BULLETIN DE LA S. M. F.

IVAR EKELAND

Oscillations de systèmes hamiltoniens non linéaires. III

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 297-330

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__297_0>

Bull. Soc. math. France.
109, 1981, p. 297-330.

OSCILLATIONS DE SYSTÈMES HAMILTONIENS NON LINÉAIRES. III

PAR

I. EKELAND (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on étudie des équations du type $\dot{x}=H'_p(x,p)+f(t)$, $\dot{p}=-H'_x(x,p)+g(t)$, où le hamiltonien H est convexe et coercif en (x,p), pouvant d'ailleurs croître très rapidement. On suppose $T>0$, on suppose f et g de période T, et on cherche des solutions T-périodiques de l'équation. Si par exemple l'origine est un équilibre, $H'(0,0)=0$, on montre qu'il en existe pour $T<2\pi\omega^{-1}$ et $\int_0^T (|f|+|g|)\,dt$ assez petit, où ω est la plus grande valeur propre de $H''(0,0)$.

ABSTRACT. — This paper studies equations of Hamiltonian type, $\dot{x}=H'_p(x,p)+f(t)$, $\dot{p}=-H'_x(x,p)+g(t)$, the Hamiltonian H being convex and coercive in (x,p), and being allowed very rapid growth. We are given some $T>0$, we take f and g to be T-periodic, and we look for T-periodic solutions. If for instance the origin is an equilibrium, $H'(0,0)=0$, we show that such solutions exist for $T<2\pi\omega^{-1}$ and $\int_0^T (|f|+|g|)\,dt$ sufficiently small, where ω is the largest eigenvalue of $H''(0,0)$.

I. Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons aux équations différentielles de Hamilton :

$$(\mathscr{H})\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}(t,x,p), & 1\leqslant i\leqslant n, \\[2mm] \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{-\partial H}{\partial x_i}(t,x,p), & 1\leqslant i\leqslant n. \end{cases}$$

(*) Texte reçu le 24 avril 1980, révisé le 12 janvier 1981.

I. EKELAND, C.E.R.E.M.A.D.E., Université Paris-Dauphine, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris Cedex 16.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/297/$ 5.00

Il est bien connu que ces équations modélisent un grand nombre de systèmes conservatifs de la mécanique ou de la physique. Les solutions périodiques de ces équations représentent les oscillations possibles du système.

Nous supposerons le second membre T-périodique en t, et nous chercherons des solutions T-périodiques des équations ($\mathscr{H}$). Dans le cas où le système est voisin d'un système linéaire, par exemple dans l'étude des petites oscillations au voisinage d'un équilibre, ce problème est traditionnellement attaqué par des méthodes de perturbation, auxquelles sont attachés les noms de LINDSTEDT et POINCARÉ ([9], [10]).

Ce n'est pas le point de vue que nous adopterons ici, puisque nous ne supposerons pas le système ($\mathscr{H}$) quasi linéaire. En d'autres termes, nos résultats s'appliqueront aux grandes oscillations de systèmes fortement non linéaires. La seule hypothèse d'importance que nous fassions sur le hamiltonien $H(t, x, p)$ est qu'il soit convexe par rapport à l'ensemble des variables $(x, p) \in R^{2n}$, et tende vers $+\infty$ à l'infini.

La signification physique de ces hypothèses est claire lorsque le hamiltonien est du type $H(t, x, p) = (1/2) p^2 + V(t, x)$, courant en mécanique classique. Si l'on note $\bar{x}(t)$ le point où le potentiel atteint son minimum en x à t fixé, on a la relation :

$$\forall x \in R^n, \left(\bar{x}(t) - x, \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right) \leqslant 0,$$

soit $(x - \bar{x}(t), \ddot{x}) \leqslant 0$ en tenant compte des équations ($\mathscr{H}$). Ainsi, l'hypothèse de convexité exprime que le système est soumis à des forces de rappel vers un centre. C'est précisément ce type de systèmes qui est susceptible d'osciller.

Ce problème a été étudié précédemment dans les articles [4] et [5]. Le premier étudie le cas où le hamiltonien est sous-quadratique, c'est-à-dire majoré par une expression de la forme $k(x^2 + p^2) + c$, le second étudie le cas où $0 \leqslant H(x, p) \leqslant K(x^2 + p^2)^\alpha$, avec $\alpha > 1$. Le présent travail étudie le cas général, c'est-à-dire ne limite plus la croissance du hamiltonien H. Le résultat principal est donné au paragraphe III; en voici une version simplifiée :

THÉORÈME. — *Supposons le hamiltonien continu en (t, x, p), convexe et coercif en (x, p). Supposons en outre que :*

$$\frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Min}_{x, p} H(t, x, p)\, dt > \operatorname{Inf}_{s > 0} \left\{ \operatorname{Max}_{x^2 + p^2 \leqslant s^2, 0 \leqslant t \leqslant T} H(t, x, p) - \frac{\pi^2}{T} s^2 \right\}.$$

Alors les équations ($\mathscr{H}$) *possèdent au moins une solution T-périodique, vérifiant une certaine estimation* a priori.

Au paragraphe IV on l'applique à divers cas particuliers : on retrouve le résultat de [4] (proposition 1), on généralise le résultat de [5] (proposition 2), et on établit des résultats nouveaux (propositions 3, 4 et théorème 6).

La méthode de résolution passe par un principe de moindre action dû à F. Clarke et l'auteur ([2], [3]), et exposé au paragraphe II. Pour l'étude du problème stationnaire, on renvoie à [1], [3], [6] et [7] et à la bibliographie de ces articles. Le problème non stationnaire a été étudié par Amann et Zehnder [16], moyennant l'hypothèse que le hamiltonien $H(t,x,p)$ soit équivalent à une forme quadratique, indépendante de t mais de signe quelconque, quand $x^2+p^2 \to \infty$. Plus récemment, Bahri et Berestycki (non publié) ont démontré l'existence d'une infinité de solutions T-périodiques distinctes pour certains problèmes de type $\ddot{x}+V'(x)=f(t)$.

L'auteur remercie le referee anonyme pour une suggestion qui l'a conduit à formuler le théorème III.6.

II. Dualité

On munit l'espace vectoriel R^{2n} de sa structure euclidienne habituelle, et d'un opérateur linéaire σ vérifiant :

$$ {}^t\sigma = -\sigma = \sigma^{-1}. \tag{1} $$

On vérifie aussitôt que σ est une isométrie :

$$ \forall (u,u') \in R^{2n}, \quad (\sigma u, \sigma u') = (u, {}^t\sigma\sigma u') = (u,u'), \tag{2} $$

$$ \forall u \in R^{2n}, \quad |\sigma u| = (\sigma u, \sigma u)^{1/2} = |u|. \tag{3} $$

On se donne une fonction $H:[0,T] \times R^{2n} \to R$, sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

$$ \text{(HO)} \quad \begin{cases} \forall u \text{ fixé, la fonction } t \to H(t,u) \text{ est mesurable,} \\ \quad\text{la fonction } t \to H(t,0) \text{ est intégrable,} \\ \forall t \text{ fixé, la fonction } u \to H(t,u) \text{ est convexe,} \\ \forall t \text{ fixé, } \operatorname{Min}\{H(t,u) \mid |u|=r\} \to +\infty \text{ quand } r \to \infty. \end{cases} $$

La fonction $u \to H(t,u)$ étant convexe et finie, est partout continue donc sous-différentiable. On notera $\partial H(t,u)$ son sous-différentiel en un point $u \in R^{2n}$. C'est une partie convexe compacte non vide de R^{2n}, qui se réduit au singleton $\{H'(t,u)\}$ dans le cas où la fonction $u \to H(t,u)$ est différentiable.

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$\dot{u}(t) \in \sigma \, \partial H(t, u(t)) \quad \text{p.p.} \tag{4}$$

Une solution de cette équation est une fonction absolument continue $u : [0, T] \to R^{2n}$, telle que l'inclusion (4) soit vérifiée pour presque tout $t \in [0, T]$. On s'intéresse plus particulièrement aux solutions définies sur $[0, T]$ tout entier, et vérifiant la condition aux limites :

$$u(0) = u(T). \tag{5}$$

Il s'agit de trouver des conditions suffisantes pour que de telles solutions existent. Nous commençons, suivant une méthode de dualité due à F. Clarke et l'auteur ([2], [3]) par transformer le problème aux limites (4), (5) en un problème variationnel.

On introduit, à t fixé, la fonction $v \to G(t, v)$, conjuguée de $u \to H(t, u)$ au sens de l'analyse convexe :

$$G(t, v) = \mathrm{Sup}_u \{(u, v) - H(t, u)\}. \tag{6}$$

On définit ainsi une fonction G sur $[0, T] \times R^{2n}$, à valeurs dans $R \cup \{+\infty\}$. Elle est mesurable en t, et convexe semi-continue inférieurement en v (voir [8] par exemple), et l'on a, en faisant $u = 0$ au second membre de la formule (6) :

$$\forall (t, v), \quad G(t, v) \geqslant -H(t, 0). \tag{7}$$

Nous faisons pour toute la suite l'hypothèse que voici :

(H2) il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de l'origine dans R^{2n} tel que, pour tout $\xi \in \mathscr{U}$, la fonction $h_\xi : [0, T] \to R$ définie ci-après soit intégrable :

$$h_\xi(t) = G(t, \xi).$$

La fonction $v \to G(t, v)$ est continue, et donc sous-différentiable, à l'intérieur de son domaine effectif $D(t) = \{v \mid G(t, v) < +\infty\}$. Entre les sous-différentiels de H et G, on dispose des relations de réciprocité de Fenchel :

$$v \in \partial H(t, u) \iff u \in \partial G(t, v), \tag{8}$$

l'une et l'autre appartenance étant caractérisées par la même équation :

$$H(t, u) + G(t, v) - (u, v) = 0. \tag{9}$$

On peut donc introduire un problème dit de Bolza en calcul des variations : chercher les extrémales de l'intégrale :

$$\int_0^T \left\{ \frac{1}{2}(v(t), \sigma \dot{v}(t)) + G(t, \dot{v}(t)) \right\} dt, \tag{10}$$

parmi les courbes $v:[0, T] \to R^{2n}$, fermées :

$$v(0) = v(T). \tag{11}$$

De manière plus précise, on introduit le sous-espace vectoriel fermé E de $L^1(0, T; R^{2n})$ défini par :

$$w \in E \Leftrightarrow \int_0^T w(t)\, dt = 0. \tag{12}$$

Bien entendu, on le munit de la norme induite :

$$\| w \| = \int_0^T | w(t) |\, dt. \tag{13}$$

On introduit un opérateur $\Pi : E \to L^\infty(0, T; R^{2n})$. Par définition, w est la primitive de w dont la valeur moyenne est nulle :

$$\frac{d}{dt}(\Pi w) = w, \tag{14}$$

$$\int_0^T \Pi w(t)\, dt = 0. \tag{15}$$

On vérifie aisément que Π est continu et commute avec σ. En intégrant par parties, on obtient la relation :

$$\forall (w, w') \in E \times E, \quad \int_0^T (w, \Pi \dot{w}')\, dt = -\int_0^T (w', \Pi w)\, dt. \tag{16}$$

On introduit ensuite deux fonctionnelles J et K sur l'espace E :

$$J(w) = \int_0^T \frac{1}{2}(\sigma w, \Pi w)\, dt = \frac{1}{2} \langle \Pi w, \sigma w \rangle_{(L^\infty, L^1)}, \tag{17}$$

$$K(w) = \int_0^T G(t, w(t))\, dt. \tag{18}$$

La fonctionnelle J est une forme quadratique, Fréchet-différentiable sur E. Sa dérivée en un point $\bar{w} \in E$ est un élément $J'(\bar{w})$ du dual topologique E^*. La valeur de cette forme linéaire sur un point $w \in E \subset L^1$ est donnée par :

(19) $$\langle J'(\bar{w}), w \rangle_{(E^*, E)} = \langle -\sigma \Pi \bar{w}, w \rangle_{(L^\infty, L^1)}.$$

La fonctionnelle K de la formule (18) peut s'écrire :

$$K(w) = \int_0^T [G(t, w(t)) + H(t, 0)]\, dt - \int_0^T H(t, 0)\, dt.$$

D'après l'hypothèse HO, la dernière intégrale est une constante finie. D'après l'inégalité (7), l'intégrande entre crochets est positive. On a donc affaire à un type de fonctionnelle qui a été beaucoup étudié, particulièrement par Rockafellar ([11] à [14]). On renvoie à l'ouvrage [8], paragraphe VIII.1, IX.2 et X.4 pour les principaux résultats les concernant. Notons pour l'instant que K est une fonction convexe et faiblement semi-continue inférieurement sur E.

Nous reformulons à présent le problème (10), (11) de la manière suivante : chercher les minimums locaux de la fonctionnelle $I : E \to R \cup \{+\infty\}$ définie par :

(20) $$I(w) = J(w) + K(w).$$

Dans la suite, nous ferons constamment l'hypothèse que $K \not\equiv +\infty$, c'est-à-dire que K est finie en un point $w_0 \in E$ au moins.

LEMME 1. — *On suppose $K \not\equiv +\infty$. Si I admet un minimum local en un point $\bar{w} \in E$, alors K est sous-différentiable en $\bar{w}$ et l'on a, dans le dual topologique E^* de E :*

(21) $$J'(\bar{w}) \in -\partial K(\bar{w}).$$

Démonstration. — Il découle de l'hypothèse que :

(22) $$K(\bar{w}) \leqslant I(w_0) - J(\bar{w}) < +\infty.$$

Prenons un point quelconque $w \in E$, et notons w_t le point courant du segment joignant $\bar{w}$ à w :

(23) $$w_t = t\bar{w} + (1-t)w \qquad \text{pour} \quad 0 < t < 1.$$

Supposons d'abord $K(w) < +\infty$. Comme K est convexe, on a $K(w_t) < +\infty$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. On considère alors la fonction $\varphi : [0, 1] \to R$ définie par :

$$\varphi(t) = J(w_t) + K(w_t). \tag{24}$$

C'est la somme d'une fonction dérivable et d'une fonction convexe. Elle est donc dérivable à gauche et à droite en tout point. Comme $t=0$ est un minimum local, la dérivée à droite en zéro doit être positive, ce qui donne (en notant d^+/dt cette dérivée à droite) :

$$\frac{d^+}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt}J(w_t) + \frac{d^+}{dt}K(w_t) \geqslant 0 \quad \text{en } t=0. \tag{25}$$

En conséquence :

$$\frac{d^+}{dt}K(w_t) \geqslant -\frac{d}{dt}J(w_t) \quad \text{en } t=0. \tag{26}$$

En utilisant de nouveau le fait que $K(w_t)$ est une fonction convexe de la variable réelle t, on obtient :

$$K(w) - K(\bar{w}) \geqslant \frac{d^+}{dt}K(w_t) \quad \text{en } t=0. \tag{27}$$

En rassemblant (26) et (27), et en calculant la dérivée de $J(w_t)$ en $t=0$, on obtient :

$$K(w) \geqslant K(\bar{w}) + \langle J'(\bar{w}), w - \bar{w} \rangle_{(E^*, E)}. \tag{28}$$

L'inégalité (28) est donc établie pour $K(w) < +\infty$. Si $K(w) = +\infty$, elle est automatiquement satisfaite. Elle a donc lieu dans tous les cas. Ceci signifie exactement que $-J'(\bar{w})$ est un sous-gradient pour K au point $\bar{w}$, ce qu'il fallait démontrer. ■

Soit $i : E \to L^1(0, T; R^{2n})$ l'injection canonique et $i^* : L^\infty(0, T; R^{2n}) \to E$ sa transposée. D'après le théorème de Hahn-Banach, toute forme linéaire continue sur E se prolonge en une forme linéaire continue sur L^1, donc i^* est surjective.

Notons R^{2n} le sous-espace de L^∞ formé par les fonctions constantes. C'est l'orthogonal de E :

$$w \in E \iff \langle \xi, w \rangle_{(L^\infty, L^1)} = 0, \qquad \forall \xi \in R^{2n}. \tag{29}$$

On en déduit que $i^{*-1}(0)=R^{2n}$. On peut donc identifier :

(30) $$E^*=L^\infty/R^{2n}.$$

LEMME 2. — *On suppose $K\not\equiv+\infty$. Soit $w^*\in L^\infty/R^{2n}$ un sous-gradient de K au point $\bar{w}\in E$, et $\bar{w}^*\in L^\infty$ un de ses représentants :*

(30) $$w^*=\{\bar{w}^*-\xi \mid \xi\in R^{2n}\}\subset L^\infty.$$

Alors il existe $\bar{\xi}\in R^{2n}$ tel que :

(31) $$\bar{w}^*(t)-\bar{\xi}\in\partial G(t,\bar{w}(t)) \quad p.p. \ sur\ [0,T].$$

Démonstration. — Par hypothèse, on a :

(32) $$K(w)\geqslant K(\bar{w})+\langle w^*,w-\bar{w}\rangle_{(E^*,E)}, \qquad \forall w\in E.$$

Ceci se traduit immédiatement par :

(33) $$K(w)\geqslant K(\bar{w})+\langle \bar{w}^*,w-\bar{w}\rangle_{(L^\infty,L^1)}, \qquad \forall w\in E.$$

Introduisons la fonction indicatrice $\delta_E:L^1\to R\cup\{+\infty\}$ de l'espace E. Elle est définie par $\delta_E(w)=0$ si $w\in E$, et $\delta_E(w)=+\infty$ si $w\notin E$.

Introduisons également la fonction $\bar{K}:L^1\to R\cup\{+\infty\}$ définie par :

(34) $$\bar{K}(w)=\int_0^T G(t,w(t))\,dt, \qquad \forall w\in L^1.$$

La formule (33) devient alors :

(35) $$(\bar{K}+\delta_E)(w)\geqslant(\bar{K}+\delta_E)(\bar{w})+\langle \bar{w}^*,w-\bar{w}\rangle_{(L^\infty,L^1)}, \qquad \forall w\in L^1.$$

En d'autres termes, $\bar{w}^*$ est un sous-gradient de $\bar{K}+\delta_E$ sur L^1, au point $\bar{w}$:

(36) $$\bar{w}^*\in\partial(\bar{K}+\delta_E)(\bar{w}).$$

D'après un résultat de J. P. AUBIN ([0], chapitre 14), une condition suffisante pour avoir l'égalité :

(37) $$\partial(\bar{K}+\delta_E)(w)=\partial\bar{K}(w)+\partial\delta_E(w), \qquad \forall w\in L^1$$

est que :

(38) $$0\in\mathrm{Int}(\mathrm{dom}\,\bar{K}-\mathrm{dom}\,\delta_E).$$

Dans cette formule, Int désigne l'intérieur (au sens L^1) et dom le domaine effectif, c'est-à-dire l'ensemble des points où la fonction considérée est finie. Il est clair que dom $\delta_E = E$.

Par abus de langage, notons R^{2n} le sous-espace de $L^1(0, T; R^{2n})$ constitué par les fonctions constantes. On sait que c'est un supplémentaire topologique de E, c'est-à-dire que $L^1 = E + R^{2n}$. Par ailleurs, l'hypothèse (H2) nous dit qu'il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de l'origine dans R^{2n} tel que :

$$\forall \xi \in \mathscr{U}, \quad \overline{K}(\xi) < +\infty. \tag{39}$$

Ainsi, $\mathscr{U} - E$ est contenu dans dom $\overline{K}$ − dom δ_E, et c'est un voisinage de l'origine dans L^1. La condition (38) est donc satisfaite, et l'égalité (37) a lieu. L'équation (36) devient :

$$\bar{w}^* \in \partial \overline{K}(\bar{w}) + \partial \delta_E(\bar{w}). \tag{40}$$

Mais on sait que :

$$\partial \overline{K}(\bar{w}) = \{ w^* \in L^\infty(0, T; R^{2n}) \mid w^*(t) \in \partial G(t, \bar{w}(t)) \text{ p.p.} \}, \tag{41}$$

$$\partial \delta_E(\bar{w}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \bar{w} \notin E, \\ R^{2n} & \text{si } \bar{w} \in E. \end{cases} \tag{42}$$

En reportant dans l'équation (40), on obtient le résultat annoncé. ■

Nous en déduisons la :

Proposition 3. — *Si $K \not\equiv +\infty$, et si $\bar{w}$ réalise un minimum local de la fonctionnelle I sur l'espace E, il existe une constante $\bar{\xi} \in R^{2n}$ telle que :*

$$u(t) = \sigma \Pi \bar{w}(t) - \bar{\xi} \tag{43}$$

est une fonction lipschitzienne de t, vérifiant l'équation (4) *et les conditions aux limites* (5).

Démonstration. — On applique le lemme 2, avec $w^* = -J'(\bar{w})$ et $\bar{w}^* = -\sigma \Pi \bar{w}$, grâce au lemme 1 et à la formule (19). On montre ainsi l'existence d'une constante $\bar{\xi} \in R^{2n}$ telle que :

$$\sigma \Pi \bar{w}(t) - \bar{\xi} \in \partial G(t, \bar{w}(t)) \quad \text{p.p.} \tag{44}$$

En posant $u(t)=\sigma\Pi\bar{w}(t)-\bar{\xi}$, on définit une fonction $u\in L^{\infty}(0, T; R^{2n})$, dont la dérivée-distribution $\dot{u}=-\sigma\bar{w}$ appartient aussi à $L^{\infty}(0, T; R^{2n})$, et qui vérifie :

$$u(T)-u(0)=\int_0^T \sigma\bar{w}(t)\,dt=0.$$

L'équation (44) s'écrit alors :

$$u(t)\in\partial G(t, -\sigma\dot{u}(t)) \quad \text{p.p.} \tag{45}$$

En utilisant la formule de réciprocité de Fenchel (8), on met cette équation sous la forme équivalente :

$$-\sigma\dot{u}(t)\in\partial H(t, u(t)) \quad \text{p.p.}$$

C'est le résultat désiré. ■

Dans la suite, nous nous servirons d'une forme plus générale de ce résultat.

PROPOSITION 4. — *Soit* $\varphi^*:[0, \infty]\to R$ *une fonction croissante et convexe. On suppose que pour un certain* $c\in R$, *il existe* $\bar{w}\in E$ *tel que* $I(\bar{w})<\infty$ *et que :*

$$\int_0^T \varphi^*(|\bar{w}(t)|)\,dt<c, \tag{46}$$

$$\left[w\in E \text{ et } \int_0^T \varphi^*(|w(t)|)\,dt\leqslant c\right] \;\Rightarrow\; I(w)\geqslant I(\bar{w}). \tag{47}$$

Alors il existe une constante $\bar{\xi}\in R^{2n}$ *telle que :*

$$u(t)=\sigma\Pi\bar{w}(t)-\bar{\xi}$$

est une fonction lipschitzienne de t, *solution du problème aux limites* (4) *et* (5).

Démonstration. — Le point crucial est l'inégalité stricte (46). Elle permet de trouver une fonction $f\in L^1(0, T; R)$ telle que :

$$f(t)>\varphi^*(|\bar{w}(t)|) \quad \text{p.p. sur } [0, T], \tag{48}$$

$$\int_0^T f(t)\,dt<c. \tag{49}$$

On peut toujours supposer que $\varphi^*(0)=0$ et $f(t)\geqslant\varepsilon>0$ presque partout. Pour chaque $t\in[0, T]$, définissons une boule fermée $B(t)$ dans R^n par la condition :

$$v \in B(t) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*(|v|) \leqslant f(t). \tag{50}$$

Des conditions sur φ^* il découle que c'est une fonction continue. Ainsi $B(t)$ est un voisinage de $\bar{w}(t)$ pour presque tout t. En outre, si on prend $\eta > 0$ assez petit pour que $0 \leqslant a \leqslant \eta$ implique que $\varphi^*(a) \leqslant \varepsilon$, on voit que $B(t)$ contient la boule de centre O et de rayon η pour presque tout t. Définissons alors une nouvelle intégrande $\bar{G}$ sur $[0, T] \times R^{2n}$ par :

$$\bar{G}(t, v) = \begin{cases} G(t, v) & \text{si} \quad v \in B(t), \\ +\infty & \text{si} \quad v \notin B(t). \end{cases} \tag{51}$$

Comme G satisfait l'hypothèse H2, il en sera de même de $\bar{G}$: le voisinage $\bar{\mathscr{U}}$ de l'origine correspondant est donné par $\bar{\mathscr{U}} = \{ \xi \in \mathscr{U} \mid |\xi| \leqslant \eta \}$.

On sait que $\bar{G} = (\bar{G}^*)^*$ (à t fixé). En d'autres termes, la fonction $v \to \bar{G}(t, v)$ est convexe conjuguée de la fonction $u \to \bar{H}(t, u)$ définie par :

$$\begin{aligned} \bar{H}(t, u) &= \operatorname{Sup} \{ (u, v) - \bar{G}(t, v) \mid v \in R^{2n} \} \\ &= \operatorname{Sup} \{ (u, v) - G(t, v) \mid v \in B(t) \}. \end{aligned} \tag{52}$$

On a de même :

$$H(t, u) = \operatorname{Sup} \{ (u, v) - G(t, v) \mid v \in R^{2n} \}. \tag{53}$$

Les sous-gradients du premier membre sont les points du second membre où la borne supérieure est atteinte. Appelons $r(t)$ le rayon de $B(t)$, solution de l'équation $\varphi^*(r(t)) = f(t)$. On obtient aussitôt :

$$[v \in \partial \bar{H}(t, u) \text{ et } |v| < r(t)] \quad \Rightarrow \quad [H(t, u) = \bar{H}(t, u) \text{ et } v \in \partial H(t, u)]. \tag{54}$$

En effet, le premier membre implique que v réalise un maximum local de la fonction $w \to (u, w) - G(t, w)$. Comme cette dernière est concave, ce maximum est global.

On va montrer à présent que le nouvel hamiltonien $\bar{H}$ vérifie les hypothèses HO. On a tout d'abord, en comparant les seconds membres des formules (52) et (53) :

$$\bar{H}(t, u) \leqslant H(t, u) < +\infty. \tag{55}$$

La fonction $\overline{H}$ est donc partout finie. Elle est convexe en u et mesurable en t. Montrons que, pour chaque t fixé, le minimum de $\overline{H}(t, u)$ sur la boule de rayon r tend vers $+\infty$ avec r.

Si tel n'était pas le cas, on pourrait trouver une suite $u_k \in R^{2n}$ telle que $|u_k| \to +\infty$ et $\overline{H}(t, u_k) \to h < +\infty$. Par compacité, on peut supposer que la suite $v_k = u_k |u_k|^{-1}$ tend vers un vecteur v de norme 1. Pour chaque k fixé, on aurait, la fonction H étant convexe en u :

$$(56) \quad \forall \lambda < |u_k|, \quad H(t, \lambda v_k) \leqslant \frac{\lambda}{|u_k|} H(t, u_k) + \left[1 - \frac{\lambda}{|u_k|}\right] H(t, 0).$$

D'où aussitôt :

$$(57) \quad \forall \lambda > 0, \quad H(t, \lambda v_k) \to H(t, 0) \quad \text{quand} \quad k \to \infty.$$

En particulier, $H(t, \lambda v) = H(t, 0)$ pour tout $\lambda > 0$. Ceci est impossible puisque $H(t, u)$ a été supposé tendre vers $+\infty$ avec $|u|$.

Pour achever de montrer que $\overline{H}$ vérifie l'hypothèse HO il ne reste plus qu'à examiner la fonction $t \to \overline{H}(t, 0)$. On a déjà vu en (55) que :

$$(58) \quad \overline{H}(t, 0) \leqslant H(t, 0), \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour obtenir une minoration, on se sert de la fonction $\bar{w}$ de l'énoncé. On a :

$$(59) \quad K(\bar{w}) = \int_0^T G(t, \bar{w}(t))\, dt < +\infty.$$

Par ailleurs, en comparant (48) et (50) :

$$(60) \quad G(t, \bar{w}(t)) = \overline{G}(t, \bar{w}(t)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Enfin, en se servant de la formule de Fenchel :

$$(61) \quad \overline{H}(t, 0) = \mathrm{Sup}_v \{ -\overline{G}(t, v) \} \geqslant -\overline{G}(t, \bar{w}(t)) = -G(t, \bar{w}(t)).$$

On a ainsi majoré et minoré $\overline{H}(t, 0)$ par une fonction intégrable. La fonction $t \to \overline{H}(t, 0)$ est donc elle-même intégrable, et on a vérifié l'hypothèse HO pour la fonction $\overline{H}$.

Posons alors, pour chaque $w \in E$:

(62) $$\overline{K}(w) = \int_0^T \overline{G}(t, \bar{w}(t))\, dt,$$

(63) $$\overline{I}(w) = J(w) + \overline{K}(w).$$

On a $\overline{K}(\bar{w}) = K(\bar{w}) < +\infty$, et l'hypothèse (47) nous assure que $\bar{w}$ minimise la fonctionnelle $\overline{I}$ sur E tout entier. Comme $\overline{H}$ vérifie l'hypothèse HO on peut appliquer la proposition 3. On conclut donc à l'existence d'une constante $\bar{\xi} \in R^{2n}$ telle que la fonction :

(64) $$u(t) = \sigma \Pi \bar{w}(t) - \bar{\xi},$$

vérifie les équations :

(65) $$\dot{u}(t) \in \sigma\, \partial \overline{H}(t, u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T],$$

(66) $$u(0) = u(T).$$

On a donc $-\sigma \dot{u}(t) \in \partial \overline{H}(t, u(t))$, avec $|-\sigma u(t)| = |\bar{w}(t)| < r(t)$ d'après (48). Grâce à la formule (54), on conclut que :

(67) $$H(t, u(t)) = \overline{H}(t, u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T],$$

(68) $$-\sigma \dot{u}(t) \in \partial H(t, u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

Ceci termine la démonstration. ■

III. EXISTENCE

Nous renforçons légèrement les hypothèses faites sur le hamiltonien $H : [0, T] \times R^{2n} \to R$ au paragraphe précédent :

(H1) $$\begin{cases} \forall u \text{ fixé, la fonction } t \to H(t, u) \text{ est mesurable;} \\ \qquad \text{la fonction } t \to H(t, 0) \text{ est intégrable;} \\ \forall t \text{ fixé, la fonction } u \to H(t, u) \text{ est convexe finie;} \\ \forall t \text{ fixé, } r^{-1} \operatorname{Min}\{H(t, u) \mid |u| = r\} \to +\infty \text{ quand } r \to \infty. \end{cases}$$

Ceci implique que la fonction convexe conjuguée G de H est partout finie :

(1) $$\forall (t, v), \quad G(t, v) = \operatorname{Sup}\{(u, v) - H(t, u) \mid u \in R^{2n}\} < +\infty.$$

On posera, pour tout $\xi \in R^{2n}$:

(2) $$h_\xi(t)=G(t, \xi).$$

La fonction $h_\xi : [0, T] \to \overline{R}$ est toujours mesurable. Nous faisons la même hypothèse qu'au paragraphe précédent :

(H2) il existe un voisinage $\mathscr{U}$ de l'origine dans R^{2n} tel que, pour tout $\xi \in \mathscr{U}$, la fonction h_ξ soit intégrable.

Ceci assure bien entendu que $K(0)=\int_0^T h_0(t)\,dt$ est fini, et donc que $K \not\equiv +\infty$. On pourra donc appliquer la proposition II.4 pour caractériser les solutions de l'équation différentielle.

(4) $$\dot{u}(t) \in \sigma\, \partial H(t, u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T]$$

vérifiant les conditions aux limites :

(5) $$u(0)=u(T).$$

Introduisons une hypothèse supplémentaire :

(H3) $$\forall s \geqslant 0, \quad \operatorname{Sup}\{ H(t, u) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, |u| \leqslant s \} = \varphi(s) < +\infty.$$

On a ainsi défini une fonction $\varphi : R_+ \to R$. Étudions d'abord ses propriétés :

LEMME 1. — *La fonction φ est convexe, croissante, semi-continue inférieurement, et $\varphi(s)/s \to +\infty$ quand $s \to +\infty$.*

Démonstration. — Définissons une fonction $\psi : R^{2n} \to R$ par :

(6) $$\psi(u)=\operatorname{Sup}\{ H(t, v) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, |v| \leqslant |u| \}.$$

Il est clair que $\psi(u)=\varphi(|u|)$. Mais on peut mettre ψ sous une autre forme :

(7) $$\psi(u)=\operatorname{Sup}\{ H(t, Au) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, A \in \mathscr{L}(R^n), \|A\| \leqslant 1 \}.$$

Il apparaît alors immédiatement que ψ est l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions convexes s.c.i. de u; elle est donc elle-même s.c.i.

En restreignant à une demi-droite issue de l'origine, on en déduit que φ est convexe s.c.i. La croissance résulte immédiatement de la définition.

On a $\varphi(s) \geqslant \operatorname{Sup}\{H(0, v) \mid |v|=s\}$. D'après l'hypothèse H1, il en découle aussitôt que $\varphi(s)/s$ tend vers $+\infty$ quand $s \to +\infty$. ■

Nous aurons également besoin des propriétés de la fonction conjuguée φ^* de φ :

(8) $$\varphi^*(a) = \operatorname{Sup}_{s \geqslant 0}\{as - \varphi(s)\}.$$

LEMME 2. — *La fonction φ^* est convexe, partout finie et continue. Sa restriction aux $a \geqslant 0$ est croissante, et :*

(9) $$\varphi^*(a)/a \to +\infty \quad \textit{quand} \quad a \to +\infty.$$

Démonstration. — Le fait que $\varphi^* : R \to R \cup \{+\infty\}$ soit convexe semi-continue inférieurement résulte de la théorie générale. Pour $a \leqslant 0$, on a $\varphi^*(a) = -\varphi(0)$ puisque φ est croissante sur R_+. Pour $a>0$, la borne supérieure est atteinte au second membre de la formule (8), puisque $\varphi(s)/s \to +\infty$ quand $s \to +\infty$ et que φ est s.c.i. On a donc $\varphi^*(a) < +\infty$ partout. On sait que toute fonction convexe finie sur R est continue.

La croissance de φ^* résulte de sa définition. Si $b \geqslant a \geqslant 0$, on a $bs \geqslant as$ pour tous les $s \geqslant 0$, et donc $\varphi^*(b) \geqslant \varphi^*(a)$ en reportant dans la formule (8). On notera que :

(10) $$\varphi^*(0) = \operatorname{Sup}_{s \geqslant 0} - \varphi(s) = -\varphi(0).$$

Comme φ^* est convexe, $\varphi^*(a)/a$ est une fonction croissante de a. Montrons qu'elle tend vers $+\infty$ avec a. Si tel n'était pas le cas, elle convergerait vers une limite finie l. Prenons alors $s \geqslant l$, et cherchons $\varphi(s)$ par la formule de Fenchel $\varphi(s) = \varphi^{**}(s)$. On aurait :

(11) $$sa - \varphi^*(a) = a(s - \varphi^*(a)/a) \geqslant a(s-l)$$

et donc :

(12) $$\varphi(s) = \operatorname{Sup}_a\{sa - \varphi^*(a)\} \geqslant \operatorname{Sup}_a (s-l)a = +\infty,$$

ce qui contredirait l'hypothèse H3. D'où le résultat. ■

D'après le critère de compacité de Dunford-Pettis ([15], II.2), pour tout réel c, l'ensemble :

(13) $$B(c) = \left\{ w \in E \,\middle|\, \int_0^T \varphi^*(|w(t)|)\,dt \leqslant c \right\}$$

est une partie faiblement compacte de L^1. Elle est non vide dès que $c \geqslant T \operatorname{Min} \varphi^* = -T\varphi(0)$.

LEMME 3. — *Pour tout $c \geqslant -\varphi(0)T$, la fonction J atteint son minimum sur $B(c)$ en un point $\bar{w}_c$. On a :*

$$\text{Min}\{J(w) \mid w \in B(c)\} = J(\bar{w}_c). \tag{14}$$

Démonstration. — Rappelons d'abord la définition de J :

$$J(w) = \frac{1}{2}\langle \sigma \Pi w, w \rangle_{(L^\infty, L^1)}. \tag{15}$$

Soit $w_n \in B(c)$ une suite minimisante :

$$J(w_n) \to \text{Inf}\{J(w) \mid w \in B(c)\}. \tag{16}$$

Comme $B(c)$ est faiblement compacte, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que w_n converge faiblement vers un $\bar{w}_c$ dans $B(c)$:

$$w_n \to \bar{w}_c \quad \text{pour} \quad \sigma(L^1, L^\infty). \tag{17}$$

On en déduit aussitôt que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$W_n(t) = \int_0^t w_n(s)\,ds \to \int_0^t \bar{w}_c(s)\,ds = W(t). \tag{18}$$

En d'autres termes, les fonctions continues W_n convergent simplement vers la fonction W sur $[0, T]$. Nous allons utiliser le théorème d'Ascoli pour montrer que cette convergence est uniforme. Tout d'abord, il est clair que $B(c)$ est un borné de L^1, et donc que la suite W_n est uniformément bornée sur $[0, T]$.

Pour montrer que la suite W_n est équicontinue, nous allons utiliser une autre caractérisation des parties faiblement compactes de L^1. De manière précise, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que les conditions $w \in B(c)$ et $\mu(A) < \delta$ (où μ est la mesure de Lebesgue) entraînent l'inégalité $\int_A |w(t)|\,dt < \varepsilon$.

Ceci est une propriété d'intégralité uniforme que l'on trouvera par exemple en [15], II.2. Redémontrons-la pour la commodité du lecteur. Choisissons d'abord $d > 0$ assez grand pour que $\varphi^*(a)/a > 2c/\varepsilon$ pour tout $a > d$. Nous avons alors, pour toute fonction $w \in B(c)$, en notant D l'ensemble où $|w(t)| \geqslant d$:

$$\int_D |w(t)|\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2c}\int_D \varphi^*(|w(t)|)\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2c}c = \frac{\varepsilon}{2}.$$

En prenant $\delta=\varepsilon/2d$ et $\mu(A)\leqslant\delta$, on obtient la condition cherchée :

$$\int_A |w(t)|\,dt \leqslant \int_D |w(t)|\,dt+\mu(A)d \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2d}d=\varepsilon.$$

Si donc on prend t_0 quelconque dans $[0, T]$, et t vérifiant $|t-t_0|<\delta$, on obtient :

$$|W_n(t)-W_n(t_0)| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} w_n(s)\,ds\right| \leqslant \varepsilon.$$

La suite W_n est bien équicontinue. Elle converge donc uniformément, et il en sera de même de la suite des Πw_n, reliés aux W_n par une condition de centrage :

$$\Pi w_n(t)=W_n(t)-\frac{1}{T}\int_0^T W_n(t)\,dt.$$

Finalement :

(19) $$\Pi w_n \to \Pi \bar{w}_c \quad \text{uniformément sur } [0, T].$$

En reportant (17) et (19) dans la formule (15), et en tenant compte du fait que la suite w_n est bornée dans L^1, on obtient :

(20) $$J(w_n) \to J(\bar{w}_c).$$

En comparant (16) et (20), avec $\bar{w}_c\in B(c)$, on conclut que le point $\bar{w}_c$ réalise le minimum. ■

LEMME 4. — *Pour tout $c>-T\varphi(0)$, la valeur du minimum est :*

(21) $$J(\bar{w}_c)=-\frac{T^2}{4\pi}a^2 \qquad \text{où } a>0 \text{ vérifie } \varphi^*(a)=\frac{c}{T}.$$

Démonstration. — Nous allons utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Il nous faut commencer par l'établir dans ce cas particulier.

Je dis que $B(c)$ ne rencontre pas le demi-espace ouvert Ω de E défini par :

(22) $$\Omega=\left\{ w\in E \mid \langle J'(\bar{w}_c),\, w-\bar{w}_c\rangle_{(E^*,E)}<0\right\}.$$

En effet, si on avait un $\bar{w}\in B(c)\cap\Omega$, le segment $[\bar{w}, \bar{w}_c]$ serait tout entier contenu dans $B(c)$ par raison de convexité, et la restriction de J à ce segment aurait une dérivée strictement négative en $\bar{w}_c$, qui ne saurait donc être un minimum.

On se place maintenant dans l'espace $E \times R$, où l'on considère le convexe fermé :

(23) $$A = \left\{ (w, \alpha) \mid w \in E, \alpha \geqslant \int_0^T \varphi^*(|w(t)|)\,dt \right\}$$

et le convexe ouvert :

(24) $$C = \{ (w, \alpha) \mid w \in \Omega, \alpha < c \}.$$

Ils ne se rencontrent pas. On peut donc les séparer par un hyperplan $\mathscr{H}$. Je prétends qu'il n'est pas vertical. En effet, s'il l'était, il séparerait l'espace $E \times R$ en deux demi-espaces ouverts de la forme $E_1 \times R$ et $E_2 \times R$, avec $\Omega \subset E_2$ et $A \subset E_1 \times R$. Donc :

$$\int_0^T \varphi^*(|w(t)|)\,dt = +\infty,$$

pour tout w appartenant à l'ouvert E_1. Mais il est clair que $L^\infty \cap E$ est dense dans E, si bien que E_1 contient au moins une fonction $w \in L^\infty$, pour laquelle l'intégrale $\int_0^T \varphi^*(|w(t)|)\,dt$ sera finie. D'où une contradiction, et le résultat.

L'hyperplan $\mathscr{H}$ n'étant pas vertical est le graphe d'une fonction affine continue :

(25) $$w \to \langle w^*, w - \bar{w}_c \rangle_{(E^*, E)} + c.$$

On remarque qu'il passe par le point de contact $(\bar{w}_c, c)$ de A et de C. Comme il est situé au-dessus de C, on a $w^* = \lambda J'(\bar{w}_c)$, où $\lambda \leqslant 0$ est un multiplicateur de Lagrange. Comme il est au-dessous de A, w^* est un sous-gradient de la fonction $w \to \int_0^T \varphi^*(|w|)\,dt$ au point $\bar{w}_c$.

Ces sous-gradients ont été calculé au lemme I.2 : il suffit de poser $H(t, u) = \varphi(|u|)$, d'où $G^*(t, v) = \varphi^*(|v|)$. Finalement, on a montré l'existence d'une constante $\lambda' = -\lambda \geqslant 0$ et d'un vecteur $\xi \in R^{2n}$ tels que (avec $\psi(u) = \varphi(|u|)$) :

(26) $$\lambda' \sigma \Pi \bar{w}_c(t) - \bar{\xi} \in \partial\psi^*(\bar{w}_c(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T].$$

En procédant comme à la proposition I.3, nous mettons cette équation sous la forme équivalente :

(27) $$u_c(t) = \lambda' \sigma \Pi \bar{w}_c(t) - \bar{\xi} \quad \text{p.p.},$$

(28) $$\dot{u}_c(t) = \lambda' \sigma \partial\psi(u_c(t)) \quad \text{p.p.},$$

(29) $$u_c(T) = u_c(0).$$

A partir de maintenant, nous supposerons que la fonction $\varphi(s)$ est dérivable pour $s>0$. Le résultat une fois établi dans ce cas, il s'étendra aisément au cas général puisqu'une fonction convexe continue peut être approchée uniformément sur R_+ par une fonction convexe C^1.

L'équation différentielle (28) est celle d'un système hamiltonien autonome, où le hamiltonien est $\psi(u) = \varphi(|u|)$. On sait que les solutions vérifient $\varphi(|u(t)|) = \text{Cte}$, c'est-à-dire que les trajèctoires sont des courbes tracées sur les hypersurfaces de niveau de la fonction $u \to \varphi(|u|)$. On sait même ([7], § 4) que ces trajectoires ne dépendent que des hypersurfaces de niveau, et non de la fonction elle-même. En d'autres termes, deux hamiltoniens ayant en commun une même hypersurface de niveau donnent lieu aux mêmes trajectoires tracées sur celle-ci. Bien entendu, les solutions elles-mêmes, c'est-à-dire la loi du temps, peuvent être différentes.

Ici, les hypersurfaces de niveau $\varphi(|u|) = \text{Cte}$ sont des sphères. Ce sont aussi celles de l'oscillateur harmonique. Les trajectoires sont donc des arcs de grand cercle, et les solutions sont de la forme :

(30) $$u_c(t) = \xi \cos \alpha(t) + \sigma(\xi) \sin \alpha(t) \qquad \text{où} \quad \xi \in R^{2n}.$$

En reportant dans l'équation (28), on trouve $\dot{\alpha}(t) = \text{Cte}$, d'où $\alpha(t) = \omega(t - t_0)$, avec $\alpha_0 \in R$ et $t_0 \in R$. On détermine ω par la condition (29). Finalement, on obtient :

(31) $$u_c(t) = \zeta \cos \frac{2\pi k}{T}(t - t_0) + \sigma(\zeta) \sin \frac{2\pi k}{T}(t - t_0) \qquad \text{où} \quad k \in Z.$$

On en tire :

(32) $$\bar{w}_c(t) = \frac{2\pi k}{\lambda' T} \sigma(\zeta) \sin \frac{2\pi k}{\lambda' T}(t - t_0) - \frac{2\pi k}{\lambda' T} \zeta \cos \frac{2\pi k}{\lambda' T}(t - t_0).$$

On prendra dorénavant $t=0$, et on posera $-2k\pi(\lambda' T)^{-1}\zeta = \eta$, ce qui donne :

(33) $$\bar{w}_c(t) = \eta \cos \frac{2k\pi}{T} t - \sigma(\eta) \sin \frac{2k\pi}{T} t.$$

Je prétends que $\bar{w}_c$ sature la contrainte :

$$\int_0^T \varphi^*\left(\left|\eta \cos\frac{2k\pi}{T}t-\sigma(\eta)\sin\frac{2k\pi}{T}t\right|\right)dt=c. \tag{34}$$

S'il en était autrement, l'intégrale serait strictement inférieure à c, puisque $\bar{w}_c \in B(c)$, et $s\bar{w}_c$ continuerait à appartenir à $B(c)$ pour $s>1$ suffisamment petit. Or la fonction à minimiser, $J(w)$, est homogène de degré deux, et $J(\bar{w}_c)<J(0)=0$ dès que $c>-\varphi(0)T$. On aurait donc une contradiction :

$$J(s\bar{w}_c)=s^2 J(\bar{w}_c)<J(\bar{w}_c)\leqslant J(s\bar{w}_c). \tag{35}$$

Reste à déterminer la valeur de k. Ce sera celle qui minimisera la fonction :

$$\begin{aligned} J(\bar{w}_c)&=\int_0^T -\frac{1}{2}(\bar{w}_c, \sigma\Pi\,\bar{w}_c)\,dt \\ &=\int_0^T \frac{1}{2}\,\frac{T}{2k\pi}\left(|\eta|^2\cos^2\frac{2k\pi}{T}t+|\sigma(\eta)|^2\sin^2\frac{2k\pi}{T}t\right)dt \\ &=\int_0^T\frac{1}{2}\,\frac{T}{2k\pi}|\eta|^2\,dt=\frac{T^2}{4\pi}|\eta|^2k^{-1}, \end{aligned} \tag{36}$$

sous la contrainte (34), qui s'écrit aussi, après un calcul facile :

$$\int_0^T\varphi^*(|\eta|)\,dt=T\varphi^*(|\eta|)=c. \tag{37}$$

Comme k n'invervient pas dans cette contrainte, la valeur optimale dans l'expression (36) est immédiatement identifiée : $k=-1$. D'où la valeur de $\bar{w}_c$, aux translations en temps près :

$$\bar{w}_c(t)=\eta\cos\frac{2\pi}{T}t-\sigma(\eta)\sin\frac{2\pi}{T}t, \tag{38}$$

où η est un vecteur de R^{2n} vérifiant :

$$T\varphi^*(|\eta|)=c. \tag{39}$$

La valeur du minimum de J sur $B(c)$ s'en déduit aussitôt, donnant le résultat annoncé :

$$J(\bar{w}_c)=-\frac{T^2}{4\pi}|\eta|^2 \qquad \text{avec} \quad \varphi^*(|\eta|)=\frac{c}{T}. \quad \blacksquare \tag{40}$$

En d'autres termes, le $|\eta|$ de la formule (40), ou le a de la formule (21), représentent la pente de la tangente menée du point de coordonnées $(0, -c/T)$ à la courbe d'équation $y=\varphi^*(x)$ dans le plan R^2.

On peut calculer explicitement $J(\bar{w}_c)$ dans des cas simples. En voici un :

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(s)=\frac{1}{p}k^p s^p \qquad \text{avec} \quad 1<p<\infty,\\ &\varphi^*(a)=\frac{1}{q}k^{-q}s^q \qquad \text{avec} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\\ &J(\bar{w}_c)=-k^2(qc)^{2/q}T^{2/p}(4\pi)^{-1}.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas général, on remarquera que φ^* étant convexe et croissante sur $[0, +\infty)$, doit être strictement croissante sur $[s_0, +\infty)$, où $s_0=\operatorname{Sup}\{s \mid \varphi^*(s)=\varphi^*(0)\}$. L'équation $\varphi^*(a)=c/T$ a donc une solution au plus dès que $c>T\varphi^*(0)=-T\varphi(0)$. Par ailleurs, elle a une solution au moins puisque φ^* est finie (lemme 4), donc continue, et tend vers l'infini quand $s \to +\infty$ (hypothèse H3). Ainsi, dès que $c>-T\varphi(0)$, l'équation $\varphi^*(a)=c/T$ détermine a de manière unique.

Énonçons maintenant notre résultat principal :

THÉORÈME 5. — *Hypothèses* H1, H2 *et* H3. *On suppose que :*

$$(42)\qquad \int_0^T h_0(t)\,dt<\operatorname{Sup}_{a\geqslant 0}\left\{-\frac{T^2}{4\pi}a^2+T\varphi^*(a)\right\}.$$

Alors le problème aux limites (4) *et* (5) *a au moins une solution* u, *lipschitzienne, vérifiant l'estimation* a priori *:*

$$(43)\qquad \int_0^T \varphi^*(|\dot{u}(t)|)\,dt\leqslant T\varphi^*(\bar{a}),$$

où $\bar{a}$ *est déterminé par :*

$$(44)\qquad \bar{a}=\operatorname{Inf}\left\{a\geqslant 0 \mid -\frac{T^2}{4\pi}a^2+T\varphi^*(a)\geqslant \int_0^T h_0(t)\,dt\right\}.$$

Démonstration. — Grâce à (42), il existe $c>-T\varphi(0)$ tel que :

$$(45)\qquad \int_0^T h_0(t)\,dt<-\frac{T^2}{4\pi}a^2+c \qquad \text{avec} \quad \varphi^*(a)=\frac{c}{T}.$$

On se pose alors le problème de minimiser la fonctionnelle I sur l'ensemble $B(c)$. En revenant aux définitions, ce problème d'optimisation s'écrit :

(46) $$\text{Minimiser } J(w)+K(w),$$

(47) $$\text{pour } w \in E \quad \text{et} \quad \int_0^T \varphi^*(|w(t)|)\,dt \leqslant c.$$

Montrons à présent que ce problème possède une solution $\bar{w}$. Soit $w_n \in B(c)$ une suite minimisante :

(48) $$\lim_n \{J(w_n)+K(w_n)\} = \operatorname{Inf}\{J(w)+K(w) \mid w \in B(c)\}.$$

Comme $B(c)$ est faiblement compacte, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que w_n converge faiblement vers un $\bar{w} \in B(c)$:

(49) $$w_n \to \bar{w} \quad \text{pour} \quad \sigma(L^1, L^\infty).$$

On a déjà vu (lemme 3) que :

(50) $$\lim_n J(w_n) = J(\bar{w}).$$

On a vu aussi (§II) que K est faiblement s.c.i. :

(51) $$\lim_n \inf K(w_n) \geqslant K(\bar{w}).$$

En ajoutant ces deux relations, on obtient :

(52) $$J(\bar{w})+K(\bar{w}) \leqslant \lim_n \inf\{J(w_n)+K(w_n)\}.$$

En faisant intervenir l'égalité (48), et en tenant compte du fait que $\bar{w}$ appartient à $B(c)$, on obtient enfin :

(53) $$J(\bar{w})+K(\bar{w}) = \operatorname{Inf}\{J(w)+K(w) \mid w \in B(c)\}.$$

Ainsi $\bar{w}$ est une solution du problème (46), (47). Je prétends maintenant qu'il ne sature pas la contrainte (47), c'est-à-dire qu'au point $\bar{w}$ l'inégalité est stricte.

En effet, de l'hypothèse H3 découle l'inégalité :

(54) $$H(t, u) \leqslant \varphi(|u|), \qquad \forall (t, u) \in [0, T] \times R^{2n}$$

qui se transforme par dualité en :

(55) $$G(t, v) \geqslant \varphi^*(|v|), \qquad \forall (t, v) \in [0, T] \times R^{2n}.$$

Ceci donne aussitôt :

$$K(w) \geqslant \int_0^T \varphi^*(|w(t)|), \qquad \forall w \in E. \tag{56}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 4, on a :

$$J(w) \geqslant -\frac{T^2}{4\pi} a^2, \qquad \forall w \in B(c). \tag{57}$$

En évaluant (56) et (57) au point $\bar{w}$, et en ajoutant membre à membre, on trouve :

$$I(\bar{w}) \geqslant -\frac{T^2}{4\pi} a^2 + \int_0^T \varphi^*(|\bar{w}(t)|)\,dt. \tag{58}$$

Mais n'oublions pas que $\bar{w}$ est supposé minimiser I sur $B(c)$. On doit donc avoir $I(\bar{w}) \leqslant I(w)$ pour chaque $w \in B(c)$, et en particulier :

$$I(\bar{w}) \leqslant I(0) = \int_0^T G(t, 0)\,dt = \int_0^T h_0(t)\,dt. \tag{59}$$

En comparant (58) et (59), on obtient :

$$\int_0^T \varphi^*(|\bar{w}(t)|)\,dt \leqslant \frac{T^2}{4\pi} a^2 + \int_0^T h_0(t)\,dt. \tag{60}$$

Soit d'après (45) :

$$\int_0^T \varphi^*(|\bar{w}(t)|)\,dt < c. \tag{61}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la proposition I.4 : la fonction $u(t) = \sigma \Pi \bar{w}(t) - \bar{\xi}$ est une solution du problème aux limites (4), (5). En outre $\bar{w} = \sigma \dot{u}$ vérifie la relation (61), quel que soit c vérifiant l'inégalité (45). En prenant la borne inférieure des c possibles, avec $\varphi^*(a) = c/T$, on obtient l'estimation (43). ■

Rappelons que $h_0(t) = G(t, 0) \geqslant \varphi^*(0)$. La condition suffisante (42) nécessite donc que :

$$T\varphi^*(0) < \operatorname{Sup}_{a>0} \left\{ -\frac{T^2}{4\pi} a^2 + T\varphi^*(a) \right\}. \tag{62}$$

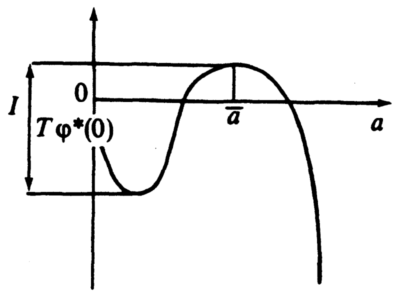

Fig. 1. — On a représenté le graphe de $-(T^2/4\pi)a^2+T\varphi^*(a)$. Il y aura une solution tant que $\int_0^T h_0\,dt$ tombe dans l'intervalle I indiqué verticalement.

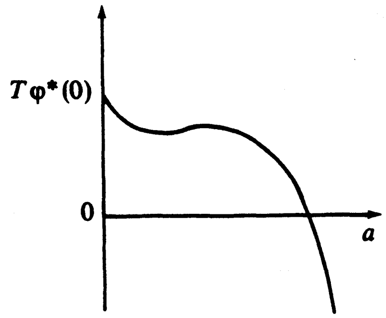

Fig. 2. — Quand le graphe de $-(T^2/4\pi)a^2+T\varphi^*(a)$ se présente ainsi, le théorème 5 ne s'applique pas.

En d'autres termes, la méthode exposée ici ne s'applique qu'aux cas où la fonction $a \to -(T^2/4\pi)a^2+T\varphi^*(a)$, pour $a \geqslant 0$, n'atteint pas son maximum à l'origine (*fig.* 1).

L'estimation (43), compte tenu de (44), s'écrit aussi :

$$\int_0^T \varphi^*(|u(t)|)\,dt < \frac{T^2}{4\pi}\bar{a}^2 + \int_0^T h_0(t)\,dt, \tag{63}$$

où $\bar{a}$ est la plus petite racine de l'équation :

$$\int_0^T h_0(t)\,dt = -\frac{T^2}{4\pi}a^2 + T\varphi^*(a). \tag{64}$$

Pour conclure ce paragraphe, donnons du théorème 5 une formulation portant directement sur H et φ, et non pas sur H^* et φ^*. Cela donne :

THÉORÈME 6. — *Hypothèses* H1, H2 *et* H3. *On suppose que :*

$$(65)\qquad -\frac{1}{T}\int_0^T h_0(t)\,dt > \mathrm{Inf}_{s\geqslant 0}\left\{\varphi(s)-\frac{\pi^2}{T}s^2\right\}.$$

Alors le problème aux limites (4), (5) *a au moins une solution lipschitzienne u, vérifiant l'estimation* a priori (43), (44) *ou* (63), (64).

Démonstration. — Il suffit de démontrer que les conditions (42) et (65) sont équivalentes. Il est plus commode de montrer que leurs négations le sont. Nions donc (42) :

$$(66)\qquad \int_0^T h_0(t)\,dt \geqslant -\frac{T^2}{4\pi^2}a^2 + T\varphi^*(a), \qquad \forall a\geqslant 0,$$

que nous écrivons :

$$(67)\qquad \frac{T}{4\pi^2}a^2 + \frac{1}{T}\int_0^T h_0(t)\,dt \geqslant \varphi^*(a), \qquad \forall a\geqslant 0.$$

En prenant les conjugués des deux membres, on obtient :

$$(68)\qquad \frac{\pi^2}{T}s^2 - \frac{1}{T}\int_0^T h_0(t)\,dt \leqslant \varphi(s), \qquad \forall s\geqslant 0,$$

qui est bien la négation de (65). ■

IV. Applications

Il n'y a plus qu'à adapter le théorème III.5 aux divers cas de figure. Commençons par retrouver un résultat de CLARKE-EKELAND ([4]; *voir* aussi BENCI-RABINOWITZ [1] qui ne supposent pas de convexité).

PROPOSITION 1. Hypothèses H1 et H2. — *On suppose qu'il existe des constantes* $k>0$ *et* $c\in R$ *telles que :*

$$(1)\qquad \forall (t, u)\in[0, T]\times R^{2n}, \quad H(t, u)\leqslant \frac{k}{2}|u|^2+c.$$

Alors, pour tout $T\in]0, 2\pi/k[$, *il existe une solution lipschitzienne du problème aux limites :*

$$(2)\qquad \dot u(t)\in\sigma\partial H(t, u(t)) \quad p.p.$$

$$(3)\qquad u(0)=u(T)$$

Démonstration. — De l'estimation (1), il ressort immédiatement que l'hypothèse H3 est satisfaite, avec :

$$(4) \qquad \varphi(s) \leqslant \frac{k}{2} s^2 + c.$$

D'où, par dualité :

$$(5) \qquad \varphi^*(a) \geqslant \frac{1}{2k} a^2 - c.$$

On a alors :

$$(6) \qquad \operatorname{Sup}_{a \geqslant 0} \left\{ -\frac{T^2}{4} a^2 + T\varphi^*(a) \right\} \geqslant \operatorname{Sup}_{a \geqslant 0} \left\{ \left(\frac{T}{2k} - \frac{T^2}{4\pi} \right) a^2 \right\} - cT.$$

Si $T < 2\pi/k$, le second membre vaut $+\infty$. La condition (42) du théorème III.5 est donc automatiquement satisfaite, d'où l'existence d'une solution lipschitzienne u au problème (2), (3). ∎

Le cas des hamiltoniens de l'ordre de $|u|^\alpha$ avec $\alpha > 2$ a été résolu par [5] dans un cas particulier. Nous obtenons maintenant un résultat plus général :

PROPOSITION 2. — Hypothèses H1 et H2. — *On suppose qu'il existe des constantes $k > 0$, $\alpha > 2$ et $c \in R$ telles que :*

$$(7) \qquad \forall (t, u) \in [0, T] \times R^{2n}, \quad H(t, u) \leqslant \frac{k^\alpha}{\alpha} |u|^\alpha + c.$$

Une condition suffisante pour que le problème aux limites :

$$(8) \qquad \dot{u}(t) \in \sigma \partial H(t, u(t)) \quad p.p. \text{ sur } [0, T],$$

$$(9) \qquad u(0) = u(T),$$

ait une solution lipschitzienne, est que l'on ait :

$$(10) \qquad cT + \int_0^T h_0(t)\, dt < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right) (2\pi)^{\alpha/(\alpha-2)} T^{-2/(\alpha-2)} k^{-2\alpha/(\alpha-2)}.$$

Démonstration. — De l'estimation (7), il ressort immédiatement que l'hypothèse H3 est satisfaite, avec :

$$(11) \qquad \varphi(s) \leqslant \frac{k^\alpha}{\alpha} s^\alpha + c.$$

D'où, par dualité, $\beta<2$ étant l'exposant conjugué de α :

(12) $$\varphi^*(a) \geqslant \frac{1}{\beta \cdot k^\beta} a^\beta - c.$$

On a alors :

(13) $$\operatorname{Sup}_{a \geqslant 0}\left\{-\frac{T^2}{4\pi} a^2 + T\varphi^*(a)\right\} \geqslant \operatorname{Sup}_{a \geqslant 0}\left\{-\frac{T^2}{4\pi} a^2 + \frac{T}{\beta k^\beta} a^\beta\right\} - Tc$$
$$= \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{2}\right)(2\pi)^{-\beta/(\beta-2)} T^{(2\beta-2)/(\beta-2)} k^{2\beta/(\beta-2)} - cT.$$

La condition (42) du théorème III.5 se traduit par l'inégalité (10). D'où le résultat. ■

On obtient également des résultats concernant des hamiltoniens à croissance plus rapide. Par exemple :

PROPOSITION 3. Hypothèses H1 et H2. — *On suppose qu'il existe des constantes* $\alpha>0$, k *et* $c \in R$ *telles que :*

(14) $$\forall (t, u) \in [0, T] \times R^n, \quad H(t, u) < e^{\alpha|u|+k} + c.$$

Une condition suffisante pour que le problème aux limites :

(15) $$\dot{u}(t) \in \sigma\partial H(t, u(t)) \quad p.p. \text{ sur } [0, T],$$

(16) $$u(0) = u(T).$$

ait une solution lipschitzienne, est que l'on ait :

(17) $$cT + \int_0^T h_0(t)\, dt < \operatorname{Sup}_{a \geqslant 0}\left\{-\frac{T^2}{4\pi} a^2 + \frac{T}{\alpha}(a \operatorname{Log} a - (k+1+\operatorname{Log}\alpha)\, a)\right\}.$$

Démonstration. — De l'estimation (14), il ressort immédiatement que l'hypothèse H3 est satisfaite, avec :

(18) $$\varphi(s) \leqslant e^{\alpha s + k} + c.$$

D'où, par dualité :

(19) $$\varphi^*(a) \geqslant \frac{1}{\alpha}[a \operatorname{Log} a - (k+1+\operatorname{Log}\alpha)\, a] - c.$$

La condition (42) du théorème III.5 se traduit par linégalité (17). D'où le résultat. ■

Ces résultats peuvent être précisés dans le cas des équations du type :

$$\dot{u}(t) \in \sigma \partial H(u(t)) + f(t) \quad \text{p.p.} \tag{20}$$

représentant un système conservatif, gouverné par le Hamiltonien $H(u)$ indépendant du temps, et soumis à une excitation exogène $f(t)$. Là encore, on s'intéresse au problème aux limites :

$$u(0) = u(T). \tag{21}$$

Avant d'appliquer les trois propositions précédentes, nous commençons par transformer le problème. On supposera que $f \in L^1(0, T; R^n)$, et on notera m sa valeur moyenne :

$$m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt. \tag{22}$$

On introduit alors, parmi les primitives de f-m, celle dont la valeur moyenne est nulle :

$$\frac{d}{dt} F(t) = f(t) - m \quad \text{et} \quad \int_0^T F(t)\, dt = 0. \tag{23}$$

On pose :

$$v(t) = u(t) - F(t), \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{24}$$

On notera que $F(T) - F(0) = 0$, si bien que l'on a $u(0) = u(T)$ si et seulement si $v(0) = v(T)$.

On introduit un nouvel hamiltonien :

$$\overline{H}(t, v) = H(v + F(t)) - (\sigma m, v + F(t)). \tag{25}$$

On vérifie aussitôt que le problème aux limites :

$$\dot{v}(t) \in \sigma \partial \overline{H}(t, v(t)) \quad \text{p.p.,} \tag{26}$$

$$v(0) = v(T) \tag{27}$$

est équivalent au problème (20), (21) : on passe de l'un à l'autre par la formule (24). On applique maintenant les résultats précédents au nouvel hamiltonien $\overline{H}$. Le hamiltonien initial H sera supposé satisfaire aux hypothèses suivantes :

$$\text{H4}\quad \begin{cases} H \text{ est convexe, et } H(u) \geqslant H(0)=0, & \forall u \in R^{2n}, \\ r^{-1}\operatorname{Min}\{H(u) \mid |u|=r\} \to +\infty & \text{quand } r \to \infty. \end{cases}$$

On calcule aussitôt, pour tout $t \in [0, T]$:

$$-h_0(t) = \operatorname{Min}\{H(u) \mid u \in R^{2n}\} = H(0) = 0, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} -\overline{h}_0(t) &= \operatorname{Min}\{\overline{H}(t, v) \mid v \in R^{2n}\} \\ &= \operatorname{Min}\{H(w)-(\sigma m, w) \mid w \in R^{2n}\} = -G(\sigma m), \end{aligned} \tag{29}$$

où G est la fonction convexe conjuguée de H.

On pose, pour tout $s>0$:

$$\varphi(s) = \operatorname{Max}\{H(u) \mid |u| \leqslant s\}, \tag{30}$$

$$\overline{\varphi}(s) = \operatorname{Max}\{\overline{H}(t, v) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, |v| \leqslant s\}. \tag{31}$$

Il ressort des hypothèses que les fonctions H et $\overline{H}$ sont continues, et donc que φ et $\overline{\varphi}$ sont finies. On a aussi :

$$\lim_{s\to\infty} \varphi(s)\, s^{-1} = \lim_{s\to\infty} \overline{\varphi}(s)\, s^{-1} = +\infty. \tag{32}$$

Le hamiltonien $\overline{H}$ vérifie donc les hypothèses H1, H2 et H3, ce qui permet d'appliquer le théorème III.5. On obtient :

Proposition 4. Hypothèse H4, avec $f \in L^1(0, T; R^{2n})$. — *Une condition suffisante pour que le problème aux limites :*

$$\dot{u}(t) \in \sigma\partial H(u(t)) + f(t) \quad p.p., \tag{33}$$

$$u(0) = u(T), \tag{34}$$

ait une solution, est que l'on ait :

$$G(\sigma m) + |m| . \|F\|_\infty + \frac{3T}{4\pi} m^2 < \operatorname{Sup}\left\{ \frac{-T}{4\pi} a^2 + \left(\|F\|_\infty + \frac{T}{2\pi}|m| \right) a + \varphi^*(a) \,\middle|\, a \geqslant \varphi'_d(\|F\|_\infty) \right\},$$

où φ'_d est la dérivée à droite de φ, et $\|F\|_\infty$ la norme uniforme de F.

Démonstration. — En comparant les formules (28) et (29), et en tenant compte de la définition (25), on obtient :

$$(36)\qquad \bar{\varphi}(s) \leqslant \operatorname{Max}\{\varphi(s+|F(t)|)+|m|(s+|F(t)|) \mid 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Comme F est une fonction (absolument) continue sur $[0, T]$, on peut introduire sa norme uniforme :

$$(37)\qquad \|F\|_\infty = \operatorname{Max}\{|F(t)| \mid 0 \leqslant t \leqslant T\} < \infty.$$

On a alors, pour tout $s>0$:

$$(38)\qquad \bar{\varphi}(s) \leqslant \varphi(s+\|F\|_\infty)+|m|(s+\|F\|_\infty).$$

En passant aux conjuguées :

$$(39)\qquad \begin{aligned} \bar{\varphi}^*(a) &\geqslant \operatorname{Sup}_{s>0}\{as-|m|(s+\|F\|_\infty)-\varphi(s+\|F\|_\infty)\} \\ &= \operatorname{Sup}_{s\geqslant 0}\{(s+\|F\|_\infty)(a-|m|)-\varphi(s+\|F\|_\infty)\}-a\|F\|_\infty \\ &= -a\|F\|_\infty+\operatorname{Sup}\{x(a-|m|)-\varphi(x) \mid x \geqslant \|F\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Le dernier terme est aisément calculé, en tenant compte du fait que $\varphi(x)x^{-1} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Le maximum est atteint aux points $\bar{x} \geqslant \|F\|_\infty$ tels que $a-|m| \in \partial\varphi(\bar{x})$, s'il y en a, et à l'extrémité $\|F\|_\infty$ s'il n'y en a pas. Mais n'oublions pas que $\partial\varphi(\bar{x})=[\varphi'_g(\bar{x}), \varphi'_d(\bar{x})]$, où φ'_g est la dérivée à gauche et φ'_d la dérivée à droite. Comme la fonction est convexe, on aura $\bar{x} \geqslant \|F\|_\infty$ à condition que $\varphi'_g(\bar{x}) \geqslant \varphi'_d(\|F\|_\infty)$. Ceci donne :

$$(40)\qquad \bar{\varphi}^*(a) \geqslant -a\|F\|_\infty + \begin{cases} \varphi^*(a-|m| & \text{si } a>|m|+\varphi'_d(\|F\|_\infty), \\ (a-|m|)\,\|F\|_\infty-\varphi(\|F\|_\infty) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit encore, en posant $\tilde{a}=|m|+\varphi'_d(\|F\|_\infty)$:

$$(41)\qquad \bar{\varphi}^*(a) \geqslant \begin{cases} -a\|F\|_\infty+\varphi^*(a-|m|) & \text{si } a \geqslant \tilde{a}, \\ -|m|\,\|F\|_\infty-\varphi(\|F\|_\infty) & \text{si } 0 \leqslant a \leqslant \tilde{a}. \end{cases}$$

Si $a=\tilde{a}$, les deux branches se raccordent au point d'ordonnée $-|m|.\|F\|_\infty-\varphi(\|F\|_\infty)$. Le deuxième membre définit donc une fonction continue de a, que nous notons provisoirement $\tilde{\varphi}^*(a)$.

On a par conséquent :

$$(42)\qquad \operatorname{Sup}_{a\geqslant 0}\left\{-\frac{T^2}{4\pi}a^2+T\bar{\varphi}^*(a)\right\} \geqslant \operatorname{Sup}_{a\geqslant 0}\left\{-\frac{T^2}{4\pi}a^2+T\tilde{\varphi}^*(a)\right\}.$$

Or, dans l'intervalle $0 \leqslant a \leqslant \tilde{a}$, la borne supérieure du deuxième membre est atteinte à l'origine, et vaut $-T(|m|.\|F\|_\infty + \varphi(\|F\|_\infty)) < 0$. On a donc :

$$(43)\quad \operatorname{Sup}_{a \geqslant 0}\left\{-\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T\bar{\varphi}^*(a)\right\} \geqslant \operatorname{Max}\left[0, \operatorname{Sup}_{a \geqslant \tilde{a}}\left\{-\frac{T^2 a^2}{4\pi} + T\tilde{\varphi}^*(a)\right\}\right].$$

L'inégalité :

$$(44)\qquad G(\sigma m) < \operatorname{Sup}_{a \geqslant \tilde{a}}\left\{-\frac{T a^2}{4\pi} + \tilde{\varphi}^*(a)\right\},$$

implique donc, en tenant compte des relations (29) et (43) :

$$(45)\qquad \int_0^T \bar{h}_0(t)\, dt < \operatorname{Sup}_{a>0}\left\{-\frac{T^2}{4\pi} a^2 + T\bar{\varphi}^*(a)\right\},$$

qui n'est autre que la condition suffisante du théorème III.5, appliquée à $\bar{H}(t, v)$.

Il ne reste plus qu'à remplacer $\tilde{\varphi}^*(a)$ par sa valeur dans l'inégalité (44). On a, pour $a \geqslant \tilde{a}$:

$$(46)\quad \frac{-T}{4\pi} a^2 + \tilde{\varphi}^*(a) = \frac{-T}{4\pi} a^2 - a\|F\|_\infty + \varphi^*(a - |m|)$$
$$= \frac{-T}{4\pi}(a - |m|)^2 - \left(\|F\|_\infty + \frac{T}{2\pi}|m|\right)(a - |m|)$$
$$+ \varphi^*(a - |m|) - |m|.\|F\|_\infty - \frac{3T}{4\pi} m^2.$$

En reportant dans l'inégalité (44), et en prenant $a - m$ comme nouvelle variable, on obtient la condition (35). ■

Cette condition s'écrit de manière plus simple dans le cas particulier où $m = 0$. On obtient alors :

COROLLAIRE 5. — *Hypothèse* H4, *avec* $f \in L^1(0, T; R^{2n})$ *et :*

$$(47)\qquad \int_0^T f(t)\, dt = 0.$$

Une condition suffisante pour que le problème aux limites :

$$\dot{u}(t) \in \sigma\partial H(u(t)) + f(t), \tag{48}$$

$$u(0) = u(T), \tag{49}$$

ait une solution, est que l'on ait :

$$0 < \operatorname{Sup}\left\{ -\frac{T}{4\pi} a^2 - \| F \|_\infty a + \varphi^*(a) \,\middle|\, a \geqslant \varphi_d'(\| F \|_\infty) \right\}. \tag{50}$$ ■

Nous pouvons maintenant appliquer la proposition 4, et son corollaire, aux hamiltoniens sous-quadratiques ($\varphi(s) \leqslant (k/2)\, s^2 + c$), sur-quadratiques ($\varphi(s) \leqslant (k^\alpha/\alpha)\, s^\alpha + c$, avec $\alpha > 2$), ou exponentiels ($\varphi(s) \leqslant e^{\alpha s + k} + c$), et obtenir des conditions suffisantes d'existence. Nous préférons dégager un résultat général.

THÉORÈME 6. Hypothèse (H4). — *On pose :*

$$\omega = \operatorname{Inf}_{s>0} \frac{2\varphi(s)}{s^2}. \tag{51}$$

On a $\omega \geqslant 0$, *et pour tout* $T \in]0, 2\pi/\omega[$, *il existe un* $\varepsilon > 0$ *tel que, si* $\| f \|_1 < \varepsilon$, *le problème aux limites :*

$$\dot{u}(t) \in \sigma\partial H(u(t)) + f(t), \tag{52}$$

$$u(0) = u(T) \tag{53}$$

a une solution.

Démonstration. — Prenons donc $T < 2\pi/\omega$ (ou n'importe quel T fini si $\omega = 0$). D'après la définition (51) de ω, on sait qu'il existe un point $\bar{s} > 0$ tel que :

$$\varphi(\bar{s}) < \frac{\pi}{T} \bar{s}^2. \tag{54}$$

Ceci implique qu'il existe un point $\bar{a} \geqslant 0$ tel que :

$$\varphi^*(\bar{a}) > \frac{T}{4\pi} \bar{a}^2. \tag{55}$$

En effet, s'il n'existait pas de tel point $\bar{a}$, on aurait $\varphi^*(a) \leqslant (T/4\pi)\, a^2$ pour tout $a \geqslant 0$, et donc, en passant aux fonctions convexes conjuguées, $\varphi(s) \geqslant (\pi/T)\, s^2$ pour tout $s \geqslant 0$, contrairement à la condition (54).

On sait que, pour $a \in \partial\varphi(0) =]-\infty, \varphi_d'(0)]$, on a $\varphi^*(a) = -\varphi(0) = 0$. De la condition (55) on déduit $\varphi^*(\bar{a}) > 0$, et donc $\bar{a} > \varphi_d'(0)$. Comme φ^* et G sont continues, avec $G(0) = 0$ d'après les hypothèses H4, et comme φ_d' est semi-continue supérieurement, il existe $\eta>0$ assez petit pour que $|m|<\eta$ et $\|F\|_\infty<\eta$ impliquent :

$$\varphi'_a(\|F\|_\infty)<\bar{a}, \tag{56}$$

$$-\frac{T}{4\pi}a^2+\left(\|F\|_\infty+\frac{T}{2}|m|\right)\bar{a}+\varphi^*(\bar{a}) > G(\sigma m)+|m|.\|F\|_\infty+\frac{3T}{4\pi}m^2. \tag{57}$$

Ces deux relations impliquent bien entendu la condition d'existence (35). Il ne reste plus qu'à prendre $\varepsilon>0$ assez petit pour que :

$$\|f\|_1<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad [m<\eta \text{ et } \|F\|_\infty<\eta]. \quad \blacksquare \tag{58}$$

Indiquons la valeur de ω dans les trois cas que nous avons évoqués jusqu'à présent (l'hypothèse H4 est toujours sous-entendue).

Sous-quadratique $H(u)\leqslant(k/2)\,u^2+c$:

$$\omega=k.$$

Sur-quadratique $H(u)\leqslant(k^\alpha/\alpha)\,|u|^\alpha+c$ avec $\alpha>2$:

$$\begin{cases} \omega=k^2\left(\dfrac{2\alpha c}{\alpha-2}\right)^{1-(2/\alpha)} & \text{pour} \quad c\neq 0,\\ \omega=0 \quad \text{pour} \quad c=0. \end{cases}$$

Exponentiel $H(u)\leqslant e^{\alpha|u|+k}$ avec $\alpha>0$:

$$\omega=\frac{\alpha^2}{2}e^{k+2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[0] AUBIN. — *Mathematical methods of game theory and economics*, North Holland, 1979.

[1] BENCI-RABINOWITZ. — Critical point theorems for indefinite functionals, *Inventiones*, vol. 52, fasc. 2, 1979, p. 241-274.

[2] CLARKE. — Periodic solutions to Hamiltonian inclusions, *J. Diff. Eq.* (à paraitre).

[3] CLARKE-EKELAND. — Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period, *Comm. Pure Applied Math.* (à paraitre).

[4] CLAKE-EKELAND. — Nonlinear oscillations and boundary-value problems for Hamiltonian systems, *Archive Rat. Mech. An.* (à paraitre).

[5] EKELAND. — Nonlinear oscillations of Hamiltonian systems II, *Advances in Mathematics* (à paraître).

[6] EKELAND. — Periodic solutions of Hamiltonian equations and a theorem of P. Rabinowitz, *J. Diff. Eq.*, vol. 34, n° 3, 1979, p. 523-534.

[7] EKELAND-LASRY. — On the number of periodic solutions for a Hamiltonian flow on a convex energy surface, *Ann. Math.* (à paraître).

[8] EKELAND-TEMAN. — *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1972.

[9] MINORSKY. — *Nonlinear oscillations*, Robert E. Krieger, Huntington, N.Y., 1974.

[10] POINCARE. — *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

[11] ROCKAFELLAR. — Measurable dependance of convex sets and functions *on parameters*, *J. Math. An. Appl.*, vol. 28, 1969, p. 4-25.

[12] ROCKAFELLAR. — Integrals which are convex functionals, *Pacific J. Math.*, vol. 24, n° 3, 1968, p. 525-539.

[13] ROCKAFELLAR. — Integrals which are convex functions II, *Pacific J. Math.*, vol. 39, 1971, p. 439-469.

[14] ROCKAFELLAR. — *Convex integral functionals and duality*, Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ZARANTONELLO, éd., Academic Press, N.Y., 1971, p. 215-236.

[15] MEYER. — *Probabilités et potentiels*, Hermann, Paris.

[16] AMANN-ZEHNDER. — *Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations* (à paraître).