BULLETIN DE LA S. M. F.

COLETTE MŒGLIN
RUDOLF RENTSCHLER

Orbites d'un groupe algébrique dans l'espace des idéaux rationnels d'une algèbre enveloppante

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 403-426
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__403_0>

Bull. Soc. math. France
109, 1981, p. 403-426

ORBITES D'UN GROUPE ALGÉBRIQUE DANS L'ESPACE DES IDÉAUX RATIONNELS D'UNE ALGÈBRE ENVELOPPANTE

PAR

C. MOEGLIN et R. RENTSCHLER (*)

RÉSUMÉ. — Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. Soit Γ un k-groupe algébrique affine connexe qui opère rationnellement par des automorphismes sur l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$.

Nous montrons :

(1) Les Γ-orbites dans l'espace des idéaux rationnels $\operatorname{Rat} U(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ sont ouvertes dans leur adhérence.

(2) Soit P un idéal premier Γ-stable de $U(\mathfrak{g})$ et soit C le cœur de P. Si $C^{\Gamma}=k$, alors il existe $Q\in \operatorname{Rat} U(\mathfrak{g})$ tel que l'on ait $P=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\gamma\cdot Q$.

(3) Soit $\mathfrak{t}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie contenant $\mathfrak{g}$ comme idéal. Dans ce cas soit Γ le groupe algébrique adjoint de $\mathfrak{t}$. Soient $I\in \operatorname{Rat} U(\mathfrak{t})$, $Q\in \operatorname{Rat} U(\mathfrak{g})$ tel que :

$$I\cap U(\mathfrak{g})=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\gamma\cdot Q \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{h}=\{x\in\mathfrak{t}\mid [x, Q]\subset Q\}.$$

Alors il existe $J\in \operatorname{Rat} U(\mathfrak{h})$ tel que $Q=J\cap U(\mathfrak{g})$ et $I=\operatorname{ind}(J, \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{t})$.

Nous montrons les résultats (1) et (2) dans un cadre un peu plus général (on remplace les algèbres enveloppantes par des algèbres plus générales et pour k on suppose quelquefois seulement car $(k)=0$).

ABSTRACT. — Let k be an algebraically closed field of characteristic 0 and let $\mathfrak{g}$ be a finite dimensional Lie-algebra over k. Let Γ be a connected affine algebraic k-group operating rationally by automorphisms on the enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$.

We prove:

(1) The Γ-orbits in the space $\operatorname{Rat} U(\mathfrak{g})$ of rational ideals of $U(\mathfrak{g})$ are open in their closure.

(2) Let P be a Γ-stable prime ideal of $U(\mathfrak{g})$ and let C be the heart of P. If $C^{\Gamma}=k$, then there exists $Q\in \operatorname{Rat} U(\mathfrak{g})$ such that $P=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\gamma\cdot Q$.

(*) Texte reçu le 18 mars 1980, révisé le 19 mars 1981.

C. MOEGLIN, Université Pierre-et-Marie-Curie, Tour 45-46, 3e étage, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

R. RENTSCHLER, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Département de Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/403/$ 5.00

(3) Let $\mathfrak{t}$ be a finite dimensional Lie algebra over k containing $\mathfrak{g}$ as an ideal. In this case, let Γ be the adjoint algebraic group of $\mathfrak{t}$. Let $I \in \mathrm{Rat}\, U(\mathfrak{t})$, $Q \in \mathrm{Rat}\, U(\mathfrak{g})$ such that:

$$I \cap U(\mathfrak{g}) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot Q \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{h} = \{ x \in \mathfrak{t} \mid [x, Q] \subset Q \}.$$

Then there exists $J \in \mathrm{Rat}\, U(\mathfrak{h})$ such that $Q = J \cap U(\mathfrak{g})$ and $I = \mathrm{ind}\,(J, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t})$.

We prove the results (1) and (2) in a slightly more general framework (we replace the enveloping algebras by more general algebras and for k we assume sometimes only char $(k) = 0$).

Introduction

Soient k un corps de caractéristique 0 et $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. On note $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et Rat $U(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux k-rationnels de $U(\mathfrak{g})$ muni de la topologie de Jacobson. Soit Γ un groupe algébrique affine, connexe, défini sur k. On suppose que Γ opère rationnellement sur $U(\mathfrak{g})$ en respectant la structure d'algèbre; on note $\Gamma(k)$ l'ensemble des points k-rationnels de Γ. Comme Γ est connexe, $\Gamma(k)$ est dense dans Γ d'après ([1], corollaire 8.3). Ainsi, comme nous le verrons facilement, $\Gamma(k)$ opère dans Rat $U(\mathfrak{g})$ et les $\Gamma(k)$-orbites sont connexes; dans la première partie de cet article, nous étudions cette opération. Nos principaux résultats sont les suivants : si k est algébriquement clos, alors :

(1) les $\Gamma(k)$-orbites dans Rat $U(\mathfrak{g})$ sont ouvertes dans leur adhérence;

(2) soit P un idéal premier $\Gamma(k)$-stable de $U(\mathfrak{g})$, dont on note C le cœur (c'est-à-dire le centre de l'anneau total des fractions de $U(\mathfrak{g})/P$). On suppose que $C^{\Gamma(k)} = k$; alors il existe $Q \in \mathrm{Rat}\, U(\mathfrak{g})$ tel que l'on ait $Q \supset P$ et $P = \bigcap_{\gamma \in \Gamma(k)} \gamma \cdot Q$.

Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est résoluble et $\Gamma \subset \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$, (2) est démontré en [6]. Remarquons que l'assertion (1) entraîne en particulier le résultat suivant, démontré en [11] (sous l'hypothèse k non dénombrable et $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$).

(1 *bis*) On suppose que k est algébriquement clos; alors deux $\Gamma(k)$-orbites de Rat $U(\mathfrak{g})$ ayant même adhérence, sont égales.

Pour les algèbres de Lie nilpotentes et résolubles et si $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, l'assertion (1) est démontrée en [4] et en [2]; à la différence des nôtres, ces démonstrations utilisent les propriétés de l'application de Dixmier développées en [11] et [1].

Dans la deuxième partie de cet article, nous utilisons le résultat (2) pour démontrer la conjecture de Dixmier posée en [5] et résolue en [8] si $\mathfrak{g}$ est résoluble, dont voici l'énoncé précis :

Soient $\mathfrak{t}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie et I un idéal rationnel de $U(\mathfrak{t})$. On suppose que k est algébriquement clos, que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{t}$ et que Γ est le groupe algébrique adjoint de $\mathfrak{t}$ opérant par restriction dans $U(\mathfrak{g})$. On pose $P=I \cap U(\mathfrak{g})$; les hypothèses de (2) étant réalisées (*cf.* [8]), on choisit $Q \in \mathrm{Rat}\; U(\mathfrak{g})$ tel que l'on ait $Q \supset P$ et $P=\bigcap_{\gamma \in \Gamma(k)} \gamma . Q$. On pose :

$$\mathfrak{h}=\{x \in \mathfrak{g} \mid [x, Q] \subset Q\}.$$

Alors il existe $J \in \mathrm{Rat}\; U(\mathfrak{h})$ tel que l'on ait :

$$J \cap U(\mathfrak{g})=Q \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ind}(J, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t})=I;$$

(par définition, $\mathrm{ind}(J, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t})$ est le plus grand idéal bilatère de $U(\mathfrak{t})$ inclus dans $U(\mathfrak{t})J$).

Pour démontrer ce résultat, on suit [8].

Comme nous le montrons dans les premiers paragraphes, certains de nos résultats, en particulier le théorème 3.8 s'étendent à des algèbres un peu plus générales que les algèbres enveloppantes. Nous devons cette généralisation à une suggestion du Referee et de M.-P. Malliavin que nous remercions. Nous remercions aussi J. Dixmier pour les utiles remarques qu'il nous a faites.

1. Notations et préliminaires

1.1. Soient k et Γ comme dans l'introduction. Dans tout ce travail, U est une k-algèbre de type fini telle que $U \otimes k'$ soit noethérienne à gauche et à droite pour toute extension de corps k' de k (par exemple une algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension finie). On suppose que Γ opère rationnellement sur U (en respectant la structure d'algèbre), c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme :

$$\Delta : \quad U \to A(\Gamma) \otimes U,$$

tel que :

$$\gamma u=\sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma) u_i \quad (\gamma \in \Gamma(k)) \qquad \text{si} \quad \Delta(u)=\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes u_i,$$

où $A(\Gamma)$ désigne l'algèbre des fonctions régulières sur Γ. Par conséquent, l'algèbre U est la réunion de ses sous-espaces Γ-stables de dimension finie. Si $\alpha \in \mathrm{Aut}_k U$ et si J (resp. U') est un idéal (resp. une sous-k-algèbre) α-stable de U, on note encore α le k-morphisme de U/J (resp. U') obtenu après passage au quotient (resp. restriction).

Si I est un idéal premier de U, alors d'après les théorèmes de Goldie, l'ensemble S des non-diviseurs de zéro de U/I est un ensemble oréen à gauche et à droite et l'anneau $S^{-1}U/I$ est isomorphe à un anneau de matrices $M_n(D)$ sur un corps gauche D (*cf.* [2], 2.6 ou [7], Thm. 3.6.12), c'est l'anneau total des fractions de U/I (notation Fract U/I) dont le centre est appelé le cœur de I. Un idéal I de U est appelé rationnel, si I est premier et si le cœur de I est réduit à k.

1.2. Soient I un idéal premier de U et k' un corps contenant k comme sous-corps. On note S l'ensemble des non-diviseurs de zéro de U/I et on identifie S à $S\otimes 1 \subset U/I\otimes k'$.

L'injection $U/I \to (S^{-1}U/I)\otimes k'$ rend inversible les éléments de S. On en déduit :

(i) *S est un sous-ensemble oréen formé de non diviseurs de zéro de $(U/I)\otimes k'$ et l'on a $S^{-1}(U/I\otimes k')=$* Fract $(U/I)\otimes k'$.

L'application qui à tout idéal premier I' de $U/I\otimes k'$ ne rencontrant pas S associe l'idéal premier $S^{-1}I'$ de $S^{-1}(U/I\otimes k')$ définit un homéomorphisme entre l'espace des idéaux premiers de $U/I\otimes k'$ ne coupant pas S (muni de la topologie de Jacobson) et l'espace des idéaux premiers de Fract $(U/I)\otimes k'$ (*cf.* [2], Satz 2.10 ou [7], prop. 3.6.17). On note C le cœur de I. Comme Fract U/I est une C-algèbre centrale simple, l'intersection avec $C\otimes k'$ définit un isomorphisme entre l'ensemble des idéaux premiers de $(S^{-1}U/I)\otimes k'$ et ceux de $C\otimes k'$. Comme tout idéal non nul de U/I contient d'après Goldie un élément de S, nous réobtenons :

(ii) ([2], Satz 3.5 (*b*)). *L'application qui à un idéal premier I' de $U/I\otimes k'$ vérifiant $I'\cap U/I=0$ associe l'idéal premier $(S^{-1}I')\cap(C\otimes k')$ de $C\otimes k'$ est une bijection.*

Si I est un idéal rationnel de U, alors $(S^{-1}U/I)\otimes k'$ est une k-algèbre simple. Par conséquent, l'idéal $I\otimes k'$ est premier. D'après [2], Lemma 3.7, le centre de Fract $((S^{-1}U/I)\otimes k')$ est égal à k'. On a donc :

(iii) *Si I est un idéal rationnel de U, alors $I\otimes k'$ est un idéal k'-rationnel de $U\otimes k'$.*

1.3. LEMME. — *Soient A une k-algèbre et k_1 un corps contenant k comme sous-corps. On suppose que $\Gamma(k)$ opère dans k_1 et que le corps des invariants, noté k_1^Γ, est réduit à k.*

Si I' est un idéal $(\mathrm{id}\otimes\Gamma(k))$*-invariant de $A\otimes k_1$, alors on a : $I'=(I'\cap A)\otimes k_1$.*

C'est classique : tout sous-k-espace vectoriel de $A\otimes k_1$ qui est $(\mathrm{id}\otimes\Gamma(k))$-invariant est de la forme $W\otimes k_1$ où W est un sous-k-espace vectoriel de A.

1.4. LEMME (NOTATIONS 1.1). — (i) *Si Q est un idéal rationnel de U, alors $P=\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma Q$ est un idéal premier de U.*

(ii) *Soit k' un corps contenant k comme sous-corps. Soit P un idéal premier, $\Gamma(k)$-stable, de U dont on note C le cœur. On suppose que l'on a $C^{\Gamma(k)}=k$. Alors l'idéal $P\otimes k'$ de $U\otimes k'$ est premier.*

(i) On note E l'ensemble des idéaux premiers minimaux de U/P et Lie Γ l'algèbre de Lie de Γ. Puisque $\Gamma(k)$ est dense dans Γ ([1], corollaire 8.3) et puisque Γ opère rationnellement dans U, un idéal de U est $\Gamma(k)$-stable si et seulement si il est Lie Γ-stable. Ainsi P est Lie Γ-stable et d'après [7], lemme 3.3.3 il en est de même de tout élément de E. Comme $Q\supset P$, il existe $P'\in E$ tel que $Q/P\supset P'$. D'après ce qui précède, P' est un idéal $\Gamma(k)$-stable et on a donc :

$$P'\subset\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma\cdot Q/P=0.$$

Ainsi $P'=0$ et P est un idéal premier de U, d'où (ii).

(ii) On sait que l'idéal $P\otimes k'$ est semi-premier (*cf.* [7], prop. 3.4.2). D'après les arguments donnés dans la démonstration de (i), les idéaux premiers de $U\otimes k'$ minimaux au-dessus de $P\otimes k'$ sont $(\Gamma(k)\otimes\mathrm{id})$-stables. Soit P' un idéal premier, $(\Gamma(k)\otimes\mathrm{id})$-stable, de $U\otimes k'$ tel que $P=P'\cap U$ et soit S l'ensemble des non-diviseurs de zéro de U/P. On étend canoniquement l'action de $\Gamma(k)$ sur U/P en une action sur Fract (U/P). Ainsi $\Gamma(k)$ opère sur Fract $(U/P)\otimes k'$ et il est clair que la bijection de 1.2 (ii) commute aux actions de $\Gamma(k)$. Or l'algèbre $C\otimes k'$ n'a pas d'idéaux $\Gamma(k)$-stables d'après le lemme 1.3 (on prend $A=k'$ et $k=C$). On a donc $S^{-1}(P'/P\otimes k')\cap(C\otimes k')=0$, d'où $P'=P\otimes k'$.

1.5. Avant de terminer ce premier paragraphe, donnons une nouvelle démonstration de la proposition suivante ne nécessitant pas toutes les hypothèses de [11], Lemme 2 :

PROPOSITION (NOTATIONS 1.1). — *Soit $Q\in\mathrm{Rat}\,U$, alors l'application $\Gamma(k)\ni\gamma\mapsto\gamma\,Q\in\mathrm{Rat}\,U$ est continue.*

En outre, cette proposition donne une autre démonstration de 1.4(ii).

Pour $\gamma\in\Gamma(k)$ notons M_γ l'idéal des fonctions de $A(\Gamma)$ s'annulant en γ. L'application qui associe à un couple $(\gamma, Q_1)\in\Gamma(k)\times\mathrm{Rat}\,U$ l'idéal premier $(M_\gamma\otimes U)+(A(\Gamma)\otimes Q_1)$ de $A(\Gamma)\otimes U$ identifie $\Gamma(k)\times\mathrm{Rat}\,U$ à un sous-ensemble de l'espace Spec $(A(\Gamma)\otimes U)$ des idéaux premiers de $A(\Gamma)\otimes U$. Nous mettons sur $\Gamma(k)\times \mathrm{Rat}\ U \subset \mathrm{Spec}\ (A(\Gamma)\otimes U)$ la topologie de Jacobson.

Soit $\Delta' : U \to A(\Gamma)\otimes U$ l'homomorphisme tel que :

$$\gamma^{-1} u = \sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma) u_i \quad (\gamma \in \Gamma(k)) \qquad \text{si} \quad \Delta' u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes u_i.$$

Avec cette notation, on a :

$$\gamma Q_1 = \Delta'^{-1}((M_\gamma \otimes U) + (A(\Gamma)\otimes Q_1)).$$

Par conséquent, l'application :

$$\Gamma(k)\times \mathrm{Rat}\ U \ni (\gamma, Q_1) \to \gamma Q_1 \in \mathrm{Rat}\ U$$

est continue.

Soit T l'ensemble des non-diviseurs de zéro de U/Q.

Alors $T\otimes 1$ est un ensemble oréen de non-diviseurs de zéro de $A(\Gamma)\otimes U/Q$ et on a :

$$M_\gamma \otimes U/Q = (M_\gamma \otimes \mathrm{Fract}\ U/Q) \cap (A(\Gamma)\otimes U/Q).$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que l'algèbre Fract $U/Q = T^{-1}\ U/Q$ est centrale simple et que par conséquent l'application :

$$\mathrm{Rat}\ A\ (\Gamma) \ni M_\gamma \to M_\gamma \otimes (\mathrm{Fract}\ U/Q) \in \mathrm{Spec}\ (A\ (\Gamma)\otimes \mathrm{Fract}\ (U/Q))$$

est continue.

2. Orbite et cœur

2.1. Soient k, Γ et U comme dans le paragraphe 1.

Dans ce paragraphe on fixe un idéal premier P de U dont on note C le cœur; on suppose que P est $\Gamma(k)$-stable et pose :

$$V'(P) = \{ q \in \mathrm{Rat}\ U/P \mid \cap_{\gamma \in \Gamma(k)} \gamma q = 0 \}.$$

On utilisera aussi les notations ci-dessous (*cf.* 2.2 et 2.3).

2.2. Soit $A(\Gamma)$ l'anneau des fonctions régulières de Γ; on pose $K = \mathrm{Fract}\ A(\Gamma)$ et on choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. On note $\lambda(?)$ et $\rho(?)$ la représentation régulière gauche et la représentation régulière droite de $\Gamma(k)$ dans K. Soit k' un corps, extension de k. On identifie l'ensemble des points k'-rationnels de Γ, noté $\Gamma(k')$ à $\mathrm{Hom}_k\ (A(\Gamma), k')$.

Si $k'=K$, l'inclusion de $A(\Gamma)$ dans K définit donc un élément de $\Gamma(K)$, noté μ et appelé point canonique générique.

On remarque que $\Gamma(k')$ opère rationnellement dans $U\otimes k'$. L'opération de μ dans $U\otimes K$ va jouer un rôle particulier.

2.3. LEMME. — *Soient $\Gamma\times V\to V$ une représentation linéaire de Γ définie sur k et $\alpha\in \operatorname{Aut}_k k'$. Alors $\mathrm{id}\otimes\alpha\in\operatorname{Aut}_k(V\otimes k')$. Soit :*

$$\nu\in\Gamma(k')=\operatorname{Hom}_k(A(\Gamma),k');$$

on définit $\alpha\star\nu\in\Gamma(k')$ en composant $\alpha\circ\nu\in\operatorname{Hom}_k(A(\Gamma),k')$ et on a :

(i) $\alpha\star\nu\,(\mathrm{id}\otimes\alpha)=(\mathrm{id}\otimes\alpha)\,\nu\in\operatorname{Aut}_k(V\otimes k')$.

(ii) *Soit $\gamma\in\Gamma(k)$; on identifie $\Gamma(k)$ à un sous-groupe de $\Gamma(K)$.*

(Ici $k'=K$). On a alors :

$$\lambda(\gamma)\star\nu=\gamma^{-1}\nu\in\Gamma(K),$$

$$\rho(\gamma)\star\nu=\nu\gamma\in\Gamma(K).$$

(i) Soit $v\in V$; comme V est une représentation rationnelle de Γ le sous-ensemble $\Gamma(k)v$ de V est inclus dans un espace vectoriel de dimension finie W. Soient $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de W et $a_1,\ldots,a_n\in A(\Gamma)$ vérifiant :

$$\gamma.v=\textstyle\sum_{i=1}^n a_i(\gamma)\,e_i\qquad\text{pour}\quad\gamma\in\Gamma(k).$$

On identifie $a_1,\ldots,a_n$ à $a_1\otimes 1,\ldots,a_n\otimes 1\in A(\Gamma)\otimes k'$, anneau des fonctions régulières sur $\Gamma(k')$. Ainsi, soient $i\in\{1,\ldots,n\}$ et $x\in k'$, on a :

$$a_i(\nu)\in k\otimes k'=k',$$

$$\nu.(v\otimes x)=\textstyle\sum_{i=1}^n e_i\otimes a_i(\nu)\,x.$$

D'autre part, par définition de $\alpha\star\nu$, on a :

$$a_i(\alpha\star\nu)=\alpha(a_i(\nu))\in k'.$$

D'où :

$$\alpha\star\nu(\mathrm{id}\otimes\alpha)(v\otimes x)=\textstyle\sum_{i=1}^n e_i\otimes\alpha(a_i(\nu))\,\alpha(x)=(\mathrm{id}\otimes\alpha)(\sum_{i=1}^n e_i\otimes a_i(\nu)\,x).$$

Par linéarité, on en déduit (i).

(ii) Soient $x\in A(\Gamma)$ et $\gamma\in\Gamma(k)$. La définition de $\lambda(\gamma)\star\nu$ puis celle de ν montre que l'on a :

$$x(\lambda\star(\gamma)\star\nu)=\lambda(\gamma)\circ\nu(x)=\lambda(\gamma)\,x(\nu).$$

Or $\lambda(\gamma)\,x(\nu)$ est, par définition de la représentation régulière gauche, égal à $x(\gamma^{-1}\nu)$, d'où :

$$x(\lambda(\gamma)\star\nu)=x(\gamma^{-1}\nu).$$

Par conséquent, on a :

$$\lambda(\gamma)\star\nu=\gamma^{-1}\nu.$$

De même, on a :

$$x(\rho(\gamma)\star\nu)=\rho(\gamma)\circ\nu(x)=\rho(\gamma)\,x(\nu)=x(\nu\gamma).$$

D'où (ii).

2.4. LEMME. — *Soit I un idéal de U.*

(i) *Soit $\gamma\in\Gamma(k)$; on a :*

$$\gamma^{-1}\,\mu(I\otimes K)=(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))\,\mu(I\otimes K),$$
$$\mu\gamma(I\otimes K)=(\mathrm{id}\otimes\rho(\gamma))\,\mu(I\otimes K).$$

(ii) *On suppose que l'idéal I est $\Gamma(k)$-stable et on a :*

$$\mu(I\otimes K)=I\otimes K.$$

(*en particulier, on a $\mu(P\otimes K)=P\otimes K$, ce qui permet d'identifier μ à un élément de* $\mathrm{Aut}_K(U/P\otimes K)$.

(iii) *On identifie U et $U\otimes 1\subset U\otimes K$. Alors, l'idéal $U\cap\mu(I\otimes K)$ est inclus dans I et on a :*

$$U\cap\mu(I\otimes K)=\bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma\,.I.$$

(i) Il est clair que l'on a :

$$(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))(I\otimes K)=I\otimes K;$$
$$(\mathrm{id}\otimes\rho(\gamma))(I\otimes K)=I\otimes K.$$

Avec 2.3 (ii), puis (i), on en déduit les inégalités suivantes :

$$\gamma^{-1}\,\mu(I\otimes K)=\lambda(\gamma)\star\mu(I\otimes K)=(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))\,\mu(I\otimes K);$$

$$\mu\gamma(I\otimes K)=\rho(\gamma)\star\mu(I\otimes K)=(\mathrm{id}\otimes\rho(\gamma))\,\mu(I\otimes K).$$

D'où (i).

(ii) Ici $I\otimes K$ est un idéal $\Gamma(K)$-stable de $U\otimes K$, ce qui entraîne en particulier que l'on a :

$$\mu(I\otimes K)=I\otimes K,$$

c'est-à-dire (ii).

(iii) On pose $J=U\cap\mu(I\otimes K)$. D'après (i), on a :

$$\gamma^{-1}J=U\cap(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))\,\mu(I\otimes K).$$

Comme la restriction de $\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma)$ à $U\otimes 1$ (identifié à U) est l'identité de U, on en déduit l'égalité $\gamma^{-1}J=J$. On applique (ii) à J et on obtient $J\otimes K=\mu^{-1}(J\otimes K)$. Comme $J\subset\mu(I\otimes K)$; cela montre l'inclusion $J\otimes K\subset I\otimes K$, i. e. $J\subset I$. Soit J' un idéal, $\Gamma(k)$-stable, de U vérifiant $J\subset J'\subset I$. D'après (ii) appliqué à J', on a :

$$J'=U\cap(J'\otimes K)=U\cap\mu(J'\otimes K)\subset U\cap\mu(I\otimes K)=J.$$

Ainsi, $J=J'$, c'est-à-dire (iii).

2.5. Soient $q\in V'(P)$ et P comme en 2.1. Comme $q\in V'(P)$ de 2.4 (iii), on tire :

$$\mu(q\otimes K)\cap(U/P)=0 \qquad \text{et} \qquad \mu(q\otimes K)\in\mathrm{Rat}_K((U/P)\otimes K).$$

On note S l'ensemble des non-diviseurs de 0 de U/P.

En 1.2, on remplace k', I par K, P. Alors 1.2 (i) montre que $S^{-1}\,U/P$ est une sous-algèbre de $S^{-1}((U/P)\otimes K)$ et 1.2, (iii) montre que $S^{-1}\,\mu(q\otimes K)$ est un idéal K-rationnel de $S^{-1}((U/P)\otimes K)$; dans l'application :

$$\pi_q:(S^{-1}(U/P))\otimes K\to S^{-1}(((U/P)\otimes K)/\mu(q\otimes K))$$

l'image de C est un sous-corps de K. On note φ_q la restriction de π_q à C (on a identifié C et $C\otimes 1$). On pose :

$$m_q=\mathrm{Ker}\ \pi_q\,|\,C\otimes K.$$

Il est clair que l'on a :

$$\mathrm{Ker}\ \pi_q=S^{-1}\,\mu(q\otimes K),$$

d'où :

(i) $m_q=(S^{-1}\,\mu(q\otimes K))\cap(C\otimes K)$.

Grâce à 1.2, (ii) cela entraîne l'égalité suivante :

(ii) $\mu(q\otimes K)=((U/P)\otimes K)\cap(S^{-1}((U/P)\otimes K))\,m_q$.

Remarquons aussi que :

(iii) *L'idéal m_q est engendré par l'ensemble des éléments $c\otimes 1-1\otimes\varphi_q(c)$ où $c\in C$.*

2.6. Soit $\gamma\in\Gamma(k)$; on prolonge canoniquement l'action de γ à Fract U/P. Il est clair que γ laisse stable C; d'autre part $\lambda(\gamma)\in\operatorname{Aut}K$ et on note $\operatorname{Hom}_\Gamma(C,K)$, l'ensemble des k-morphismes de C dans K, commutant à ces actions. Dans la suite on écrira C^Γ au lieu de $C^{\Gamma(k)}$ pour le sous-corps des $\Gamma(k)$-invariants de C.

2.7. LEMME (NOTATIONS 2.5 ET 2.6). — *Soit $\gamma\in\Gamma(k)$.*

(i) $(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))\,\gamma\mu(q\otimes K)=\mu(q\otimes K)$;

(ii) $(\mathrm{id}\otimes\rho(\gamma))\,\mu(\gamma^{-1}\,q\otimes K)=\mu(q\otimes K)$;

(iii) $(\gamma\otimes\lambda(\gamma))\,m_q=m_q$;

(iv) *on a* $\varphi_q\in\operatorname{Hom}_\Gamma(C,K)$.

(i) et (ii) résultent immédiatement de 2.4, (i).

(iii) résulte de (i) et de 2.5, (i).

(iv) résulte de (iii) et de 2.5, (iii).

2.8. LEMME. — *Soit $\varphi\in\operatorname{Hom}_\Gamma(C,K)$; on note m_φ l'idéal K-rationnel de $C\otimes K$ engendré par l'ensemble des éléments $c\otimes 1-1\otimes\varphi(c)$ où $c\in C$. Soit $\gamma\in\Gamma(k)$; on a :*

$$(\gamma\otimes\rho(\gamma))\,m_\varphi=m_\varphi.$$

C'est clair.

2.9. PROPOSITION. — *Soit P un idéal premier Γ-stable de U dont on note C le cœur. On suppose que l'on a $C^\Gamma=k$.*

(i) *L'application $q\in V'(P)\to\varphi_q\in\operatorname{Hom}_\Gamma(C,K)$ est une bijection* (*cf.* 2.6 *et* 2.7).

(ii) *Soient $q\in V'(P)$ et $\gamma\in\Gamma(k)$; on a :*

$$\rho(\gamma)\circ\varphi_q=\varphi_{\gamma^{-1}q}\in\operatorname{Hom}_\Gamma(C,K).$$

(Cette proposition donne une $\Gamma(k)$-paramétrisation de $V'(P)$.)

(i) Grâce à 2.5 et 2.6, il nous reste à démontrer l'assertion suivante : soit $\varphi\in\operatorname{Hom}_\Gamma(C,K)$; on note m_φ l'idéal de $C\otimes K$ engendré par l'ensemble des éléments $c\otimes 1-1\otimes\varphi(c)$ où $c\in C$ et l'on pose :

$$I'=(S^{-1}(U/P)\otimes K)\, m_\varphi \cap ((U/P)\otimes K).$$

Alors il existe $q\in V'(p)$ tel que l'on ait :

$$\mu(q\otimes K)=I'.$$

Démontrons cette assertion.

Soit $\gamma\in\Gamma(k)$; d'après 2.8, on a $(\gamma\otimes\lambda(\gamma))\, m_\varphi=m_\varphi$; d'où, par définition de I', l'égalité suivante :

$$(\star)\qquad (\gamma\otimes\lambda(\gamma))\, I'=I'.$$

Or, d'après 2.3, (i) puis (ii), appliqué à $\nu=\mu$ et $\alpha=\lambda(\gamma)$, on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))\,\mu(\mu^{-1}I')&=\lambda(\gamma)\star\mu(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))(\mu^{-1}I')\\ &=\gamma^{-1}\mu(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))(\mu^{-1}I').\end{aligned}$$

Comme $\gamma\otimes\lambda(\gamma)=(\gamma\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))$, on en déduit les égalités suivantes :

$$(\gamma\otimes\lambda(\gamma))\, I'=(\gamma\otimes\mathrm{id})(\gamma^{-1}\mu),$$
$$(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))\,\mu^{-1}I'=\mu(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))(\mu^{-1}I').$$

En reportant dans $(\star)$, cela entraîne que l'on a :

$$\mu^{-1}I'=(\mathrm{id}\otimes\lambda(\gamma))\,\mu^{-1}I'.$$

Le lemme 1.3, (ii), et l'hypothèse $C^\Gamma=k$, montrent alors qu'il existe un idéal q de $U(\mathfrak{g})/P$ tel que l'on ait :

$$\mu^{-1}I'=q\otimes K.$$

Comme I' est un idéal K-rationnel de $(U/P)\otimes K$, il est clair que $q\in\mathrm{Rat}\, U/P$. D'après 2.4, (iii), on a :

$$(U/P)\cap\mu(q\otimes K)=\textstyle\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma\cdot q.$$

D'autre part, d'après 1.2, (ii), on a $I'\cap U/P=0$; l'égalité $\mu(q\otimes K)=I'$ entraîne que l'on a $\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma\cdot q=0$, c'est-à-dire que $q\in V'(p)$. D'où (i).

(ii) Soit $\gamma\in\Gamma(k)$; d'après 2.7, (ii), on a :

$$(\mathrm{id}\otimes\rho(\gamma))\,\mu(\gamma^{-1}q\otimes K)=\mu(q\otimes K),$$

c'est-à-dire :

$$(\mathrm{id}\otimes\rho(\gamma))\, m_{\gamma^{-1}q}=m_q.$$

(ii) résulte alors de 2.5, (iii).

2.10. LEMME. — *(On suppose que k est algébriquement clos). Soit $q \in V'(P)$; on pose $H = \mathrm{stab}_\Gamma\, q$ et on a :*

$$\varphi_q(C) = K^{\rho(H)}.$$

Soit $\gamma \in H$; d'après 2.9, (ii), on a :

$$\varphi_q = \varphi_{\gamma^{-1}q} = \rho(\gamma) \circ \varphi_q,$$

d'où l'inclusion $\varphi(C) \subset K^{\rho(H)}$.

Soient $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\varphi_q(C)} \overline{K}$.

L'inclusion de K dans $\overline{K}$ nous permet d'identifier μ à un élément de $\Gamma(\overline{K})$ (*cf.* 2.2).

On définit $\alpha \star \mu$, comme en 2.3 où on fait $k' = \overline{K}$. En outre, on a :

$$\mathrm{id}_C \otimes \alpha = \mathrm{id}_{C \otimes_{\varphi_q(C)}} \bigotimes_{\varphi_q(C)} \alpha \in \mathrm{Aut}_k(C \otimes \overline{K})$$

et :

$$m_q \bigotimes_K \overline{K} = m_q \bigotimes_{\varphi_q(C)} \overline{K} \subset C \otimes \overline{K}.$$

D'où :

$$(\star) \qquad (\mathrm{id}_C \otimes \alpha)(m_q \bigotimes_K \overline{K}) = m_q \bigotimes_K \overline{K}.$$

En reportant en 2.5, (ii), on en déduit l'égalité suivante :

$$(\mathrm{id} \otimes \alpha)\, \mu(q \otimes \overline{K}) = \mu(q \otimes \overline{K}).$$

Comme on a $(\mathrm{id} \otimes \alpha)\, q \otimes \overline{K} = q \otimes \overline{K}$, cette égalité et 2.3, (i) montrent que :

$$\alpha \star \mu(q \otimes \overline{K}) = \alpha \star \mu(\mathrm{id} \otimes \alpha)(q \otimes \overline{K}) = (\mathrm{id} \otimes \alpha)\, \mu(q \otimes \overline{K}) = \mu(q \otimes \overline{K}).$$

Ainsi il existe $\nu \in H(\overline{K})$ (i.e. ν est un point $\overline{K}$ rationnel de Γ stabilisant $q \otimes \overline{K}$) tel que l'on ait :

$$\alpha \star \mu = \mu \nu.$$

On remarque que grâce à l'hypothèse « k algébriquement clos », $H(K)$ est dense dans $H(\overline{K})$; on identifie K à un sous-corps du corps des fonctions rationnelles sur $\Gamma(\overline{K})$.

Soient $x \in K^{\rho(H)}$ et $x_1, x_2 \in A(\Gamma)$ tels que :

$$x = x_1 x_2^{-1}.$$

En évaluant x_1 et x_2 (identifiés à des fonctions régulières sur $\Gamma(\overline{K})$ en $\mu\nu = \alpha \star \mu$, on obtient :

$$x(\mu\nu) = x_1(\mu\nu)\, x_2(\mu\nu)^{-1} = x_1(\alpha \star \mu)\, x_2(\alpha \star \mu)^{-1} = \alpha(x_1)\, \alpha(x_2)^{-1} \in \overline{K},$$

par définition de $\alpha \star \mu$ (*cf.* 2.3).

En tenant compte de ce que $x \in K^{\rho(H)}$, on en tire l'égalité :

$$x(\mu) = \alpha(x);$$

elle montre que le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur $\varphi_q(C)$ laisse invariant les éléments de K^H; du début de la démonstration on déduit alors le lemme.

2.11. *Remarque* (inutile pour la suite, donnant une autre définition de φ_q). — Soit $q \in V'(P)$. On note $\Delta' : U \to U \otimes A(\Gamma)$ le comorphisme de la multiplication, i.e. :

$$\gamma u = \sum_{i=1}^n a_i(\gamma^{-1})\, u_i \qquad \text{si} \quad \Delta'(u) = \sum_{i=1}^n u_i \otimes a_i.$$

Par passage de U à U/P et par composition avec $\pi \otimes \mathrm{id}_{A(\Gamma)}$ où π est la projection canonique $U/P \to U/Q$, on obtient une application :

$$\Phi_q : \quad U/P \to (U/P) \otimes A(\Gamma) \to (U/Q) \otimes A(\Gamma).$$

Alors on a :

(i) Φ_q est injectif;

(ii) $U/Q \otimes A(\Gamma)$ est engendré par $A(\Gamma)$ et l'image de Φ_q;

(iii) Φ_q se prolonge en une application :

$$\mathrm{Fract}\, \Phi_q : \mathrm{Fract}(U/P) \to \mathrm{Fract}((U/Q) \otimes A(\Gamma));$$

(iv) $\mathrm{Fract}\, \Phi_q$ induit par restriction l'homomorphisme φ_q du centre C de $\mathrm{Fract}\, U/P$ dans le centre $k \otimes K = K$ de $\mathrm{Fract}((U/Q) \otimes A(\Gamma))$.

(i) Soit $\gamma \in \Gamma(k) = \mathrm{Hom}_k(A(\Gamma), k)$; alors $\gamma Q/P$ est le noyau de l'application :

$$(\mathrm{id}_{U/Q} \otimes \gamma)\, \Phi_q : U/P \to U/Q.$$

Cela montre que le noyau de Φ_q est :

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma\cdot Q/P=0.$$

(ii) Soit $(\Delta', i_2) : U\otimes A(\Gamma)\to U\otimes A(\Gamma)$ l'homomorphisme défini par Δ' et la deuxième inclusion $A(\Gamma)\to U\otimes A(\Gamma)$. La démonstration du lemme 1 de [11], montre que (Δ', i_2) est un isomorphisme. Par conséquent, $U\otimes A(\Gamma)$ est engendré par $A(\Gamma)$ et l'image de Δ', ce qui entraîne que $(U/Q)\otimes A(\Gamma)$ est engendré par $A(\Gamma)$ et l'image de Φ_q.

Remarquons pour la suite, que l'on a :

Soit $u\in U(\mathfrak{g})$; alors :

$$\mu^{-1}(u\otimes 1)=\sum_{i=1}^n u_i\otimes a_i \qquad \text{si} \quad \Delta'(u)=\sum_{i=1}^n u_i\otimes a_i.$$

Ainsi la restriction de μ^{-1} à $U\otimes A(\Gamma)\subset U\otimes K$ coïncide avec (Δ', i_2).

(iii) D'après 1.2(iii), le fait que $Q\in\operatorname{Rat} U$ entraîne que $Q\otimes K\in\operatorname{Rat}_K(U\otimes K)$; donc l'idéal $Q\otimes A(\Gamma)$ de $U\otimes A(\Gamma)$ est premier. Comme $(1\otimes A(\Gamma))$ commute à l'image de Φ_q dans $(U/Q)\otimes A(\Gamma)$, l'image par Φ_q des non-diviseurs de 0 de U/P satisfait à la condition de Ore. Grâce à [2], 2.11 et (i) on en déduit (iii).

(iv) De [2], 3.7, on déduit facilement que $k\otimes K=K$ est le centre de :

$$\operatorname{Fract}((U/Q)\otimes K)=\operatorname{Fract}((U/Q)\otimes A(\Gamma)).$$

Avec (ii), cela montre que $\operatorname{Fract}\Phi_q(C)\subset K$.

La remarque faite à la fin de la démonstration de (ii) montre que μ^{-1} considéré comme K-morphisme de $\operatorname{Fract}((U\otimes K)/\mu(Q\otimes K))$ sur $\operatorname{Fract}((U/Q)\otimes K)$ et $\operatorname{Fract}\Phi_q$ rendent commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "\Phi_q"'] & \operatorname{Fract} U/P \arrow[rrd, "\operatorname{Fract}\Phi_q"] & & \\ K \arrow[r] & \operatorname{Fract}((U\otimes K)/\mu(Q\otimes K)) \arrow[rr, "\operatorname{Fract}\mu^{-1}"] & & \operatorname{Fract}(U/Q\otimes K). \end{tikzcd}$$

Cela termine la démonstration de (iv).

2.12. THÉORÈME. — *Soit $P\in\operatorname{Spec} U$; on note C le cœur de P et on pose :*

$$V'(P)=\left\{q\in\operatorname{Rat} U/P \mid \bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma\cdot q=0\right\}.$$

(i) *Si $V'(P)\neq 0$, on a $C^\Gamma=k$.*

(ii) *On suppose que k est algébriquement clos; alors Γ a au plus une orbite dans $V'(P)$.*

Sous l'hypothèse « k non dénombrable » ce théorème est essentiellement démontré, par d'autres méthodes, en [11].

(i) On suppose que $V'(P)\neq 0$. Soit $q\in V'(P)$; d'après à 2.9, (i), le morphisme φ_q induit par restriction une injection de $\varphi_q(C^\Gamma)$ dans $K^{\lambda(\Gamma)}=k$; d'où (i).

(ii) On suppose que $V'(P)\neq\emptyset$; soient $q, q'\in V'(P)$ et H, H' les stabilisateurs dans Γ de q et q'. De 2.10, on tire que le k-morphisme Θ obtenu par composition :

$$\Theta:\quad K^{\rho(H)}\xrightarrow{\varphi_q^{-1}}C\xrightarrow{\varphi_{q'}}K^{\rho(H')},$$

est un isomorphisme commutant à l'action régulière gauche de Γ dans K, d'après 2.9, (i). Le comorphisme Θ^0 de Θ, définit une application birationnelle d'un ouvert de Γ/H' dans Γ/H commutant aux translations à gauche; cela entraîne que Θ^0 est partout définie. Soit $\gamma_0\in\Gamma$ tel que $\Theta^0(e \bmod H')=\gamma_0 \bmod H$ (e est l'élément neutre de Γ). On note ρ_0 la multiplication à droite par γ_0 dans Γ. Alors on a $H'=\gamma_0 H\gamma_0^{-1}$ et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}\Gamma & \xrightarrow{\rho_0} & \Gamma\\ \downarrow & & \downarrow\\ \Gamma & \xrightarrow{\Theta^0} & \Gamma\end{array}$$

On a donc $\varphi_{q'}=\rho(\gamma_0)\varphi_q$. Alors 2.9, (ii) montre que l'on a $\varphi_{q'}=\varphi_{\gamma_0^{-1}q}$; l'égalité $q'=\gamma_0^{-1}q$ résulte alors de 2.9, (i).

3. Orbite localement fermée

3.1. Soient k, Γ et U comme dans le paragraphe 1. Rappelons que Γ opère rationnellement sur U. Dans les sections 3.4(...)3.9 on suppose en plus que U satisfait aux conditions suivantes :

(i) Pour toute extension de corps k' de k et pour tout idéal premier I' de $U\otimes k'$ le cœur de I' est une extension de corps de type fini de k'.

(ii) Pour toute extension de corps k' de k, les idéaux k'-rationnels de $U\otimes k'$ sont localement fermés dans l'espace $\operatorname{Spec}(U\otimes k')$ des idéaux premiers de $U\otimes k'$.

Soit P un idéal premier Γ-stable de U dont on note C le cœur.

On note $\tilde{P}$ le noyau de l'application naturelle $\tilde{\psi}$ de :

$$(U/P)\otimes C\to(U/P)C\subset\operatorname{Fract}(U/P).$$

Alors $\tilde{P}$ est un idéal C-rationnel de $(U/P)\otimes C$. Dans ce paragraphe nous allons montrer que l'hypothèse $C^\Gamma = k$ entraîne que $\tilde{P}$ est Γ-générique pour l'idéal $P\otimes C$ de $U\otimes C$ (lemme 3.3). Nous en déduirons en 3.8 grâce à 2.7 et aux hypothèses sur U que P est un idéal localement fermé dans l'ensemble des idéaux premiers Γ-invariants de U. On définit $V'(P)$ comme en 2.1.

3.2 Remarquons que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées si $U = U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie de dimension finie $\mathfrak{g}$.

En effet, la condition (i) est vraie d'après [11], théorème 1 si k est non dénombrable. Si k est dénombrable et si I est un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$ dont on note C_1 le cœur, il suffit de prendre une extension de corps purement transcendante et non dénombrable k' de k. Alors $C_1\otimes k'$ est intègre, $P\otimes k'$ est un idéal premier de $U(\mathfrak{g})\otimes k'$ (*voir* 1.2, (ii)) et le corps des fractions C'_1 de $C_1\otimes k'$ est le cœur de $I\otimes k'$ (*cf.* [2], Lemma 3.7). Comme C'_1 est une extension de corps de type fini de k', il en est de même de l'extension C_1 de k.

Si k est non dénombrable, tout idéal rationnel de $U(\mathfrak{g})$ est primitif ([8], théorème C). D'après [9], théorème 4.6, un tel idéal est localement fermé dans Spec $U(\mathfrak{g})$. Si k est dénombrable, il suffit de faire une extension de corps $k\subset k'$ (k' non dénombrable) et de remarquer que $I\otimes k'$ est rationnel (resp. semi-premier) si l'idéal I de $U(\mathfrak{g})$ est rationnel (resp. semi-premier) (*voir* 1.2, (iii) resp. [7], prop. 3.4.2).

Comme dans une algèbre enveloppante tout idéal premier est intersection d'idéaux primitif (*voir* [7], prop. 3.1.15) nous remarquons en passant que le théorème 4.6 de [9] entraîne que pour toutes les algèbres enveloppantes les idéaux rationnels coïncident avec les idéaux primitifs.

3.3. Lemme. — *Soit P un idéal premier Γ-stable de U. On note C le cœur de P et $\tilde{P}$ le noyau de l'application naturelle $\tilde{\psi} : (U/P)\otimes C \rightarrow (U/P)\,C \subset \mathrm{Fract}(U/P)$. On suppose que $C^\Gamma = k$. On prolonge C-linéairement l'action de $\Gamma(k)$ sur $U/P\otimes C$ et on a :*

$$\bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma(k)}(\gamma\otimes \mathrm{id})\,\tilde{P} = 0.$$

On pose $P' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma\tilde{P}$. Soit $\gamma\in\Gamma(k)$; on note $\gamma\otimes\gamma$ le produit tensoriel des actions de γ dans $U(\mathfrak{g})/P$ et dans C. Il est clair que l'on a $\tilde{\psi}(\gamma\otimes\gamma) = \gamma\tilde{\psi}$, ce qui entraîne que l'idéal $\tilde{P}$ est $\gamma\otimes\gamma$-invariant. On a donc :

$$(\gamma\otimes \mathrm{id})\,\tilde{P} = (\mathrm{id}\otimes\gamma)\,\tilde{P};$$

d'où $P' = \bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}(\mathrm{id}\otimes\gamma)\,\tilde{P}$.

Puisque l'on a $C^{\Gamma}=k$, le lemme 1.3, montre l'égalité suivante :

$$P'=(P'\cap U/P)\otimes C.$$

Puisque la restriction de $\tilde{\psi}$ à U/P est un isomorphisme, on a $P'=0$.

3.4. LEMME (NOTATIONS ET HYPOTHÈSES DE 3.1). — *On suppose que* $V'(P)$ *est* $\neq 0$. *Soit* A *une sous-k-algèbre*, $\Gamma(k)$*-stable de* C; *alors l'intersection des idéaux premiers* $\neq 0$ *et* $\Gamma(k)$*-stables de* A *est* $\neq 0$.

Soit $q\in V'(P)$; d'après 2.7, on a $\varphi_q(A)\subset K$. Par conséquent la sous-$\varphi_q(A)$-algèbre de K, égale à $\varphi_q(A)A(\Gamma)$ est de type fini; d'après [7], 2.6.3, il existe $t\in A$ tel que $\varphi_q(A_t)A(\Gamma)$ soit un $\varphi_q(A_t)$-module libre. Soit I un idéal, $\Gamma(k)$-invariant de A, on suppose que I est premier et que $t\notin I$; l'idéal $\varphi_q(I_t)A(\Gamma)$ de $\varphi_q(A_t)A(\Gamma)$ est propre; ainsi $\varphi_q(I)A(\Gamma)\cap A(\Gamma)$ est un idéal propre, $\lambda(\Gamma(k))$-invariant de $A(\Gamma)$; il est donc nul; comme $A(\Gamma)$ est intègre, on en déduit que l'on a $\varphi_q(I_t)=0$, d'où $I_t=I=0$.

3.5. LEMME (NOTATION ET HYPOTHÈSES DE 3.1). — *On suppose que* $V'(P)$ *est* $\neq\emptyset$. *Il existe un ensemble fini* F *d'éléments de* C *tel que la sous-k-algèbre* B *de* C *engendrée par* $\bigcup_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma F$ *vérifie:*

(i) Fract $B=C$;

(ii) 0 *est le seul idéal* $\Gamma(k)$*-invariant de* B.

Ce lemme est une conséquence de 3.4.

3.6. (NOTATIONS ET HYPOTHÈSES 3.1 ET 3.5). — Soit F un sous-ensemble fini de C, répondant aux conditions de 3.5; on pose :

$$d=\{x\in U/P \mid xF\subset U/P\}.$$

Alors, comme $F\subset C$ est un ensemble fini, d est un idéal non nul de U/P. On pose :

$$p_c=\sum_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma\cdot d.$$

LEMME (NOTATIONS ET HYPOTHÈSES 3.1 ET 3.5). — *Soit* I *un idéal premier de* U. *On suppose que* I *est* $\Gamma(k)$*-invariant, que* I *contient* P *et que* I/P *ne contient pas* p_c; *on a alors :*

$$(I/P)=(I/P)C\cap(U/P).$$

Soient B comme en 3.5. Montrons que l'on a :

$$(\star)\qquad I/P=(I/P)B\cap(U/P).$$

Soient $v \in (I/P)B \cap (U/P)$ et Γ' un sous-ensemble fini de Γ tel que v soit somme finie d'éléments de la forme $ub_1 \ldots b_n$ où $b_1, \ldots, b_n \in \Gamma' F$ et $u \in I/P$.

On pose $D = \bigcap_{\gamma \in \Gamma'} \gamma^{-1}.d$. On a alors :

$$D \not\subset I/P \qquad \text{et} \qquad \gamma DF \subset U/P \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma'.$$

Alors pour $m \in N$ suffisamment grand, on a $D^m v \subset I/P$, d'où finalement $v \in I/P$ puisque I/P est un idéal premier de U/P. D'où l'assertion ($\star$). Comme B ne possède pas d'idéaux $\Gamma(k)$stables, d'après 3.5, on a $(I/P)B \cap B = 0$. L'égalité $C = \operatorname{Fract} B$ de 3.5 et l'appartenance de $(I/P)B$ à $\operatorname{Spec}((U/P)B)$ entraînent l'égalité :

$$(I/P)B = (I/P)C \cap (U/P)B;$$

le lemme en résulte donc grâce à ($\star$).

3.7. (Notations et hypothèses 3.1). — Soit $\tilde{p}_n$ l'intersection des idéaux premiers non nuls de $(U/P)C$. Comme $(U/P)C$ est un quotient rationnel de $(U/P)C$, on a $\tilde{p}_n \neq 0$ d'après les hypothèses sur U (*voir* 3.1).

On pose $\tilde{p}_n = p_n \cap U/P$.

On a alors $p_n \neq 0$. Soit I comme en 3.6, $I \neq P$. Alors $p_n \subset (I/P)C$, d'où $p_n \subset (I/P)C \cap U/P = I/P$, d'après 3.6.

3.8. Théorème (hypothèses 3.1). — *Soit P un idéal premier Γ-stable de U dont on note C le cœur; on suppose que C^Γ est réduit à k. Alors $\{P\}$ est localement fermé dans l'ensemble des idéaux premiers Γ-invariants de U.*

Soit k' une extension de k; si l'idéal $P \otimes k'$ de $U \otimes k'$ est localement fermé dans l'ensemble des idéaux premiers Γ-invariants de $U \otimes k'$, le théorème sera vrai d'après [7], 3.4.2. Or, si $k' = C$, 3.3 montre que $V'(P \otimes k')$ est $\neq \emptyset$; nous pouvons donc supposer que $V'(P)$ est $\neq \emptyset$. Soient p_c et p_n comme en 3.6 et 3.7. Soit I un idéal premier de U/P. On suppose que I est $\Gamma(k)$-invariant et que I ne contient pas p_c; alors I contient p_n (*cf.* 3.7), ce qui termine la démonstration du théorème.

3.9. Proposition (hypothèses 3.1). — *Soit P un idéal premier Γ-stable de U qui est intersection d'idéaux rationnels (par exemple un idéal premier d'une algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ si k est algébriquement clos). On note C le cœur de P. Alors il existe $q \in \operatorname{Rat} U/P$ vérifiant $\bigcap_{\gamma \in \Gamma(k)} \gamma.q = 0$ si et seulement si $C^\Gamma = k$.*

L'assertion directe a été démontrée en 2.12, (i). Supposons donc que l'on a $C^\Gamma = k$; soit $\check{p}$ l'idéal de U/P intersection des idéaux premiers $\neq 0$,

Γ-invariants, de U/P. D'après 3.7, on a $\check{p}\neq 0$. Soit q un idéal rationnel de U/P ne contenant pas $\check{p}$. Il est clair que $q\in V'(P)$, ce qui démontre la proposition.

3.10. Nous remarquons que les théorèmes 2.12 et 3.8 entraînent le :

Corollaire (k algébriquement clos). — *Si $U=U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (de dimension finie) alors les $\Gamma(k)$-orbites dans Rat $U(\mathfrak{g})$ sont ouvertes dans leur adhérence.*

3.11. *Remarque.* — Si k est algébriquement clos et non dénombrable on peut démontrer la proposition 3.9 ci-dessus sans utiliser le théorème 3.8 sous la forme suivante :

Proposition (hypothèses 1.1). — *Soit k un corps algébriquement clos et non dénombrable. Soit P un idéal premier Γ-stable de U dont on note C le cœur. alors il existe $q\in$ Rat U/P vérifiant $\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma.q=0$ si et seulement si $C^{\Gamma}=k$.*

En effet sans faire d'hypothèse sur k, soit k' une extension algébriquement close de k, dont le degré de transcendance sur k est non dénombrable; alors il existe un k-homomorphisme χ de C dans k' et du lemme 3.3, on déduit que l'idéal $q'=\tilde{p}\bigotimes_C k'$ vérifie :

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}(\gamma\otimes \mathrm{id}_{k'})\,q'=0\subset U/P\otimes k';$$

c'est-à-dire $V'(P\otimes k')\neq \mathbf{0}$. Or il existe un sous-corps dénombrable k_1 de k tel que U et P soient déjà définis sur k_1; on fait alors jouer à k_1 le rôle de k et à k celui de k'.

3.12. Pour ne pas introduire trop d'hypothèses sur U, on prendra pour U une algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ dans le reste de ce paragraphe.

Proposition (k algébriquement clos). — *Soit $Q\in$ Rat $U(\mathfrak{g})$. On pose $P=\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma.Q$ et on note H la stabilisateur de Q dans Γ. On a :*

$$d(U(\mathfrak{g})/Q)=d(U(\mathfrak{g})/P)-\dim\Gamma/H,$$

(*où $d(?)$ est la dimension de Gelfand-Kirilov en tant que k-algèbre*).

On pose $q=Q/P$. Soit $\tilde{P}$ comme en 3.1. On choisit une clôture algébrique $\overline{C}$ de C. D'après 1.2 les idéaux $\tilde{P}\bigotimes_C\overline{C}$ et $q\otimes\overline{C}$ de $U(\mathfrak{g})/P\otimes\overline{C}$ sont $\overline{C}$-rationnels. D'autre part, en tenant compte de 3.3, on a :

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}(\gamma\otimes \mathrm{id})(\tilde{P}\bigotimes_C\overline{C})=0,$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}(\gamma\otimes \mathrm{id})(q\otimes\overline{C})=0.$$

De 2.12, on tire que $\tilde{p} \otimes_C \overline{C}$ appartient à la $\Gamma(\overline{C})$-orbite de $q \otimes \overline{C}$, d'où, facilement, les égalités suivantes :

$$d(U(\mathfrak{g})/Q) = d_{\overline{C}}((U(\mathfrak{g})/Q) \otimes \overline{C}) = d_{\overline{C}}((U(\mathfrak{g})/P \otimes C)/\tilde{P} \otimes_C \overline{C})$$
$$= d((U(\mathfrak{g})/P \otimes C)/\tilde{P}) = d_C(CU(\mathfrak{g})/P) = d(U(\mathfrak{g})/P) - d^0 \operatorname{tr} C,$$

où d_A (?) est la dimension de Gelfand-Kirilov de la A-algèbre .

Or, [3], 3.1 se recopie (*cf.* lemme ci-dessous) pour démontrer que l'on a $d(CU(\mathfrak{g})/P) = d(U(\mathfrak{g})/P)$ et 2.10 montre que l'on a $d^0 \operatorname{tr} C = \dim \Gamma/H$. D'où finalement $d(U(\mathfrak{g})/Q) = d(U(\mathfrak{g})/P) - \dim \Gamma/H$.

3.13. LEMME ([3], 3.1). — *Soit C le cœur d'un idéal premier P de $U(\mathfrak{g})$. Alors, on a :*

$$d(U(\mathfrak{g})/P) = d(CU(\mathfrak{g})/P).$$

Comme $U(\mathfrak{g})/P \subset CU(\mathfrak{g})/P$ il suffit de démontrer que l'on a :

$$d(CU(\mathfrak{g})/P) \leqslant d(U(\mathfrak{g})/P).$$

Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant 1, de $CU(\mathfrak{g})/P$; alors il existe $W_1 \subset C$ et $W_2 \subset U(\mathfrak{g})/P$ vérifiant :

- W_1, W_2 sont de dimension finie et contiennent 1;
- $W \subset W_1 W_2$.

On choisit s, un non diviseur de 0 dans $U(\mathfrak{g})/P$ tel que l'on ait $sW \subset U(\mathfrak{g})/P$ et on note W_1' le sous-k-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})/P$ engendré par sW_1.

Il est immédiat que l'on a $W^n \subset s^{-2n}(W_1' + W_2)^{2n}$ ($\subset$ Fract $U(\mathfrak{g})/P$) si $n \in \mathbb{N}$. On pose $V = (W_1' + W_2)^2$ et on a : $\dim_k W^n \leqslant \dim_k V^n$, d'où le lemme.

3.14. COROLLAIRE (k algébriquement clos). — *Toute $\Gamma(k)$-orbite de* Rat $U(\mathfrak{g})$ *contient dans son adhérence une $\Gamma(k)$-orbite fermée.*

Utilisant 3.12, la démonstration est celle du cas où $\mathfrak{g}$ est commutative.

4. Induction

4.1. Dans ce paragraphe, on suppose que k est algébriquement clos; on fixe une k-algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ et un idéal rationnel I de $U(\mathfrak{t})$. On suppose que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{t}$ opérant par restriction dans $U(\mathfrak{g})$. On pose $P = I \cap U(\mathfrak{g})$. On va démontrer le théorème A de [8] tel qu'il a été conjecturé en [5], c'est-à-dire sans l'hypothèse « $\mathfrak{g}$ résoluble »; utilisant 3.9 et [9], 4.6 (au lieu du théorème B de [8]) nous reprenons la démonstration de [8]. On pose :

$$\check{I} = \bigcap_{J \in \mathrm{Rat}(U(\mathfrak{t})/I) - \{0\}} J,$$

d'après [9], 4.6, on a $\check{I} \neq 0$.

On note C le cœur de P et on a $C^{\Gamma} = k$ d'après [8], 1.5.

4.2. Rappelons, ici, les résultats de [7], 5.4.2, sous la forme qui nous servira :

Il existe un idéal $A \neq 0$ de $U(\mathfrak{g})/P$ et une suite d'éléments $e_1, e_2, \ldots$, de $U(\mathfrak{t})/I$, engendrant $U(\mathfrak{t})/I$ en tant que $U(\mathfrak{g})/P$-module à gauche et à droite (en [7], 5.4.2 cette suite est notée (x^{ν})) tels que :

(1) On pose $V_n = \sum_{i=1}^{n} (U(\mathfrak{g})/P)\, e_i$. On a $V_n = \sum_{i=1}^{n} e_i\, (U(\mathfrak{g})/P)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (*cf.* [7], 5.4.2, ligne 5 de la démonstration). On pose $V_0 = 0$.

(2) On a $ue_n \in e_n u + V_{n-1}$ si $u \in U(\mathfrak{g})/P$ et $n \in \mathbb{N}$ (*cf.* [7], 5.4.2, ligne 2 de la démonstration).

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$; si l'on a $A\, e_n \not\subset V_{n-1}$, alors on a :

$$(U(\mathfrak{g})/P)\, e_n \cap V_{n-1} = V_{n-1} \cap (U(\mathfrak{g})/P)\, e_n = 0.$$

On pose :

$$F = \{ n \in \mathbb{N} \mid A\, e_n \not\subset V_{n-1} \}.$$

4.3. Lemme (notations 4.2). — (i) *Soit* $x \in U(\mathfrak{g})/P$, *un élément non diviseur de zéro dans* $U(\mathfrak{g})/P$; *alors x considéré comme élément de* $U(\mathfrak{t})/I$ *est non diviseur de zéro :*

(ii) *Soit* $x \in U(\mathfrak{t})/I - \{0\}$; *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que l'on ait :*

$$\exists\, r \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } A^r x \subset V_n \text{ et } A^p x \not\subset V_{n-1} \text{ si } P \geqslant r.$$

L'indice n est alors unique et appartient à F; on l'appelle le degré de x. L'ensemble suivant :

$$\{ y \in U(\mathfrak{g})/P - \{0\} \mid \exists\, a \in A \text{ t. q. } ax - ye_n \subset V_{n-1} \}.$$

est non vide et appelé ensemble des plus hauts coefficients de x.

(iii) *Soient M un idéal à gauche de* $U(\mathfrak{g})/P$ *et* $x \in (U(\mathfrak{t})/I)\, M - \{0\}$. *Si y est un plus haut coefficient de x, alors M contient* $A^m y$ *pour* $m \in \mathbb{N}$ *suffisamment grand.*

(i) résulte de [8], 3.5 et de [2], 2.11.

(ii) Soit $x \in U(\mathfrak{t})/I-\{0\}$; il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $x \in V_p-\{0\}$. Soient $a \in A$ un élément non diviseur de zéro dans $U(\mathfrak{t})/I$ et n le plus petit entier tel que :

$$\exists r \in \mathbb{N} \mid a^r x \subset V_n.$$

Il est alors clair que $n \in F$ et que si $n \leqslant q \leqslant p$, alors $q \notin F$. Ainsi, d'après 4.2, pour r suffisamment grand, on a $A^r x \subset V_n$ et $A^r x \not\subset V_{n-1}$. L'unicité de n résulte de ce que $n \in F$ (*cf.* 4.2). La fin de (ii) résulte de la définition de n et de 4.2.

(iii) Soient x, y comme dans l'énoncé de (iii) et n le degré de x. Il existe $p \in \mathbb{N}$ et $m_1, \ldots, m_p \in M$ tels que l'on ait :

$$x=\sum_{i=1}^{p} e_i m_i.$$

D'après la définition de n, on a $p \geqslant n$ et si $n \leqslant q \leqslant p$ alors $q \not\subset F$ et d'après 4.2, il existe $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^r e_p \subset V_r$. Comme $n \in F$ on en déduit que l'on a : $A^r y e_n \subset e_n M+V_{n-1}$. D'où $A^r y \subset M$.

4.4. LEMME. — *On pose* $V'(P)=\{q \in \operatorname{Rat} U(\mathfrak{g})/P \mid \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma . q=0\}$. (*C'est une* $\Gamma(k)$-*orbite d'après* 2.10 *et* 3.9).

(i) *Soit* $q \in V'(P)$; *alors le plus grand idéal bilatère de* $U(\mathfrak{t})/I$ *inclus dans* $(U(\mathfrak{t})/I) q$ *est* 0.

(ii) *Soient* $q \in V'(P)$ *et* M *un idéal à gauche maximal de* $U(\mathfrak{g})/P$ *tels que* q *soit le plus grand idéal bilatère de* $U(\mathfrak{g})/P$ *inclus dans* M. *Alors le plus grand idéal bilatère de* $U(\mathfrak{t})/I$ *contenu dans* $(U(\mathfrak{t})/I) M$ *est* 0.

On adopte les notations de 4.2 et 4.3. On note N un idéal à gauche de $U(\mathfrak{g})/P$ tel que l'on ait $\bigcap_{\gamma \in \Gamma(k)} \gamma . N=0$.

On fera ensuite $N=q$ puis $N=M$. Soit $x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma(k)}(U(\mathfrak{t})/I) \gamma N-\{0\}$. On choisit $y \in U(\mathfrak{g})/P$ un plus haut coefficient de x. Les ensembles $\{\gamma \in \Gamma(k) \mid A \subset \gamma q\}$ et $\{\gamma \in \Gamma(k) \mid y \in \gamma N\}$ sont des fermés propres de $\Gamma(k)$. Par conséquent il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que l'on ait $A \not\subset \gamma' q$ et $y \notin \gamma' N$. D'après 4.3, il existe $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^r y \subset \gamma' N$. Pour $N=q$, on obtient ainsi une contradiction, d'où (i).

Si N est un idéal à gauche maximal de $U(\mathfrak{g})/P$, on a :

$$1 \in(U(\mathfrak{g})/P) y+N.$$

On multiplie à gauche par A^r et on obtient :

$$A^r \subset A^r y+N \subset N.$$

Ceci est en contradiction avec $\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma.N=0$; d'où (ii).

4.5. *Remarque*. — Nous avons établi l'équivalent du lemme 4.1 de [8].

4.6. LEMME ([8], 4.2). — *Soit $Q\in \mathrm{Rat}\ U(\mathfrak{g})$; on pose $\mathfrak{h}=\mathrm{stab}_{\mathfrak{t}}\ Q$. On suppose que l'on a $P=\bigcap_{\gamma\in\Gamma(k)}\gamma.Q$. Il existe un idéal bilatère J de $U(\mathfrak{h})$ tel que :*

$$J\cap U(\mathfrak{g})=Q,$$
$$\mathrm{ind}(J,\ \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{t})=I.$$

La démonstration est celle de [8], 4.2, grâce à 4.5, en se servant du fait que les idéaux rationnels de $U(\mathfrak{g})$ sont primitifs (*voir* 3.2).

4.7. THÉORÈME. — *Soient $\mathfrak{t}$ une algèbre de Lie, $I\in\mathrm{Rat}\ U(\mathfrak{t})$ et $\mathfrak{g}$ un idéal de $\mathfrak{t}$. On pose $P=I\cap U(\mathfrak{g})$ et on choisit $Q\in\mathrm{Rat}\ U(\mathfrak{g})$ tel que P soit le plus grand idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})$ qui soit $\mathfrak{t}$-invariant et inclus dans Q. On pose $\mathfrak{h}=\mathrm{stab}_{\mathfrak{t}}\ Q$ et alors, il existe $J\in\mathrm{Rat}\ U(\mathfrak{g})$ tel que l'on ait :*

$$J\cap U(\mathfrak{g})=Q;$$
$$\mathrm{ind}(J,\ \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{t})=I.$$

On suit [8], § 3. D'après 4.6 il existe un idéal bilatère de $U(\mathfrak{h})$, noté J', tel que l'on ait :

$$J'\cap U(\mathfrak{g})=Q;$$
$$\mathrm{ind}(J',\ \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{t})=I.$$

Cela entraîne, grâce à [8], 3.2, qu'il existe un idéal premier de $U(\mathfrak{h})$, noté J'', vérifiant :

$$J''\supset J';$$
$$\mathrm{ind}(J'',\ \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{t})=I.$$

D'après [8], 3.4, on a alors $J''\cap U(\mathfrak{g})=Q$.

Soit E l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{h})$ contenant J'' et d'intersection Q avec $U(\mathfrak{g})$. On a (*cf.* [9], 4.6) :

$$J''=\bigcap_{J\in E}J.$$

On pose :

$$E_1=\{J_1\in E\mid \mathrm{ind}(J_1,\ \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{t})\not\supseteq I\}$$

et :

$$E_2 = \{J_2 \in E \mid \operatorname{ind}(J_2, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t}) = I\}.$$

Rappelons que si $J_1 \in E_1$ d'après Blattner (*cf.* [7], 5.3.6), on a $\operatorname{ind}(J_1, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t}) \in \operatorname{Rat} U(\mathfrak{t})$ et d'après 4.1 cela entraîne que $\operatorname{ind}(J_1, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t}) \supset \check{I}$.

De plus, on a $E = E_1 \cup E_2$. D'après [8], 4.3, l'égalité $I = \operatorname{ind}(J'', \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t})$ entraîne que l'on a :

$$I = \operatorname{ind}(\textstyle\bigcap_{J \in E_1} J, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t}) \cap \operatorname{ind}(\textstyle\bigcap_{J \in E_1} J, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t}).$$

Comme l'on a $I \in \operatorname{Rat} U(\mathfrak{t})$ et $\operatorname{ind}(\bigcap_{J \in E_1} J, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t}) \supset \check{I}$ (*cf.* [8], 3.3), cela entraîne l'égalité :

$$I = \operatorname{ind}(\textstyle\bigcap_{J \in E_2} J, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t}).$$

Par conséquent E_2 est $\neq \emptyset$; soit $J \in E$; on a :

$$\operatorname{ind}(J, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{t}) = I;$$

$$J \cap U(\mathfrak{g}) = Q;$$

ainsi J remplit les conditions du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.). – *Linear algebraic groups*, Benjamin, 1969.

[2] BORHO (W.), GABRIEL (P.) and RENTSCHLER (R.). – Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie Algebren, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 357, Springer Verlag, 1973.

[3] BORHO (W.) und KRAFT (H.). – Uber die Gelfand-Kirillov-Dimension, *Math. Ann.*, vol. 220, 1976, p. 1-24.

[4] CONZE (N.). – Action d'un groupe algébrique dans l'espace des idéaux primitifs d'une algèbre enveloppante, *J. of Algebra*, vol. 25, 1973, p. 100-105.

[5] DIXMIER (J.). – Sur les représentations induites des algèbres de Lie, *J. Math. pures et appl.*, t. 50, 1971, p. 1-24.

[6] DIXMIER (J.). – Sur les idéaux génériques dans les algèbres enveloppantes, *Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 96, 1972, p. 17-36.

[7] DIXMIER (J.). – Algèbres enveloppantes, *Cahiers Scientifiques*, n° 37, Gauthier-Villars, 1974.

[8] DIXMIER (J.). – Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes, *J. of Algebra*, vol. 48, 1977, p. 96-112.

[9] MOEGLIN (C.). – Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes, *J. Math. pures et appl.* (à paraître).

[10] RENTSCHLER (R.). – Orbites dans le spectre primitif de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, *Séminaire d'algèbre Paul-Dubreil*, 1077/1978, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 740, Springer Verlag, 1979, P. 78-88.

[11] RENTSCHLER (R.). – L'injectivité de l'application de Dixmier pour les algèbres de Lie résolubles, *Inv. Math.*, vol. 23, 1974, p. 49-71.