BULLETIN DE LA S. M. F.

PHILIPPE DU BOIS

Complexe de de Rham filtré d'une variété singulière

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 41-81

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__41_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
109. 1981, p. 41-81.

COMPLEXE DE DE RHAM FILTRÉ D'UNE VARIÉTÉ SINGULIÈRE

PAR

PHILIPPE DU BOIS (*)

0. Introduction

Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$; dans [D 3], P. DELIGNE définit une structure de Hodge mixte sur la cohomologie transcendante de X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $H^{\cdot}(X) = H^{\cdot}(X^{an}, \mathbb{Z})$ à l'aide d'un hyperrecouvrement lisse $\varepsilon : X_{\cdot} \to X$.

La structure de Hodge mixte ainsi construite est fonctorielle et indépendante du choix de l'hyperrecouvrement.

La question se pose toutefois de construire fonctoriellement sur X un *complexe de faisceaux* sur X, convenablement filtré qui, par passage à l'hypercohomologie, donne naissance à la structure de Hodge mixte sur X.

Cette question reçoit dans ce travail la réponse partielle suivante :

Soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini. Nous construisons fonctoriellement (dans une catégorie dérivée filtrée convenable) un complexe de faisceaux sur X, à flèche des opérateurs différentiels d'ordre 1, muni d'une filtration F à gradué linéaire, donnant, dans le cas propre, par application du foncteur $R\Gamma^{\cdot}$, la cohomologie complexe de X munie de la filtration de Hodge (si X est propre et lisse, ce complexe n'est autre que $\Omega_X^{\cdot}$ muni de la filtration bête).

(*) Texte reçu le 11 juillet 1979, révisé le 17 mars 1980.

Philippe DU BOIS, Université de Nantes, Institut de Mathématiques et d'Informatique, 2, chemin de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/41/$ 5.00
© Gauthier-Villars

Nous suivons la construction indiquée dans [D 3], 9.3 : si $\varepsilon : X. \to X$ est un hyperrecouvrement propre et lisse de X, nous montrons que le complexe $R\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{X.})$ convient et, en particulier, est essentiellement indépendant de l'hyperrecouvrement choisi (dans une catégorie dérivée convenable).

Nous traitons d'abord le cas où le schéma X est projectif; l'idée de la démonstration est due à P. Deligne [D 1] : si $\varepsilon' : X'_. \to X$ et $\varepsilon : X. \to X$ sont deux hyperrecouvrements liés à une flèche $\alpha : X. \to X'_.$ (avec $\varepsilon = \varepsilon' \alpha$), nous procédons par récurrence sur la dimension de X en utilisant des pinceaux d'hyperplans pour ramener le support du cône de la flèche $R\varepsilon'_*(\Omega^\bullet_{X'_.}) \to R\varepsilon_*(\Omega^\bullet_{X.})$ à un nombre fini de points. On conclut par un argument global utilisant [D 3].

Les propriétés de l'objet ainsi construit dans le cas projectif nous permettent de passer au cas général où X est séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, par l'intermédiaire des schémas simpliciaux.

On étudie ensuite les propriétés du complexe de faisceaux $\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X$ ainsi construit, on montre que :

(a) la définition de $\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X$ est locale par rapport à la topologie étale;

(b) pour tout p, le gradué $\mathrm{Gr}^p_F(\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X)$ est à cohomologie cohérente;

(c) l'analytisé $(\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X)^{an}$ est une résolution de $\mathbb{C}_{X^{an}}$, et si X est propre, la suite spectrale de la filtration F :

$$E_1^{pq} = H^q(X, \mathrm{Gr}^p_F \underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X) \Rightarrow H^*(X^{an}, \mathbb{C})$$

dégénère et aboutit à la filtration de Hodge;

(d) la définition de $\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X$ est « de nature topologique » et donne lieu à une suite exacte de type Mayer-Vietoris quand X est réunion de deux sous-schémas fermés (*voir* § 4 pour des énoncés précis).

En application, si $f : X \to S$ est un morphisme propre et plat de schémas de type fini sur $\mathbb{C}$, on donne en 4.6 un critère pour que les $R^i f_* \mathcal{O}_X$ soient localement libres de type fini et de formation compatible au changement de base. Nous retrouvons également en 5.3 certains résultats de Steenbrink [5].

Je voudrais remercier ici Luc Illusie pour l'aide qu'il m'a apportée pendant la rédaction de cet article.

1. Complexes filtrés d'opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant 1$

1.1. Soit X un $\mathbb{C}$-schéma. Nous considérons la catégorie $C_{\text{diff}}(X)$ suivante : les objets de $C_{\text{diff}}(X)$ sont des complexes filtrés $(K^{\bullet}, d, F)$:

— $K^{\bullet}$ est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules *borné inférieurement;*

— F est une filtration décroissante de $K^{\bullet}$ par des sous-$\mathcal{O}_X$-modules et F est birégulière (sur chaque composante K^i de $K^{\bullet}$, F induit une filtration finie, c'est-à-dire qu'il existe m et n avec $F^m K^i = K^i$ et $F^n K^i = 0$);

— d est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 1$ qui respecte F;

— $\mathrm{Gr}_F(d)$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire, c'est-à-dire que si a (resp. x) est une section locale de $\mathcal{O}_X$ (resp. de $F^m K^i$), alors $d(ax) = a\,dx$ (mod $F^{m+1} K^{i+1}$).

Un morphisme de $C_{\text{diff}}(X)$, $f : L^{\bullet} \to M^{\bullet}$ est une suite de flèches $\mathcal{O}_X$ linéaires $f_i : L^i \to M^i$, commutant avec $d\,(f_{i+1}\, d_i = d_i\, f_i)$ et compatibles aux filtrations.

Exemple. — Soient X un $\mathbb{C}$-schéma propre et lisse, Y un diviseur à croisements normaux de X et n un entier, alors les complexes filtrés $(\Omega^{\bullet}_X, F)$, $(\Omega^{\bullet}_X(\log\, Y), F)$, $(\mathrm{Gr}^W_n\, \Omega^{\bullet}_X(\log\, Y), F)$ où F désigne la filtration de Hodge et W la filtration par le poids, sont des objets de $C_{\text{diff}}(X)$; *voir* [D 2], 3.1.

Notons $CG(X)$ la catégorie des complexes de $\mathcal{O}_X$-modules munis d'une graduation finie en chaque degré. Nous avons donc un morphisme « passage au gradué » :

$$\mathrm{gr} : \quad C_{\text{diff}}(X) \to CG(X).$$

Nous dirons par définition qu'une flèche f de $C_{\text{diff}}(X)$ est un *quasi-isomorphisme filtré* quand $\mathrm{gr}\, f$ est un quasi-isomorphisme (c'est-à-dire la flèche de complexes non gradués sous-jacente est un quasi-isomorphisme).

On note $D_{\text{diff}}(X)$ (resp. $DG(X)$) la catégorie déduite de $C_{\text{diff}}(X)$ (resp. $CG(X)$) en inversant les quasi-isomorphismes filtrés.

Soient $u, v : L \rightrightarrows M$ des flèches de $C_{\text{diff}}(X)$. Une *homotopie filtrée* entre u et v est une homotopie h telle que $h^n(F^i L^n) \subset F^i M^{n-1}$ et h^n est $\mathcal{O}_X$-linéaire. On note $K_{\text{diff}}(X)$ la catégorie dont les objets sont les objets de $C_{\text{diff}}(X)$ et les morphismes les classes de morphismes de $C_{\text{diff}}(X)$, à homotopie près.

Les considérations de [1], V, 1, s'étendent à ce cadre : la notion de quasi-isomorphisme s'étend à $K_{\text{diff}}(X)$; $D_{\text{diff}}(X)$ s'obtient à partir de $K_{\text{diff}}(X)$ en inversant les quasi-isomorphismes et on a un calcul de fractions bilatère : pour $L, M \in \mathrm{ob}\, K_{\text{diff}}(X)$ (où q-is : quasi-isomorphisme),

$$\mathrm{Hom}_{D_{\text{diff}}(X)}(L, M) = \varinjlim_{L' \xrightarrow{\text{q-is}} L} \mathrm{Hom}_{K_{\text{diff}}(X)}(L', M)$$

$$= \varinjlim_{M \xrightarrow{\text{q-is}} M'} \mathrm{Hom}_{K_{\text{diff}}(X)}(L, M') = \varinjlim_{L' \xrightarrow{\text{q-is}} L,\, M \xrightarrow{\text{q-is}} M'} \mathrm{Hom}_{K_{\text{diff}}(X)}(L', M').$$

On a de plus sur $K_{\text{diff}}(X)$ et $D_{\text{diff}}(X)$ une structure de catégorie triangulée : on définit d'abord un foncteur T de translation dans $C_{\text{diff}}(X)$ de la façon habituelle ($(T(K)^n = K^{n+1}$, $d_{T(K)} = -d_K$ et $F_{T(K)} = F_K$). Si $f : K^{\bullet} \to L^{\bullet}$ est un morphisme de $C_{\text{diff}}(X)$, on définit le cône $M^{\bullet}$ de f par $M^{\bullet} = T(K^{\bullet}) \oplus L^{\bullet}$, d_M est défini par la matrice $\begin{bmatrix} T(d_K) & 0 \\ T(f) & d_L \end{bmatrix}$ et $F^n_M(M^{\bullet}) = F^n_K\, T(K^{\bullet}) \oplus F^n_L L^{\bullet}$; $M^{\bullet}$ est donc un objet de $C_{\text{diff}}(X)$. La structure triangulée sur $K_{\text{diff}}(X)$ et $D_{\text{diff}}(X)$ est alors définie en prenant pour famille des triangles distingués de $K_{\text{diff}}(X)$ la famille qui se déduit de la construction du cône d'une application dans $C_{\text{diff}}(X)$.

1.2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas. On peut définir une image directe f_* de $C_{\text{diff}}(X)$ dans $C_{\text{diff}}(Y)$: les complexes d'opérateurs différentiels d'ordre 1 sur X sont les modules différentiels gradués sur l'anneau $\Omega^{\bullet}_X$ (si ω (resp. x) est une section locale de Ω^1 (resp. L^i), on exprime ω sous la forme $\omega = \sum_j g_j\, df_j$ (f_j et g_j sections locales de $\mathcal{O}$) et on pose $df_j.x = d(f_j x) - f_j.dx$), et nous avons un morphisme d'anneaux gradués $\Omega^{\bullet}_Y \to f_*\, \Omega^{\bullet}_X$; alors, si $K^{\bullet}$ est un objet de $C_{\text{diff}}(X)$, $f_*\, K^{\bullet}$ a naturellement une structure de module différentiel gradué sur $\Omega^{\bullet}_Y$, il est filtré par la filtration induite par F et c'est donc un objet de $C_{\text{diff}}(Y)$.

Si $K^{\bullet} = (\ldots \to 0 \to K^n \to K^{n+1} \to \ldots)$ est un complexe de $C_{\text{diff}}(X)$, on considère $\mathscr{C}^0(K^i) \to \mathscr{C}^1(K^i) \to \mathscr{C}^2(K^i) \to \ldots$, la résolution flasque canonique de K^i où le faisceau $\mathscr{C}^0(K^i)$ est défini par :

$$\mathscr{C}^0(K^i)(U) = \prod\nolimits_{x \in U} K^i(x)$$

et $\mathscr{C}^{j+1}(K^i) = \mathscr{C}^0(\mathscr{C}^j(K^i)/\operatorname{Im} \mathscr{C}^{j-1}(K^i))$; il est clair que les flèches induites par celles de $K^{\bullet}$ sur $\mathscr{C}^0(K^{\bullet})$ en font un complexe d'opérateurs différentiels d'ordre 1 et il en est de même pour $\mathscr{C}^j(K^{\bullet})$; les $\mathscr{C}^j(K^{\bullet})$ sont filtrés par la filtration, encore notée F, induite par F, et $\mathrm{Gr}_F(d)$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire; d'autre part, les complexes $\mathscr{C}^{\bullet}(K^i)$ sont $\mathcal{O}_X$-linéaires.

Le complexe simple associé au complexe double $\mathscr{C}^{\bullet}(K^{\bullet})$ est un objet de $C_{\text{diff}}(X)$; on a $F^n \mathscr{C}^{\bullet}(K^{\bullet}) = \mathscr{C}^{\bullet}(F^n(K^{\bullet}))$ et $\mathrm{Gr}^n_F \mathscr{C}^{\bullet}(K^{\bullet}) = \mathscr{C}^{\bullet}(\mathrm{Gr}^n_F K^{\bullet})$. La flèche $K^{\bullet} \to \underline{\underline{s}}(\mathscr{C}^{\bullet}(K^{\bullet}))$ est un quasi-isomorphisme filtré, c'est-à-dire que, pour tout n, la flèche $\mathrm{Gr}^n_F(K^{\bullet}) \to \mathrm{Gr}^n_F \underline{\underline{s}}\, \mathscr{C}^{\bullet}(K^{\bullet}) = \underline{\underline{s}}\, \mathscr{C}^{\bullet}(\mathrm{Gr}^n_F K^{\bullet})$ est un quasi-isomorphisme.

Pour tous i, j et n, les faisceaux $\mathrm{Gr}^n_F \mathscr{C}^j(K^i) = \mathscr{C}^j(\mathrm{Gr}^n_F K^i)$ sont flasques, donc f-acycliques; on en déduit aisément la proposition suivante :

1.3. PROPOSITION. — *Soit $f : X \to Y$ comme ci-dessus, le foncteur $f_* : C_{\text{diff}}(X) \to C_{\text{diff}}(Y)$ se dérive en $R f_* : D_{\text{diff}}(X) \to D_{\text{diff}}(Y)$: si $K^{\bullet}$ est un objet de $C_{\text{diff}}(X)$, le ind-objet $R f_*(K^{\bullet}) \overset{\text{dfn}}{=} \text{« } \varinjlim \text{ »}_{K \to E, \text{q-is filtré}} f_* E$ est essentiellement constant de valeur $f_*(\underline{\underline{s}}\ \mathscr{C}^{\bullet}(K^{\bullet}))$ et, de plus, on a un isomorphisme canonique pour chaque i dans $D^+(X)$:*

$$\mathrm{Gr}_F^i\, R f_*(K^{\bullet}) = R f_*(\mathrm{Gr}_F^i(K^{\bullet})).$$

1.4. Soit toujours X un $\mathbb{C}$-schéma. Posons la définition suivante : $D_{\text{diff,coh}}(X)$ est la sous-catégorie pleine de $D_{\text{diff}}(X)$ formée des complexes L tels que, pourtout i, $\mathrm{Gr}_F^i(L)$ est un objet de $D^+_{\text{coh}}(X)$ (sous-catégorie pleine de $D^+(X)$ formée des objets à cohomologie cohérente).

1.5. PROPOSITION. — *Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre de $\mathbb{C}$-schémas, $R f_*$ envoie $D_{\text{diff,coh}}(X)$ dans $D_{\text{diff, coh}}(Y)$.*

Démonstration. — Si $K^{\bullet} \in \mathrm{ob}\, D_{\text{diff,coh}}(X)$, d'après [EGA III], $\mathrm{Gr}_F^i\, R f_*(K^{\bullet})$ ($\cong R f_*\, \mathrm{Gr}_F^i(K^{\bullet})$) est un objet de $D^+_{\text{coh}}(Y)$, donc $R f_*(K^{\bullet})$ est un objet de $D_{\text{diff,coh}}(Y)$.

1.6. Soit $X.$ un $\mathbb{C}$-schéma simplicial. On définit les catégories $C_{\text{diff}}(X.)$ et $D_{\text{diff}}(X.)$ en reprenant les constructions précédentes « simplicialement », à la manière de [D 3], 5.1 :

Un objet K de la catégorie $C_{\text{diff}}(X.)$ consiste en :

(a) une famille $(K^{\cdot,n})_{n\in\mathbb{N}}$ d'objets de $C_{\text{diff}}(X_n)$ sur les X_n;

(b) pour $f : \Delta_n \to \Delta_m$, un $X.(f)$ morphisme $\mathcal{O}_{X.}$-linéaire $K(f)$ de $K^{\cdot,n}$ dans $K^{\cdot,m}$, qui respecte les filtrations.

On exige de plus que $K(f \circ g) = K(f) \circ K(g)$. Un morphisme u de K dans L est une famille de morphismes de $C_{\text{diff}}(X_n)$, $u^n : K^{\cdot,n} \to L^{\cdot,n}$, telle que, pour $f : \Delta_n \to \Delta_m$, $u^m K(f) = L(f)\, u^n$.

Nous dirons par définition qu'une flèche f de $C_{\text{diff}}(X.)$ est un *quasi-isomorphisme filtré* quand, pour tout n, $\mathrm{gr}\, f^n$ est un quasi-isomorphisme (dans $CG(X_n)$).

On note $D_{\text{diff}}(X.)$ la catégorie déduite de $C_{\text{diff}}(X.)$ en inversant les quasi-isomorphismes filtrés.

On peut alors recopier *mutatis mutandis* tout le reste de 1.1.

1.7. Soit maintenant $u : X. \to Y.$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas simpliciaux. Le foncteur $u_* : C_{\text{diff}}(X.) \to C_{\text{diff}}(Y.)$ se dérive en

$Ru_*: D_{\text{diff}}(X.) \to D_{\text{diff}}(Y.)$; le foncteur Ru_* « se calcule composante par composante » (*voir* (*loc. cit.*), 5.2.5) : si $K \in \text{ob } D_{\text{diff}}(X.)$, $Ru_*(K)/Y_n = Ru_{n*}(K^{\cdot,n})$.

Soit $S.$ un $\mathbb{C}$-schéma simplicial constant, le foncteur $\underline{\underline{s}}$ = « complexe simple associé » envoie $C_{\text{diff}}(S.)$ dans $C_{\text{diff}}(S)$, transforme quasi-isomorphisme filtré en quasi-isomorphisme filtré et se dérive en $\underline{\underline{s}}: D_{\text{diff}}(S.) \to D_{\text{diff}}(S)$.

Comme dans (*loc. cit.*) 5.2, si $a: X. \to S$ est un $\mathbb{C}$-schéma simplicial augmenté, on calcule $Ra_*: D_{\text{diff}}(X.) \to D_{\text{diff}}(S)$ de la façon suivante : soit $S.$ le $\mathbb{C}$-schéma simplicial constant de valeur S, $\varepsilon: S. \to S$ le morphisme d'augmentation et $a.: X. \to S.$ le morphisme déduit de a; on a $a_* = \varepsilon_* a._*$, et en dérivant $Ra_* = R\varepsilon_* Ra._* = \underline{\underline{s}}\, Ra._*: D_{\text{diff}}(X.) \to D_{\text{diff}}(S)$. Concrètement, si $K \in D_{\text{diff}}(X.)$:

$$Ra._*(K)(n) = a_{n*}(\underline{\underline{s}}\, \mathscr{C}^{\bullet}(K^{\cdot,n})),$$
$$Ra_*(K) = \underline{\underline{s}}(a_{n*}(\underline{\underline{s}}\, \mathscr{C}^{\bullet}(K^{\cdot,n})).$$

1.8. On laisse au lecteur le soin de reprendre les constructions 1.6 et 1.7 pour des $\mathbb{C}$-schémas bisimpliciaux.

1.9. Soient X un $\mathbb{C}$-schéma et $i: U \to X$ un morphisme étale de $\mathbb{C}$-schémas. On peut définir une image inverse i^* de $C_{\text{diff}}(X)$ dans $C_{\text{diff}}(U)$ en posant pour $K^{\bullet} \in \text{ob } C_{\text{diff}}(X)$:

$$i^* K^{\bullet} = K^{\bullet} \otimes_{\Omega_X^{\bullet}} \Omega_U^{\bullet} = K^{\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_U.$$

On peut d'autre part refaire *mutatis mutandis* la théorie précédente pour X^{an} et $X^{\wedge}$, complété formel de X le long d'un sous-schéma fermé X'. On définit alors un morphisme de $C_{\text{diff}}(X)$ dans $C_{\text{diff}}(X^{\text{an}})$ (resp. $C_{\text{diff}}(X^{\wedge})$) par :

$$K^{\bullet\,\text{an}} = K^{\bullet} \otimes_{\Omega_X^{\bullet}} \Omega_{X^{\text{an}}}^{\bullet} = K^{\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X^{\text{an}}}$$
$$(\text{resp. } K^{\bullet\,\wedge} = K^{\bullet} \otimes_{\Omega_X^{\bullet}} \Omega_{X^{\wedge}}^{\bullet} = K^{\bullet} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{X^{\wedge}}).$$

On voit que $i^* K^{\bullet}$ (resp. $K^{\bullet\,\text{an}}$, resp. $K^{\bullet\,\wedge}$) est le module différentiel gradué déduit de $K^{\bullet}$ par extension des scalaires de $\Omega_X^{\bullet}$ à $\Omega_U^{\bullet}$ (resp. $\Omega_{X^{\text{an}}}^{\bullet}$, resp. $\Omega_{X^{\wedge}}^{\bullet}$), et il est filtré par la filtration induite par F, c'est un objet de $C_{\text{diff}}(U)$ (resp. $C_{\text{diff}}(X^{\text{an}})$, $C_{\text{diff}}(X^{\wedge})$).

Soit $\underline{K}^\bullet \xrightarrow{u} \underline{L}^\bullet$ un quasi-isomorphisme filtré dans $C_{\mathrm{diff}}(X)$; on a alors des quasi-isomorphismes :

$$\begin{gathered}
\mathrm{Gr}_F(\underline{K}^\bullet) \to \mathrm{Gr}_F(\underline{L}^\bullet) \quad \text{dans } CG(X), \\
i^* \mathrm{Gr}_F(\underline{K}^\bullet) \to i^*(\mathrm{Gr}_F(\underline{L}^\bullet)) \quad \text{dans } CG(U), \\
(\mathrm{Gr}_F(\underline{K}^\bullet))^{\mathrm{an}} \to (\mathrm{Gr}_F(\underline{L}^\bullet))^{\mathrm{an}} \quad \text{dans } CG(X^{\mathrm{an}})
\end{gathered}$$

et

$$(\mathrm{Gr}_F(\underline{K}^\bullet))^\wedge \to (\mathrm{Gr}_F(\underline{L}^\bullet))^\wedge \quad \text{dans } CG(X^\wedge),$$

par platitude de $\mathcal{O}_U$, $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ et $\mathcal{O}_{X^\wedge}$ sur $\mathcal{O}_X$. Mais Gr_F commute avec i^*, ${}^{\mathrm{an}}$ et ${}^\wedge$; on obtient donc que $i^* \underline{K}^\bullet \to i^* \underline{L}^\bullet$, $\underline{K}^{\bullet\,\mathrm{an}} \to \underline{L}^{\bullet\,\mathrm{an}}$ et $\underline{K}^{\bullet\,\wedge} \to \underline{L}^{\bullet\,\wedge}$ sont des quasi-isomorphismes filtrés d'où la proposition :

1.10. Proposition. — *Avec les notations de* 1.9, *le passage à un ouvert étale, resp. à l'analytique, resp. au formel, donne lieu à des carrés commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} D_{\mathrm{diff}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Gr}"] & D_{\mathrm{diff}}(U) \arrow[d, "\mathrm{Gr}"] \\ DG(X) \arrow[r] & DG(U) \end{tikzcd}
\quad \underline{\text{resp.}} \quad
\begin{tikzcd} D_{\mathrm{diff}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & D_{\mathrm{diff}}(X^{\mathrm{an}}) \arrow[d] \\ DG(X) \arrow[r] & DG(X^{\mathrm{an}}) \end{tikzcd}
\quad \underline{\text{resp.}} \quad
\begin{tikzcd} D_{\mathrm{diff}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & D_{\mathrm{diff}}(X^\wedge) \arrow[d] \\ DG(X) \arrow[r] & DG(X^\wedge) \end{tikzcd}$$

1.11. Soient $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas, $j : V \to Y$ un ouvert étale de Y, $U = V \times_Y X$, $i : U \to X$, $f' : U \to V$ et $K \in \mathrm{ob}\, D_{\mathrm{diff}}(X)$; le morphisme :

$$j^*(Rf_*(\underline{K}^\bullet)) \xrightarrow{a} Rf'_*(i^* \underline{K}^\bullet),$$

déduit du morphisme d'espaces annelés $V \to Y$ est un isomorphisme dans $D_{\mathrm{diff}}(V)$.

Démonstration. — On a des isomorphismes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Gr}(j^* Rf_*(\underline{K}^\bullet)) &\overset{1.9}{\simeq} j^* \mathrm{Gr}\, Rf_*(\underline{K}^\bullet) \overset{1.3}{\simeq} j^* Rf_*(\mathrm{Gr}\, K^\bullet) \\
&\simeq Rf'_* i^*(\mathrm{Gr}\, K^\bullet) \overset{1.3}{\simeq} \mathrm{Gr}\, Rf'_*(i^* K^\bullet);
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Gr}\, a$ est un isomorphisme dans $DG(V)$ et a un isomorphisme dans $D_{\mathrm{diff}}(V)$.

1.12. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de $\mathbb{C}$-schémas, Y' un sous-schéma fermé de Y, $X' = Y' \times_Y X$, $\hat{X} = X/X'$, $\hat{Y} = Y/Y'$ et $K \in \mathrm{ob}\, D_{\mathrm{diff}}(X)$; les morphismes :

$$(Rf_* K^{\cdot})^{\mathrm{an}} \xrightarrow{b} Rf_*^{\mathrm{an}}(K^{\cdot\, \mathrm{an}}),$$

$$\text{resp.}\ (Rf_* K^{\cdot})\hat{} \xrightarrow{c} R\hat{f}_*(K^{\cdot}\hat{}),$$

déduits des morphismes d'espaces annelés $Y^{\mathrm{an}} \to Y$, resp. $\hat{Y} \to Y$, sont des isomorphismes dans $D_{\mathrm{diff}}(Y^{\mathrm{an}})$, resp $D_{\mathrm{diff}}(\hat{Y})$.

Démonstration. — On procède comme pour a, en utilisant G.A.G.A., resp. [E.G.A. III].

2. Le théorème d'indépendance (cas projectif)

Nous introduisons ici la notion de résolution d'un schéma, variante de celle d'hyperrecouvrement propre, et nous établissons, sous une forme un peu plus générale, le théorème d'indépendance annoncé dans l'introduction.

2.1.1. DÉFINITIONS. — *Soient K un corps de caractéristique nulle, l un nombre premier et X un K-schéma séparé de type fini. On appelle* résolution *de X un K-schéma simplicial augmenté vers X, $\varepsilon : X_{\bullet} \to X$, tel que les flèches de transition de $X_{\bullet}$ et les ε_n soient propres et que la flèche d'adjonction $(\mathbb{Q}_l)_X \to R\varepsilon_*((\mathbb{Q}_l)_{X_{\bullet}})$ soit un isomorphisme (on utilise ici la topologie étale).* On vérifie aisément, à l'aide du théorème de comparaison ([SGA 4], XVI.4.1) que cette condition est indépendante de l, et signifie, si $K = \mathbb{C}$, que la flèche d'adjonction $\mathbb{Q}_X \to R\varepsilon_*(\mathbb{Q}_{X_{\bullet}})$ (où X et $X_{\bullet}$ sont ici munis de la topologie classique) est un isomorphisme.

On dira que la résolution $\varepsilon : X_{\bullet} \to X$ est lisse *(resp.* lisse en degré $\leqslant k$*) si les composantes de $X_{\bullet}$ (resp. $sq_k X_{\bullet}$) sont lisses.*

Si X est un $\mathbb{C}$-schéma, on dira qu'un hyperrecouvrement $\varepsilon : X_{\bullet} \to X$ est admissible *s'il est propre* ([D 3], 5.3.8) *et si les composantes de $X_{\bullet}$ sont lisses.*

2.1.2. *Remarques :*

(*a*) Avec les mêmes notations, si X est un $\mathbb{C}$-schéma, et V un faisceau de $\mathbb{C}$ vectoriels sur X^{an}, on a $R\varepsilon_* \varepsilon^* V \simeq V$.

(*b*) Si $\varepsilon : X_{\bullet} \to X$ est un hyperrecouvrement admissible de X, c'est aussi une résolution lisse de X.

2.1.3. LEMME. — *Soient X un K-schéma séparé de type fini et $\gamma : Z. \to X$ une résolution lisse en degré $\leqslant k$ de X. On peut trouver une résolution lisse $\varepsilon : X. \to X$ et un morphisme de schémas simpliciaux $\delta : X. \to Z.$ tel que $\varepsilon = \gamma\delta$ et que $sq_k X. = sq_k Z.$ et $sq_k \delta = Id_{sq_k Z}$.*

Démonstration. — On utilise ([D 3], 5.3.4 V) pour construire $X.$ de proche en proche à partir de $sq_k X. = sq_k Z.$: pour $n \geqslant k+1$, on choisit X_n de telle sorte que la flèche évidente :

$$X_n \to N_n = (cosq^{Z.}_{n-1}\, sq_{n-1}\, X.)_n = Z_n \times_{(cosq_{n-1}\, sq_{n-1}\, Z.)_n} (cosq_{n-1}\, sq_{n-1}\, X.)_n$$

soit propre et surjective et que X_n soit lisse, par exemple on peut prendre pour X_n la somme disjointe d'une désingularisation $\tilde{N}_n$ de N_n et de n copies de X_{n-1} :

$$X_n = \tilde{N}_n \coprod \coprod_{i=0}^{n-1} s_i(X_{n-1})$$

(où $X_{n-1} \xrightarrow{\sim} s_i(X_{n-1})$; on reconnaît là une variante de la construction d'un hyperrecouvrement admissible).

On a alors (*loc. cit.*) :

$$\delta^* : \quad R\gamma_* \gamma^* \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} R\varepsilon_* \varepsilon^* \mathbb{Q}_l.$$

C.Q.F.D.

De plus, si on donne deux résolutions lisses en degré $\leqslant k$ de X, $\gamma : Z. \to X$ et $\gamma' : Z'_. \to X$, liées par une flèche $\alpha : Z'_. \to Z.$ telle que $\gamma' = \gamma\alpha$, on peut trouver des résolutions lisses $\varepsilon : X. \to X$ et $\varepsilon' : X'_. \to X$, coiffant γ et γ', liées par une flèche $\beta : X'_. \to X.$ vérifiant $sq_k \beta = sq_k \alpha$, de façon à avoir un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X'_. \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & Z'_. \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma'"] & \\ X. \arrow[r] & Z. \arrow[r, "\gamma"'] & X \end{tikzcd}$$

Pour cela, on construit $X.$ comme plus haut, puis $X'_.$ de proche en proche; par exemple, on peut prendre, en notant $\tilde{S}$ une désingularisation d'un schéma S, pour $n \geqslant k+1$:

$$X'_n = (\tilde{N}_n \times_{N_n} N'_n)^{\sim} \coprod \coprod_{i=0}^{n-1} s_i(X'_{n-1}).$$

2.1.4. LEMME. — *Soient* $\varepsilon' : X'_{\cdot} \to X$ *et* $\varepsilon'' : X''_{\cdot} \to X$ *deux résolutions d'un K-schéma* X. *Il existe une résolution* $\varepsilon : X_{\cdot} \to X$ *et des morphismes de schémas simpliciaux* $\pi' : X_{\cdot} \to X'_{\cdot}$ *et* $\pi'' : X_{\cdot} \to X''_{\cdot}$ *tels que le diagramme suivant soit commutatif* :

$$\begin{tikzcd} X_{\cdot} \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d, "\pi'"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & X''_{\cdot} \arrow[d, "\varepsilon''"] \\ X'_{\cdot} \arrow[r, "\varepsilon'"'] & X \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Considérons d'abord $\alpha : Y_{\cdot\cdot} \to X$ *le* K-schéma bisimplicial produit fibré de $X'_{\cdot}$ et $X''_{\cdot}$ sur X (les composantes $Y_{ij} = X'_i \times_X X''_j$ de $Y_{\cdot\cdot}$ sont propres sur X). Soit $\beta_{\cdot} : Y_{\cdot\cdot} \to X'_{\cdot}$ la première projection, on a $\alpha = \varepsilon\beta_{\cdot}$ et donc $R\alpha_* \mathbb{Q}_l = R\varepsilon_* R\beta_{\cdot *} \mathbb{Q}_l$, mais $R\beta_{\cdot *}$ « se calcule composante par composante » et de plus $\beta_i : Y_{i.} \to X'_i$ est une résolution de X'_i, obtenue à partir de ε'' par le changement de base $X'_i \to X$.

On a donc

$$R\beta_{\cdot *}(\mathbb{Q}_l)|_{X'_i} = R\beta_{i*}((\mathbb{Q}_l)_{Y_{i.}}) = (\mathbb{Q}_l)_{X'_i}.$$

Et donc

$$R\alpha_*((\mathbb{Q}_l)_{Y_{\cdot\cdot}}) = R\varepsilon_*((\mathbb{Q}_l)_{X'_{\cdot}}) = (\mathbb{Q}_l)_X.$$

Par Cartier-Eilenberg-Zilber, on trouve donc que $\delta Y_{\cdot\cdot}$, schéma simplicial diagonal de $Y_{\cdot\cdot}$ est une résolution de X qui coiffe $X'_{\cdot}$ et $X''_{\cdot}$.

2.2. THÉORÈME. — *Soit* X *un* $\mathbb{C}$*-schéma projectif, soient* $\varepsilon' : X'_{\cdot} \to X$ *et* $\varepsilon : X_{\cdot} \to X$ *deux résolutions lisses de* X *liées par une flèche* $\alpha : X'_{\cdot} \to X_{\cdot}$ *telle que* $\varepsilon' = \varepsilon\alpha$ *alors pour tout* p *la flèche canonique :*

(2.2.1) $$R\varepsilon_*(\Omega^p_{X_{\cdot}}) \to R\varepsilon'_*(\Omega^p_{X'_{\cdot}})$$

(*construite par application de* $R\varepsilon_*$ *à la composée des deux flèches suivantes :* $\Omega^p_{X_{\cdot}} \to \alpha_* \Omega^p_{X'_{\cdot}} \to R\alpha_* \Omega^p_{X'_{\cdot}}$) *est un isomorphisme de* $D^+(X)$.

2.3. COROLLAIRE. — *Soient* X, $\varepsilon : X_{\cdot} \to X$ *et* $\varepsilon' : X'_{\cdot} \to X$ *comme ci-dessus; filtrons* $\Omega^{\bullet}_{X_{\cdot}}$ *et* $\Omega^{\bullet}_{X'_{\cdot}}$ *par la filtration bête* F (*c'est-à-dire que* $F^i(\Omega^p_{X_{\cdot}}) = 0$ *si* $p < i$, $\Omega^p_{X_{\cdot}}$ *si* $p \geqslant i$), *alors la flèche canonique :*

(2.3.1) $$\alpha^* : \quad R\varepsilon_*(\Omega^{\bullet}_{X_{\cdot}}, F) \to R\varepsilon'_*(\Omega^{\bullet}_{X'_{\cdot}}, F)$$

est un isomorphisme de $D_{\text{diff}}(X)$.

Démonstration. — En effet (2.2.1) s'identifie canoniquement à $\mathrm{Gr}^p_F(2.3.1)$.

2.4. THÉORÈME. — *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma projectif, soient $\varepsilon' : X'_\bullet \to X$ et $\varepsilon'' : X''_\bullet \to X$ deux résolutions lisses de X :*

(*a*) *il existe une résolution lisse $\varepsilon : X_\bullet \to X$ de X, et des morphismes de schémas simpliciaux $\alpha' : X_\bullet \to X'_\bullet$, $\alpha'' : X_\bullet \to X''_\bullet$ tels que $\varepsilon = \varepsilon'\alpha' = \varepsilon''\alpha''$;*

(*b*) *si l'on a une autre résolution lisse $\eta : Y_\bullet \to X$ de X, et des morphismes de schémas simpliciaux $\beta' : Y_\bullet \to X'_\bullet$, $\beta'' : Y_\bullet \to X''_\bullet$ tels que $\eta = \varepsilon'\beta' = \varepsilon''\beta''$, les isomorphismes composés des isomorphismes (2.3.1) $(\alpha''^*)^{-1} \circ \alpha'^*$ et $(\beta''^*)^{-1} \circ \beta'^*$ de $R\varepsilon'_*(\Omega^\bullet_{X'_\bullet})$ dans $R\varepsilon''_*(\Omega^\bullet_{X''_\bullet})$ sont identiques.*

La démonstration de 2.2 et 2.4 nécessite quelques lemmes.

2.5. LEMME. — *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma, $\varepsilon : X_\bullet \to X$ un $\mathbb{C}$-schéma simplicial augmenté vers X, $L_{X_\bullet}$ un faisceau abélien sur $X_\bullet$ et k un nombre entier; rappelons qu'on désigne par $sq_k(X)$ l'espace simplicial tronqué au rang k, déduit de $X_\bullet$ par restriction; alors le cône de la flèche $R\varepsilon_*(L_{X_\bullet}) \to R\varepsilon_*(L_{sq_k X_\bullet})$ est cohomologiquement concentré en degré supérieur ou égal à k.*

Démonstration. — $R\varepsilon_*(L_{X_\bullet})$ est le complexe simple associé à un certain complexe cosimplicial $K^{n,m}$ (m = degré simplicial) et $R\varepsilon_*(L_{sq_k X_\bullet})$ est le complexe simple associé au complexe cosimplicial $H^{n,m}$:

$$\begin{cases} H^{n,m} = K^{n,m} & \text{si} \quad m \leqslant k, \\ H^{n,m} = 0 & \text{si} \quad m > k. \end{cases}$$

Les deux complexes simples associés sont donc identiques en degré $\leqslant k$, d'où le lemme.

2.6. LEMME. — *Soit $g : Y \to X$ un morphisme surjectif de $\mathbb{C}$-schémas, Y étant supposé lisse et X projectif de dimension > 0. Soit i une immersion fermée de X dans $P = \mathbb{P}^m$; il existe un ouvert non vide U de l'espace projectif dual $P^\vee$ tel que pour tout hyperplan $H \in U$, $(i \circ g)^{-1}(H)$ soit lisse et de codimension 1 dans Y.*

Démonstration. — Posons $f = i \circ g$. Soit $\underline{H} \subset P \times P^\vee$ l'hyperplan universel (défini par $\underline{H} = \{(x, t) \in P \times P^\vee / x \in H_t\}$ où H_t est l'hyperplan de P défini par $t \in P^\vee$); $\underline{H}$ est fibré en $\mathbb{P}^{m-1}$ sur P. Soit $Z = \underline{H} \times_P Y$ la variété d'incidence :

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[r] \arrow[dl, "p"'] \arrow[d, hook] & \underline{H} \arrow[d, hook] \\
P^\vee & Y \times P^\vee \arrow[l, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & P \times P^\vee \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
 & Y \arrow[r, "f"] & P
\end{tikzcd}$$

Comme Y est lisse, Z est lisse, fibré en $\mathbb{P}^{m-1}$ sur Y. D'autre part, le morphisme $Z \xrightarrow{p} P^\vee$ composé de $Z \hookrightarrow Y \times P^\vee$ et $pr_2 : Y \times P^\vee \to P^\vee$ est surjectif (la dimension de X est >0 et tout hyperplan de P rencontre X), donc lisse au-dessus d'un ouvert non vide U de $P^\vee$ par le lemme de Sard.

Si $t \in U, f^{-1}(H_t) = Y \times_P H_t \simeq p^{-1}(t)$ est donc lisse.

2.7. LEMME. — *Avec les notations* 2.6, *soient* $G^{m-r}(\mathbb{P}^m)$ *la grassmannienne des sous-variétés linéaires de codimension* r *de* $\mathbb{P}^m$, *et* V_r *l'ensemble des points* P *de* $G^{m-r}(\mathbb{P}^m)$ $(r=1, \ldots, m)$ *tels que, si* $\dim Y \geqslant r$, $f^{-1}(P)$ *soit lisse et de codimension* r, *si* $\dim Y < r$, $f^{-1}(P)$ *soit vide.*

Alors V_r *est un ouvert non vide.*

Démonstration. — Pour $\dim Y < r$, l'assertion est évidente. Pour $\dim Y \geqslant r$, la démonstration est immédiate par récurrence à partir du cas $r=1$, traité en 2.6.

2.8. *Démonstration du théorème* 2.2. — Nous procèderons par récurrence sur $n = \dim X$.

Si $n=0$, on peut supposer que $X = P^t$ (un point). La flèche $X. \to P^t$ induit un isomorphisme $H^*(P^t, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(X., \mathbb{C})$ et donc un isomorphisme de structures de Hodge mixtes $H^*(P^t) \xrightarrow{\sim} H^*(X.)$, d'après [D 3]. Ceci donne le théorème en dimension 0.

Supposons donc que le théorème est vérifié en dimension $\leqslant n-1$ et prouvons-le en dimension n.

Soit X un $\mathbb{C}$-schéma projectif de dimension $\leqslant n$. Choisissons un plongement de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^m$, tel que X ne soit contenu dans aucun $(m-2)$ plan. Soit P un $(m-2)$ plan, le pinceau d'hyperplans $(H_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ d'axe P définit un morphisme $\pi : \tilde{X} \to \mathbb{P}^1$, où $\tilde{X} = \{(x, t) \in X \times \mathbb{P}^1 / x \in H_t\}$ est la variété d'incidence.

Pour tout entier i, notons $\tilde{X}_i$ la variété d'incidence sur X_i, $\{(x, t) \in X_i \times \mathbb{P}^1 / \varepsilon_i(x) \in H_t\}$; d'après 2.7, il existe un ouvert U_i non vide de $G^{m-2}(\mathbb{P}^m)$ tel que si $P \in U_i$, $\varepsilon_i^{-1}(P \cap X)$ soit lisse, et donc aussi $\tilde{X}_i$ qui est l'éclaté de $\varepsilon_i^{-1}(P \cap X)$. On procède de même avec les X'_i.

Comme X n'est pas contenu dans P, la fibre générique $\tilde{X}_\eta$ de π est un $\mathbb{C}(t)$-schéma projectif de dimension $\leqslant n-1$, auquel on va appliquer l'hypothèse de récurrence.

Par le changement de base $\tilde{X}_\eta \to X$ les résolutions ε et ε' définissent des résolutions $\tilde{\varepsilon} : \tilde{X}_{\eta,.} \to \tilde{X}_\eta$ et $\tilde{\varepsilon}' : \tilde{X}'_{\eta,.} \to \tilde{X}_\eta$ de $\tilde{X}_\eta$, liées par $\tilde{\alpha} : \tilde{X}'_{\eta,.} \to \tilde{X}_{\eta,.}$;

leurs composantes ne sont pas lisses sur $\mathbb{C}(t)$ en général, mais si $P \in U_i$, $\tilde{X}_{\eta,i}$ est lisse sur $\mathbb{C}(t)$ d'après le lemme de Sard car c'est la fibre générique de $\tilde{X}_i \to \mathbb{P}^1$ (et de même avec des ′).

Le diagramme commutatif suivant résume la construction (les carrés sont cartésiens) :

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[d, "\varepsilon_i"'] & \tilde{X}_i \arrow[l] \arrow[d] & \tilde{X}_{\eta,i} \arrow[l] \arrow[d] \\
X & \tilde{X} \arrow[l] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{X}_\eta \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \mathbb{P}^1 & \eta \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Soit alors k un nombre entier, on a donc un ouvert $U = \bigcap_{i=0}^{k} (U_i \cap U_i')$ de $G^{m-2}(\mathbb{P}^m)$ tel que, pour tout pinceau d'axe P dans U, la construction précédente donne deux résolutions lisses en degré $\leqslant k$ de $\tilde{X}_\eta$, liées par une flèche déduite de α :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X}'_{\eta,\cdot} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & & \tilde{X}_{\eta,\cdot} \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
 & \tilde{X}_\eta &
\end{tikzcd}$$

D'après 2.1.3, on peut trouver des résolutions lisses de $\tilde{X}_\eta$, $Z'_\cdot$ (resp. $Z_\cdot$) coiffant $\tilde{X}'_{\eta,\cdot}$ (resp. $\tilde{X}_{\eta,\cdot}$) et vérifiant les propriétés indiquées ci-dessus.

D'après le principe de Lefschetz, on déduit de l'hypothèse de récurrence que la flèche (2.2.1) :

$$R\gamma_*(\Omega^p_{Z_\cdot|\mathbb{C}(t)}) \to R\gamma'_*(\Omega^p_{Z'_\cdot|\mathbb{C}(t)})$$

est un quasi-isomorphisme.

D'après 2.5 le cône des flèches :

$$R\gamma_*(\Omega^p_{Z_\cdot|\mathbb{C}(t)}) \to R\gamma_*(\Omega^p_{sq_k Z_\cdot|\mathbb{C}(t)}),$$

et

$$R\varepsilon_*(\Omega^p_{\tilde{X}_{\eta,\cdot}|\mathbb{C}(t)}) \to R\varepsilon_*(\Omega^p_{sq_k \tilde{X}_{\eta,\cdot}|\mathbb{C}(t)})$$

est cohomologiquement concentré en degré $\geqslant k$ (et de même avec des ′).

Le cône de la flèche $R\varepsilon_*(\Omega^p_{X_{\eta,\cdot}|\mathbf{C}(t)}) \to R\varepsilon'_*(\Omega^p_{X'_{\eta,\cdot}|\mathbf{C}(t)})$ est donc cohomologiquement concentré en degré $\geqslant k-1$.

On peut donc trouver un ouvert B de $\mathbb{P}^1$ et un ouvert V de X, $V=(X-P\cap X)\times_{\mathbf{P}^1} B$ (V est donc le complémentaire de la réunion de l'axe et d'un nombre fini d'hyperplans du pinceau), tels que, si l'on note $V.=X.\times_X V$ et $V'.=X'.\times_X V$:

– $sq_k(V.)$ et $sq_k(V'.)$ sont lisses sur B;

– le cône de $R\varepsilon_*(\Omega^p_{V.|B}) \to R\varepsilon'_*(\Omega^p_{V'.|B})$ est concentré en degré $\geqslant k-1$.

Si $p=1$, nous avons pour $0\leqslant i\leqslant k$ des suites exactes :

$$0 \to (\pi\varepsilon_i)^*\Omega^1_{B|\mathbf{C}} \to \Omega^1_{V_i|\mathbf{C}} \to \Omega^1_{V_i|B} \to 0$$

(car V_i est lisse sur B) et de même avec des $'$.

En prenant $R\varepsilon_*$ et $R\varepsilon'_*$ de ces suites, on trouve deux triangles distingués (en notant, par abus de langage, ε au lieu de ${}_k\varepsilon$) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & R\varepsilon_*\varepsilon^*(\pi^*\Omega^1_{B|\mathbf{C}}) & \to & R\varepsilon_*(\Omega^1_{sq_k(V.)|\mathbf{C}}) & \to & R\varepsilon_*(\Omega^1_{sq_k(V.)|B}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (1)} & & \downarrow{\scriptstyle (2)} & & \downarrow{\scriptstyle (3)} & & \\
0 & \to & R\varepsilon'_*\varepsilon'^*(\pi^*\Omega^1_{B|\mathbf{C}}) & \to & R\varepsilon'_*(\Omega^1_{sq_k(V'.)|\mathbf{C}}) & \to & R\varepsilon'_*(\Omega^1_{sq_k(V'.)|B}) & \to & 0
\end{array}$$

Par descente cohomologique, la flèche (1) est un quasi-isomorphisme en degré $<k$ et la flèche (3) est un quasi-isomorphisme en degré $<k-1$. On trouve donc que le cône de $R\varepsilon_*(\Omega^1_{V.|\mathbf{C}}) \to R\varepsilon'_*(\Omega^1_{V'.|\mathbf{C}})$ est concentré en degré $\geqslant k-1$.

Procédant *mutatis mutandis* pour les Ω^p ($p>1$), à partir de la suite exacte :

$$0 \to (\pi\varepsilon_i)^*\Omega^1_{B|\mathbf{C}} \otimes \Omega^{p-1}_{V_i|B} \to \Omega^p_{V_i|\mathbf{C}} \to \Omega^p_{V_i|B} \to 0,$$

on trouve de même que le cône de $R\varepsilon_*(\Omega^p_{V.|\mathbf{C}}) \to R\varepsilon'_*(\Omega^p_{V'.|\mathbf{C}})$ est concentré en degré $\geqslant k-1$.

Nous revenons alors sur X. Soit $T.$ ($\in \operatorname{ob} D^+(X)$) le cône de

$$(4) \qquad R\varepsilon_*(\Omega^p_{X.}) \to R\varepsilon'_*(\Omega^p_{X'.})$$

et soit $t_{<k-1}(T.)$ le tronqué de $T.$ en degré $<k-1$ (où

$$t_{<n+1}(L.)=(\ldots \to L_{n-1} \to Z_n \to 0 \to \ldots), \text{ avec } Z_n=\ker(L_n \to L_{n+1})).$$

D'après ce qui précède, $t_{<k-1}(T.)$ est concentré sur un nombre fini d'hyperplans $H_1, \ldots, H_s$ du pinceau défini par P; on choisit alors un second

pinceau d'hyperplans dont l'axe P' est dans U (l'ouvert de $G^{p-2}(\mathbb{P}^m)$ défini plus haut) et non contenu dans la réunion des hyperplans $H_1, \ldots, H_s$; $t_{<k-1}(T.)$ est alors concentré sur un nombre fini d'hyperplans $H'_1, \ldots, H'_s$ du pinceau d'axe P'; il est donc concentré sur les $H_i \cap H'_j$ i. e. sur un nombre fini de $(m-2)$ plans $P_1, \ldots, P_r$.

Supposons donc que $t_{<k-1}(T.)$ est concentré sur un nombre fini de l-plans $P'_1, \ldots, P'_t$; si $l \neq 0$, les P de $G^{m-2}(\mathbb{P}^m)$, qui définissent un pinceau d'hyperplans tel qu'il existe (au moins) un hyperplan du pinceau qui contient le l-plan P'_j, forment un fermé F_j strict de $G^{m-2}(\mathbb{P}^m)$; prenons alors P'' dans $U \cap (\bigcap_{j=1}^t (G^{m-2}(\mathbb{P}^m) - F_j))$; $t_{<k-1}(T.)$ est concentré sur un nombre fini d'hyperplans $H''_1, \ldots, H''_s$ du pinceau défini par P'' et par les P'_j, et les P'_j ne sont pas inclus dans $H''_1, \ldots, H''_s$; par suite $t_{<k-1}(T.)$ est porté par un nombre fini de $(l-1)$-plans.

Nous trouvons ainsi que $t_{<k-1}(T.)$ est un gratte-ciel, i. e. porté par un nombre fini de points.

D'autre part, le schéma X est propre, $X'.$ et $X.$ en sont des résolutions lisses. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{Gr}_F^p R\Gamma(X^{an}, \mathbb{C}) \arrow[r, phantom, "\overset{(2)}{\cong}"] & R\Gamma(X., \Omega^p_{X.}[-p]) \arrow[r, phantom, "\overset{(3)}{\cong}"] & R\Gamma(X, R\varepsilon_*(\Omega^p_{X.}[-p])) \arrow[dd, "(4)"'] \\
\mathrm{Gr}_F^p R\Gamma(X^{an}, \mathbb{C}) \arrow[ur, "(1)"] \arrow[dr, "(1')"'] & & & \\
 & \mathrm{Gr}_F^p R\Gamma(X'^{an}_., \mathbb{C}) \arrow[r, phantom, "\overset{(2')}{\cong}"] & R\Gamma(X'., \Omega^p_{X'.}[-p]) \arrow[r, phantom, "\overset{(3')}{\cong}"] & R\Gamma(X, R\varepsilon'_*(\Omega^p_{X'.}[-p])),
\end{tikzcd}$$

où les flèches sont les suivantes : (1) (resp. (1')) est définie à l'aide de ε (resp. ε'), c'est un isomorphisme, car, d'après la théorie de Hodge mixte [D 3], l'isomorphisme $H^*(X, \mathbb{C}) \simeq H^*(X., \mathbb{C})$ est strictement compatible à la filtration F; (2) est l'isomorphisme fourni par la suite spectrale :

$$E_1^{pq} = R^{p+q}\Gamma(X., \Omega^p_{X.}) \Rightarrow H^{p+q}(X^{an}, \mathbb{C})$$

dégénérée en E_1; (2') est l'isomorphisme analogue, (3) et (3') les isomorphismes évidents; par suite la flèche de fonctorialité (4) définie par α est un isomorphisme et $R\Gamma(T.) = 0$.

Appliquons alors $R\Gamma$ an triangle distingué suivant :

$$0 \to t_{<k-1} T. \to T. \to t_{\geq k-1} T. \to 0;$$

$R\Gamma(t_{\geqslant k-1}T_{\cdot})$ est concentré en degré $\geqslant k-1$, donc $R\Gamma(t_{<k-1}T_{\cdot})$ est aussi concentré en degré $\geqslant k-1$. Comme $t_{<k-1}(T_{\cdot})$ est en gratte-ciel, ceci entraîne que $t_{<k-1}(T_{\cdot})$ est concentré en degré $\geqslant k-1$ et donc $t_{<k-1}(T_{\cdot})=0$.

Ceci est vrai pour tout k, on a donc $T_{\cdot}=0$ et le théorème.

2.9. *Démonstration du théorème* 2.4 :

(*a*) Immédiat d'après 2.1.3 et 2.1.4.

(*b*) Notons pour simplifier $X''_{\cdot} \xrightarrow{u_1} X'_{\cdot}$ pour $X''_{\cdot} \xleftarrow{\alpha''} X_{\cdot} \xrightarrow{\alpha'} X'_{\cdot}$, $X''_{\cdot} \xrightarrow{u_2} X'_{\cdot}$ pour $X''_{\cdot} \xleftarrow{\beta''} Y_{\cdot} \xrightarrow{\beta'} X'_{\cdot}$, u_1^* pour $(\alpha''^*)^{-1}\alpha'^*$ et u_2^* pour $(\beta''^*)^{-1}.(\beta')^*$; soit $f: Z_{\cdot} \to X$ une résolution lisse de X, le changement de base $f: Z_{\cdot} \to X$ définit deux diagrammes commutatifs ($i=1$ ou 2) :

$$\begin{tikzcd}
Z''_{\cdot\cdot} \arrow[r] \arrow[d, "v_i"'] \arrow[dd, bend right, "\eta''"] & X''_{\cdot} \arrow[d, "u_i"'] \arrow[dd, bend left, "\varepsilon''"] \\
Z'_{\cdot\cdot} \arrow[r] \arrow[d, "\eta'"'] & X'_{\cdot} \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
Z_{\cdot} \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Par [SGA 4], V *bis*, on peut trouver des hyperrecouvrements propres et lisses $\theta': Y'_{\cdot\cdot\cdot} \to Z'_{\cdot\cdot}$ et $\theta'': Y''_{\cdot\cdot\cdot} \to Z''_{\cdot\cdot}$ et des chaînes de flèches $w_i: Y''_{\cdot\cdot\cdot} \to Y'_{\cdot\cdot\cdot}$ coiffant v_i i. e. telles que $\theta' w_i = v_i \theta''$ ($i=1$ ou 2).

Par Cartier-Eilenberg-Zilber, $\gamma' = f\eta'\theta': \delta Y'_{\cdot\cdot\cdot} \to X$ et $\gamma''=f\eta''\theta'': \delta Y''_{\cdot\cdot\cdot} \to X$ sont des résolutions lisses de X (en notant $\delta Y'_{\cdot\cdot\cdot}=(Y'_{nnn})_{n\in\mathbf{N}}$). Le diagramme commutatif suivant ($i=1$ ou 2) :

$$\begin{tikzcd}
\delta Y''_{\cdot\cdot\cdot} \arrow[r] \arrow[d, "w_i"'] \arrow[dd, bend right] \arrow[ddr, "\gamma''"] & X''_{\cdot} \arrow[d, "u_i"'] \arrow[dd, bend left, "\varepsilon''"] \\
\delta Y'_{\cdot\cdot\cdot} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "\gamma'"'] & X'_{\cdot} \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
Z_{\cdot} \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

donne naissance à un diagramme commutatif dont toutes les flèches sont des isomorphismes indépendants de i, sauf peut-être w_i^* et u_i^* :

$$\begin{tikzcd}
 & R\gamma''_*\Omega^\bullet_{\delta Y::.} & R\varepsilon''_*\Omega^\bullet_{X::} \arrow[l, "\sim"'] \\
Rf_*\Omega^\bullet_{Z.} \arrow[ur, "\sim"] \arrow[dr, "\sim"'] & & \\
 & R\gamma'_*\Omega^\bullet_{\delta Y:..} \arrow[uu, "w_i^*"', "\wr"] & R\varepsilon'_*\Omega^\bullet_{X:} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[uu, "u_i^*"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

d'où $u_1^* = u_2^*$.

C.Q.F.D.

2.10. Notation. — Soit X un $\mathbb{C}$-schéma projectif, nous poserons $\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X = \varinjlim R\varepsilon_*\Omega^\bullet_{X.}$, où $\varepsilon : X. \to X$ parcourt les résolutions lisses de X, les isomorphismes de transition étant donnés par 2.4, et $\underline{\underline{\Omega}}^p_X = \mathrm{Gr}^p_F(\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X)$.

2.11. Soient toujours X, $X.$ et $X'_.$ comme en 2.2. Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X'_. \arrow[r] \arrow[dr] & X. \arrow[d] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

définit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^\bullet_X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
R\varepsilon_*\Omega^\bullet_{X.} \arrow[rr, "\sim"] & & R\varepsilon'_*\Omega^\bullet_{X'_.}
\end{tikzcd}$$

d'où, par passage à la limite, un morphisme dans $D_{\mathrm{diff}}(X)$:

$$\Omega^\bullet_X \to \underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X; \tag{2.11.1}$$

si X est lisse, en choisissant l'espace simplicial constant de valeur X pour résolution lisse de X, on voit que (2.11.1) est un isomorphisme.

3. Le théorème d'indépendance (cas général)

3.1. Le but de ce numéro est d'étendre la définition de $\underline{\underline{\Omega}}^\bullet_X$ au cas d'un schéma X séparé de type fini sur $\mathbb{C}$ (voire d'un schéma simplicial à composantes séparées de type fini sur $\mathbb{C}$) et de démontrer le théorème 3.22 i. e. si $\alpha : Y. \to X$ est une résolution quelconque de X séparé de type fini, on a $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X \cong R\,\alpha_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.}$.

On procède en plusieurs étapes en passant des résolutions lisses d'un schéma projectif aux résolutions projectives d'un schéma projectif, puis aux résolutions quasi-projectives lisses d'un schéma séparé de type fini, puis au cas général.

3.2. Fonctorialité de $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}$. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas projectifs; d'après [SGA 4], V *bis*, on peut coiffer f par un morphisme d'hyperrecouvrements admissibles (et donc de résolutions lisses) donnant un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} X. \arrow[r, "f."] \arrow[d, "\varepsilon"'] & Y. \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

On a une flèche $\Omega^{\bullet}_{Y.} \to R\,f_{.*}(\Omega^{\bullet}_{X.})$ dans $D_{\text{diff}}(Y)$; ceci nous donne par application de $R\,\eta_*$ une flèche $R\,\eta_*(\Omega^{\bullet}_{Y.}) \to R\,f_*\,R\,\varepsilon_*(\Omega^{\bullet}_{X.})$, d'où, par passage à la limite, une flèche de $D_{\text{diff}}(Y)$:

$$(3.2.1) \qquad f^* : \ \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_Y \to R\,f_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X,$$

qui induit le morphisme filtré $f^* : (H^{\bullet}(Y, \mathbb{C}), F) \to (H^{\bullet}(X, \mathbb{C}), F)$. Les flèches (3.2.1) vérifient la condition de transitivité naturelle pour un composé $g.f$.

3.3.1. Définitions. — *Soient K un corps de caractéristique nulle, l un nombre premier et $Y.$ un K-schéma simplicial séparé dont chaque composante est de type fini. On appelle* résolution *de $Y.$ un schéma bisimplicial augmenté vers $Y.$, $\beta : Z.. \to Y.$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n : Z_{n.} \to Y_n$ soit une résolution de Y_n. On dira que la résolution est* lisse (*resp.* lisse en degré $\leqslant k$) *si les composantes de $Z..$ (resp. les $Z_{n,m}$ pour $n \leqslant k$, $m \leqslant k$) sont lisses.*

Comme en 2.1.1, la définition est indépendante du l choisi.

3.3.2. On laisse au lecteur le soin de démontrer l'analogue simplicial des lemmes 2.1.3 et 2.1.4.

3.4. Proposition. — *Soit $Y.$ un $\mathbb{C}$-schéma simplicial projectif, soient $\beta' : Z'_{..} \to Y.$ et $\beta : Z_{..} \to Y.$ deux résolutions lisses de $Y.$, liées par une flèche $\delta : Z'_{..} \to Z_{..}$ telle que $\beta' = \beta \circ \delta$, alors la flèche canonique :*

$$(3.4.1) \qquad R\beta_*(\Omega^{\bullet}_{Z_{..}}, F) \to R\beta'_*(\Omega^{\bullet}_{Z'_{..}}, F)$$

est un isomorphisme de $D_{\text{diff}}(Y.)$.

Démonstration. — $\beta'_n : Z'_{n.} \to Y_n$ et $\beta_n : Z_{n.} \to Y_n$ sont des résolutions lisses de Y_n, la restriction de (3.4.1) à chaque Y_n est donc un isomorphisme de $D_{\text{diff}}(Y_n)$ d'après 2.3, d'où la proposition.

3.5. On vérifie comme plus haut que l'on dispose d'un système transitif d'isomorphismes entre les $R\beta_*(\Omega^{\bullet}_{Z_{..}}, F)$ où $\beta : Z_{..} \to Y.$ parcourt les résolutions lisses de $Y.$. On notera $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.} = \varinjlim R\beta_*(\Omega^{\bullet}_{Z_{..}})$ la limite inductive de ce cystème et $\underline{\underline{\Omega}}^{p}_{Y.} = \mathrm{Gr}^p_F \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.}$.

3.6. Fonctorialité de $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.}$. — Soit $a : Y. \to X.$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas simpliciaux projectifs, on construit en paraphrasant 3.2 une flèche :

$$(3.6.1) \qquad \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X.} \to R a_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.};$$

en particulier, si $X.$ est un schéma simplicial constant au-dessus de X, notons $c : X. \to X$ l'augmentation et $\alpha = ca : Y. \to X$, nous avons alors une flèche (3.6.2) : $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X} \to R\alpha_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y}$ composée des deux flèches :

$$\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X} \to R c_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X.} \to R\alpha_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.}.$$

3.7. Proposition. — *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma projectif et $\alpha : Y. \to X$ une résolution projective de X (i. e. une résolution à composantes projectives), alors la flèche canonique :*

$$(3.6.2) \qquad \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X} \to R\alpha_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.}$$

est un isomorphisme de $D_{\text{diff}}(X)$.

Démonstration. — Soient $\beta : Z_{..} \to Y.$ une résolution lisse de $Y.$, $\delta Z_{..}$ la diagonale de $Z_{..}$, $i : \delta Z_{..} \to Z_{..}$, $\gamma = \alpha\beta$, $\varepsilon = \gamma i$:

$$\begin{tikzcd} \delta Z_{..} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & Z_{..} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, "\gamma"'] \\ X & Y. \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

On a $R\gamma_*((\mathbb{Q}_l)_{Z..})\simeq(\mathbb{Q}_l)_X$ et par Cartier-Eilenberg-Zilber, $R\varepsilon_*((\mathbb{Q}_l)_{\delta Z..})\simeq(\mathbb{Q}_l)_X$ donc $\delta Z..$ est une résolution lisse de X.

On a alors $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X = R\varepsilon_*\,\Omega^{\cdot}_{\delta Z..}$ et $R\alpha_*\,\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{Y.} = R\gamma_*\,\Omega^{\cdot}_{Z..}$; les seconds membres sont isomorphes par Cartier-Eilenberg-Zilber, d'où la proposition.

3.8. Proposition. — *Soit A un $\mathbb{C}$-schéma projectif. On suppose que A est la réunion de B et C, deux sous-schémas fermés de A; on note D le $\mathbb{C}$-schéma intersection de B et C, β, γ, δ, ε et ξ les flèches $B\to A$, $C\to A$, $D\to A$, $D\to B$, $D\to C$. Alors on a un triangle distingué dans $D_{\text{diff}}(A)$:*

$$0\to\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_A\xrightarrow{(\beta^*,\,\gamma^*)}\beta_*\,\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_B\oplus\gamma_*\,\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_C\xrightarrow{\varepsilon^*-\xi^*}\delta_*\,\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_D\to 0.$$

Démonstration. — Nous avons une résolution projective de A :

$$\pi:\quad cosq\,(B\coprod C/A)\to A,$$

avec

$$cosq_n(B\coprod C/A)=(B\coprod C/A)^{n+1}=B\coprod C\coprod\underbrace{D\coprod\ldots\coprod D}_{2^{n+1}-2\text{ fois}}$$

La proposition 3.7 nous donne alors pour $\underline{\underline{\Omega}}^p_A$:

$$\underline{\underline{\Omega}}^p_A=R\pi_*\,(\underline{\underline{\Omega}}^p_B\oplus\underline{\underline{\Omega}}^p_C\to\underline{\underline{\Omega}}^p_B\oplus\underline{\underline{\Omega}}^p_C\oplus\underline{\underline{\Omega}}^p_D\oplus\underline{\underline{\Omega}}^p_D\to\ldots).$$

Les flèches du complexe qui figure entre les parenthèses sont les sommes alternées des opérateurs de faces; le complexe simplicial dont on prend le $R\pi_*$ est homotopiquement équivalent au complexe alterné correspondant (*voir* par exemple [4], chap. I, 3.8), c'est-à-dire au complexe simple associé à $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot p}_B\oplus\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot p}_C\to\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot p}_D$, où $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot p}_B\oplus\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot p}_C$ est la colonne de degré 0.

De plus, les flèches β, γ et δ sont finies donc $R\pi_*=\pi_*$, d'où la proposition. Cette proposition à la Mayer-Vietoris sera généralisée en 4.10.

3.9. Proposition. — *Soit $\pi:\tilde{X}\to X$ un morphisme birationnel de $\mathbb{C}$-schémas projectifs, qui soit un isomorphisme en dehors d'un sous-schéma fermé Y de X, d'image réciproque $\tilde{Y}$. Notons $\pi':\tilde{Y}\to Y$. On a alors un triangle distingué dans $D_{\text{diff}}(X)$:*

$$0\to\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X\to\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_Y\oplus R\pi_*\,\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{\tilde{X}}\to R\pi'_*\,\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{\tilde{Y}}\to 0.$$

Démonstration. — Calculons $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ en choisissant pour hyperrecouvrement propre de X : $\varphi: cosq\,(\tilde{X}\to X)\to X$.

Les composantes de $cosq(\tilde{X} \to X)$ sont les schémas $(\tilde{X}/X)^n$. Ceux-ci ont une forme simple : $(\tilde{X}/X)^n$ est réunion des sous-schémas fermés $\tilde{X}$ et $(\tilde{Y}/Y)^n$ qui se coupent suivant $\tilde{Y}$ (considéré comme sous-schéma diagonal de $(\tilde{Y}/Y)^n$). D'après 3.8, on a alors un triangle distingué dans $D_{\text{diff}}(cosq(\tilde{X} \to X))$:

$$0 \to \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{(\tilde{X}/X)^{\cdot}} \to \Delta_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{X}} \oplus j_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{(\tilde{Y}/Y)^{\cdot}} \to (j\Delta')_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{Y}} \to 0.$$

(où $\Delta : \tilde{X} \to (\tilde{X}/X)^{\bullet}$ et $\Delta' : \tilde{Y} \to (\tilde{Y}/Y)^{\bullet}$ sont les immersions diagonales et $j : (\tilde{Y}/Y)^{\bullet} \to (\tilde{X}/X)^{\bullet}$).

On applique alors $R\varphi_*$ et on obtient le triangle distingué suivant dans $D_{\text{diff}}(X)$:

$$0 \to R\varphi_*(\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{(\tilde{X}/X)^{\cdot}}) \to R\varphi_*(\Delta)_*(\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{X}}) \oplus R\varphi_* j_*(\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{(\tilde{Y}/Y)^{\cdot}})$$
$$\to R\varphi_* j_*(\Delta')_*(\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{Y}}) \to 0.$$

Or, $\varphi j : (\tilde{Y}/Y)^{\bullet} \to Y$ est un hyperrecouvrement propre de Y et $R\varphi_* \Delta_*$ n'est autre que $R\pi_*$ (de même $R\varphi_* j_* \Delta'_* = R\pi'_*$).

Le triangle distingué se réécrit donc, en utilisant la proposition 3.7 :

$$0 \to \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X \to \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_Y \oplus R\pi_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{X}} \to R\pi'_*(\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{Y}}) \to 0.$$

(Les flèches sont définies comme en 3.8.)

3.10. Corollaire. — *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma projectif et U un ouvert lisse, la restriction à U de la flèche* (2.11.1) *est un isomorphisme :*

$$(2.11.1)|_U \qquad \Omega^{\bullet}_U \to \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X|U}.$$

Démonstration. — Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une désingularisation de X telle que $\pi^{-1}(U)$ soit isomorphe à U; en reprenant les notations de 3.9, on a un triangle distingué dans $D_{\text{diff}}(X)$:

$$0 \to \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X \to \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_Y \oplus R\pi_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{X}} \to R\pi'_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{Y}} \to 0.$$

En restreignant ce triangle au-dessus de U, on obtient un isomorphisme : $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X|U} \to R\pi_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{X}|U}$ qui s'insère dans un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X|U} \arrow[r, "(3.9)", "\sim"'] & R\pi_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\tilde{X}|U} \\
\Omega^{\bullet}_U \arrow[u, "(2.11.1)"] \arrow[r] & R\pi_* \Omega^{\bullet}_{\pi^{-1}(U)} \arrow[u, "(2.11.1)"']
\end{tikzcd}$$

Par 2.11, $\Omega^\bullet_{\tilde{X}} \to \underline{\underline{\Omega}}^\bullet_{\tilde{X}}$ est un isomorphisme; d'autre part, $\Omega^\bullet_U \to R\pi_*\Omega^\bullet_{\pi^{-1}(U)}$ est un isomorphisme, car $\pi^{-1}U \xrightarrow{\sim} U$ est un isomorphisme. On trouve donc que $\Omega^\bullet_U \to \underline{\underline{\Omega}}^\bullet_{X\,|\,U}$ est aussi un isomorphisme.

3.11. Théorème. — *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini, soient $\varepsilon' : X'_\cdot \to X$ et $\varepsilon : X_\cdot \to X$ deux résolutions lisses à composantes quasi projectives de X liées par une flèche $\alpha : X'_\cdot \to X_\cdot$ telle que $\varepsilon' = \varepsilon\alpha$, alors pour tout p la flèche canonique :*

$$R\varepsilon_*(\Omega^p_{X_\cdot}) \to R\varepsilon'_*(\Omega^p_{X'_\cdot}) \tag{3.11.1}$$

(*construite comme* 2.2.1) *est un isomorphisme de $D^+(X)$.*

Plan de la démonstration. — La question étant locale, on peut supposer que X est affine. Nous allons construire, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} R'_\cdot \arrow[r] \arrow[dr] & R_\cdot \\ & Z \end{tikzcd}$$
, où Z est une compactification projective de X et $R_\cdot$ est une résolution projective de Z telle que $sq_N(R_\cdot) \times_Z X$ est isomorphe à $sq_N(X_\cdot)$ (et de même avec des $'$); nous appliquons ensuite la proposition 3.7 et le corollaire 3.10 à cette situation.

3.12. Lemme. — *Soient U et V deux $\mathbb{C}$-schémas quasi-projectifs et $d_0, \ldots, d_k$ $(k+1)$ flèches propres de V dans U. On peut trouver une compactification projective $\overline{U}$ de U (resp. $\overline{V}$ de V) et $(k+1)$ flèches propres $\overline{d}_0, \ldots, \overline{d}_k$ qui prolongent $d_0, \ldots, d_k$ telles que les diagrammes :*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "d_i"'] & \overline{V} \arrow[d, "\overline{d_i}"] \\ U \arrow[r, hook] & \overline{U} \end{tikzcd}$$

soient cartésiens $(i=0, \ldots, k)$.

Démonstration. — Choisissons une compactification projective $\overline{U}$ (resp. Z) de U (resp. V). Nous avons $(k+1)$ flèches $V \xrightarrow{d'_i} Z \times_{\mathbb{C}} \overline{U}$; ces flèches se factorisent par $\prod_{i=0}^k \overline{d'_i(V)}$, qui est projectif, et on pose $\overline{V} = \overline{\mathrm{Im}(V, \prod_{i=0}^k \overline{d'_i(V)})}$, $\overline{V}$ est projectif, $V \to \overline{V}$ est une immersion ouverte, les flèches évidentes $\overline{d_i} : \overline{V} \to \overline{U}$ prolongent les d_i et les $(k+1)$ diagrammes de l'énoncé sont cartésiens, car les d_i sont propres.

3.13. On peut de même trouver une « compactification projective » du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{v} & V \\ {\scriptstyle d_0}\downarrow \vdots \downarrow{\scriptstyle d_k} & & {\scriptstyle d'_0}\downarrow \vdots \downarrow{\scriptstyle d'_k} \\ U' & \xrightarrow[u]{} & U \end{array}$$

où U, U', V, V' sont des $\mathbb{C}$-schémas quasi-projectifs, u, v, d_0, $\ldots$, d_k, d'_0, $\ldots$, d'_k sont propres et $d'_i v = u d_i$ $(i=0, \ldots, k)$.

Pour cela, on choisit d'abord $\overline{U}$, puis on construit $\overline{V}$ et $\overline{U}'$ en appliquant 3.12 et enfin, on construit $\overline{V}'$ comme en 3.12 à partir des flèches $\overline{V}' \to Z' \times_{\mathbb{C}} \overline{U}' \times_{\mathbb{C}} \overline{V}$, où Z' est une compactification projective quelconque de V'.

3.14. Lemme. — *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $X'_{\bullet}$, $X_{\bullet}$ et X comme dans le théorème. On peut trouver une compactification projective Z de X et des $\mathbb{C}$-schémas simpliciaux projectifs augmentés vers Z, $\overline{Y}'_{\bullet}$ et $\overline{Y}_{\bullet}$, insérés dans un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \overline{Y}'_{\bullet} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr] & & \overline{Y}_{\bullet} \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

avec

$$sq_N(\overline{Y}'_{\bullet}) \times_Z X = sq_N(X'_{\bullet}), \qquad sq_N(\overline{Y}_{\bullet}) \times_Z X = sq_N(X_{\bullet}),$$
$$sq_N(\beta) \times_Z X = sq_N(\alpha).$$

Démonstration. — On choisit d'abord par 3.13 une compactification projective Z, resp. Z_n, $Z'_n (n \leqslant N)$ de X, resp. X_n, resp. X'_n, de façon à avoir pour chaque n des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\varepsilon_n"] & Z_n \arrow[dd] \\ X'_n \arrow[ur, "\alpha_n"] \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\varepsilon'_n"'] & & Z'_n \arrow[u] \arrow[d] \\ & X \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

Considérons l'espace simplicial augmenté vers Z, $\xi : \Pi. \to Z$ défini par :

(a) $\Pi_i = \prod_{j=0}^{N} \prod_{\Delta_j \to \Delta_i} Z_j/Z$ (où $\Delta_j \to \Delta_i$ désigne l'ensemble des applications croissantes de Δ_j dans Δ_i);

(b) si g est une application croissante de Δ_i dans Δ_k, la flèche de Π_k dans Π_i est le produit (j allant de 0 à N) des flèches qui à $z=(z_h)_{h : \Delta_j \to \Delta_k}$ dans $\prod_{\Delta_j \to \Delta_k} Z_j/Z$ associent l'élément $g^*(z)$ de $\prod_{\Delta_j \to \Delta_i} Z_j/Z$ de composante suivant $f : \Delta_j \to \Delta_i$: $(g^*(z))_f = z_{g \circ f}$;

(c) l'augmentation $\zeta_n : \Pi_n \to Z$ est la projection sur la base Z du produit fibré Π_n.

On a un morphisme simplicial $X. \to \Pi.$, la flèche $X_n \to \Pi_n$ n'est autre que le produit des flèches composées $X_n \to X_j \to Z_j$, et pour $n \leqslant N$ cette flèche est le produit de l'immersion fermée $X_n \to \Pi_n \times_Z X$ par l'immersion ouverte $\Pi_n \times_Z X \to \Pi_n$.

Notons $Y.$ l'image de $X.$ dans $\Pi.$ et $\overline{Y}.$ l'adhérence de $Y.$ dans $\Pi.$, $Y.$ (resp. $\overline{Y}.$) est un $\mathbb{C}$-schéma simplicial augmenté vers X (resp. Z) et $\overline{Y}. \times_Z X = Y.$ car les flèches de $Y.$ sont propres. On a de plus $sq_N X. \simeq sq_N Y.$; on a ainsi trouvé une compactification de $sq_N X.$ dont les composantes (projectives, mais non nécessairement lisses) seront notées $\overline{X}_0, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_N$.

On construit de même $\Pi'.$ et $\overline{Y}'.$ et on a une flèche $\beta : \overline{Y}'. \to \overline{Y}.$ qui vérifie les assertions de 3.14.

3.15. LEMME. — *Soient $X'.$, $X.$ et X comme dans le théorème; soit Z une compactification projective de X comme en* 3.14. *On peut construire des résolutions projectives de Z, $\rho : R. \to Z$ et $\rho' : R'. \to Z$ insérées dans un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} R'. \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\rho'"'] & & R. \arrow[dl, "\rho"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

avec

$$sq_N(R.) \times_Z X = sq_N(X.), \qquad sq_N(R'.) \times_Z X = sq_N(X'.),$$
$$sq_N(\gamma) \times_Z X = sq_N \alpha.$$

Démonstration. — Le lemme 2.1.3 nous permet de construire à partir de $X.$ une résolution lisse de X « scindée en degré $>N$ », que nous noterons $T.$; on pose

$$sq_N T. = sq_N X., \qquad T_{N+1} = X_{N+1} \coprod \coprod_{i=0}^{N} s_i(X_N)$$

où $X_N \simeq s_i(X_N)$, et, si T_{N+k} est défini ($k=1, 2, \ldots$), on pose :

$$T_{N+k+1} = (X_{N+k+1} \times_{(cosq_{N+k}\, sq_{N+k} X.)_{N+k+1}} (cosq_{N+k}\, sq_{N+k}\, T.)_{N+k+1})^{\sim} \coprod \coprod_{i=0}^{N+k} s_i(T_{N+k})$$

(on note comme en 2.1.3 $S^{\sim}$ une désingularisation du $\mathbb{C}$-schéma S), les flèches $T_{N+k+1} \xrightarrow{\delta_i} T_{N+k}$ sont les flèches évidentes et les flèches $T_{N+k} \xrightarrow{s_i} T_{N+k+1}$ envoient isomorphiquement T_{N+k} sur un facteur direct de T_{N+k+1}. Nous avons de plus un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas simpliciaux $T. \xrightarrow{\tau} X.$ et par 2.1.3, l'augmentation $\varepsilon\tau$ fait de $T.$ une résolution lisse de X. Comme en 2.1.3, on construit ensuite $T'_.$ (et une flèche $T'_. \to X.$) à partir de $X'_.$ et de $\tau : T. \to X.$.

Le lemme 3.12 et la compactification (3.14) de $sq_N X.$ nous permettent de trouver un $\mathbb{C}$-schéma simplicial augmenté vers Z, $\overline{T}.$, à composantes projectives (non nécessairement lisses), tel que $\overline{T}. \times_Z X = T.$; en effet, $sq_N T. = sq_N X.$ est déjà plongé dans un $\mathbb{C}$-schéma simplicial N-tronqué augmenté vers Z et projectif. Il reste à compactifier les flèches de face $T_{N+k+1} \xrightarrow{\delta_i} T_{N+k}$, par récurrence sur k, en utilisant 3.12; les flèches de dégénérescence $T_{N+k} \xrightarrow{s_i} T_{N+k+1}$ se prolongent automatiquement, de même que les relations entre les δ_i et s_j (qui sont vérifiées sur des ouverts denses des $\mathbb{C}$-schémas séparés T_n).

Le $\mathbb{C}$-schéma simplicial $\overline{T}.$ n'est pas une résolution de Z, mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{T}_n \to Z$ est surjectif (propre et dominant car $T_n \to X$ est surjectif), $cosq\,(\overline{T}. \to Z)$ est donc un hyperrecouvrement propre du $\mathbb{C}$-schéma simplicial constant Z et sa diagonale $S. = \delta\,(cosq\,\overline{T}. \to Z)$ est une résolution de Z (comme dans la démonstration de 3.7). Notons F le $\mathbb{C}$-schéma réduit d'espace sous-jacent $Z - X$, $F. = \overline{T}. \times_Z F$ et définissons $R.$ comme le sous-schéma simplicial fermé de $S.$ réunion de $\overline{T}.$ avec $S. \times_Z F = \delta\,(cosq\, F. \to F)$.

Le $\mathbb{C}$-schéma simplicial $R.$ a ses composantes projectives (R_n est fermé dans S_n et $S_n = (\overline{T}_n/Z)^{n+1}$ est projectif car $\overline{T}_n$ l'est) et il est muni d'une augmentation $\rho : R_{\cdot} \to Z$ qui fait de lui une résolution de Z : cette propriété se vérifie au-dessus de chaque point de Z et :

$$R_{\cdot} \times_Z X = T_{\cdot} \text{ est une résolution de } X,$$

$$R_{\cdot} \times_Z F = \delta\,(cosq\,F_{\cdot} \to F) \text{ est une résolution de } F.$$

On construit de même $\overline{T}'_{\cdot}$ (et $\overline{T}'_{\cdot} \to \overline{T}_{\cdot}$) à l'aide de 3.13, puis $S'_{\cdot}$, $R'_{\cdot}$ et $R'_{\cdot} \to R_{\cdot}$.

3.16. *Fin de la démonstration.* — On a alors par 3.7 un isomorphisme $R\rho_* \underline{\underline{\Omega}}^p_{R_\cdot} \to R\rho'_* \underline{\underline{\Omega}}^p_{R'_\cdot}$ que l'on restreint au-dessus de X en remarquant par 3.10 que $\underline{\underline{\Omega}}^p_{R_\cdot \mid T_\cdot} = \Omega^p_{T_\cdot}$ car $T_\cdot$ est lisse. On a donc un isomorphisme $R(\varepsilon\tau)_* \Omega^p_{T_\cdot} \to R(\varepsilon'\tau')_* \Omega^p_{T'_\cdot}$.

On voit en appliquant sq_N que la flèche :

$$R(\varepsilon\tau)_* \Omega^p_{sq_N T_\cdot} \to R(\varepsilon'\tau')_* \Omega^p_{sq_N T'_\cdot}$$

est un quasi isomorphisme en degré $<N$ et donc, compte tenu des égalités $sq_N T_\cdot = sq_N X_\cdot$ et $sq_N T'_\cdot = sq_N X'_\cdot$, on trouve que la flèche $R\varepsilon_* \Omega^p_{X_\cdot} \to R\varepsilon'_* \Omega^p_{X'_\cdot}$ est un quasi-isomorphisme en degré $<N-1$.

Ceci étant vrai pour tout N, le théorème 3.11 est démontré.

3.17. COROLLAIRE. — *Soient X, $\varepsilon : X_\cdot \to X$ et $\varepsilon' : X'_\cdot \to X$ comme dans* 3.11; *filtrons $\Omega^{\cdot}_{X_\cdot}$ et $\Omega^{\cdot}_{X'_\cdot}$ par la filtration bète F, alors la flèche canonique :*

(3.17.1) $$R\varepsilon_*(\Omega^{\cdot}_{X_\cdot}, F) \to R\varepsilon'_*(\Omega^{\cdot}_{X'_\cdot}, F)$$

est un isomorphisme de $D_{\mathrm{diff}}(X)$.

Démonstration. — Même argument que 2.3.

3.18. NOTATION. — Soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini. On vérifie encore qu'on a un système transitif d'isomorphismes entre les $R\varepsilon_*(\Omega^{\cdot}_{X_\cdot}, F)$, où $\varepsilon : X_\cdot \to X$ parcourt les résolutions lisses de X; on notera $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X = \varinjlim R\varepsilon_*(\Omega^{\cdot}_{X_\cdot})$ la limite inductive de ce système et $\underline{\underline{\Omega}}^p_X = \mathrm{Gr}^p_F \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$.

Procédant *mutatis mutandis* pour X^{an}, on définit de même $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{X^{\mathrm{an}}}$ et $\underline{\underline{\Omega}}^p_{X^{\mathrm{an}}}$, et on a $(\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X)^{\mathrm{an}} = \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{X^{\mathrm{an}}}$ et $(\underline{\underline{\Omega}}^p_X)^{\mathrm{an}} = \underline{\underline{\Omega}}^p_{X^{\mathrm{an}}}$, grâce à la proposition suivante :

3.19. PROPOSITION. — *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini et $\varepsilon : X_\cdot \to X$ une résolution lisse à composantes quasi-projectives. Filtrons $\Omega^{\cdot}_{X^{\mathrm{an}}_\cdot}$ par la filtration bète, alors $(R\varepsilon^{\mathrm{an}}_*(\Omega^{\cdot}_{X^{\mathrm{an}}_\cdot}), F)$ ($\in \mathrm{ob}\, D_{\mathrm{diff}}(X^{\mathrm{an}})$) est canoniquement isomorphe à l'analytisé de $R\varepsilon_*(\Omega^{\cdot}_{X_\cdot})$.*

Démonstration. — Cette proposition est une variante simpliciale de 1.11.

3.20. Nous laissons au lecteur le soin d'étendre les constructions précédentes au cas d'un $\mathbb{C}$-schéma simplicial $Y.$ séparé, à composantes de type fini.

On définit ainsi $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.} = \varinjlim R\beta_*(\Omega^{\bullet}_{Z..}, F)$ où $\beta : Z.. \to Y.$ parcourt les résolutions lisses de $Y.$, et $\underline{\underline{\Omega}}^{p}_{Y.} = \mathrm{Gr}^p_F(\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.})$.

On a un isomorphisme canonique $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.} \mid Y_n \simeq \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y_n}$.

3.21. Fonctorialité de $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}$. — En paraphrasant 3.2 et 3.6, on construit pour $f : X \to S$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas séparés de type fini, $a : Y. \to X.$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas simpliciaux séparés de type fini, $\alpha : Y. \to X$ un morphisme d'un $\mathbb{C}$-schéma simplicial séparé de type fini dans un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini, des flèches :

$$\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_S \to Rf_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X, \tag{3.21.1}$$

$$\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X.} \to Ra_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.}, \tag{3.21.2}$$

$$\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X \to R\alpha_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.}. \tag{3.21.3}$$

3.22. Théorème. — *Soit $\alpha : Y. \to X$ une résolution d'un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini, alors la flèche canonique :*

$$\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X \to R\alpha_* \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y.}. \tag{3.21.3}$$

est un isomorphisme de $D_{\text{diff}}(X)$.

Démonstration. — Identique à la démonstration de 3.7.

4. Propriétés de $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}$

4.1. Soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini. On définit comme en 2.11 un morphisme de $D_{\text{diff}}(X)$, (4.1.1) : $\Omega^{\bullet}_X \to \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X$, et, en particulier, un morphisme de $D^+(X)$, Gr^0_F (4.1.1) : $\mathcal{O}_X \to \underline{\underline{\Omega}}^0_X$.

Si X est lisse (4.1.1) est un isomorphisme : on peut supposer que X est affine et prendre pour $X.$ l'espace simplicial constant de valeur X.

4.2. Variante du théorème 3.11. — Soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini, soient $\varepsilon' : X'_{.} \to X$ et $\varepsilon : X. \to X$ deux résolutions lisses (à composantes non nécessairement quasi-projectives) de X liées par une flèche $\alpha : X'_{\cdot} \to X_{\cdot}$ telle que $\varepsilon' = \varepsilon\alpha$; alors, la flèche canonique

$$(4.2.1) \qquad R\,\varepsilon_*(\Omega^{\bullet}_{X.}) \to R\,\varepsilon'_*(\Omega^{\bullet}_{X'.})$$

est un isomorphisme de $D_{\mathrm{diff}}(X)$.

Démonstration. — D'après 3.22 et 4.1, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & R\,\varepsilon_*\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X.} \arrow[dd, "\mathrm{i}"] & R\,\varepsilon_*\Omega^{\bullet}_{X.} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dd, "(4.2.1)"] \\
\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & R\,\varepsilon'_*\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X'.} & R\,\varepsilon'_*\Omega^{\bullet}_{X'.} \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

On sait déjà que toutes les flèches sauf peut-être (4.2.1) sont des isomorphismes, donc (4.2.1) est un isomorphisme, et on voit que $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X} \cong R\,\varepsilon_*\,\Omega^{\bullet}_{X.}$.

4.3. Nature locale de $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}$. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale de $\mathbb{C}$-schémas séparés de type fini. Soient $\eta : Y_{\cdot} \to Y$ une résolution lisse de Y, $\varepsilon : X_{\cdot} = Y_{\cdot} \times_Y X \to X$ la résolution lisse de X déduite de η par changement de base, et $f_{\cdot} : X_{\cdot} \to Y_{\cdot}$ la flèche déduite de f.

D'après 1.11, on a un isomorphisme $f^*\,R\,\eta_*\,\Omega^{\bullet}_{Y.} \xrightarrow{\sim} R\,\varepsilon_* f_{\cdot}^*\,\Omega^{\bullet}_{Y.}$, et, $f_{\cdot}$ étant étale, $f_{\cdot}^*\,\Omega^{\bullet}_{Y.} \to \Omega^{\bullet}_{X.}$ est un isomorphisme. En composant ces flèches, on trouve un isomorphisme $f^*\,\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y} \to \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X}$.

La définition de $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}$ est donc locale par rapport à la topologie étale.

4.4. Proposition. — *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini. Pour tout p, $\underline{\underline{\Omega}}^{p}_{X}$ est un objet de $D^{+}_{\mathrm{coh}}(X)$.*

Démonstration. — Si $\varepsilon : X_{\cdot} \to X$ est une résolution lisse de X, on calcule $R\,\varepsilon_*(\Omega^{p}_{X.})$ en prenant le complexe simple associé au « bicomplexe » $(R\,\varepsilon_{n*}(\Omega^{p}_{X_n}))_{n \geqslant 0}$ et les $R^j\,\varepsilon_{n*}(\Omega^{p}_{X_n})$ sont cohérents, car ε_n est propre, d'où le résultat.

4.5. Théorème. — *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini, alors :*

(i) *$\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet\,an}_{X}$ est une résolution du faisceau $\mathbb{C}_{X^{an}}$, plus précisément $\mathscr{H}^i(\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet\,an}_{X}) = 0$ si $i > 0$ et l'application composée $\mathbb{C}_{X^{an}} \to \mathcal{O}_{X^{an}} \to \underline{\underline{\Omega}}^{0\,an}_{X}$ identifie $\mathbb{C}_{X^{an}}$ à $\mathscr{H}^0(\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet\,an}_{X})$;*

(ii) *l'application naturelle $H^{\bullet}(X, \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{X}) \to H^{\bullet}(X^{an}, \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet\,an}_{X}) \underset{(\mathrm{i})}{\xleftarrow{\sim}} H^{\bullet}(X^{an}, \mathbb{C})$ est un isomorphisme;*

(iii) *si de plus X est propre, la suite spectrale de la filtration F :*

$$E_1^{pq} = H^q(X, \mathrm{Gr}_F^p \underline{\underline{\Omega}}_X^\bullet) = H^q(X, \underline{\underline{\Omega}}_X^p) \quad \Rightarrow \quad H^*(X^{an}, \mathbb{C})$$

dégénère en E_1 et aboutit à la filtration de Hodge de la structure de Hodge mixte.

Démonstration. — Ce théorème est une reformulation de résultats de [D 3], i.e. 9.3.1 pour (i) et (ii) et 8.2 pour (iii).

4.5.1. *Remarque.* — (iii) est faux si X n'est pas propre. *Voir* cependant App. 6.5.

4.6. Théorème. — *Soit $f: X \to S$ un morphisme propre et plat de schémas de type fini sur un corps k de caractéristique nulle. Si pour tout point géométrique s de S la flèche $\mathcal{O}_{X_s} \to \underline{\underline{\Omega}}_{X_s}^0$ est un isomorphisme (on note X_s la fibre de f au-dessus de s), alors pour tout i, $R^i f_* \mathcal{O}_X$ est localement libre de type fini et de formation compatible au changement de base.*

Démonstration. — On se ramène à $k = \mathbb{C}$ par le principe de Lefchetz. La dégénérescence en E_1 de la suite spectrale $H^q(X_s, \underline{\underline{\Omega}}_{X_s}^p) \Rightarrow H^{p+q}(X_s^{an}, \mathbb{C})$ nous donne que la flèche $H^*(X_s^{an}, \mathbb{C}) \to H^*(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = H^*(X_s, \underline{\underline{\Omega}}_{X_s}^0)$ est surjective. D'après la démonstration du théorème 1.2 de [3] ou le lemme 1 de [3 *bis*], ceci démontre 4.6.

4.7. *Exemples.* — Si X est lisse, la flèche $\mathcal{O}_X \to \underline{\underline{\Omega}}_X^0$ est un isomorphisme.

Si X a des singularités à croisements normaux (i.e. localement pour la topologie étale, X est isomorphe à une réunion d'hyperplans de coordonnées dans un $\mathbb{C}^n$), le complexe $\underline{\underline{\Omega}}_X^\bullet$ est isomorphe au complexe $\tilde{\Omega}_X^\bullet$, défini dans [3] de la façon suivante : soient X_0 le normalisé de X et $X_1 = X_0 \times_X X_0$; alors :

$$\tilde{\Omega}_X^p = \ker(\varepsilon_{0*} \Omega_{X_0}^p \rightrightarrows \varepsilon_{1*} \Omega_{X_1}^p),$$

et en particulier $\tilde{\Omega}_X^0 = \mathcal{O}_X$; *voir* (*loc. cit.*) pour la démonstration.

Nous verrons d'autres exemples en 4.13 et 5.3.

4.8. Proposition. — *Soit $g : X' \to X$ un homéomorphisme de C-schémas séparés de type fini, alors la flèche $\underline{\underline{\Omega}}_X^\bullet \to g_* \underline{\underline{\Omega}}_{X'}^\bullet$ construite en 3.21 est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que si $\varepsilon' : X_\bullet \to X'$ est une résolution lisse de X', alors $g\varepsilon' : X_\bullet \to X$ est une résolution lisse de X.

4.9. PROPOSITION (calcul de $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ quand X est une courbe). — *Soient X une courbe sur $\mathbb{C}$, $\pi : \tilde{X} \to X$ la normalisée de X, X' la courbe homéomorphe à X obtenue en contractant en un point chacun des ensembles finis $\pi^{-1}(s)$ pour $s \in X$ et $g : X' \to X$ l'homéomorphisme de X' sur X, alors $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ est canoniquement isomorphe au complexe $0 \to g_* \mathcal{O}_{X'} \to \pi_* \Omega^1_{\tilde{X}} \to 0$, muni de la filtration bête* (et, en particulier, si X est propre, $\mathrm{Gr}\, H^1(X^{an}, \mathbb{C}) = H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) \oplus H^0(\tilde{X}, \Omega^1_{\tilde{X}})$).

Démonstration. — Calculons $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ dans le cas particulier où les singularités de X sont analytiquement isomorphes à une réunion d'axes de coordonnées dans $\mathbb{C}^m$ (c'est-à-dire dans le cas $X' = X$).

Nous trouverons $\underline{\underline{\Omega}}^0_X \simeq \mathcal{O}_X$ et $\underline{\underline{\Omega}}^1_X \simeq \pi_* \Omega^1_{\tilde{X}}$; compte tenu de 4.8, ceci démontrera la proposition.

Prenons pour X_0 la normalisée de X. Le produit itéré $X_n = X_0 \times_X \ldots \times_X X_0$ ($(n+1)$ termes) est la somme de X_0 et d'un nombre fini de copies de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$; $\pi_. : (X_n)_{n \geq 0} \to X$ est donc un hyperrecouvrement admissible de X.

Plus précisément, X_n se décrit de la manière suivante : si x est un point (fermé) de multiplicité m dans X, $\pi_n^{-1}(x)$ est formé de m^{n+1} points dans X_n, notés $x_{i_1, \ldots, i_{n+1}}$ (chaque indice varie de 1 à m), dont m sont les points de X_0 qui correspondent aux m branches de X en x (ces points sont notés $x_{1, \ldots, 1}, \ldots, x_{m, \ldots, m}$) et les $(m^{n+1} - m)$ autres points sont des points isolés. Les flèches de X_n dans X_{n-1} se décrivent facilement : la j-ième flèche envoie $x_{i_1, \ldots, i_j, \ldots, i_{n-1}}$ sur $x_{i_1, \ldots, \hat{i_j}, \ldots, i_{n-1}}$ et de même pour les flèches de X_{n-1} dans X_n, la j-ième flèche envoie $x_{i_1, \ldots, i_j, \ldots, i_n}$ sur $x_{i_1, \ldots, i_j, i_j, \ldots, i_n}$.

On a tout de suite $\underline{\underline{\Omega}}^1_X$: c'est le complexe

$$(\pi_* \Omega^1_{\tilde{X}} \xrightarrow{0} \pi_* \Omega^1_{\tilde{X}} \xrightarrow{id} \pi_* \Omega^1_{\tilde{X}} \xrightarrow{0} \ldots)$$

d'objets

$$\pi_* \Omega^1_{\tilde{X}} = \pi_{0*} \Omega^1_{X_0} = \ldots = \pi_{n*} \Omega^1_{X_n}$$

(les π_n sont finis, donc $R\,\pi_{n*} = \pi_{n*}$) et de flèches alternativement 0 et l'identité, $\underline{\underline{\Omega}}^1_X$ est donc isomorphe à $\pi_* \Omega^1_{\tilde{X}}$.

Montrer que $\underline{\underline{\Omega}}^0_X$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$ équivaut à montrer que la suite

$$0 \to \mathcal{O}^{an}_X \to (\pi_{0*} \mathcal{O}_{X_0})^{an} \to (\pi_{1*} \mathcal{O}_{X_1})^{an} \to \ldots$$

est exacte.

Le problème étant local, on se place en un point x de multiplicité m; considérons le diagramme commutatif suivant, où les flèches verticales sont les évaluations en x :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \rightarrow & (\mathbb{C}_{X^{an}})_x & \rightarrow & (\pi_{0*}\mathbb{C}_{X_0^{an}})_x & \rightarrow & (\pi_{1*}\mathbb{C}_{X_1^{an}})_x & \rightarrow\ldots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 & \rightarrow & (\mathcal{O}_{X^{an}})_x & \rightarrow & (\pi_{0*}\mathcal{O}_{X_0^{an}})_x & \rightarrow & (\pi_{1*}\mathcal{O}_{X_1^{an}})_x & \rightarrow\ldots
\end{array}$$

La première ligne est une suite exacte par descente cohomologique, les flèches verticales sont surjectives, la proposition sera donc montrée, grâce au lemme du serpent, dès que nous aurons montré l'exactitude de la ligne des noyaux :

$$0 \rightarrow N_x \rightarrow N_{0,x} \rightarrow N_{1,x} \rightarrow \ldots$$

où

$$N_x = \ker(\mathcal{O}_{X^{an},x} \rightarrow \mathbb{C}_{X^{an},x})$$

et

$$N_{n,x} = \ker((\pi_{n*}\mathcal{O}_{X_n^{an}})_x \rightarrow (\pi_{n*}\mathbb{C}_{X_n^{an}})_x).$$

On a

$$(\pi_{n*}\mathcal{O}_{X_n^{an}})_x = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\tilde{X}^{an},x_i} \oplus \mathbb{C}^{m^{n+1}-m}$$
$$(\pi_{n*}\mathbb{C}_{X_n^{an}})_x = \mathbb{C}^{m^{n+1}}$$

et

$$N_{n,x} = \bigoplus_{i=1}^m \ker(\mathcal{O}_{\tilde{X}^{an},x_i} \rightarrow \mathbb{C})$$

en regardant la description de X_n. En particulier, $N_{n,x}$ est donc indépendant de n. La flèche de $N_{2p,x}$ dans $N_{2p+1,x}$ est 0 (somme alternée de $2p+2$ flèches identiques), celle de $N_{2p+1,x}$ dans $N_{2p+2,x}$ est l'identité.

D'autre part,

$$N_x = \ker(\mathcal{O}_{X^{an},x} \rightarrow \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(\mathcal{O}_{\tilde{X}^{an},x_i} \rightarrow \mathbb{C}) = N_{0,x}$$

(la donnée d'un germe en x de fonction sur X, nulle en x, équivaut à la donnée d'un germe en x_i de fonction nulle en x_i, pour chaque branche de X en x). La suite que l'on considère n'est donc autre que la suite exacte

$$0 \rightarrow N_x \xrightarrow{\text{id}} N_x \xrightarrow{0} N_x \xrightarrow{\text{id}} N_x \rightarrow \ldots$$

d'où le résultat.

4.10. PROPOSITION. — *Soient A un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini et $(A_i)_{i=1,n}$ un recouvrement fermé fini de A; notons $A_{i,j,\ldots,l}$ le schéma intersection de A_i, A_j, …, A_l et $\alpha_{i,j,\ldots,l}$ les flèches $A_{i,j,\ldots,l} \to A$.*

Alors il existe un complexe double $D^{\cdot\cdot}$ d'objets de $C_{\text{diff}}(A)$ tel que $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_A \simeq \underline{\underline{s}}(D^{\cdot\cdot})$ avec :

$$D^{0,\cdot} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} (\alpha_i)_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_i}, \qquad D^{1,\cdot} \simeq \bigoplus_{1 \leq i<j \leq n} (\alpha_{i,j})_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_{i,j}},$$
$$D^{2,\cdot} \simeq \bigoplus_{1 \leq i<j<k \leq n} (\alpha_{i,j,k})_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_{i,j,k}}, \qquad \ldots, \qquad D^{n-1,\cdot} \simeq (\alpha_{1,\ldots,n})_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_{1,\ldots,n}};$$
$$D^{p,\cdot} = 0 \quad si \quad p<0 \quad ou \quad p \geq n;$$

les opérateurs $D^{p,\cdot} \to D^{p+1,\cdot}$ sont linéaires, de valeur $\sum_i (-1)^i d_i^*$, où les d_i^* correspondent aux opérateurs de face.

Par abus de langage, on peut dire qu'on a un isomorphisme :

$$\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_A \to \underline{\underline{s}}\left(\bigoplus_{i=1}^{n} (\alpha_i)_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_i} \to \bigoplus_{1 \leq i<j \leq n} (\alpha_{i,j})_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_{i,j}} \to \ldots \to (\alpha_{1,\ldots,n})_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_{1,\ldots,n}}\right).$$

Démonstration. — Nous avons un hyperrecouvrement propre de A :

$$\pi : \quad \operatorname{cosq}\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i \to A\right) \to A,$$

où

$$\left(\operatorname{cosq}\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i \to A\right)\right)_m = \coprod_{(i_0,\ldots,i_m) \in [1,n]^{m+1}} A_{i_0,\ldots,i_m}.$$

Le théorème 3.22 nous donne alors pour $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_A$, en utilisant 1.7 et le fait que les $\alpha_{i,j,\ldots,l}$ sont finis (et donc $(R\alpha_{i,j,\ldots,l})_* = (\alpha_{i,j,\ldots,l})_*$) :

$$\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_A = \underline{\underline{s}}\Big(\bigoplus_{i=1}^{n} (\alpha_i)_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_i} \to \bigoplus_{(i_0,i_1) \in [1,n]^2} (\alpha_{i_0,i_1})_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_{i_0,i_1}} \to \ldots$$
$$\to \bigoplus_{(i_0,\ldots,i_m) \in [1,n]^{m+1}} (\alpha_{i_0,\ldots,i_m})_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{A_{i_0,\ldots,i_m}} \to \ldots\Big).$$

Les flèches du complexe qui figure entre les parenthèses sont les sommes alternées des opérateurs de face; le complexe simplicial dont on prend le $\underline{\underline{s}}$ est homotopiquement équivalent au complexe alterné correspondant, obtenu en remplaçant dans la dernière égalité pour chaque m :

$$\bigoplus_{(i_0,\ldots,i_m) \in [1,n]^{m+1}} \quad \text{par} \quad \bigoplus_{1 \leq i_0 < \ldots < i_m \leq n},$$

d'où la proposition.

4.11. PROPOSITION. — *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ un morphisme de $\mathbb{C}$-schémas séparés de type fini, qui soit un isomorphisme en dehors d'un sous-schéma fermé Y de X, d'image réciproque $\tilde{Y}$. Notons $\pi' : \tilde{Y} \to Y$. On a alors un triangle distingué dans $D_{\text{diff}}(X)$:*

$$0 \to \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X \to \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_Y \oplus R\pi_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{\tilde{X}} \to R\pi'_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{\tilde{Y}} \to 0.$$

Démonstration. — *Voir* celle de 3.9.

4.12. PROPOSITION. — *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini de dimension N, la filtration F de $\underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet}$ vérifie :*

$$F^N \underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet} \neq 0 \text{ et pour tout } i \geqq N+1,\ F^i \underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet} = 0.$$

Démonstration. — D'après 4.9, le résultat est vrai pour $N=1$.

Supposons le résultat démontré pour les schémas de dimension $\leqslant (N-1)$ sur $\mathbb{C}$; X étant donné, de dimension N, on peut supposer X réduit (d'après 4.8); on peut trouver $\tilde{X}$, birationnellement équivalent à X et lisse; on note encore Y le sous-schéma complémentaire de l'ouvert de lissité de X; nous sommes dans la situation de 4.11 et Y et $\tilde{Y}$ sont de dimension au plus $N-1$. On a donc en utilisant le triangle distingué de 4.11 et en appliquant l'hypothèse de récurrence :

— pour $j \geqslant N$:

$$F^j \underline{\underline{\Omega}}_Y^{\bullet} = 0, \qquad F^j \underline{\underline{\Omega}}_{\tilde{Y}}^{\bullet} = 0,$$

— pour $i \geqslant N+1$:

$$F^i \underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet} \cong F^i \Omega_{\tilde{X}}^{\bullet} = 0 \qquad \text{et} \qquad F^N \underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet} \cong R\pi_* F^N \Omega_{\tilde{X}}^{\bullet} = R\pi_* \Omega_{\tilde{X}}^N.$$

4.13. PROPOSITION. — (cf. [3], prop. 5.6). — *Soit X le cône sur une variété projective lisse connexe E telle que : $\forall i > 0, \forall n > 0, H^i(E, \mathcal{O}_E(n)) = 0$, alors la flèche $\mathcal{O}_X \to \underline{\underline{\Omega}}_X^0$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit $\tilde{X}$ l'éclaté du sommet x de X, notons $\pi : \tilde{X} \to X$ et $\pi' : E \to x$, $\tilde{X}$ est le fibré vectoriel $\mathbb{V}(\mathcal{O}_E(1))$ et $\pi'^{-1}(x) = E$ est la section nulle de ce fibré ([E.G.A. II], 8.7.7 et [E.G.A. III], 2.3.4.1).

Comme $\tilde{X}$ est lisse, on a d'après 4.11 un triangle distingué :

$$0 \to \underline{\underline{\Omega}}_X^0 \to R\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \oplus \mathbb{C}_x \to R\pi'_* \mathcal{O}_E \to 0,$$

dont la suite exacte de cohomologie s'écrit :

$$0 \to \mathcal{H}^0 \underline{\underline{\Omega}}_X^0 \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \oplus \mathbb{C}_x \to \mathbb{C}_x \xrightarrow{0} \mathcal{H}^1 \underline{\underline{\Omega}}_X^0 \to R^1 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to H^1(E, \mathcal{O}_E)_x \to \dots$$

et pour $i > 0$:

$$\dots \to R^i \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to H^i(E, \mathcal{O}_E)_x \to \mathcal{H}^{i+1} \underline{\underline{\Omega}}_X^0$$
$$\to R^{i+1} \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to H^{i+1}(E, \mathcal{O}_E)_x \to \dots$$

On a $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_X$ et donc $\mathcal{H}^0\,\underline{\underline{\Omega}}_X^0 \simeq \mathcal{O}_X$. Il reste donc à voir que pour $i>0$, $R^i\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \cong R^i\pi'_*\mathcal{O}_E = H^i(E, \mathcal{O}_E)$.

Soit σ la projection $\tilde{X} \to E$, nous avons

$$R\,\sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \bigoplus\nolimits_{n\geqslant 0}\mathcal{O}_E(n).$$

D'autre part $R\,\Gamma(X, R\,\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = R\,\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = R\,\Gamma(E, \sigma_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})$, ce qui donne, $R^i\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ étant concentré au-dessus du point x :

$$(R^i\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_x = H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \bigoplus\nolimits_{n\geqslant 0} H^i(E, \mathcal{O}_E(n))$$

Nous avons donc $\mathcal{H}^0\,\underline{\underline{\Omega}}_X^0 \simeq \mathcal{O}_X$ et $\mathcal{H}^i\,\underline{\underline{\Omega}}_X^0 = 0$.

C.Q.F.D.

Remarques. — (i) l'hypothèse sur E est vérifiée si E est une intersection complète lisse dans $\mathbb{P}^r$, définie par des polynômes $P_1, \ldots, P_{r-p}$ homogènes de degré $m_1, \ldots, m_{r-p}$, telle que :

$$\textstyle\sum_{i=1}^{r-p} m_i < r+2 \quad \text{(cf. prop. 5, § 78 de [F.A.C.]);}$$

(ii) soit X un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini admettant un unique point singulier x. Supposons que l'éclaté $\tilde{X}$ de x est lisse, que le diviseur exceptionnel E est lisse et vérifie :

$$\forall\, i>0, \quad \forall\, n>0, \qquad H^i(E, \mathcal{O}_E(n)) = 0,$$

on peut se poser la question de savoir si on a encore :

$$\mathcal{O}_X \simeq \underline{\underline{\Omega}}_X^0.$$

5. Calcul du $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}$ d'une V-variété

5.1. Définition. — *Un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini X est une V-variété si, localement pour la topologie étale, X est isomorphe au quotient d'un $\mathbb{C}$-schéma lisse Y par un groupe fini d'automorphismes de Y.*

5.2. Soit X une V-variété, Steenbrink définit dans [5] un complexe de faisceaux sur X, $\tilde{\Omega}_X^{\bullet}$ en posant, si Σ est le lieu singulier de X et j l'inclusion $X-\Sigma \to X$, $\tilde{\Omega}_X^{\bullet} = j_*\Omega_{X-\Sigma}^{\bullet}$. On a les propriétés suivantes :

— $\tilde{\Omega}_X^p$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules pour tout entier p, non nul si et seulement si $0 \leqslant p \leqslant \dim X$;

— $(\tilde{\Omega}_X^{\bullet})^{an}$ est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}_X$;

— la suite spectrale d'hypercohomologie :

$$E_1^{pq} = H^q(X, \tilde{\Omega}_X^p) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(X^{an}, \mathbb{C})$$

dégénère en E_1 et aboutit à la filtration de Hodge.

Nous allons retrouver ces résultats comme conséquence du théorème suivant :

5.3. Théorème. — *Soit X une V-variété, soient Σ, j et $\tilde{\Omega}_X^{\bullet}$ comme en 5.2, alors la flèche :*

(5.3.1) $$\underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet} \to \tilde{\Omega}_X^{\bullet}$$

composée de la flèche $\underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet} \xrightarrow{(3.21.1)} Rj_* \Omega_{X-\Sigma}^{\bullet}$ et de l'isomorphisme

$$Rj_* \Omega_{X-\Sigma}^{\bullet} \xleftarrow{\sim} j_* \Omega_{X-\Sigma}^{\bullet}$$

est un isomorphisme de $D_{\text{diff}}(X)$. On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet} \arrow[r] \arrow[dr, "\simeq", "(5.3.1)"'] & Rj_* \Omega_{X-\Sigma}^{\bullet} \\ & j_* \Omega_{X-\Sigma}^{\bullet} = \tilde{\Omega}_X^{\bullet} \arrow[u, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

En particulier, la flèche $\mathcal{O}_X \to \underline{\underline{\Omega}}_X^0$ est un isomorphisme.

5.4. Nous aurons besoin pour la démonstration d'une variante de la construction de $\underline{\underline{\Omega}}_X^{\bullet}$ pour les schémas à groupe d'opérateurs.

Dans la suite, nous désignons par G un groupe fini fixé. Un *G-schéma* sur $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-schéma sur lequel G opère par automorphismes. Nous considérons la catégorie $C_{\text{diff}}(X, G)$ suivante : les objets de $C_{\text{diff}}(X, G)$ sont des complexes filtrés $(K^{\bullet}, d, F)$:

— $K^{\bullet}$ est un complexe de G faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules borné inférieurement;

— F est une filtration décroissante birégulière de $K^{\bullet}$ et commute avec l'action de G;

— d est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant 1$ qui respecte F et commute avec l'action de G;

— $\mathrm{Gr}_F(d)$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire.

Les morphismes de $C_{\text{diff}}(X, G)$ sont définis comme ceux de $C_{\text{diff}}(X)$ et vérifient en plus des conditions de compatibilité avec G.

On définit comme en 1. une notion de *quasi-isomorphisme filtré* dans $C_{\text{diff}}(X, G)$ et on note $D_{\text{diff}}(X, G)$ la catégorie déduite de $C_{\text{diff}}(X, G)$ en inversant les quasi-isomorphismes filtrés.

On définit de même $D^+(X, G)$ et, pour tout p, on a un morphisme Gr_F^p : $D_{\text{diff}}(X, G) \to D^+(X, G)$.

5.5. Soient X et Y des G-schémas sur $\mathbb{C}$. Soit $f : Y \to X$ un morphisme *G-équivariant* de $\mathbb{C}$-schémas. On définit comme en 1.2 et 1.3 une image directe $R f_*$ de $D_{\text{diff}}(Y, G)$ dans $D_{\text{diff}}(X, G)$.

Supposons maintenant que G opère trivialement sur X; si $K^\cdot$ est un objet de $C_{\text{diff}}(X, G)$, le passage aux invariants sous G donne un objet $\underline{\Gamma}^G K^\cdot$ de $C_{\text{diff}}(X)$. Nous avons donc un morphisme, exact, car G est fini, $\underline{\Gamma}^G : C_{\text{diff}}(X, G) \to C_{\text{diff}}(X)$. Nous noterons $R\underline{\Gamma}^G$ le morphisme de $D_{\text{diff}}(X, G)$ dans $D_{\text{diff}}(X)$ qui s'en déduit.

5.6. Un *G-schéma simplicial sur* $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-schéma simplicial $X_\cdot$ muni d'une action de G telle que, pour tout n, les opérations de G sur X_n soient des automorphismes et que les flèches de X soient G-équivariantes.

Si $X_\cdot$ et $Y_\cdot$ sont deux G-schémas simpliciaux sur $\mathbb{C}$ et S un G-schéma sur $\mathbb{C}$, on définit de façon évidente ce qu'on entend par *morphisme G-équivariant* $u : Y_\cdot \to X_\cdot$ et *augmentation G-équivariante* $a : Y_\cdot \to S$.

On peut alors reprendre *mutatis mutandis* 1.6 et 1.7 pour définir :

$$R u_* : \quad D_{\text{diff}}(Y_\cdot, G) \to D_{\text{diff}}(X_\cdot, G),$$
$$R a_* : \quad D_{\text{diff}}(Y_\cdot, G) \to D_{\text{diff}}(S, G).$$

5.7. Définition. — *Soit X un G-schéma sur $\mathbb{C}$, une* G-résolution lisse *de X est un G-schéma simplicial muni d'une augmentation G-équivariante vers X, $\varepsilon : X_\cdot \to X$ telle que, par oubli de l'action de G, ε soit une résolution lisse de X.*

5.8. Proposition. — *Soit X un G-schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, il existe des G-résolutions lisses de X et, de plus, deux G-résolutions lisses sont coiffées par une même troisième.*

Démonstration. — Observons d'abord que si Y est un G-schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, il existe un G-morphisme $\pi : Z \to Y$ propre, surjectif de source lisse; en effet, soit $f : \tilde{Y} \to Y$ un morphisme propre et surjectif de source lisse, munissons $G \times \tilde{Y}$ de la structure de G-schéma définie par $h(g, y) = (hg, y)$; le morphisme $\bar{f} : G \times \tilde{Y} \to Y$ défini par $\bar{f}(g, y) = gf(y)$ répond à la question.

Paraphrasant [D 3] et 2.1, on en déduit la proposition.

5.9. Proposition. — *Soit X un G-schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$, soient $\varepsilon' : X'_{\cdot} \to X$ et $\varepsilon : X_{\cdot} \to X$ deux G-résolutions lisses de X liées par une flèche G-équivariante $\alpha : X'_{\cdot} \to X_{\cdot}$ telle que $\varepsilon' = \varepsilon\alpha$, alors la flèche canonique $R\varepsilon_*(\Omega^{\cdot}_{X_{\cdot}}) \to R\varepsilon'_*(\Omega^{\cdot}_{X'_{\cdot}})$ est un isomorphisme de $D_{\text{diff}}(X, G)$.*

Démonstration. — Immédiat d'après 4.2.

5.10. Notation. — Avec les notations de 5.9, nous noterons encore :

$$\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X = \varinjlim R\varepsilon_*(\Omega^{\cdot}_{X_{\cdot}}) \in \text{ob}\, D_{\text{diff}}(X, G),$$

limite inductive suivant les G-résolutions lisses de X (on a encore un système transitif d'isomorphismes comme plus haut), et $\underline{\underline{\Omega}}^p_X = \text{Gr}^p_F \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X \in \text{ob}\, D^+(X, G)$.

5.11. — Soit $f : Y \to X$ un morphisme G-équivariant de G-schémas séparés de type fini sur $\mathbb{C}$. On définit comme en 3.2 un morphisme de $D_{\text{diff}}(X, G)$:

$$(5.11.1) \qquad \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X \to Rf_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_Y.$$

Supposons de plus que l'action de G sur X est triviale. En prenant pour G-résolution lisse de X une résolution lisse de X munie d'une action triviale de G, on voit que $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X$ est invariant sous l'action de G; appliquant $R\underline{\Gamma}^G$ au morphisme 5.11.1, on trouve donc un morphisme de $D_{\text{diff}}(X)$:

$$(5.11.2) \qquad \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X \to R\underline{\Gamma}^G Rf_* \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_Y.$$

5.12. Théorème. — *Soit X un schéma séparé de type fini sur $\mathbb{C}$. Supposons que X est le quotient par G d'un G-schéma Y lisse sur $\mathbb{C}$, alors la flèche* 5.11.2 *est un isomorphisme.*

5.13. Lemme. — *Avec les notations de 5.12, le schéma simplicial* Ner (G, Y) ([2], VI, 2.5) *sur lequel on fait agir G par $g\,(g_1, \ldots, g_n, y) = (gg_1g^{-1}, \ldots, gg_ng^{-1}, gy)$, muni de l'augmentation π :* Ner $(G, Y) \to X$ *définie par $\pi_0(y) = f(y)$, est une G-résolution lisse de X.*

Démonstration. — Les diverses compatibilités à l'action de G sont immédiates; il reste à vérifier que $\text{Ner}(G, Y)$ est une résolution de X; pour cela, on peut supposer que $X = \{f(y)\}$, on note $H = \text{Stab}(y)$ et on doit montrer que :

$$H^*(\text{Ner}(G, G/H), \mathbb{Q}) \simeq H^*(\{f(y)\}, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}.$$

La projection Ner $(G, G/H) \to$ Ner(G) donne naissance à la suite spectrale :

$$E_2^{pq} = H^p(\operatorname{Ner} G, H^q(G/H, \mathbb{Q})) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(\operatorname{Ner}(G, G/H), \mathbb{Q}),$$

mais, $H^0(G/H, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ et, si $q>0$, $H^q(G/H, \mathbb{Q})=0$; la suite spectrale se réduit donc à :

$$H^p(\operatorname{Ner} G, \mathbb{Q}) = H^p(\operatorname{Ner}(G, G/H), \mathbb{Q}),$$

et comme le groupe G est fini :

$$\left.\begin{array}{r} H^0(\operatorname{Ner} G, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}, \\ p>0, \quad H^p(\operatorname{Ner} G, \mathbb{Q}) = 0. \end{array}\right\} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

5.14. *Démonstration du théorème* 5.12. — Utilisons la résolution π : Ner $(G, Y) \to X$ pour calculer $\underline{\underline{\Omega}}_X^\bullet = R\,\pi_* \,\Omega^\bullet_{\operatorname{Ner}(G,\, Y)} \in \operatorname{ob} D_{\text{diff}}(X)$. On veut montrer que, pour tout i, Gr_F^i (5.11.2) est un isomorphisme :

$$\operatorname{Gr}_F^i(5.11.2) \qquad \underline{\underline{\Omega}}_X^i \to R\,\underline{\Gamma}^G R f_* \Omega_Y^i.$$

Le premier terme est l'aboutissement de la suite spectrale de la projection Ner $(G, Y) \to$ Ner G :

$$E_2^{pq} = \underline{H}^p(\operatorname{Ner} G, R^q f_*(\Omega_Y^i)) \quad \Rightarrow \quad R^{p+q}\pi_* \Omega^i_{\operatorname{Ner}(G,\, Y)},$$

cette suite spectrale dégénère en E_2 car f est fini et $R^0 f_*(\Omega_Y^i)$ est sans torsion, il vient donc :

$$\underline{\underline{\Omega}}_X^i = \underline{H}^0(\operatorname{Ner} G, R^0 f_*(\Omega_Y^i)).$$

De même $R\,\underline{\Gamma}^G R f_* \Omega_Y^i$ est l'aboutissement de la suite spectrale :

$$E_2^{pq} = R^p\underline{\Gamma}^G(X, R^q f_* \Omega_Y^i) \quad \Rightarrow \quad R^{p+q}(\underline{\Gamma}^G f_*)(\Omega_Y^i),$$

cette suite spectrale dégénère elle aussi et il vient :

$$R\,\underline{\Gamma}^G R f_*(\Omega_Y^i) = R^0\,\underline{\Gamma}^G(X, R^0 f_* \Omega_Y^i),$$

d'où l'isomorphisme demandé.

5.15. *Démonstration du théorème* 5.3. — La question est locale. Supposons donc que $X = Y/G$ et reprenons les notations de 5.12. On a alors, d'après [5], 1.8, $\tilde{\Omega}_X^\bullet = [f_* \underline{\underline{\Omega}}_Y^\bullet]^G$, et d'après 5.12 $\underline{\underline{\Omega}}_X^\bullet \simeq R\,\underline{\Gamma}^G\ R f_* \underline{\underline{\Omega}}_Y^\bullet$; la démonstration est donc immédiate, car $\underline{\Gamma}^G$ et f_* sont exacts.

6. Appendice : faisceaux de différentielles à pôles logarithmiques

6.1. On peut bâtir une théorie analogue « avec des pôles logarithmiques » (*cf.* [D 3], [5]) : soient Y un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini et $\overline{Y}$ un $\mathbb{C}$-schéma propre dont Y est un ouvert dense. Nous allons construire un complexe de faisceaux sur $\overline{Y}$, noté $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\overline{Y}}\langle \overline{Y}-Y\rangle$, muni d'une filtration F, dont les propriétés sont analogues à celles de $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{Y}$ et tel que la suite spectrale de la filtration F :

$$E_1^{pq}=H^q(\overline{Y}, \mathrm{Gr}_F^p\, \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\overline{Y}}\langle \overline{Y}-Y\rangle) \;\Rightarrow\; H^*(\overline{Y}, \underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_{\overline{Y}}\langle \overline{Y}-Y\rangle)$$

dégénère en E_1 et aboutisse à la filtration de Hodge de $H^*(Y^{an}, \mathbb{C})$.

6.2. Définition. — *Soient X et $\overline{X}$ comme en* 6.1, *une résolution admissible de $(\overline{X}, X)$ est une résolution lisse de $\overline{X}$, $\varepsilon : \overline{X}_{\bullet} \to \overline{X}$, telle que, pour tout n, si l'on note $X_{\bullet}=\overline{X}_{\bullet}\times_{\overline{X}} X$ et $D_{\bullet}=\overline{X}_{\bullet}-X_{\bullet}$, D_n soit un diviseur à croisements normaux de $\overline{X}_n$.*

6.3. Théorème. — *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma* projectif *et U un ouvert dense de X, soient $\varepsilon' : X'_{\bullet} \to X$ et $\varepsilon : X_{\bullet} \to X$ deux résolutions admissibles de (X, U) liées par une flèche $\alpha : X'_{\bullet} \to X_{\bullet}$ telle que $\varepsilon'=\varepsilon\alpha$; notons $D_{\bullet}=X_{\bullet}-X_{\bullet}\times_X U$ et $D'_{\bullet}=X'_{\bullet}-X'_{\bullet}\times_X U$, filtrons $\Omega^{\bullet}_{X_{\bullet}}(\log D_{\bullet})$ et $\Omega^{\bullet}_{X'_{\bullet}}(\log D'_{\bullet})$ par la filtration bête F, alors la flèche canonique (construite comme* 2.2.1) :

$$(6.3.1)\qquad R\varepsilon_*(\Omega^{\bullet}_{X_{\bullet}}(\log D_{\bullet}), F) \to R\varepsilon'_*(\Omega^{\bullet}_{X'_{\bullet}}(\log D'_{\bullet}), F)$$

est un isomorphisme de $D_{\mathrm{diff}}(X)$.

Démonstration. — La démonstration est semblable à celle de 2.2, en plus compliqué.

6.4. Proposition-Notation. — Soient X et U comme en 6.3, soit $\varepsilon : X_{\bullet} \to X$ une résolution admissible de (X, U), alors $R\varepsilon_*(\Omega^{\bullet}_{X_{\bullet}}(\log D_{\bullet}), F)$ ($\in$ ob $D_{\mathrm{diff}}(X)$) ne dépend pas, à isomorphisme (canonique) près, du choix de la résolution ε. Nous noterons $\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X\langle X-U\rangle$ l'objet de $D_{\mathrm{diff}}(X)$ ainsi construit et $\underline{\underline{\Omega}}^p_X\langle X-U\rangle=\mathrm{Gr}_F^p\underline{\underline{\Omega}}^{\bullet}_X\langle X-U\rangle$.

Démonstration. — On procède comme en 2.4, en montrant que deux résolutions admissibles de (X, U) peuvent être coiffées par une même troisième, puis en appliquant 6.3.

6.5. THÉORÈME. — *Soient X un $\mathbb{C}$-schéma projectif, U un ouvert dense de X, $X_{\bullet}$ une résolution admissible de (X, U); notons j l'immersion de U dans X, $j_{\bullet}$ celle de $U_{\bullet} = X_{\bullet} \times_X U$ dans $X_{\bullet}$; alors :*

(i) *le quasi-isomorphisme* $Rj_{\bullet *}(\mathbb{C}_{U_{\bullet}^{\mathrm{an}}}) \simeq \Omega^{\cdot}_{X_{\bullet}^{\mathrm{an}}}(\log D_{\bullet}^{\mathrm{an}})$ [D 3], 8.1 *donne par application de* $R\varepsilon_*$ *un quasi-isomorphisme de* $D^+(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$: $Rj_*(\mathbb{C}_{U^{\mathrm{an}}}) \simeq (\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X\langle X-U\rangle)^{\mathrm{an}}$;

(ii) *l'application naturelle*

$$H^*(X, \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X\langle X-U\rangle) \to H^*(X^{\mathrm{an}}, (\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X\langle X-U\rangle)^{\mathrm{an}}) \simeq H^*(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$

est un isomorphisme;

(iii) *la suite spectrale de la filtration F :*

$$E_1^{pq} = H^q(X, \mathrm{Gr}_F^p \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_X\langle X-U\rangle) = H^q(X, \underline{\underline{\Omega}}^p_X\langle X-U\rangle) \Rightarrow H^*(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$

dégénère en E_1 et aboutit à la filtration de Hodge de la structure de Hodge mixte.

Démonstration. — Comme 4.5, ce théorème est une reformulation de résultats de [D 3].

6.6. En paraphrasant 3., on peut montrer que les assertions 6.3, 6.4 et 6.5 sont encore vérifiées quand X est un C-schéma *propre*. Soient Y un $\mathbb{C}$-schéma séparé de type fini et $\overline{Y}$ une compactification de Y; nous disposons ainsi d'un complexe de faisceaux sur $\overline{Y}$, $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{\overline{Y}}\langle \overline{Y}-Y\rangle$, à flèches des opérateurs différentiels d'ordre 1, filtré et à gradué linéaire, qui prolonge $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_Y$, i. e. $\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_{\overline{Y}}\langle \overline{Y}-Y\rangle_{|Y} \cong \underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_Y$, et qui par application du $R\Gamma^{\cdot}$ donne la filtration de Hodge de $H^*(Y, \mathbb{C})$. Cependant, il ne semble pas qu'on puisse attacher à Y un complexe bifiltré $(\underline{\underline{\Omega}}^{\cdot}_Y, W, F)$ dans une catégorie dérivée convenable, avec une filtration W canonique donnant la filtration par le poids sur $H^*(Y, \mathbb{C})$, c'est pourquoi nous ne détaillerons pas plus la théorie « avec pôles logarithmiques ».

BIBLIOGRAPHIE

[D 1] Lettres de P. Deligne à L. Illusie du 9 octobre 1973 et 28 octobre 1976.
[D 2] DELIGNE (P.). — Théorie de Hodge II, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 40.
[D 3] DELIGNE (P.). — Théorie de Hodge III, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 44.
[1] ILLUSIE (L.). — Complexe cotangent et déformations I, *Lecture Notes*, n° 239.
[2] ILLUSIE (L.). — Complexe cotangent et déformations II, *Lecture Notes*, n° 283.

[3] DU BOIS (Ph.) et JARRAUD (P.). — *Thèse de 3e cycle*, Université de Paris-XI, juin 1975.

[3 *bis*] DU BOIS (Ph.) et JARRAUD (P.). — *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 279, 1974, série , p. 745.

[4] GODEMENT (R.). — *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.

[5] STEENBRINK (J. H. M.). — *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology*, Nordic Summer School/NAVF Symposium in Mathematics, Oslo, 5-25 août 1976.

[E.G.A. II] GROTHENDIECK (A.). — Éléments de géométrie algébrique, chap. II, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 8.

[E.G.A. III] GROTHENDIECK (A.). — Éléments de géométrie algébrique, chap. III, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 11 et 17.

[F.A.C.] SERRE (J. P.). — Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. Math.* 61, 1955, p. 197 à 278.

[SGA 4] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, t. 3, *Lecture Notes*, n° 305.