mathscr{H}^{\Delta})$, (e) *une base de* $\mathfrak{M}$ *et soit* $\mathbf{A}_n$ *la matrice représentant* $(d/dx)^n$ *dans la base* (e). $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *est entièrement soluble dans* $\mathscr{H}_t$ *si et seulement si, pour tout* $r < 1$, *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathbf{A}_n/n! \|_E r^n = 0. \tag{7.1}$$

Si cette condition est vérifiée et si $D(\alpha, 1^-)$ *est un disque ordinaire, alors* $(\mathfrak{M}_\alpha, \nabla)$ *est entièrement soluble dans* $\mathscr{A}_\alpha$, *et* $\dim_{\mathcal{O}^{\Delta}_{\alpha}} \mathfrak{M}_\alpha = \dim_{\mathscr{H}^{\Delta}_{\alpha}} \mathfrak{M}$.

Si s est une solution de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ dans $\mathscr{H}_t$, on a :

$$(d/dx)^n s(e) = s([\nabla(d/dx)]^n(e)) = s(\mathbf{A}_n(e)) = \mathbf{A}_n s(e).$$

Supposons $(\mathfrak{M}, \nabla)$ entièrement soluble dans $\mathscr{H}_t$ et soit s_i $(1 \leqslant i \leqslant \mu)$ une base de $S((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{H}_t)$. Considérons la matrice $\mathbf{V}_t \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{H}_t)$ dont les vecteurs colonnes sont les $s_i(e)$. Il vient :

$$(d/dx)^n \mathbf{V}_t = \mathbf{A}_n \mathbf{V}_t.$$

En particulier pour $n=1$ on voit que $\mathbf{V}_t$ est solution d'une équation différentielle sans singularité dans $D(t, 1^-)$. On en déduit que $\mathbf{V}_t$ n'a pas de singularité dans $D(t, 1^-)$ c'est-à-dire appartient à $\mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{A}_t)$. La formule de Taylor donne alors :

$$\mathbf{V}_t(x) = [\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(t)\,(x-t)^n/n!]\,\mathbf{V}(t).$$

Cette série entière devant converger dans le disque $D(t, 1^-)$, on trouve, pour tout $r < 1$, $\lim_{n\to\infty} \| \mathbf{A}_n(t)/n! \| r^n = 0$, ce qui donne (7.1) en remarquant que $\| \mathbf{A}_n(t) \| = \| \mathbf{A}_n \|_E$.

Pour démontrer la réciproque nous allons nous placer dans les conditions plus générales suivantes : $\alpha \in \overline{\Omega}$ (resp. $\alpha = \infty$) $D(\alpha, 1^-)$ est un disque ordinaire et (e) est une base telle que la matrice $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}^\infty = -x^2 \mathbf{A}$) représentant $D_\alpha = d/dx$ (resp. $D_\infty = -x^2\, d/dx$) dans la base (e) soit à coefficients dans $\mathcal{O}^{\Delta}_{\alpha}$. Nous notons $\mathbf{A}_n$ (resp. $\mathbf{A}^\infty_n$) la matrice représentant $(d/dx)^n$ (resp. $(-x^2\, d/dx)^n$) dans la base (e) et nous supposons que la condition (7.1) est satisfaite par la suite $\mathbf{A}_n$.

Soit $a \in D(\alpha, 1^-)$ (resp. $a = \infty$). $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}^\infty$) n'ayant pas de singularité en a, il existe une $\mu \times \mu$ matrice $\mathbf{V}_a(x)$ à coefficients analytiques dans un voisinage de a solution du système $d/dx\, \mathbf{V}_a = \mathbf{A}\, V_a$ avec $\mathbf{V}_a(a)$ inversible. On vérifie par récurrence que :

$$(d/dx)^n \mathbf{V}_a = \mathbf{A}_n \mathbf{V}_a \qquad (\text{resp. } (-x^2\, d/dx)^n \mathbf{V}_\infty = \mathbf{A}^\infty_n \mathbf{V}_\infty).$$

Comme la formule (5.4) montre par récurrence que $\mathbf{A}_n \in M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$ (resp. $\mathbf{A}_n^\infty \in M_\mu(\mathcal{O}_\infty^\Delta)$), on peut écrire la formule de Taylor :

$$(7.2, \alpha) \qquad \mathbf{V}_a(x) = [\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(a)(x-a)^n/n\,!]\,\mathbf{V}_a(a);$$

$$(7.2, \infty) \qquad \mathbf{V}_\infty(x) = [\textstyle\sum_{n=0} \mathbf{A}_n^\infty(\infty)\,x^{-n}/n\,!]\,\mathbf{V}_\infty(\infty).$$

Pour $|x-a| \leqslant r < 1$, on a :

$$\| \mathbf{A}_n(a)(x-a)^n/n\,! \| \leqslant \| \mathbf{A}_n/n\,! \|_E\, r^n \to 0 \qquad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

L'équation (7.2, α) montre donc que $\mathbf{V}_a \in M_\mu(\mathscr{A}_\alpha) \subset M_\mu(\mathscr{H}_\alpha)$. Or $\mathbf{V}_a(a)$ étant inversible, det $\mathbf{V}_a$ est non nul. Comme $(d/dx)\,\mathbf{V}_a = \mathbf{A}\mathbf{V}_a$, la proposition 5 montre que $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{H}_\alpha$. Pour $\alpha = \infty$ il faut une étape supplémentaire : comme $D(t, 1^-)$ est ordinaire nous venons de démontrer que $\mathbf{V}_t \in M_\mu(\mathscr{A}_t)$. La formule de Taylor pour $\mathbf{V}_t(1/x)$, qui appartient à $M_\mu(\mathscr{A}_{1/t})$, s'écrit :

$$\mathbf{V}_t(x) = \left[\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n^\infty(t)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{t}\right)^n \Big/ n\,!\right] \mathbf{V}_t(t)$$

et montre que $\mathbf{A}_n^\infty$ vérifie aussi (7.1). L'équation (7.2, ∞) montre alors que $\mathbf{V}_\infty \in M_\mu(\mathscr{A}_\infty)$ ce qui permet de conclure comme dans le cas $\alpha \neq \infty$.

On voit que le $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$-module $\mathfrak{N}_\alpha$ dont (e) est une base est stable par $\nabla(D_\alpha)$. Donc $(\mathfrak{N}_\alpha, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$ contenu dans $(\mathfrak{M}, \nabla)$. Les solutions de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ dans $\mathscr{H}_\alpha$ que nous avons construites sont des solutions de $(\mathfrak{N}_\alpha, \nabla)$ dans $\mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{H}_\alpha$. L'objet $(\mathfrak{N}_\alpha, \nabla)$ est donc entièrement soluble dans $\mathscr{A}_\alpha$ donc dans $\mathscr{H}_\alpha$. Comme $\mathfrak{N}_\alpha$ a la dimension maximale pour cette propriété (*voir* théorème 4.7), $(\mathfrak{N}_\alpha, \nabla)$ est maximal. Donc $(\mathfrak{N}_\alpha, \nabla) = (\mathfrak{M}_\alpha, \nabla)$. □

Remarque. — Soit $D(\alpha, 1^-)$ un disque ordinaire de $(\mathfrak{M}, \nabla)$. La matrice $\mathbf{A}$ n'ayant pas de singularité dans $D(\alpha, 1^-)$, la relation :

$$(d/dx)\,\det \mathbf{V}_a = \operatorname{Tr} \mathbf{A} \det \mathbf{V}_a$$

montre que det $\mathbf{V}_a$ ne s'annule pas dans ce disque. Donc $\mathbf{V}_a \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathbf{A}_\alpha)$. Posons, pour x et $y \in D(\alpha, 1^-)$,

$$\mathbf{M}(x, y) = \mathbf{V}_a(x)\,\mathbf{V}_a^{-1}(y).$$

$\mathbf{M}(x, y)$ étant l'unique solution du système $(d/dx)\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{M}$, $\mathbf{M}(y) = \mathbf{I}$ ne dépend pas de a. On en déduit :

$$(7.3) \quad \begin{cases} \mathbf{M}(x, y) = \mathbf{V}_y(x)\,\mathbf{V}_y^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(y)(x-y)^n/n\,!, \\ \mathbf{M}(x, y) = \mathbf{V}_a(x)\,\mathbf{V}_a^{-1}(a)\,\mathbf{V}_a(a)\,\mathbf{V}_a^{-1}(y) = \mathbf{M}(x, a)\,\mathbf{M}^{-1}(y, a). \end{cases}$$

La proposition 7.1 a une réciproque importante pour démontrer qu'un $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{H}_t$. Ces résultats sont dus essentiellement à DWORK-ROBBA.

PROPOSITION 7.2. — *Si* $\dim_{\mathcal{O}_\alpha^\Delta} \mathfrak{M}_\alpha = \dim_{\mathcal{H}^\Delta} \mathfrak{M}$ *et si* $(\mathfrak{M}_\alpha, \nabla)$ *est entièrement soluble dans* $\mathcal{A}_\alpha$, *alors* $D(\alpha, 1^-)$ *est un disque ordinaire et* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *est entièrement soluble dans* $\mathcal{A}_t$.

Le $\mathcal{H}^\Delta$-espace vectoriel engendré par $\mathfrak{M}_\alpha$ est stable par $\nabla(d/dx)$. D'après le théorème 4.7 sa dimension (sur $\mathcal{H}^\Delta$) est au moins celle de $\mathfrak{M}_\alpha$ (sur $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$). L'hypothèse faite sur les dimensions impose que ce soit $\mathfrak{M}$ lui-même. Une base de $\mathfrak{M}_\alpha$ est donc aussi une base de $\mathfrak{M}$. Comme la matrice représentant D_α dans cette base appartient à $M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$, c'est que $D(\alpha, 1^-)$ est un disque ordinaire.

Notons m un élément de $\mathfrak{M}_\alpha$ tel que les $[\nabla(D_\alpha)]^i(\mathrm{m})$ engendrent $\mathfrak{M}_\alpha$ (proposition 4.6). Les $[\nabla(D_\alpha)]^i(\mathrm{m})$ pour $0 \leqslant i < \mu = \dim \mathfrak{M}$ sont linéairement indépendants sur $\mathcal{H}^\Delta$ (sinon le $\mathcal{H}^\Delta$-espace vectoriel engendré par les $[\nabla(D_\alpha)]^i(\mathrm{m})$ serait de dimension strictement inférieure à μ ce qui n'est pas car nous avons vu que cet espace vectoriel était $\mathfrak{M}$ lui-même) ils forment donc une base de $\mathfrak{M}$ et aussi une base de $\mathcal{H}_\alpha^\Delta \otimes \mathfrak{M}_\alpha$. La matrice **M** représentant D_α dans cette base appartient à $M_\mu(\mathcal{H}_\alpha^\Delta)$. Comme $[\nabla(D_\alpha)]^i(\mathrm{m}) \in \mathfrak{M}_\alpha$ et comme $\mathfrak{M}_\alpha$ est entièrement soluble dans $\mathcal{A}_\alpha$ la matrice **U** solution de $D_\alpha \mathbf{U} = \mathbf{MU}$ introduite à la proposition 5 appartient à $M_\mu(\mathcal{A}_\alpha)$. Soit L l'opérateur unitaire d'ordre μ de $\mathcal{H}_\alpha^\Delta[D_\alpha]$ tel que $\nabla(L)(\mathrm{m}) = 0$. L'équation différentielle $L(f) = 0$ a donc μ solutions linéairement indépendantes dans $\mathcal{A}_\alpha$. Un théorème de DWORK-ROBBA affirme ([5], théorème 4.2.2 de comparaison) que cette équation est entièrement soluble dans $\mathcal{A}_t$. Il en est de même de $(\mathfrak{M}_\alpha, \nabla)$ donc de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ (remarquons que $\mathcal{H}^\Delta \subset \mathcal{A}_t$). $\square$

DÉFINITION. — L'objet $(\mathfrak{M}, \nabla)$ de $MC(\mathcal{H}^\Delta)$ est dit normalisé s'il est entièrement soluble dans $\mathcal{K}_t$ et si tout disque $D(\alpha, 1^-)$, pour $\alpha \notin \overline{\Delta}$, est ordinaire.

Nous allons préciser ce qui se passe dans le cas où, bien que $D(\alpha, 1^-)$ soit ordinaire, la matrice **A** représentant d/dx $(= D_\alpha$ si $\alpha \neq \infty)$ dans la base (e) aurait des singularités dans ce disque.

PROPOSITION 7.3. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *un objet normalisé de* $MC(\mathcal{H}^\Delta)$ *et soit* $\alpha \notin \overline{\Delta}$. *Notons* μ *la dimension de* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathbf{A}_n$ *la matrice représentant* $(d/dx)^n$ *dans la base* (e) *de* $\mathfrak{M}$. *Il existe a dans* $D(\alpha, 1^-)$ *et* $R_a < 1$ *tels que* $\mathbf{A}_n \in M_\mu[\mathcal{H}(D(a, 1^-) - D(a, R_a^-))]$ *et que pour* $R_a < r < 1$ *la suite* $r^n \| \mathbf{A}_n / n! \|_{a,r}$ *soit bornée lorsque n varie.*

L'objet $(\mathfrak{M}, \nabla)$ étant normalisé et α n'appartenant pas à $\overline{\Delta}$, le disque $D(\alpha, 1^-)$ est ordinaire. Il existe donc une base (f) de $\mathfrak{M}$ telle que, si **B** est la matrice qui représente (d/dx) dans la base (f), $\mathbf{B}$ appartienne à $M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$ (pour $\alpha=\infty$ on a en fait $-x^2\mathbf{B}\in M_\mu(\mathcal{O}_\infty^\Delta)$, ce qui donne, puisque $x^{-2}\in\mathcal{O}_\infty^\Delta$, $\mathbf{B}\in M_\mu(\mathcal{O}_\infty^\Delta)$). Si $\mathbf{B}_n$ représente $(d/dx)^n$ dans la base (f) on aura, d'après l'égalité (5.4), $\mathbf{B}_n\in M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$.

Soit $\mathbf{H}$ la matrice de changement de base $((e)=\mathbf{H}(f))$. $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}^{-1}$ sont à coefficients dans $\mathscr{H}^\Delta$, il existe donc a dans $D(\alpha, 1^-)$ et $R_a<1$ tels que ces deux matrices soient à coefficients analytiques dans $D(a, 1^-)-D(a, R_a^-)$. La formule (5.5) montre que $\mathbf{A}_n$ est aussi à coefficients analytiques dans $D(a, 1^-)-D(a, R_a^-)$ et que l'on a, pour tout r, $R_a<r<1$:

$$(7.4)\quad r^n\|\mathbf{A}_n/n\,!\|_{a,r}\leqslant\sup_m[r^m\|(d/dx)^m\mathbf{H}/m\,!\|_{a,r}\; r^{n-m}\|\mathbf{B}_{n-m}/(n-m)\,!\|_{a,r}]\,\|\mathbf{H}^{-1}\|_{a,r}.$$

Il est bien connu (et facile à vérifier) que, si $d(\mathfrak{A}, \complement\mathfrak{A})\geqslant r>0$, on a, au sens des opérateurs sur $\mathscr{H}(\mathfrak{A})$:

$$\|(d/dx)^m/m\,!\|_{\mathfrak{A}}\leqslant r^{-m}.$$

Comme $\mathbf{H}$ a ses coefficients dans $\mathscr{H}(D(a, 1^-)-D(a, r-))$ on trouve :

$$\|(d/dx)^m\mathbf{H}/m\,!\|_{a,r}r^m\leqslant\|\mathbf{H}\|_{a,r}.$$

(7.4) s'écrit alors :

$$r^n\|\mathbf{A}_n/n\,!\|_{a,r}\leqslant\sup_{m<n}[r^m\|\mathbf{B}_m/m\,!\|_{a,r}]\,\|\mathbf{H}\|_{a,r}\|\mathbf{H}^{-1}\|_{a,r}.$$

Comme $\mathbf{B}_n\in M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$, on a $\|\mathbf{B}_n\|_{a,r}\leqslant\|\mathbf{B}_n\|_E$. D'après la proposition 7.1, puisque $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est normalisé, la suite $r^n\|\mathbf{B}_n/n\,!\|_{a,r}$ tend vers zéro donc est bornée, ce qui achève la démonstration. □

Corollaire 7.4. — *Avec les notations de la proposition* 7.3, *pour tout* $R<1$, *il existe un domaine* $\mathfrak{A}_R$, *Δ-superadmissible, tel que*

$$\mathbf{A}_n\in M_\mu(\mathscr{H}(\mathfrak{A}_R))\qquad\text{et}\qquad\lim_{n\to\infty}R^n\|\mathbf{A}_n/n\,!\|_{\mathfrak{A}_R}=0.$$

La matrice $\mathbf{A}_1$ représentant d/dx dans la base (e) étant à coefficients dans $\mathscr{H}^\Delta$ appartient à $M_\mu(\mathcal{O}_\beta^\Delta)$ pour presque tous les $\beta\notin\overline{\Delta}$. Pour ces β, on a aussi $\mathbf{A}_n\in M_\mu(\mathcal{O}_\beta^\Delta)$ et :

$$\|\mathbf{A}_n/n\,!\|_{D(\beta,1^-)}\leqslant\|\mathbf{A}_n/n\,!\|_E.$$

Il reste un nombre fini de disques $D(\alpha, 1^-)\notin\Delta$ dans lesquels $\mathbf{A}_1$ a des singularités. D'après la proposition 7.3 il existe a et R_a tel que $\mathbf{A}_n\in M_\mu(\mathscr{H}(D(a, 1^-)-D(a, R_a^-)))$. Posons :

$$\mathfrak{A}_R=\complement_\Omega[\Delta\cup D(a, r^-)]=\bigcup D(\beta, 1^-)\cup[D(a, 1^-)-D(a, r^-)],$$

où r est choisi de telle sorte que : $\sup(R_\alpha, R)<r<1$. On a :

$$R^n \| \mathbf{A}_n/n! \|_{\mathfrak{A}_R} \leqslant \sup[R^n \| \mathbf{A}_n/n! \|_{D(\beta,1^-)}, (R/r)^n r^n \| \mathbf{A}_n/n! \|_{\alpha,r}]$$
$$\leqslant \sup[R^n \| \mathbf{A}_n/n! \|_E, (R/r)^n C_\alpha],$$

où les C_α sont des constantes, ce qui achève la démonstration, puisque, comme $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est normalisé, $R^n \| \mathbf{A}_n/n! \|_E$ tend vers zéro. □

Nous terminons ce paragraphe en montrant que les objets normalisés de $MC(\mathscr{H}^\Delta)$ forment une sous-catégorie abélienne $MCN(\mathscr{H}^\Delta)$ de $MC(\mathscr{H}^\Delta)$.

PROPOSITION 7.5. — *Soit :*

$$0 \to (\mathfrak{N}, \nabla') \xrightarrow{i} (\mathfrak{M}, \nabla) \xrightarrow{p} (\mathfrak{R}, \nabla'') \to 0$$

une suite exacte de $MC(\mathscr{H}^\Delta)$. *Alors la suite de* $MC(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$ $(\alpha \in \overline{\Omega} \cup \infty)$:

$$0 \to (\mathfrak{N}_\alpha, \nabla') \xrightarrow{i} (\mathfrak{M}_\alpha, \nabla) \xrightarrow{p} (\mathfrak{R}_\alpha, \nabla'')$$

est exacte. Si on suppose que $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *est normalisé, il en est de même de* $(\mathfrak{N}, \nabla')$ *et de* $(\mathfrak{R}, \nabla'')$ *et* p *est une surjection.*

Il est facile de constater qu'un élément de $\mathfrak{M}$ appartient à $\mathfrak{M}_\alpha$ si et seulement si :

(a) le $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$-module $\mathcal{O}_\alpha^\Delta\{\mathfrak{m}\}$ engendré par les $[\nabla(D_\alpha)]^i(\mathfrak{m})$ $(i=0, 1, \ldots)$ est de type fini.

(b) le $\mathscr{H}_\alpha^\Delta$-espace vectoriel $\mathscr{H}_\alpha^\Delta\{\mathfrak{m}\}$ engendré par les $[\nabla(D_\alpha)]^i(\mathfrak{m})$ est entièrement soluble dans $\mathscr{H}_\alpha$.

Si $\mathfrak{m}$ vérifie (a) il est clair que $p(\mathfrak{m})$ vérifie aussi (a). Par ailleurs p définit une surjection de $(\mathscr{H}_\alpha^\Delta\{\mathfrak{m}\}, \nabla)$ sur $(\mathscr{H}_\alpha^\Delta p(\mathfrak{m}), \nabla'')$. Si $\mathfrak{m}$ vérifie (b), le corollaire 2.5 montre que $p(\mathfrak{m})$ vérifie aussi (b). On a donc $p(\mathfrak{M}_\alpha)\subset\mathfrak{R}_\alpha$.

On démontre de même que $i(\mathfrak{N}_\alpha)\subset\mathfrak{M}_\alpha$. Soit alors $\mathfrak{m}\in\mathfrak{M}_\alpha$ tel que $p(\mathfrak{m})=0$. Il existe $\mathfrak{n}\in\mathfrak{N}$ tel que $\mathfrak{m}=i(\mathfrak{n})$. Comme i est une injection, $\mathcal{O}_\alpha^\Delta\{\mathfrak{n}\}$ (resp. $\mathscr{H}_\alpha^\Delta\{\mathfrak{n}\}$) est isomorphe à $\mathcal{O}_\alpha^\Delta\{\mathfrak{m}\}$ (resp. $\mathscr{H}_\alpha^\Delta\{\mathfrak{m}\}$) ce qui montre que $\mathfrak{n}$ vérifie (a) et (b) donc appartient à $\mathfrak{N}_\alpha$.

Si $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est normalisé et si $\alpha\notin\overline{\Delta}$, d'après la proposition 7.1 $\mathfrak{M}_\alpha$ est de dimension maximale. Nous trouvons :

$$\dim\mathfrak{M}_\alpha=\dim\mathfrak{M}=\dim\mathfrak{N}+\dim\mathfrak{R} \geqslant \dim\mathfrak{N}_\alpha+\dim\mathfrak{R}_\alpha \geqslant \dim\mathfrak{M}_\alpha,$$

ce qui impose à $\mathfrak{N}_\alpha$ et $\mathfrak{R}_\alpha$ d'être aussi de dimension maximale. La proposition 7.2 montre alors que $(\mathfrak{N}, \nabla')$ et $(\mathfrak{R}, \nabla'')$ sont entièrement solubles dans $\mathcal{K}_t$ et que $D(\alpha, 1^-)$ est ordinaire pour ces objets. Ceux-ci sont donc normalisés. Remarquons que dans ce cas l'application p est une surjection de $(\mathfrak{M}_\alpha, \nabla)$ sur $(\mathfrak{N}_\alpha, \nabla'')$ (*voir* proposition 4.5). $\square$

8. Normalisation de la matrice de dérivation

Nous commençons par donner un résultat (dû à DWORK) sur les équations différentielles.

PROPOSITION 8.1. — *Soit*

$$L=(d/dx)^\mu+\mathfrak{a}_{\mu-1}(d/dx)^{\mu-1}+\ldots+\mathfrak{a}_0, \qquad \mathfrak{a}_i\in E,$$

un opérateur différentiel. Si l'équation différentielle $L(f)=0$ a μ solutions dans $\mathcal{K}_t$ linéairement indépendantes sur Ω alors, pour tout i, on a $|\mathfrak{a}_i|_E\leqslant 1$.

Soient $f_1, \ldots, f_\mu$ les solutions de $L(f)=0$ dans $\mathcal{K}_t$ qui sont linéairement indépendantes sur Ω. Définissons par récurrence :

$$g_1=f_1, \qquad g_i=L_{i-1}\circ\ldots\circ L_1(f_i) \qquad \text{et} \qquad L_i=d/dx-g_i'/g_i.$$

De telle sorte que : $L_i\circ\ldots\circ L_1(f_i)=0$. L'opérateur :

$$L_\mu\circ\ldots\circ L_1=(d/dx)^\mu+\ldots$$

a donc les f_i pour solutions. Comme $L-L_\mu\circ\ldots\circ L_1$ est un opérateur d'ordre $\mu-1$, il ne peut avoir les μ solutions f_i linéairement indépendantes sans être nul. On a donc :

$$L=L_\mu\circ\ldots\circ L_1.$$

Pour $r<1$, l'anneau $\mathcal{A}_t$ est muni d'une norme définie par :

$$|f|_r=\sup_{|x-t|=r}|f(x)|.$$

Si $f=\sum\alpha_n(x-t)^n$, on a aussi : $|f|_r=\sup_n(|\alpha_n|r^n)$. On trouve :

$$|f'|_r=\sup_n(|n\alpha_n|r^{n-1})\leqslant\frac{1}{r}|f|_r.$$

La norme $|\,.\,|_r$ se prolonge à $\mathcal{K}_t$ de façon naturelle et vérifie encore la relation $|f'|_r\leqslant 1/r\,|f|_r$. Considérons alors le sous-ensemble de $\mathcal{K}_t$:

$$W=\{f\in\mathcal{K}_t;\ \limsup_{r\to 1}|f|_r\leqslant 1\},$$

W est un anneau stable par dérivation. Comme $|g_i'/g_i|_r\leqslant 1/r$, les coefficients de L_i donc de $L=L_\mu\circ\ldots\circ L_1$ appartiennent à W. Par hypothèse les $\mathfrak{a}_i$ appartiennent à E donc :

$$\limsup_{r\to 1}|\mathfrak{a}_i|_r=|\mathfrak{a}_i|_E.$$

Puisque $\mathfrak{a}_i\in W$ on a donc $|\mathfrak{a}_i|_E\leqslant 1$. $\square$

Si $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est un objet normalisé de $MC(\mathscr{H}^{\Delta})$, il existe d'après la proposition 2.1 une base de $\mathfrak{M}$ de la forme $(\mathfrak{m}, \nabla(D)(\mathfrak{m}), \ldots, [\nabla(D)]^{\mu-1}(\mathfrak{m}))$. La matrice $\mathbf{M}$ représentant D dans cette base a pour coefficients des 0 des 1 et les coefficients de l'équation différentielle que satisfait $\mathfrak{m}$. Comme $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}_t$, cette dernière possède μ solutions dans $\mathscr{K}_t$ linéairement indépendantes sur Ω (les images de $\mathfrak{m}$ par les éléments d'une base sur Ω de $S((\mathfrak{M}, \nabla), \mathscr{K}_t)$). La proposition 8.1 exprime donc que $\|\mathbf{M}\|_E \leqslant 1$.

Par ailleurs, pour tout $\alpha \notin \overline{\Delta}$, il existe une base (f) de $\mathfrak{M}$ pour laquelle la matrice représentant (D_α) appartient à $M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$. Nous nous proposons de trouver, pour chaque $\alpha \notin \overline{\Delta}$, une base de $\mathfrak{M}$ ayant ces deux propriétés à la fois c'est-à-dire pour laquelle la matrice $\mathbf{A}$ représentant D_α vérifie $\mathbf{A} \in M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$ et $\|\mathbf{A}\|_E \leqslant 1$. (En fait la matrice $\mathbf{M}$ ci-dessus appartient bien à $M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta)$ pour presque tout α mais en général pas pour tous.)

LEMME 8.2. — *Soit* $\alpha \notin \overline{\Delta} \cup \infty$; $\mathbf{U} \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{K}_\alpha)$ *et* $\mathbf{M} \in M_\mu(\mathscr{H}^\Delta)$ *tels que :* $(d/dx)\mathbf{U} = \mathbf{MU}$. *S'il existe un polynôme P de* $\mathbf{k}[x]$ *tel que* $P\mathbf{U} \in M_\mu(\mathscr{A}_\alpha)$ *alors il existe* $\mathbf{H} \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathbf{k}(x))$ *tel que :* (i) $\mathbf{HU} \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{A}_\alpha)$; (ii) $\|\mathbf{H}\|_E = \|\mathbf{H}^{-1}\|_E = 1$.

Nous avons $\mathbf{M} = (d/dx)\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} \in M_\mu(\mathscr{K}_\alpha)$ par hypothèse. Les coefficients de $\mathbf{M}$ sont donc dans $\mathscr{K}_\alpha \cap \mathscr{H}^\Delta = \mathscr{H}_\alpha^\Delta$ (proposition 6).

Considérons l'ensemble de matrices :

$$V = \{\mathbf{V} \in M_\mu(\mathscr{A}_\alpha);\ \mathbf{V} = \mathbf{HU} \text{ avec } \mathbf{H} \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathbf{k}(x)),\ \|\mathbf{H}\|_E = \|\mathbf{H}^{-1}\|_E = 1\}.$$

Il nous faut démontrer que V contient un élément inversible dans $M_\mu(\mathscr{A}_\alpha)$ c'est-à-dire dont le déterminant est inversible dans $\mathscr{A}_\alpha$. Pour cela il suffit de vérifier que ce déterminant ne s'annule pas dans $D(\alpha, 1^-)$.

Nous pouvons supposer que $|P|_E = |P(t)| = 1$ auquel cas, en notant $\mathbf{I}$ la matrice identité $\mu \times \mu$, on a $P\mathbf{I} \in V$. V n'est donc pas vide.

Si $\mathbf{V} \in V$, on a :

$$(d/dx)\mathbf{V} = [(d/dx)\mathbf{H} + \mathbf{HM}]\mathbf{H}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{BV}.$$

Comme $\mathbf{k}(x) \subset \mathscr{H}_\alpha^\Delta$, on a $\mathbf{B} \in M_\mu(\mathscr{H}_\alpha^\Delta)$. On trouve :

$$(d/dx)\det \mathbf{V} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{B} \det \mathbf{V},$$

les zéros de $\det \mathbf{V}$ sont donc des singularités de $\mathrm{Tr}\,\mathbf{B}$. Comme $\mathrm{Tr}\,\mathbf{B} \in \mathscr{H}_\alpha^\Delta$, ces singularités sont les zéros du dénominateur de $\mathrm{Tr}\,\mathbf{B}$ qui est un élément de $\mathcal{O}_\alpha^\Delta$. Elles sont donc en nombre fini. $\det \mathbf{V}$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans $D(\alpha, 1^-)$.

Notons $n(\mathbf{V})$ le nombre de zéros de $\det \mathbf{V}$ dans $D(\alpha, 1^-)$ comptés avec leur multiplicité. Il nous suffit de démontrer que $\inf_{\mathbf{V}\in V} n(\mathbf{V})=0$. Soit $\mathbf{V}=\mathbf{HU}\in V$ tel que $n(\mathbf{V})$ soit minimal et supposons que $n(\mathbf{V})>0$. Il existe donc $a\in D(\alpha, 1^-)$ avec $\det \mathbf{V}(a)=0$, nous pouvons alors trouver des $\lambda_i \in \mathbf{k}$ tels que : $\sup|\lambda_i|=1$ et, pour tout $1\leqslant j\leqslant \mu$, $\sum_i \lambda_i \mathbf{V}_{ij}(a)=0$. Soit i_0 tel que $|\lambda_{i_0}|=1$. Posons :

$$\mathbf{H}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \dfrac{\lambda_1}{x-a} & \dfrac{\lambda_2}{x-a} & \cdots & \dfrac{\lambda_{i_0}}{x-a} & \cdots & \dfrac{\lambda_n}{x-a} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i_0.$$

On a :

$$\|\mathbf{H}_1\|_E=1 \qquad \text{et} \qquad |\det \mathbf{H}_1|_E=\left|\frac{\lambda_{i_0}}{x-a}\right|_E=1$$

donc :

$$\|\mathbf{H}_1^{-1}\|_E=1.$$

Par ailleurs $\mathbf{W}=\mathbf{H}_1\mathbf{V}$ a les mêmes lignes que $\mathbf{V}$ sauf la ligne i_0 qui est donnée par :

$$\mathbf{W}_{i_0 j}=\sum_i \frac{\lambda_i}{x-a}\mathbf{V}_{ij}.$$

Le pôle a de $\mathbf{W}_{i_0 j}$ n'est qu'apparent puisque $\sum_i \lambda_i V_{ij}(a)=0$. Par suite $\mathbf{W}\in M_\mu(\mathscr{A}_\alpha)$ et comme $\mathbf{W}=\mathbf{H}_1\mathbf{HU}$, on a aussi $\mathbf{W}\in V$.

Nous avons :

$$\det \mathbf{W}=\det \mathbf{H}_1 \det \mathbf{V}=\frac{\lambda_{i_0}}{x-a}\det \mathbf{V},$$

c'est-à-dire $n(\mathbf{W})=n(\mathbf{V})-1$ ce qui contredit l'hypothèse de minimalité de $n(\mathbf{V})$ et donc démontre le lemme. □

THÉORÈME 8.3. — *Soit* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *un objet normalisé de* $MC(\mathscr{H}^\Delta)$. *Pour tout* $\alpha\notin\overline{\Delta}$, *il existe une base* (e) *de* $\mathfrak{M}$ *telle que, si* $\mathbf{A}$ *est la matrice représentant* D_α *dans cette base, on ait :* (i) $\mathbf{A}\in M_\mu(\mathscr{O}_\alpha^\Delta)$ *et* (ii) $\|\mathbf{A}\|_E\leqslant 1$.

La proposition 7.1 indique que nous sommes dans les hypothèses de la proposition 7.2. Nous reprenons les notations utilisées dans cette dernière.

L'opérateur différentiel L vérifie les conditions de la proposition 8.1; ses coefficients sont donc de norme majorée par 1 autrement dit nous avons $\|\mathbf{M}\|_E < 1$.

Par ailleurs les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{U}$ vérifient les conditions du lemme 8.2 avec $P=1$ (pour $\alpha=\infty$, on applique le lemme 8.2 en changeant x en $1/x$). Il existe donc une matrice $\mathbf{H}$ dans $\mathrm{Gl}_\mu(\mathbf{k}(x)) \subset \mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{H}_\alpha^\Delta) \subset \mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{H}^\Delta)$ telle que (i) $\mathbf{HU} \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{A}_\alpha)$ et (ii) $\|\mathbf{H}\|_E = \|\mathbf{H}^{-1}\|_E = 1$.

Notons $\mathbf{A}$ la matrice qui représente D_α dans la base $(e) = \mathbf{H}(\mathfrak{m})$ (rappelons que $(\mathfrak{m})$ désigne la base $[\nabla(D)]^i(\mathfrak{m})$). On a d'après (5.2) :

$$\mathbf{A} = (D_\alpha \mathbf{H} + \mathbf{HM})\mathbf{H}^{-1}, \tag{8.1}$$

ce qui montre que $\mathbf{A} \in M_\mu(\mathscr{H}_\alpha^\Delta)$. Puisque D_α n'augmente pas les normes dans $\mathscr{H}^\Delta$ on trouve aussi :

$$\|\mathbf{A}\|_E \leqslant (\sup(\|D_\alpha \mathbf{H}\|_E, \|\mathbf{H}\|_E \|\mathbf{M}\|_E)) \|\mathbf{H}^{-1}\|_E \leqslant 1.$$

Par ailleurs, (8.1) donne :

$$\mathbf{A} = [D_\alpha \mathbf{H} + \mathbf{H} D \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}]\mathbf{H}^{-1} = D_\alpha(\mathbf{HU})(\mathbf{HU})^{-1} \in M_\mu(\mathscr{A}_\alpha).$$

Comme $\mathscr{A}_\alpha \cap \mathscr{H}_\alpha^\Delta = \mathscr{O}_\alpha^\Delta$, on trouve $\mathbf{A} \subset M_\mu(\mathscr{O}_\alpha^\Delta)$. $\square$

Remarques. — Comme $\mathbf{A} \subset M_\mu(\mathscr{O}_\alpha^\Delta)$, le $\mathscr{O}_\alpha^\Delta$-module engendré par (e) est stable par $\nabla(D_\alpha)$. Ce module, muni de la connexion ∇, est entièrement soluble dans $\mathscr{A}_\alpha$ (car $\mathbf{HU} \in M_\mu(\mathscr{A}_\alpha)$ en appliquant la proposition 5) ce ne peut être que $\mathfrak{M}_\alpha$. (e) est donc une base de $\mathfrak{M}_\alpha$.

Le corollaire 10.6 ci-dessous est une forme améliorée du théorème 8.3.

III. — Structure de Frobenius

9. Construction du foncteur de Frobenius

Nous choisissons un automorphisme σ de Ω (sur $\mathbf{Q}_p$) qui relève l'automorphisme de Frobenius de $\overline{\Omega}$ et nous supposons que σ laisse $\mathbf{k}$ globalement invariant (en d'autres termes, σ est un prolongement de l'automorphisme de Frobenius de l'anneau des vecteurs de Witt de $\overline{\Omega}$ ([10], II.6)). En particulier nous avons :

$$\text{pour tout } a \text{ de } \Omega, \qquad |a| = |a^\sigma|, \tag{9.1}$$

$$\text{pour } a \in \Omega \text{ et } |a| \leqslant 1, \qquad |a^p - a^\sigma| < 1. \tag{9.2}$$

Si f est une fonction définie sur une partie $\mathfrak{A}$ de Ω et à valeurs dans Ω, nous définissons une nouvelle fonction $\varphi(f)$ par :

$$(9.3) \qquad \varphi(f)(x)=f^{\sigma}(x^{p}) \qquad \text{avec} \quad f^{\sigma}(x^{\sigma})=[f(x)]^{\sigma},$$

$\varphi(f)$ est donc définie pour $x^p \in \mathfrak{A}^{\sigma}$. En particulier, d'après (9.2), on a :

$$|x-a|<1 \iff |x^p-a^p|<1 \iff |x^p-a^{\sigma}|<1.$$

Donc, si f est définie dans $D(a, 1^-)$, il en est de même de $\varphi(f)$.
De même, si $|x^p-a^{\sigma}|>\sup(|a^{\sigma}-a^p|, |p|)$ on a :

$$|x^p-a^{\sigma}|=|x^p-a^p|=|(x-a)^p+p(\ldots)|=|x-a|^p.$$

Nous en déduisons que lorsque f est définie dans une couronne $D(a, 1^-)-D(a, r^-)$, $\varphi(f)$ est définie dans la couronne $D(a, 1^-)-D(a, R^-)$ avec $R > \sup(r, |a^{\sigma}-a^p|, |p|)^p$. Nous laissons au lecteur le soin d'établir les résultats analogues pour $a=\infty$.

On a évidemment $\varphi(\mathbf{k}(x))\subset\mathbf{k}(x)$, par ailleurs on déduit de (9.1) que φ conserve la norme de Gauss ce qui montre $\varphi(E)\subset E$. Des résultats ci-dessus on déduit que $\varphi(\mathscr{H}^{\Delta})\subset\mathscr{H}^{\Delta}$ et $\varphi(\mathscr{O}^{\Delta}_{\alpha})\subset\mathscr{O}^{\Delta}_{\alpha}$.

Nous définissons aussi une fonction $\psi(f)$ par :

$$(9.4) \qquad \psi(f)(x)=\frac{1}{p}\Big[\sum\nolimits_{y^p=x} f(y^{\sigma})\Big]^{\sigma^{-1}}$$

de telle sorte que ψ est un inverse à gauche de φ :

$$(9.5) \qquad \psi(\varphi(f))(x)=\frac{1}{p}\sum\nolimits_{y^p=x} f(y^p)=f(x);$$

on a aussi :

$$(9.6) \qquad \varphi(\psi(f))(x)=\frac{1}{p}\sum\nolimits_{y^p=x} f(y^p)=\frac{1}{p}\sum\nolimits_{\xi^p=1} f(\xi x).$$

Si $y^p=x$ on a ($|a|\leqslant 1$) :

$$|x-a^{\sigma}|<1 \Rightarrow |y^p-a^p|<1 \Rightarrow |y-a|<1 \Rightarrow |y^{\sigma}-a^{\sigma}|<1$$

donc si f est définie dans $D(a, 1^-)$ il en est de même de $\psi(f)$. On trouve aussi pour $|x-a^{\sigma}|>\sup(|a^p-a^{\sigma}|, |p|)$:

$$|y^{\sigma}-a^{\sigma}|^p=|y-a|^p=|y^p-a^p|=|x-a^{\sigma}|$$

donc, si f est définie dans $D(a, 1^-)-D(a, r^-)$, $\psi(f)$ est définie dans $D(a, 1^-)-D(a, R^-)$ pour $R^p>\sup(|a^p-a^{\sigma}|, |p|, r)$.

On a immédiatement d'après l'égalité (9.4) $\psi(\mathbf{k}(x)) \subset \mathbf{k}(x)$. Par ailleurs si f est analytique dans $D(0, 1^-) - D(0, r^-)$ on a :

$$f = \sum a_n x^n \quad \Rightarrow \quad \psi(f) = \sum a_{np}^{\sigma^{-1}} x^n \qquad (n \in \mathbf{Z})$$

lorsque $f \in \mathbf{k}(x)$ on a alors $|f|_E = \sup |a_n|$ d'où $|\psi(f)|_E \leqslant |f|_E$. Il en résulte que $\psi(E) \subset E$, les remarques ci-dessus donnant en outre $\psi(\mathscr{H}^\Delta) \subset \mathscr{H}^\Delta$ et $\psi(\mathscr{O}_\alpha^\Delta) \subset \mathscr{O}_\alpha^\Delta$.

Si $\mathbf{A}$ est une matrice, nous notons $\mathbf{A}^\sigma$ (resp. $\varphi(\mathbf{A})$, $\psi(\mathbf{A})$) la matrice obtenue en appliquant σ (resp. φ, ψ) à chacun des coefficients de $\mathbf{A}$.

Posons $\partial = x d/dx$; $\partial \in \mathrm{Der}(\mathscr{O}_\alpha^\Delta)$ pour tout $\alpha \notin \overline{\Delta}$. Il vient :

$$\partial(f(x^p)) = p(\partial f)(x^p),$$

ce qui donne :

$$\partial(\varphi(f)) = p\,\varphi(\partial f) \quad \text{et} \quad \partial(\psi(f)) = \frac{1}{p}\psi(\partial f). \tag{9.7}$$

Nous pouvons maintenant définir un foncteur de la catégorie $MC(\mathscr{H}^\Delta)$ dans elle-même :

– si $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H}^\Delta)$, nous posons $(\mathfrak{M}, \nabla)^\varphi = (\mathfrak{M}^\varphi, \nabla^\varphi)$ avec :

$$\mathfrak{M}^\varphi = \varphi(\mathfrak{M}) \bigotimes\nolimits_{\varphi(\mathscr{H}^\Delta)} \mathscr{H}^\Delta,$$

où $\varphi(\mathfrak{M})$ est le $\varphi(\mathscr{H}^\Delta)$-espace vectoriel obtenu à partir de $\mathfrak{M}$ par transport de structure. Nous posons $\varphi(\mathrm{m}) = \varphi(\mathrm{m}) \otimes 1$, les images $\varphi(\mathrm{m})$ des éléments de $\mathfrak{M}$ engendrent alors $\mathfrak{M}^\varphi$ sur $\mathscr{H}^\Delta$ et où :

$$\nabla^\varphi(\partial)[\varphi(\mathrm{m})] = p\,\varphi[\nabla(\partial)(\mathrm{m})], \tag{9.8}$$

$\nabla^\varphi(\mathrm{a}\,\varphi(\mathrm{m}))$ pour $\mathrm{a} \in \mathscr{H}^\Delta$ et $\mathrm{m} \in \mathfrak{M}$ est alors défini par (1.1). Comme :

$$\begin{aligned}\nabla^\varphi(\partial)(\varphi(\mathrm{a})\,\varphi(\mathrm{m})) &= \nabla^\varphi(\partial)(\varphi(\mathrm{am}))\\ &= p\,\varphi(\nabla(\partial)(\mathrm{am})) = p\,\varphi(\partial\mathrm{a}\mathrm{m} + \mathrm{a}\,\nabla(\partial)\,\mathrm{m})\\ &= \partial(\varphi(\mathrm{a}))\,\varphi(\mathrm{m}) + \varphi(\mathrm{a})\,\nabla^\varphi(\partial)(\varphi(\mathrm{m})),\end{aligned}$$

cette définition est cohérente et ∇^φ définit bien une connexion sur $\mathfrak{M}^\varphi$.

– si $(\mathfrak{M}, \nabla) \xrightarrow{s} (\mathfrak{N}, \nabla')$ est un morphisme de $MC(\mathscr{H}^\Delta)$, s^φ est définie par :

$$s^\varphi(\varphi(\mathrm{m})) = \varphi(s(\mathrm{m})),$$

s^{φ} étant $\mathscr{H}^{\Delta}$-linéaire. s^{φ} est une application horizontale de $\mathfrak{M}^{\varphi}$ dans $\mathfrak{N}^{\varphi}$:

$$\begin{aligned} s^{\varphi}(\nabla^{\varphi}(\partial)(\varphi(\mathrm{m}))) &= s^{\varphi}(p\,\varphi(\nabla(\partial)(\mathrm{m}))) \\ &= \varphi(s(p\,\nabla(\partial)(\mathrm{m}))) = p\,\varphi(\nabla(\partial)(s(\mathrm{m}))) \\ &= \nabla^{\varphi}(\partial)(\varphi(s(\mathrm{m}))) = \nabla^{\varphi}(\partial)(s^{\varphi}(\varphi(\mathrm{m}))). \end{aligned}$$

PROPOSITION 9.1. — *Si* $(\mathfrak{M}, \nabla)$ *est un objet normalisé de* $MC(\mathscr{H}^{\Delta})$, *il en est de même de* $(\mathfrak{M}, \nabla)^{\varphi}$.

Si $\alpha \notin \bar{\Delta}$, il existe une base (e) de $\mathfrak{M}$ telle que la matrice A représentant D_{α} dans cette base appartienne à $M_{\mu}(\mathcal{O}_{\alpha}^{\Delta})$. La matrice représentant ∂ dans la base (e) est alors $x\,\mathrm{A}$ (resp. $(-1/x)\,\mathrm{A}$ pour $\alpha = \infty$). $\varphi(e)$ est une $\varphi(\mathscr{H}^{\Delta})$-base de $\varphi(\mathfrak{M})$ donc une $\mathscr{H}^{\Delta}$-base de $\mathfrak{M}^{\varphi}$. La matrice représentant ∂ dans $\varphi(e)$ est par définition $p\,\varphi(x\,\mathrm{A})$ (resp. $p\,\varphi(-x^{-1}\,\mathrm{A})$), donc la matrice représentant D_{α} est $px^{p-1}\,\varphi(\mathrm{A})$ (resp. $px^{1-p}\,\varphi(\mathrm{A})$). Comme cette dernière matrice appartient à $M_{\mu}(\mathcal{O}_{\alpha}^{\Delta})$, on voit que $D(\alpha, 1^{-})$ est un disque ordinaire de $(\mathfrak{M}, \nabla)^{\varphi}$.

Si $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}_t$, d'après la proposition 7.1, comme $\mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}$, $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{A}_t$. D'après la proposition 5 il existe une matrice U de $M_{\mu}(\mathscr{A}_t)$ telle que $D_{\alpha}\mathrm{U} = \mathrm{AU}$ et $\det \mathrm{U} \neq 0$. Il est alors immédiat de constater que la matrice $\mathrm{V} = \varphi(\mathrm{U})$ vérifie :

$$D_{\alpha}\mathrm{V} = px^{p-1}\,\varphi(\mathrm{A})\,\mathrm{V} \qquad (\text{resp. } = px^{1-p}\,\varphi(\mathrm{A})\,\mathrm{V})$$

et $\det \mathrm{V} = \varphi(\det \mathrm{U}) \neq 0$. $(\mathfrak{M}, \nabla)^{\varphi}$ est donc entièrement soluble dans A_t d'après la proposition 5. □

On peut faire les mêmes constructions mais en prenant une origine $a \neq 0$, c'est-à-dire poser (au moins pour $|a| \leqslant 1$) :

$$(\varphi_a(f))(x) = \varphi[f(x-a)](x+a)$$

(avec $(x \pm \infty) = 1/x$) nous allons démontrer que le foncteur ainsi obtenu est indépendant du point a choisi pour origine.

Soit Φ un élément de $\mathscr{H}^{\Delta}$, on fait opérer Φ sur les fonctions par :

(9.3 *bis*) $$\Phi(f)(x) = f^{\sigma}(\Phi(x)).$$

Notons φ l'élément de $\mathscr{H}^{\Delta}$ défini par $\varphi(x) = x^p$ et supposons que $|\Phi - \varphi|_E < 1$. Il existe un ensemble Δ-superadmissible $\mathfrak{A}$ sur lequel on a $|\Phi(x) - x^p| \leqslant r < 1$ (pour $|\Phi - \varphi| < r$). Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour φ mais restreint à $\mathfrak{A}$ permet de voir que $\Phi(\mathscr{H}^{\Delta}) \subset \mathscr{H}^{\Delta}$. On peut alors construire un foncteur de $MC(\mathscr{H}^{\Delta})$ associé à Φ d'une manière analogue à celle que nous avons utilisée pour φ. Le seul changement est que nous avons :

(9.7 *bis*) $$\partial(\Phi(f)) = x^{-p}\,\partial\Phi^{\sigma}(x)\,\Phi(\partial(f))$$

ce qui amène à poser :

$$\nabla^{\Phi}(\partial)(\Phi(\mathrm{m})) = x^{-p}\,\partial\Phi^{\sigma}(x)\,\Phi[\nabla(\partial)(\mathrm{m})].$$

PROPOSITION 9.2. — *Soit $\Phi \in \mathscr{H}^{\Delta}$ tel que $|\Phi-\varphi|_E<1$. Si $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est un objet de $MC(\mathscr{H}^{\Delta})$ entièrement soluble dans $\mathscr{X}_t$ alors $(\mathfrak{M}, \nabla)^{\varphi}$ et $(\mathfrak{M}, \nabla)^{\Phi}$ sont isomorphes.*

Soit (e) une base de $\mathfrak{M}$ et soit $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}_n$) la matrice représentant (d/dx) (resp. $(d/dx)^n$) dans la base (e). Nous posons :

$$\mathbf{H}(x)=\textstyle\sum_{n=0} \mathbf{A}_n^{\sigma}(x^p)\,(\Phi(x)-x^p)^n/n\,! \tag{9.9}$$

Soit r tel que : $|\Phi-\varphi|_E<r$.

D'après le corollaire 7.4 il existe un ensemble Δ-superadmissible $\mathfrak{A}_r$ tel que $\|\mathbf{A}_n/n\,!\|_{\mathfrak{A}_r} r^n \to 0$ pour $n\to\infty$. Soit alors $\mathfrak{B}$ un ensemble Δ-superadmissible (obtenu en augmentant les « trous » de $\mathfrak{A}_r$) tel que si $x\in\mathfrak{B}$, $x^p\in\sigma(\mathfrak{A}_r)$. Pour $x\in\mathfrak{B}$ et $y^{\sigma}=x^p$ nous avons :

$$\|\mathbf{A}_n^{\sigma}(x^p)\|=\|\mathbf{A}_n^{\sigma}(y^{\sigma})\|=\|\mathbf{A}_n(y)\|\leqslant\|\mathbf{A}_n\|_{\mathfrak{A}_r}.$$

Par suite nous avons :

$$\|\varphi(\mathbf{A}_n)/n\,!\|_{\mathfrak{B}}\, r^n\leqslant\|\mathbf{A}_n/n\,!\|_{\mathfrak{A}_r} r^n\to 0 \qquad \text{pour} \quad n\to\infty.$$

$\mathfrak{A}$ étant l'ensemble Δ-superadmissible où $|\Phi(x)-x^p|\leqslant r<1$, on a :

$$\varphi(\mathbf{A}_n)\,(\Phi(x)-x^p)^n\in M_{\mu}(\mathscr{H}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B})).$$

D'autre part la série (9.9) converge uniformément dans $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$, donc $\mathbf{H}\in M_{\mu}(\mathscr{H}(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}))$. Comme $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ est Δ-superadmissible, on a $\mathbf{H}\in M_{\mu}(\mathscr{H}^{\Delta})$.

Soit $x\in D(t, 1^-)$. On a x^p et $\Phi(x)$ dans $D(t^p, 1^-)=D(t^{\sigma}, 1^-)$. Comme $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{X}_t$, il résulte de la proposition 7.1 (et de la remarque qui suit) que, puisque $D(t^{\sigma}, 1^-)$ est ordinaire, il existe une matrice $\mathbf{M}(x, y)$ de $M_{\mu}(\Omega)$ qui est définie pour x et y dans $D(t^{\sigma}, 1^-)$ et qui vérifie (7.3). On a alors :

$$\mathbf{H}(x)=\mathbf{M}^{\sigma}(\Phi(x), x^p)=\mathbf{M}^{\sigma}(\Phi(x), t^{\sigma})\,[\mathbf{M}^{\sigma}(x^p, t^{\sigma})]^{-1}$$

ceci montre en particulier que $\det \mathbf{H}\neq 0$. Par ailleurs on a :

$$\partial\mathbf{M}(x, t^{\sigma})=x\,\mathbf{A}(x)\,\mathbf{M}(x, t^{\sigma})$$

ce qui donne :

$$\partial\mathbf{H}=x^{-p}\,\partial\Phi^{\sigma}(x)\,\Phi(x\,\mathbf{A})\,\mathbf{H}-\mathbf{H}\,px^p\,\varphi(\mathbf{A}).$$

Cette relation étant vraie pour $x\in D(t, 1^-)$ est vraie, par prolongement analytique, dans $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{B}$ (ensemble sur lequel les coefficients de $\mathbf{A}$, $\mathbf{H}$, $\partial\mathbf{H}$ sont des éléments analytiques). D'après (5.2) l'application linéaire (inversible) de $\mathfrak{M}^{\Phi}$ dans $\mathfrak{M}^{\varphi}$ définie par :

$$s(\Phi(e))=\mathbf{H}\,\varphi(e)$$

est horizontale ce qui démontre la proposition. □

Si $|a|\leqslant 1$, on trouve :

$$(\varphi_a(f))\,(x)=f^{\sigma}[(x+a)^p-a^{\sigma}],$$

φ_a est donc associé à la fonction

$$\varphi_a(x)=(x+a)^p-a^{\sigma}.$$

Comme

$$|\varphi_a-\varphi|_E\leqslant\sup(|p|,|a^p-a^{\sigma}|)<1,$$

la proposition ci-dessus montre que φ et φ_a définissent le même foncteur. Si $a=\infty$ on a immédiatement $\varphi_{\infty}(f)=\varphi(f)$. Si $|a|>1$, on doit, pour définir correctement φ_a, « passer » par le changement d'origine $0\to\infty$. Ceci revient à poser :

$$\varphi_a(f)\,(x)=f^{\sigma}\left[\left(x+\frac{1}{a}\right)^p-\left(\frac{1}{a}\right)^{\sigma}\right].$$

Dans ces conditions, le foncteur φ est bien indépendant de l'origine choisie.

10. Le foncteur φ sur la catégorie $MCN\,(\mathscr{H}^{\Delta})$

Il résulte de la proposition 9.1 que φ est un foncteur de la catégorie $MCN\,(\mathscr{H}^{\Delta})$ (des objets normalisés de $MC\,(\mathscr{H}^{\Delta})$). Nous allons démontrer que φ est une équivalence (c'est-à-dire que c'est un foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectif) de la catégorie $MCN\,(\mathscr{H}^{\Delta})$ dans elle-même.

PROPOSITION 10.1. — *Le foncteur φ est pleinement fidèle.*

Soient $(\mathfrak{M},\ \nabla)$ et $(\mathfrak{N},\ \nabla')$ deux objets de $MCN(\mathscr{H}^{\Delta})$ et soit $(\mathfrak{M},\ \nabla)^{\varphi}\xrightarrow{s}(\mathfrak{N},\ \nabla')^{\varphi}$ un morphisme de cette catégorie. Nous voulons démontrer qu'il existe un unique morphisme :

$$(\mathfrak{M},\ \nabla)\xrightarrow{S}(\mathfrak{N},\ \nabla')$$

de $MCN(\mathscr{H}^{\Delta})$ tel que $S^{\varphi}=s$. Pour cela nous choisissons une base (e) (resp. (f)) de $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{N}$) telle que la matrice $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$) qui représente ∂ dans cette base vérifie $\|\mathbf{A}\|\leqslant 1$ (resp. $\|\mathbf{B}\|\leqslant 1$) (une telle base existe d'après le théorème 8.3), et soit $\mathbf{H}$ une $\mu\times\nu$ matrice ($\mu=\dim\mathfrak{M}$ et $\nu=\dim\mathfrak{N}$) à coefficients dans $\mathscr{H}^{\Delta}$ telle que :

$$s(\varphi(e))=\mathbf{H}\,\varphi(f).$$

La relation (5.2) donne dans ce cas (*voir* (9.7)) :

$$\partial \mathbf{H} = p[\varphi(\mathbf{A})\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\varphi(\mathbf{B})]. \tag{10.1}$$

Le morphisme S existe si et seulement s'il existe une $\mu \times \nu$ matrice $\mathbf{K}$ à coefficients dans $\mathscr{H}^\Delta$ telle que $\mathbf{H} = \varphi(\mathbf{K})$ (S et $\mathbf{K}$ sont reliés par : $S(e) = \mathbf{K}(f)$). La matrice $\mathbf{K}$ (et donc le morphisme S) est unique car d'après (9.5) nous avons $\mathbf{K} = \psi(\mathbf{H})$. Démontrons que la matrice $\mathbf{K}$ existe.

Posons $\mathbf{H}_i = \psi(x^i\,\mathbf{H})$. En utilisant (10.1) puis (9.5) on a :

$$\begin{aligned} p\,\partial \mathbf{H}_i = \psi(\partial x^i\,\mathbf{H}) &= \psi(i x^i\,\mathbf{H} + x^i\,\partial \mathbf{H}) \\ &= i\,\mathbf{H}_i + p\,\psi(x^i(\varphi(\mathbf{A})\,\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\varphi(\mathbf{B}))) \\ &= i\,\mathbf{H}_i + p(\mathbf{A}\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_i\,\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Nous en déduisons, pour $0 < i < p$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_i\|_E = \|i\,\mathbf{H}_i\|_E &\leqslant |p| \sup(\|\partial \mathbf{H}_i\|_E, \|\mathbf{A}\|_E\,\|\mathbf{H}_i\|_E, \|\mathbf{H}_i\|_E\,\|\mathbf{B}\|_E) \\ &\leqslant |p| . \|\mathbf{H}_i\|_E \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathbf{H}_i = 0$. La formule (9.6) donne :

$$\frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} \xi^i\,x^i\,\mathbf{H}(\xi x) = \varphi(\mathbf{H}_i)\,(x).$$

En sommant ces relations pour $0 \leqslant i < p$ et en remarquant que, pour $\xi \neq 1$ on a $\sum_{i=0}^{p-1} \xi^i = 0$, il vient : $\mathbf{H}(x) = \varphi(\mathbf{H}_0)\,(x)$. Autrement dit nous avons démontré que $\mathbf{H} = \varphi(\psi(\mathbf{H}))$. □

Cette proposition montre en particulier que, si les objets $(\mathfrak{M}, \nabla)^\varphi$ et $(\mathfrak{N}, \nabla')^\varphi$ sont isomorphes, il en est de même de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ et $(\mathfrak{N}, \nabla')$. Autrement dit, pour tout objet $(\mathfrak{M}, \nabla)$ de $MCN(\mathscr{H}^\Delta)$ il existe (à isomorphisme près) au plus un objet $(\mathfrak{N}, \nabla')$ de $MCN(\mathscr{H}^\Delta)$ tel que $(\mathfrak{N}, \nabla')^\varphi = (\mathfrak{M}, \nabla)$. Nous allons montrer qu'un tel objet existe toujours.

LEMME 10.2. — *Supposons que $0 \notin \overline{\Delta}$ et soit $(\mathfrak{M}, \nabla)$ un objet de $MCN(\mathscr{H}^\Delta)$. Il existe un objet $(\mathfrak{N}, \nabla')$ de $MC(\mathscr{H}^\Delta)$ entièrement soluble dans $\mathscr{H}_t$ pour lequel $D(0, 1^-)$ est un disque ordinaire et tel que $(\mathfrak{N}, \nabla')^\varphi = (\mathfrak{M}, \nabla)$.*

Puisque $0 \notin \overline{\Delta}$, d'après le théorème 8.3, il existe une base (e) de $\mathfrak{M}$ telle que la matrice $\mathbf{A}$ représentant d/dx dans cette base vérifie :

$$\|\mathbf{A}\|_E \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A} \in M_\mu(\mathscr{O}_0^\Delta).$$

Notons $\mathbf{A}_n$ la matrice représentant $(d/dx)^n$ dans la base (e). La formule (5.4) montre par récurrence que :

$$\|\mathbf{A}_n\|_E \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}_n \in M_\mu(\mathscr{O}_0^\Delta).$$

Posons alors :

$$\mathbf{M}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(0)\, x^n/n\,!$$

Avec les notations de la remarque qui suit la proposition 7.1, on a $\mathbf{M}(x)=\mathbf{M}(x, 0)$. (7.3) donne alors, pour x et y dans $D(0, 1^-)$:

$$(d/dx)\, \mathbf{M}=\mathbf{A}\mathbf{M},$$

$$\mathbf{M}(x)\, \mathbf{M}^{-1}(y)=\mathbf{M}(x, y)=\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(y)\, (x-y)^n/n\,!$$

Nous allons démontrer que la matrice $\varphi(\psi(\mathbf{M}))\, \mathbf{M}^{-1}$ qui appartient *a priori* à $M_\mu(\mathscr{A}_0)$, est en fait la restriction à $D(0, 1^-)$ d'une matrice $\mathbf{H}$ de $\mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{O}_0^\Delta)$. On a en effet, pour $x\in D(0, 1^-)$:

$$\varphi(\psi(\mathbf{M}))\, \mathbf{M}^{-1}(x)=p^{-1} \sum_{\xi^p=1} \mathbf{M}(\xi x)\, \mathbf{M}^{-1}(x)=\mathbf{H}(x)$$

avec :

$$\mathbf{H}(x)=p^{-1}\sum_{\xi^p=1}\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(x)\, (\xi-1)^n\, x^n/n\,!$$

Posons $\rho=|p|^{1/(p-1)}<1$, et soit $\mathfrak{A}$ le domaine Δ-superadmissible associé à la base (e) et à $R=\rho^{1/2}$ dans le corollaire 7.4. En particulier $\mathfrak{A}$ contient $D(0, 1^-)$. Posons $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cap \complement D(\infty, R^-)$. Si $\xi^p=1$ on a $(\xi-1)\leqslant\rho$ ce qui donne, puisque $(\rho/R)=R$:

$$\|\mathbf{A}_n(\xi-1)^n x^n/n\,!\|_{\mathfrak{B}}\leqslant\|\mathbf{A}_n/n\,!\|_{\mathfrak{A}}\,\rho^n R^{-n}\to 0.$$

Par suite la matrice $\mathbf{H}$ est à coefficients dans $\mathscr{H}(\mathfrak{B})\subset\mathscr{O}_0^\Delta$.

D'autre part on sait que $|(\xi-1)^n/n\,!|\leqslant\rho<1$. Comme $\sum_{\xi^p=1}(\xi-1)^n$ est un entier, on aura :

$$|p^{-1}\sum_{\xi^p=1}(\xi-1)^n/n\,!|\leqslant 1.$$

Pour $x\in D(0, 1^-)$ on a, puisque $\mathbf{A}_n\in M_\mu(\mathscr{O}_0^\Delta)$,

$$\|\mathbf{A}_n(x)\|\leqslant\|\mathbf{A}_n\|_E\leqslant 1,$$

c'est-à-dire :

$$\|\mathbf{H}(x)-\mathbf{I}\|\leqslant\sup_{0<n}\|\mathbf{A}_n(x)\, x^n\|<1.$$

Par suite $|\det \mathbf{H}(x)-1|<1$ et $\det \mathbf{H}$ ne s'annule pas dans $D(0, 1^-)$ donc $\mathbf{H}\in\mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{O}_0^\Delta)$.

La matrice $\mathbf{N}=\psi(\mathbf{M})$ appartient à $M_\mu(\mathscr{A}_0)$ et vérifie :

$$\varphi(\mathbf{N})=\mathbf{H}\mathbf{M}$$

ce qui donne d'après (9.7) :

$$\partial \mathbf{N}=p^{-1}\,\psi(\partial(\mathbf{HM}))=p^{-1}\,\psi(\partial\mathbf{HM}+\mathbf{H}x\,\mathbf{AM})$$
$$=p^{-1}\,\psi((\partial\mathbf{H}+x\mathbf{HA})\,\mathbf{H}^{-1}\,\varphi(\mathbf{N}))=\mathbf{BN}$$

avec, en utilisant (9.5) :

$$\mathbf{B}=p^{-1}\,\psi((\partial\mathbf{H}+x\mathbf{HA})\,\mathbf{H}^{-1})$$

c'est-à-dire $\mathbf{B}\in M_\mu(\psi(\mathcal{O}_0^\Delta))\subset M_\mu(\mathcal{O}_0^\Delta)$.

Soit alors $\mathfrak{N}$ un espace vectoriel de dimension μ sur $\mathcal{H}^\Delta$ et (f) une base de $\mathfrak{N}$. Nous munissons $\mathfrak{N}$ de la connexion ∇' définie par :

$$\nabla'(\partial)\,(f)=\mathbf{B}(f).$$

Si $\mathfrak{N}_0$ est le sous $\mathcal{O}_0^\Delta$-module de $\mathfrak{N}$ engendré par (f), comme $\mathbf{N}\in M_\mu(\mathcal{A}_0)$ et $\det \mathbf{N}\neq 0$ (puisque $\mathbf{H}$ et $\mathbf{M}$ sont invariables), la proposition 5 montre que $(\mathfrak{N}_0, \nabla')$ est entièrement soluble dans $\mathcal{A}_0$. La proposition 7.2 exprime alors que $(\mathfrak{N}, \nabla')$ est entièrement soluble dans $\mathcal{A}_t$ (donc dans $\mathcal{K}_t$) et que $D(0, 1^-)$ est un disque ordinaire de $(\mathfrak{N}, \nabla')$. Par ailleurs comme :

$$\partial\mathbf{H}=p\,\varphi(\mathbf{B})\,\mathbf{H}-\mathbf{H}x\mathbf{A}$$

l'application linéaire (bijective) définie par $s(\varphi(f))=\mathbf{H}(e)$ est horizontale (*voir* la condition (5.2)) et donne un isomorphisme de $(\mathfrak{N}, \nabla')^\varphi$ avec $(\mathfrak{M}, \nabla)$. □

THÉORÈME 10.3. — *Le foncteur φ est une équivalence de la catégorie $MCN(\mathcal{H}^\Delta)$ dans elle-même.*

Il nous reste à montrer que φ est essentiellement surjectif. Soit $(\mathfrak{M}, \nabla)$ un objet de $MCN(\mathcal{H}^\Delta)$ et soit $a\notin\Delta$. Nous pouvons changer d'origine et amener celle-ci en a sans changer φ (proposition 9.2). Le lemme 10.2 montre donc l'existence d'un objet $(\mathfrak{N}, \nabla')_a$ de $MC(\mathcal{H}^\Delta)$ entièrement soluble dans $\mathcal{K}_t$ pour lequel $D(a, 1^-)$ est ordinaire et tel que $(\mathfrak{N}, \nabla')_a^\varphi=(\mathfrak{M}, \nabla)$. Si a et $b\notin\Delta$, $(\mathfrak{N}, \nabla')_a^\varphi$ et $(\mathfrak{N}, \nabla')_b^\varphi$ sont isomorphes donc, d'après la proposition 10.1, $(\mathfrak{N}, \nabla')_a$ et $(\mathfrak{N}, \nabla')_b$ eux-mêmes sont isomorphes. L'objet $(\mathfrak{N}, \nabla')$ de $MC(\mathcal{H}^\Delta)$ qui est isomorphe à tous les $(\mathfrak{N}, \nabla')_a$ est donc entièrement soluble dans $\mathcal{K}_t$ et tous les $D(a, 1^-)$ sont ordinaires pour lui. Autrement dit $(\mathfrak{N}, \nabla')$ est un objet de $MCN(\mathcal{H}^\Delta)$ qui vérifie $(\mathfrak{N}, \nabla')^\varphi=(\mathfrak{M}, \nabla)$. □

COROLLAIRE 10.4. — *Soit $(\mathfrak{M}, \nabla)$ un objet de $MCN(\mathcal{H}^\Delta)$ et soit :*

$$0\to(\mathfrak{N}, \nabla')\xrightarrow{i}(\mathfrak{M}, \nabla)^\varphi\xrightarrow{p}(\mathfrak{R}, \nabla'')\to 0$$

une suite exacte de $MC(\mathcal{H}^\Delta)$. Il existe des objets $(\mathfrak{N}, \nabla')_1$ et $(\mathfrak{R}, \nabla'')_1$ de $MCN(\mathcal{H}^\Delta)$ tels que la suite :

$$0\to(\mathfrak{N}, \nabla')_1\xrightarrow{I}(\mathfrak{M}, \nabla)\xrightarrow{P}(\mathfrak{R}, \nabla'')_1\to 0$$

soit exacte.

D'après la proposition 7.5, $(\mathfrak{N}, \nabla')$ et $(\mathfrak{R}, \nabla'')$ sont normalisés. D'après le théorème 10.3 il existe des objets $(\mathfrak{N}, \nabla')_1$ et $(\mathfrak{R}, \nabla'')_1$ de $MCN(\mathscr{H}^\Delta)$ tels que $(\mathfrak{N}, \nabla')_1^\varphi=(\mathfrak{N}, \nabla')$ et $(\mathfrak{R}, \nabla'')_1^\varphi=(\mathfrak{R}, \nabla'')_1$. D'après la proposition 10.1 les morphismes I et P existent et vérifient $I^\varphi=i$ et $P^\varphi=p$. Il est alors facile de vérifier que la suite considérée dans le corollaire est exacte : par exemple si $\mathfrak{m}=I(\mathfrak{n})$ on a $\varphi(\mathfrak{m})=i(\varphi(\mathfrak{n}))$, par suite on trouve : $0=p(\varphi(\mathfrak{m}))=\varphi(P(\mathfrak{m}))$ c'est-à-dire $P(\mathfrak{m})=0$. □

Nous terminons en donnant une interprétation matricielle du théorème 10.3.

COROLLAIRE 10.5. — *Soit* $\mathbf{A}$ *une matrice de* $M_\mu(\mathscr{H}^\Delta)$, $0\notin\Delta$. *S'il existe une matrice* $\mathbf{U}$ *de* $\mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{A}_0)$ *telle que* $(d/dx)\,\mathbf{U}=\mathbf{AU}$, *il existe des matrices* $\mathbf{H}_h$ *de* $\mathrm{Gl}_\mu(\mathscr{O}_0^{\Delta'})$ *telles que :*

$$\mathbf{U}=\mathbf{H}_0\ldots\varphi^h(\mathbf{H}_h)\ldots, \qquad \mathbf{H}_h(0)=\mathbf{I} \quad \text{pour } h>0,$$

où Δ' *est une réunion de classes résiduelles contenue dans la réunion de* Δ *et des classes où* $\mathbf{A}$ *a des singularités (en particulier* $0\notin\Delta'$), *et où le produit infini converge x-adiquement.*

Nous considérons un $\mathscr{H}^\Delta$ espace vectoriel $\mathfrak{M}$ de dimension μ. Soit (e) une base de $\mathfrak{M}$, nous munissons $\mathfrak{M}$ de la connexion définie par :

$$\nabla(d/dx)\,(e)=\mathbf{A}(e)$$

$(\mathfrak{M}, \nabla)$ est alors un objet de $MC(\mathscr{H}^\Delta)$. L'existence de la matrice $\mathbf{U}$ montre (*voir* proposition 5 et proposition 7.2) que $(\mathfrak{M}, \nabla)$ est entièrement soluble dans $\mathscr{K}_t$, que $D(0, 1^-)$ est un disque ordinaire de $(\mathfrak{M}, \nabla)$ et que (e) est une base du $\mathscr{O}_0^\phi$-module $\mathfrak{M}_0$.

Si Δ' est la réunion des disques qui ne sont pas ordinaires pour $(\mathfrak{M}, \nabla)$, on a $\mathscr{H}^\Delta\subset\mathscr{H}^{\Delta'}$ et $(\mathfrak{M}, \nabla)\bigotimes_{\mathscr{H}^\Delta}\mathscr{H}^{\Delta'}$ est un objet de $MCN(\mathscr{H}^{\Delta'})$. Le théorème 10.3 permet de construire par récurrence une suite d'objets $(\mathfrak{M}, \nabla)_h$ de $MCN(\mathscr{H}^{\Delta'})$ tels que :

$$(\mathfrak{M}, \nabla)_0=(\mathfrak{M}, \nabla)\bigotimes_{\mathscr{H}^\Delta}\mathscr{H}^{\Delta'} \qquad \text{et} \qquad (\mathfrak{M}, \nabla)_{h+1}^\varphi \overset{s_h}{\underset{\sim}{\to}} (\mathfrak{M}, \nabla)_h$$

ce qui donne en particulier :

$$(10.2) \qquad (\mathfrak{M}, \nabla)_h^{\varphi^h} \xrightarrow[\sim]{s_0\circ\ldots\circ s_{h-1}^{\varphi^{h-1}}} (\mathfrak{M}, \nabla)_0.$$

Soit $(e)_h$ une base de $(\mathfrak{M}, \nabla)_h$ définie au théorème 8.3 et soit $\mathbf{A}_h$ la matrice qui représente ∂ dans la base $(e)_h$. On a :

$$(10.3) \qquad \mathbf{A}_h\in M_\mu(\mathscr{O}_0^{\Delta'}) \qquad \text{et} \qquad \|\mathbf{A}_h\|\leqslant 1.$$

Soit $\mathbf{H}_h$ la matrice qui représente s_h c'est-à-dire qui est définie par :

$$s_h(\varphi(e)_{h+1})=\mathbf{H}_h(e)_h.$$

Comme $(e)_h$ (resp. $(e)_{h+1}$) est une base du $\mathcal{O}_0^{\Delta'}$-module $(\mathfrak{M}_h)_0$ (*voir* la remarque qui suit le théorème 8.3 pour $h>0$) et comme s_h est un isomorphisme entre $(\mathfrak{M}_{h+1})_0$ et $(\mathfrak{M}_h)_0$ (d'après la proposition 7.5) on a $\mathbf{H}_h \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathcal{O}_0^{\Delta'})$.

Si $\mathbf{C} \in \mathrm{Gl}_\mu(\mathbf{k})$, la matrice représentant ∂ dans la base $\mathbf{C}(e)_{h+1}$ est encore $\mathbf{A}_{h+1}$ et pour cette nouvelle base la matrice $\mathbf{H}_h$ est changée en $(\mathbf{C}^\sigma)^{-1}\mathbf{H}_h$. Donc, quitte à faire un tel changement de base, nous pouvons supposer que :

$$\mathbf{H}_0(0)=\mathbf{U}(0) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{H}_h(0)=\mathbf{I} \quad \text{pour } h \geqslant 1$$

($\mathbf{U}(0)$ appartient à $\mathrm{Gl}_\mu(\mathbf{k})$ car det $\mathbf{U}$ ne peut s'annuler dans $D(0, 1^-)$).

Posons alors :

$$\mathbf{U}_h = \mathbf{H}_0\,\varphi(\mathbf{H}_1)\ldots\varphi^{h-1}(\mathbf{H}_{h-1})$$

l'isomorphisme (10.2) s'écrit d'après la condition (5.2) :

$$\partial \mathbf{U}_h = x\,\mathbf{A}\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_h\,p^h\,\varphi^h(\mathbf{A}_h). \tag{10.4}$$

La suite $\mathbf{U}_h$ converge x-adiquement dans $M_\mu(\mathcal{A}_0)$ (car $\mathbf{H}(0)=\mathbf{I}$ donc $\varphi^h(\mathbf{H}_h)=\mathbf{I}$ modulo x^{p^h}) vers :

$$\mathbf{U}_\infty = \textstyle\prod_{h=0}^{\infty}\varphi^h(\mathbf{H}_h).$$

Puisque ∂ est continue pour la valuation x-adique, la relation (10.4) donne par passage à la limite x-adique ($p^h\,\mathbf{A}_h(0)\to 0$) :

$$\partial \mathbf{U}_\infty = x\,\mathbf{A}\mathbf{U}_\infty.$$

On a de plus : $\mathbf{U}_\infty(0)=\mathbf{H}_0(0)=\mathbf{U}(0)$. L'unicité de la solution d'un système différentiel linéaire montre alors que $\mathbf{U}_\infty=\mathbf{U}$. $\square$

Remarque. — En général les $\|\mathbf{H}_h\|_E$ ne sont pas bornées. Cependant pour étudier la convergence du produit infini dans les classes résiduelles $D(\alpha, 1^-)$, $\alpha \neq 0$, il serait nécessaire de contrôler la croissance de ces normes. Ce problème sera résolu en partie dans le cas où il y a « structure de Frobenius forte » c'est-à-dire si la suite des $\mathbf{H}_h$ peut être choisie périodique.

COROLLAIRE 10.6. — *Soit $(\mathfrak{M}, \nabla)$ un objet de $MCN(\mathcal{H}^\Delta)$. Pour tout $\varepsilon>0$ et tout $\alpha \notin \overline{\Delta}$, il existe une base de $\mathfrak{M}$ telle que, si $\mathbf{A}$ est la matrice qui représente D_α dans cette base, on ait :*

$$\mathbf{A} \in M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta) \qquad \text{et} \qquad \|\mathbf{A}\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Avec les notations du corollaire précédent la base :

$$s_0 \circ \dots \circ s_{h-1}^{\varphi^{h-1}}(\varphi^h(e)_h)$$

répond à la question (adaptation immédiate au cas $\alpha \neq 0$) puisque ∂ est représenté dans cette base par la matrice :

$$\mathbf{A} = p^h \varphi^h(\mathbf{A}_h)$$

pour laquelle on a :

$$\mathbf{A} \in M_\mu(\mathcal{O}_\alpha^\Delta) \qquad \text{et} \qquad \|\mathbf{A}\|_E \leqslant |p|^h. \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHRISTOL. — Structure de Frobenius des équations différentielles p-adiques, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 3e année : *Journées d'analyse ultram.*, Marseille. Luminy, 1976, exposé J 5.

[2] DELIGNE. — Équations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture notes in Math*, n° 163, 1970, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[3] DWORK. — On p-adic differential equations I, *Bull. Soc. Math. Fr.*, Mémoire 39-40, 1974, p. 27-37.

[4] DWORK. — On p-adic differential equations II, *Annals of Math.*, vol. 98, n° 2, septembre 1973, p. 366-376.

[5] DWORK-ROBBA. — On ordinary linear p-adic differential equations, *Trans. Amer. Math Soc.*, vol. 231, n° 1, 1977.

[6] ESCASSUT. — Algèbres de Banach ultramétriques, *Astérisque*, 10, 1973.

[7] KATZ. — Nilpotent connections and the monodromy theorem, *Publ. Math I.H.E.S.*, vol. 39, 1970, p. 355-432.

[8] MANIN. — Moduli fuchsiani, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, Sér. III, vol. 19, 1965, p. 113-126.

[9] ROBBA. — *Structure de Frobenius faible pour les équations différentielles du premier ordre*. Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 2e année, 1974-1975, n° 20.

[10] SERRE. — *Corps locaux*, Publ. de l'Institut de Math de l'université de Nancago-VIII, 1968.

[11] SPERBER. — p-adic hypergeometric functions and their cohomology, *Duke Math J.*, vol. 44, 1977, p. 535-589.