BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI FAURE

Discrépances de suites associées à un système de numération (en dimension un)

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 143-182
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__143_0>

Bull. Soc. math. France,
109, 1981, p. 143-182.

DISCRÉPANCES DE SUITES ASSOCIÉES A UN SYSTÈME DE NUMÉRATION (EN DIMENSION UN)

PAR

HENRI FAURE (*)

RÉSUMÉ. — Nous définissons une famille de suites associées à un système de numération pour lesquelles nous savons déterminer, par des formules explicites, la discrépance et la discrépance à l'origine. L'étude asymptotique réalisée pour deux classes particulières, permet notamment d'obtenir les plus faibles discrépances actuellement connues : 0,22... pour la discrépance à l'origine et 0,37... pour la discrépance.

ABSTRACT. — In this paper, we define a family of sequences related to the r-adic representation of numbers, for which we obtain explicit formulae giving the discrepancy and the star discrepancy. The study of the asymptotic behaviour, carried out for two classes of such sequences, gives the smallest discrepancies presently known: 0,22... for the star discrepancy, and 0,37... for the discrepancy.

1. Introduction

Dans l'étude des suites de très faibles discrépances ([1]), les suites $(n\alpha)$ et la suite de VAN DER CORPUT ont un rôle important. En effet, pour ces suites, les limites supérieures :

$$s=\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{D(N)}{\operatorname{Log} N}\qquad \text{et}\qquad s^*=\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{D^*(N)}{\operatorname{Log} N}$$

sont finies, tout au moins, dans le cas des suites $(n\alpha)$, pour certains α (*voir* par exemple L. KUIPERS et H. NIEDERREITER [8], et A. GILLET [7]).

(*) Texte reçu le 26 juin 1979, révisé le 29 septembre 1980.

H. FAURE, Université de Provence, Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S., place Victor Hugo, 13331 Marseille Cedex 3.

([1]) *Voir* le paragraphe 2.2 pour les définitions.

Et on sait d'autre part qu'il existe une constante C supérieure à 0,01 telle que pour toute suite on ait : $s \geqslant s^* \geqslant C$ (W. M. SCHMIDT [12]; la constante est en cours d'amélioration par R. BEJIAN qui obtient 0,06 environ).

Pour ce qui concerne les suites $(n\alpha)$, les récents travaux de Y. DUPAIN, V. T. SOS et L. RAMSHAW ([3], [4], [10]) ont permis de préciser les meilleures constantes s et s^* possibles :

$$\mathrm{Inf}_\alpha s^*(\alpha) = s^*(\sqrt{2}) = \frac{1}{4 \operatorname{Log}(\sqrt{2}+1)} = 0{,}283\ldots$$

et :

$$\mathrm{Inf}_\alpha s(\alpha) = s\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{5 \operatorname{Log}[(1+\sqrt{5})/2]} = 0{,}415\ldots$$

(La première partie de ce dernier résultat est en cours de mise au point.)

Quant à la suite ω de VAN DER CORPUT, en base 2 [13], S. HABER [6] a montré que $s^*(\omega) = 1/3 \operatorname{Log} 2 = 0{,}48\ldots$; puis R. BEJIAN et l'auteur [2] ont obtenu, entre autres résultats sur cette suite, $s(\omega) = s^*(\omega)$. De plus, par un procédé d'alternance, R. BEJIAN [1] a obtenu des suites Ω, toujours en base 2, telles que :

$$s^*(\Omega) = \frac{1}{6 \operatorname{Log} 2} = 0{,}24\ldots \qquad \text{et} \qquad s(\Omega) = s(\omega).$$

Dans cet article, nous introduisons une nouvelle famille de suites, associées à un système de numération quelconque, qui contient les suites en base 2 déjà étudiées, et qui donne les plus petites constantes s et s^* actuellement connues :

$$0{,}375 < s < 0{,}38 \qquad \text{et} \qquad s^* = 0{,}223\ldots$$

Plus précisément, nous obtenons des formules explicites exprimant les discrépances D et D^* de ces nouvelles suites (§ 3); cela nous conduit à réaliser l'étude asymptotique de deux classes particulièrement intéressantes du point de vue des très faibles discrépances (§ 4); les calculs dans les cas donnant les meilleures constantes s et s^* et dans d'autres cas particuliers sont rassemblés au paragraphe 5; le paragraphe 2 est consacré aux définitions et à l'énoncé des principaux résultats.

Signalons enfin que des résultats partiels ont été annoncés par une note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [5].

2. Définitions et résultats

2.1. Définition des suites S_r^Σ

Soit r un entier au moins égal à 2 et $\Sigma=(\sigma_j)_{j\geq 0}$ une suite de permutations σ_j de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, r-1\}$.

Si i est un entier strictement positif, considérons l'écriture de $i-1$ en base r, $i-1=\sum_{j=0}^{\infty} a_j(i)\, r^j$, et posons :

$$S_r^\Sigma(i)=\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(a_j(i))\, r^{-j-1}.$$

Nous définissons ainsi la famille de suites S_r^Σ dont nous nous proposons d'étudier les discrépances.

Une définition plus générale peut être donnée avec les systèmes de numération à base variable, mais elle n'apporte pas de meilleurs résultats du point de vue des faibles discrépances.

2.2. Définition des discrépances

Soit $X=(x_i)_{i\geq 1}$ une suite (finie ou non) à valeurs dans $[0, 1]$.

Pour N entier au moins égal à 1 et pour $\alpha, \beta\in[0, 1]$ on désigne par $A([\alpha, \beta[; N; X)$ le nombre d'indices i compris entre 1 et N tels que $x_i\in[\alpha, \beta[$; on note $l([\alpha, \beta[)$ la longueur de $[\alpha, \beta[$ et on pose :

$$E([\alpha, \beta[; N; X)=A([\alpha, \beta[; N; X)-l([\alpha, \beta[)N;$$
$$D(X, N)=\sup_{0\leq\alpha\leq\beta\leq 1}|E([\alpha, \beta[; N; X)|;$$
$$D^*(X, N)=\sup_{0\leq\alpha\leq 1}|E([0, \alpha[; N; X)|;$$
$$D^+(X, N)=\sup_{0\leq\alpha\leq 1}E([0, \alpha[; N; X);$$
$$D^-(X, N)=\sup_{0\leq\alpha\leq 1}(-E([0; \alpha[; N; X)).$$

Les fonctions $N\to D(X, N)$ et $N\to D^*(X, N)$ sont respectivement la discrépance et la discrépance à l'origine de la suite X.

2.3. Fonctions associées au couple (r, σ)

Nous introduisons ici trois fonctions, désignées par $\Psi_{r,\sigma}^+$, $\Psi_{r,\sigma}^-$, $\Psi_{r,\sigma}$, de période 1, affines par morceaux, continues, qui jouent un rôle fondamental dans l'étude des discrépances des suites S_r^Σ.

Elles apparaissent naturellement au lemme 3.3.2 et leurs propriétés sont étudiées au paragraphe 3.2.

L'entier r et σ, permutation de $\{0, 1, \ldots, r-1\}$, étant donnés, les fonctions $\Psi^+_{r,\sigma}$ et $\Psi^-_{r,\sigma}$ sont construites par morceaux, sur les intervalles $[(k-1)/r, k/r[$ de $[0, 1[$, à partir de la suite :

$$Z=\left(\frac{\sigma(0)}{r}, \frac{\sigma(1)}{r}, \ldots, \frac{\sigma(r-1)}{r}\right).$$

On les reproduit ensuite par périodicité.

Soit donc k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant r$. Alors, $\Psi^+_{r,\sigma}$ est le maximum sur $[(k-1)/r, k/r[$ des r fonctions affines suivantes :

$$x \to A\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right)-hx \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant h \leqslant \sigma(k-1),$$

et :

$$x \to (r-h)x-A\left(\left[\frac{h}{r}, 1\right[; k; Z\right) \qquad \text{si} \quad \sigma(k-1)<h<r.$$

On définit ensuite $\Psi^-_{r,\sigma}$ sur $[(k-1)/r, k/r[$ comme le maximum des r fonctions affines opposées :

$$x \to hx-A([0, h/r[; k; Z) \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant h \leqslant \sigma(k-1)$$

et :

$$x \to A\left(\left[\frac{h}{r}, 1\right[; k; Z\right)-(r-h)x \qquad \text{si} \quad \sigma(k-1)<h<r.$$

La fonction $\Psi_{r,\sigma}$ est la somme de $\Psi^+_{r,\sigma}$ et $\Psi^-_{r,\sigma}$.

2.4. FORMULES EXPLICITES (*voir* § 3)

Les fonctions que nous venons d'introduire permettent d'énoncer un théorème général :

THÉORÈME 1. — *Pour $N \geqslant 1$ on a les formules suivantes :*

$$D^+(S^\Sigma_r, N)=\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^+_{r,\sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right),$$

$$D^-(S^\Sigma_r, N)=\sum_{j=1}^{\infty} \Psi^-_{r,\sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right),$$

$$D(S^\Sigma_r, N)=\sum_{j=1}^{\infty} \Psi_{r,\sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right),$$

$$D^*(S^\Sigma_r, N)=\max(D^+(S^\Sigma_r, N), D^-(S^\Sigma_r, N)).$$

COROLLAIRE. — *La discrépance et la discrépance à l'origine de la suite* S_r^Σ *sont égales si et seulement si* $\Psi_{r,\sigma_j}^+=0$ *pour tout* $j\geqslant 0$ *ou* $\Psi_{r,\sigma_j}^-=0$ *pour tout* $j\geqslant 0$.

Remarquons qu'on a un théorème analogue avec les systèmes à base variable (*voir* 3.4).

2.5. ÉTUDE ASYMPTOTIQUE (*voir* §4)

Nous examinons deux classes, dans la famille des suites S_r^Σ, qui contiennent tous les cas déjà étudiés ([1], [2], [5], [9]), et qui donnent les plus faibles discrépances actuellement connues (*voir* 2.6 ci-dessous). σ est toujours une permutation de $\{0, 1, \ldots, r-1\}$.

THÉORÈME 2. — *Si* Σ *est la suite constante égale à* σ, *et si on pose :*

$$\alpha_{r,\sigma}=\inf_{n\geqslant 1}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Psi_{r,\sigma}\left(\frac{x}{r^j}\right)\right),$$

on a :

$$s(S_r^\sigma)=\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{D(S_r^\sigma, N)}{\operatorname{Log} N}=\frac{\alpha_{r,\sigma}}{\operatorname{Log} r}$$

et :

$$D(S_r^\sigma, N)\leqslant\frac{\alpha_{r,\sigma}}{\operatorname{Log} r}\operatorname{Log} N+\max\left(2, \alpha_{r,\sigma}+1+\frac{1}{r}\right).$$

THÉORÈME 3. — *Soit* $A\subset\mathbf{N}$ *défini par :*

$$A=\bigcup_{H=1}^{\infty}A_H \text{ et } A_H=\{H(H-1)+1, \ldots, H^2\};$$

soit τ *la permutation définie par* $\tau(k)=r-1-k$ *pour* $0\leqslant k\leqslant r-1$; *soit* $\Sigma_A=(\sigma_j)_{j\geqslant 0}$ *la suite de permutations définie par* $\sigma_j=\sigma$ *si* $j\in A$ *et* $\sigma_j=\tau\circ\sigma$ *si* $j\notin A$.

On a alors :

$$s^*(S_r^{\Sigma_A})=\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{D^*(S_r^{\Sigma_A}, N)}{\operatorname{Log} N}=\frac{\alpha_{r,\sigma}^+ +\alpha_{r,\sigma}^-}{2\operatorname{Log} r},$$

où :

$$\alpha_{r,\sigma}^+=\inf_{n\geqslant 1}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}\Psi_{r,\sigma}^+\left(\frac{x}{r^j}\right)\right).$$

et :

$$\alpha^{-}_{r,\sigma}=\inf_{n\geqslant 1}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Psi^{-}_{r,\sigma}\left(\frac{x}{r^j}\right)\right)$$

Nous conjecturons que les constantes α, α^+, α^- sont rationnelles (dans tous les cas étudiés les dénominateurs sont de la forme $q(r^q-1)$).

Si cette hypothèse est vraie, et si on sait borner l'entier q, on aura des algorithmes pour calculer les constantes $s(S_r^{\sigma})$ et $s^*(S_r^{\Sigma_A})$.

Pour l'instant, on peut encadrer avec précision ces constantes grâce aux formules donnant α, α^+, α^-, et dans certains cas, on sait les calculer explicitement par des méthodes récurrentes (*voir* ci-dessous).

2.6. Étude numérique de quelques cas (*voir* § 5)

Théorème 4. — *Pour* $r=12$ *et* $\sigma_0=(17698)\,(23\overline{10}45)$ *on a :*

$$0{,}375<s(S_{12}^{\sigma_0})<0{,}38.$$

Nous conjecturons que :

$$s(S_{12}^{\sigma_0})=\frac{4828}{5181\ \mathrm{Log}\ 12}=0{,}375\ldots$$

Théorème 5. — *Pour* $r=12$ *et* $\sigma=(15)\,(29)\,(47)\,(6\overline{10})$ *on a :*

$$s^*(S_{12}^{\Sigma_A})=\frac{1919}{3454\ \mathrm{Log}\ 12}=0{,}223\ldots$$

Ces deux couples résultent de la recherche systématique des meilleurs couples (r, σ) et (r, Σ_A) pour r allant de 2 à 20. Pour d'autres cas étudiés au-delà, nous n'avons pas obtenu de meilleurs résultats.

Théorème 6. — *Soit I la permutation identique. On a alors :*

$$s(S_r^I)=s^*(S_r^I)=\frac{r-1}{4\ \mathrm{Log}\ r}\quad \textit{si } r \textit{ est impair}$$

et :

$$s(S_r^I)=s^*(S_r^I)=\frac{r^2}{4(r+1)\ \mathrm{Log}\ r}\quad \textit{si } r \textit{ est pair.}$$

Les suites S_r^I sont appelées suites de Van der Corput par analogie avec le cas $r=2$; le seul résultat connu pour le cas général était une majoration de $D(S_r^I, N)$ due à H.G. Meijer [9].

Pour terminer, signalons qu'on a toujours $\Psi_{r,\sigma} \leqslant \Psi_{r,I}$, d'où la majoration générale :

$$s^*(S_r^\Sigma) \leqslant s(S_r^\Sigma) \leqslant s(S_r^I).$$

3. Expression des discrépances des suites S_r^Σ

3.1. Notations-Premières propriétés de S_r^Σ

Étant donnés r entier au moins égal à 2 et $\Sigma = (\sigma_j)_{j \geqslant 0}$, on pose $x_i = S_r^\Sigma(i)$ et $X_n = (x_1, \ldots, x_{r^n})$.

On définit d'autre part la suite $Y = (y_i)_{i \geq 1}$ par : $Y = S_r^I$, suite de Van Der Corput en base r.

On note encore $Y_n = (y_1, \ldots, y_{r^n})$ et on désigne par $\overline{X}_n$ et $\overline{Y}_n$ respectivement les supports des suites X_n et Y_n.

Propriété 3.1.1. — *Les suites S_r^Σ sont équiréparties.*

Cette propriété résulte évidemment de l'étude asymptotique des discrépances que nous ferons plus loin (§ 4). Cependant, on peut l'établir aisément tout de suite en application d'un théorème de M. Mendès-France sur les fonctions r-additives (*voir* par exemple [11], p. 55). En effet, si :

$$\varphi_j(a) = (\sigma_j(a) - \sigma_j(0))\, r^{-j-1} \qquad \text{pour} \quad a \in \{0, 1, \ldots, r-1\},$$

la suite $f(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(a_j(i))$ est r-additive et on a :

$$x_i = S_r^\Sigma(i) = f(i) - \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(0)\, r^{-j-1};$$

d'où l'équirépartition de $(f(i))_{i \geqslant 1}$ équivaut à celle de S_r^Σ. D'après le théorème invoqué, il suffit de remarquer que :

$$\frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} e^{2i\pi\varphi_s(k)q} = 0$$

(avec s tel que $q = r^s b$, r ne divisant pas b) pour obtenir l'équirépartition de f.

Propriété 3.1.2. — *Soient n, i, k des entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant r^{n-1}$ et $0 \leqslant k \leqslant r-1$. On a alors :*

$$x_{kr^{n-1}+i} = x_i + \frac{\sigma_{n-1}(k) - \sigma_{n-1}(0)}{r^n}.$$

Preuve. — Si :

$$i-1=\sum_{j=0}^{n-2} a_j(i)\, r^j,$$

on a :

$$kr^{n-1}+i-1=\sum_{j=0}^{n-2} a_j(i)\, r^j+kr^{n-1};$$

d'où :

$$x_{kr^{n-1}+i}=\sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j(a_j(i))\, r^{-j-1}+\sigma_{n-1}(k)\, r^{-n}+\sum_{j=n}^{\infty}\sigma_j(0)\, r^{-j-1},$$

d'où la propriété annoncée.

PROPRIÉTÉ 3.1.3. — *Soit $n\geqslant 1$, et soient $u, v\in \overline{Y}_{n-1}$ tels que $l([u, v[)=1/r^{n-1}$. Alors l'intervalle $[u, v[$ contient r termes de la suite X_n dont un et un seul est terme de la suite X_{n-1}.*

Si ce terme est x_i $(1\leqslant i\leqslant r^{n-1})$, les r termes de X_n dans $[u, v[$ sont donnés par $x_{kr^{n-1}+i}$, pour $0\leqslant k\leqslant r-1$.

Preuve. — Les éléments de $\overline{X}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier de r^n côtés inscrit dans le tore identifié au cercle de longueur unité, d'où la première partie de la propriété.

Si x_i est le terme de X_{n-1} qui appartient à $[u, v[$, montrons que les r termes indiqués sont éléments de $[u, v[$.

u s'écrit $\sum_{j=0}^{n-2} b_j r^{-j-1}$ et les inégalités $0\leqslant x_i-u<r^{-n+1}$ imposent $\sigma_j(a_j(i))=b_j$ pour $0\leqslant j\leqslant n-2$, car :

$$x_i=\sum_{j=0}^{n-2} \sigma_j(a_j(i))\, r^{-j-1}+\sum_{j=n-1}^{\infty} \sigma_j(0)\, r^{-j-1}.$$

On a alors :

$$x_{kr^{n-1}+i}-u=\sum_{j=n}^{\infty}\sigma_j(0)\, r^{-j-1}+\sigma_{n-1}(k)\, r^{-n}$$

(d'après la propriété 3.1.2); d'où $0\leqslant x_{kr^{n-1}+i}-u\leqslant r^{-n+1}$, puisque $\sigma_{n-1}(k)\leqslant r-1$ et $\sigma_j(0)\leqslant r-1$; de plus on ne peut avoir $x_{kr^{n-1}+i}-u=r^{-n+1}$ car $x_{kr^{n-1}+i}$ n'est pas dans $\overline{X}_{n+1}$ si $k\neq 0$; d'où la propriété 3.1.3.

Remarque. — Ordonnons l'ensemble des $\sigma_{n-1}(k)$ pour $0\leqslant k\leqslant r-1$:

$$0=\sigma_{n-1}(k_0)<\sigma_{n-1}(k_1)<\ldots<\sigma_{n-1}(k_{r-1})=r-1;$$

on a alors :

$$u\leqslant x_{k_0 r^{n-1}+i}<x_{k_1 r^{n-1}+i}<\ldots<x_{k_{r-1} r^{n-1}+i}<v.$$

3.2. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS $\Psi^+_{r,\sigma}$, $\Psi^-_{r,\sigma}$, $\Psi_{r,\sigma}$

Nous avons rassemblé les principales propriétés de ces fonctions dans les deux propositions qui suivent. Quand aucune confusion n'est à craindre, nous parlerons des fonctions Ψ.

PROPRIÉTÉ 3.2.1. — (i) *Les coefficients des fonctions affines intervenant dans la définition des fonctions Ψ sont des entiers de valeur absolue au plus égale à $r-1$. Ces fonctions affines ne sont jamais constantes, sauf si elles sont nulles. Les fonctions Ψ sont toujours positives.*

(ii) *sur* $[0, 1/r[$ *on a :*

$$\Psi^+_{r,\sigma}(x)=(r-\sigma(0)-1)x,$$
$$\Psi^-_{r,\sigma}(x)=\sigma(0)\,x,$$
$$\Psi_{r,\sigma}(x)=(r-1)x.$$

(iii) *sur* $[(r-1)/r, 1[$ *on a :*

$$\Psi^+_{r,\sigma}(x)=\sigma(r-1)(1-x),$$
$$\Psi^-_{r,\sigma}(x)=(r-\sigma(r-1)-1)(1-x),$$
$$\Psi_{r,\sigma}(x)=(r-1)(1-x).$$

(iv) $\Psi_{r,\sigma}(x)$ *est minorée par* min $((r-1)x,\ 1-x)$ *sur* $[0, 1/2]$ *et par* $\min(x, (r-1)(1-x))$ *sur* $[1/2, 1[$.

Preuve. — (i) résulte immédiatement de la définition des fonctions Ψ (elles sont positives car la fonction nulle (correspondant à $h=0$) fait partie des r fonctions affines dont on prend le maximum).

(ii) et (iii) s'obtiennent en explicitant les fonctions affines pour $k=1$ et $k=r$. Par exemple, $\Psi^+_{r,\sigma}$ est le maximum sur $[0, 1/r[$ de $x \to A([0, h/r[; 1; Z)-hx$ pour $0 \leqslant h \leqslant \sigma(0)$, et de $x \to (r-h)x - A([h/r, 1[; 1; Z)$ pour $\sigma(0)<h<r$.

Pour la première famille, on obtient 0 car A $([0, h/r[; 1; Z)=0$; et, pour la deuxième, on obtient $(r-\sigma(0)-1)x$ car là aussi $A([h/r, 1[; 1; Z)=0$.

Pour (iv), il reste à minorer $\Psi_{r,\sigma}$ sur $[1/r, (r-1)/r[$. Soit k compris entre 2 et $r-1$. Notons que, sur $[(k-1)/r, k/r[$, $\Psi_{r,\sigma}$ est le maximum de toutes les différences possibles entre les fonctions affines qui interviennent dans la définition de $\Psi^+_{r,\sigma}$. Considérons alors deux cas :

1^er^ *cas :* $h=\sigma(k-2)$

— ou bien $\sigma(k-2)>\sigma(k-1)$ et alors, pour $x\in[(k-1)/r, k/r[$, on a :

$$(r-h-1)x-A\left(\left[\frac{h+1}{r}, 1\right[; k; Z\right)-(r-h)x+A\left(\left[\frac{h}{r}, 1\right[; k; Z\right)=1-x;$$

— ou bien $\sigma(k-2)<\sigma(k-1)$ et alors, pour $x\in[(k-1)/r, k/r[$, on a :

$$A\left(\left[0, \frac{h+1}{r}\right[; k; Z\right)-(h+1)x-A\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right)+hx=1-x.$$

2^e^ *cas :* $h=\sigma(k)$

— ou bien $\sigma(k)>\sigma(k-1)$ et alors, pour $x\in[(k-1)/r, k/r[$, on a :

$$(r-h)x-A\left(\left[\frac{h}{r}, 1\right[; k; Z\right)-(r-h-1)x+A\left(\left[\frac{h+1}{r}, 1\right[; k; Z\right)=x;$$

— ou bien $\sigma(k)<\sigma(k-1)$ et alors, pour $x\in[(k-1)/r, k/r[$, on a :

$$A\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right)-hx-A\left(\left[0, \frac{h+1}{r}\right[; k; Z\right)+(h+1)x=x.$$

On a donc bien la minoration cherchée, d'où la propriété 3.2.1.

PROPRIÉTÉ 3.2.2. — (i) *Les fonctions* Ψ *sont des fonctions affines par morceaux, périodiques de période* 1, *continues.*

(ii) *Si on note respectivement* $d^+_{r,\sigma}$, $d^-_{r,\sigma}$, $d_{r,\sigma}$ *les maxima de* $\Psi^+_{r,\sigma}$, $\Psi^-_{r,\sigma}$, $\Psi_{r,\sigma}$, *on a les formules suivantes :*

$$d^+_{r,\sigma}=\max_{1\leq k\leq r}\max_{y\in\bar{Y}_1}E([0, y[; k; Z);$$

$$d^-_{r,\sigma}=\max_{1\leq k\leq r}\max_{y\in\bar{Y}_1}(-E([0, y[; k; Z));$$

$$d_{r,\sigma}=\max_{1\leq k\leq r}\max_{x, y\in\bar{Y}_1}(|E([x, y[; k; Z)|).$$

Les abscisses de ces maxima sont de la forme k/r avec k entier compris entre 1 *et* $r-1$.

(iii) *Pour toute permutation* σ, *on a :* $d_{r,\sigma}\leq r/4$.

Preuve. — (*a*) Pour $1 \leqslant k \leqslant r-1$, prolongeons par continuité les restrictions aux intervalles $[(k-1)/r, k/r[$ des fonctions Ψ. On a alors deux expressions pour $\Psi(k/r)$; mais en fait ces deux expressions prennent la même valeur :

— pour h tel que $0 \leqslant h \leqslant \sigma(k-1)$ on a :

$$A\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right) - h\frac{k}{r} = E\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right);$$

et pour h tel que $\sigma(k-1) < h < r$ on a :

$$(r-h)\frac{k}{r} - A\left(\left[\frac{h}{r}, 1\right[; k; Z\right) = E\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right)$$

$$\left(\text{car } E\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right) + E\left(\left[\frac{h}{r}, 1\right[; k; Z\right) = 0\right).$$

— D'autre part, pour h tel que $0 \leqslant h \leqslant \sigma(k)$ on a :

$$A\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k+1; Z\right) - h\frac{k}{r} = E\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right)$$

(car $\sigma(k)/r$, $(k+1)$-ième terme de Z, n'est pas dans $[0, h/r[$); et pour h tel que $\sigma(k) < h < r$, on a :

$$(r-h)\frac{k}{r} - A\left(\left[\frac{h}{r}, 1\right[; k+1; Z\right) = E\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right)$$

(pour les mêmes raisons). On a donc montré qu'en fait :

$$\Psi^+_{r,\sigma}\left(\frac{k}{r}\right) = \max_{y \in \bar{Y}_1} E([0, y[; k; Z) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant r-1;$$

on a de même :

$$\Psi^-_{r,\sigma}\left(\frac{k}{r}\right) = \max_{y \in \bar{Y}_1}(-E([0, y[; k; Z))$$

et :

$$\Psi_{r,\sigma}\left(\frac{k}{r}\right) = \max_{x, y \in \bar{Y}_1}(|E([x, y[; k; Z)|).$$

(*b*) La propriété (i) se déduit facilement de ce qui précède : les fonctions Ψ sont continues (car $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$ d'après 3.2.1), affines par morceaux, de période 1.

(*c*) La propriété (ii) résulte aussi de la partie (*a*) quand on remarque que les fonctions Ψ sont convexes sur les intervalles $[(k-1)/r, k/r]$.

(*d*) Pour (iii), il suffit de constater que pour tous $x, y \in \overline{Y}_1$ on a :

$$|E([x, y[; k; Z)| \leqslant k - \frac{k^2}{r}$$

(le terme de droite correspondant aux k points situés dans un intervalle de longueur k/r). On peut noter que l'égalité est réalisée avec la permutation identique.

3.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

La démonstration est décomposée en plusieurs lemmes; nous terminons ce sous-paragraphe par deux corollaires.

LEMME 3.3.1. — *Pour tout N, entier au moins égal à* 1, *on a :*

$$\lim_{n \to \infty} (\sup_{y \in \overline{Y}_n} E([0, y[; N; S_r^\Sigma)) = D^+(S_r^\Sigma, N)$$

et :

$$\lim_{n \to \infty} (\sup_{y \in \overline{Y}_n} (-E([0, y[; N; S_r^\Sigma))) = D^-(S_r^\Sigma, N).$$

Preuve. — On a toujours :

$$\sup_{y \in \overline{Y}_n} E([0, y[; N; S_r^\Sigma) \leqslant D^+(S_r^\Sigma, N);$$

D'autre part, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que

$$D^+(S_r^\Sigma, N) - \frac{\varepsilon}{2} < E([0, \alpha[; N; S_r^\Sigma) \leqslant D^+(S_r^\Sigma, N).$$

Soit alors n_0 tel que $N < r^{n_0}(\varepsilon/2)$ et soit $n \geqslant n_0$; pour α il existe u et $v \in \overline{Y}_n$ tels que $l([u, v[) = 1/r^n$ et $\alpha \in [u, v[$.

Par construction de S_r^Σ, il y a aussi un élément x de $\overline{X}_n$ dans $[u, v[$. De deux choses l'une :

— Si $\alpha \leqslant x$, on a :

$$E([0, \alpha[; N; S_r^\Sigma) = E([0, u[; N; S_r^\Sigma) - l([u, \alpha[),$$

d'où :

$$D^+(S_r^\Sigma, N) - \frac{\varepsilon}{2} < E([0, u[; N; S_r^\Sigma) \leqslant \sup_{y \in \overline{Y}_n} E([0, y[; N; S_r^\Sigma).$$

— Si $\alpha > x$, on a :

$$E([0, \alpha[; N; S_r^\Sigma) = E([0, v[; N; S_r^\Sigma) + l([\alpha, v]),$$

d'où :

$$D^+(S_r^\Sigma, N) - \varepsilon < E([0, v[; N; S_r^\Sigma) \leqslant \sup_{y \in \overline{Y}_n} E([0, y[; N; S_r^\Sigma).$$

D'où la propriété annoncée pour D^+; démonstration analogue pour D^-.

LEMME 3.3.2. — *Soient n et N des entiers tels que $1 \leqslant N < r^n$. Alors, pour tout $y \in \overline{Y}_n$, il existe $y' \in \overline{Y}_{n-1}$ vérifiant :*

$$E([0, y[; N; X_n) \leqslant E([0, y'[; N; X_n) + \Psi^+_{r, \sigma_{n-1}}\left(\frac{N}{r^n}\right),$$

et :

$$-E([0, y[; N; X_n) \leqslant -E([0, y'[; N; X_n) + \Psi^-_{r, \sigma_{n-1}}\left(\frac{N}{r^n}\right);$$

de plus, l'égalité a lieu pour certains $y \in \overline{Y}_n$, formant une (ou plusieurs) progressions arithmétiques de raison $1/r^{n-1}$.

Preuve. — C'est le procédé reliant y à y' qui fait apparaître les fonctions affines intervenant dans la définition de $\Psi^+_{r, \sigma}$ et $\Psi^-_{r, \sigma}$; ce procédé ne dépend pas de n, mais seulement de r et de $\sigma = \sigma_{n-1}$.

Soit k l'entier, compris entre 1 et r, tel que $(k-1) r^{n-1} \leqslant N < k r^{n-1}$, et soit $y \in \overline{Y}_n$. On lui associe u et v éléments de $\overline{Y}_{n-1}$ définis par :

$$l([u, v[) = \frac{1}{r^{n-1}} \qquad \text{et} \qquad y \in [u, v[.$$

Soit x_i le terme de X_{n-1} qui appartient à $[u, v[$ (*voir* la propriété 3.1.3).

Alors, si $y \leqslant x_{(k-1) r^{n-1} + i}$, on pose $y' = u$ (1^er^ cas) et si $y > x_{(k-1) r^{n-1} + i}$, on pose $y' = v$ (2^e^ cas).

— Dans le premier cas, on a :

$$E([0, y[; N; X_n) - E([0, y'[; N; X_n) = A([u, y[; N; X_n) - N(y - u);$$

or :

$$A([u, y[; N; X_n) = A([0, r^{n-1}(y-u)[; k; Z)$$

puisque l'ordre des points sur $[u, v[$ reproduit l'ordre des termes de Z sur $[0, 1[$, d'après la propriété 3.1.3; on a donc :

(i) $$E([0, y[; N; X_n)-E([0, y'[; N; X_n)=A\left(\left[0, \frac{h}{r}\right[; k; Z\right)-\frac{N}{r^n}h,$$

avec $h=r^n(y-u)$ qui est bien compris entre 0 et $\sigma(k-1)$:

$$\left(\text{car } 0\leqslant y-u\leqslant x_{(k-1)r^{n-1}+i}-\left(x_i-\frac{\sigma_{n-1}(0)}{r^n}\right)\right).$$

— Dans le second cas, on a :

$$E([0, y[; N; X_n)-E([0, y'[; N; X_n)=N\,l([y, v[)-A([y, v[; N; X_n);$$

or, toujours d'après la propriété 3.1.3, on a :

$$A([y, v[; N; X_n)=A([r^{n-1}(y-u), 1[; h; Z).$$

Si on remarque que $r^n\,l([y, v[)=r-r^n(y-u)$, on obtient :

(ii) $$E([0, y[; N; X_n)-E([0, y'[; N; X_n)=(r-h)\frac{N}{r^n}-A\left(\left[\frac{h}{r}, 1[; k; Z\right.\right),$$

avec $h=r^n(y-u)$, compris strictement entre $\sigma(k-1)$ et r.

Les formules (i) et (ii) montrent la première inégalité du lemme; la deuxième en résulte par changement de signe; l'égalité a lieu pour certains éléments de $\overline{Y}_n\cap[u, v[$ car h va de 0 à $r-1$ quand y décrit $\overline{Y}_n\cap[u, v[$; l'ordre des termes de X_n dans $[u, v[$ ne dépendant pas de u et v, on a bien la périodicité annoncée.

LEMME 3.3.3. — *Soient n, N et k des entiers tels que $1\leqslant N\leqslant r^n$ et $kr^{n-1}<N\leqslant(k+1)r^{n-1}$. Alors pour tout $y'\in\overline{Y}_{n-1}$ on a :*

$$E([0, y'[; N; X_n)=E([0, y'[; N-kr^{n-1}; X_{n-1}).$$

Preuve. — Notons que :

$$A([0, y'[; N; X_n)=A([0, y'[; kr^{n-1}; X_n)+\operatorname{card}\{j;\ kr^{n-1}<j\leqslant N \text{ et } x_j\in[0, y'[\}.$$

Or j vérifie $kr^{n-1}<j\leqslant N$ et $x_j\in[0, y'[$ si et seulement si $j=kr^{n-1}+i$ avec $1\leqslant i\leqslant N-kr^{n-1}$ et $x_j\in[0, y'[$; et ceci est équivalent à : i vérifie

$1 \leqslant i \leqslant N - kr^{n-1}$ et $x_i \in [0, y'[$, car :

$$x_j = x_i + \frac{\sigma_{n-1}(k) - \sigma_{n-1}(0)}{r^n}$$

d'après la propriété 3.1.2. On a donc :

$$\operatorname{card}\{j;\ kr^{n-1} < j \leqslant N \text{ et } x_j \in [0, y'[\} = A([0, y'[;\ N - kr^{n-1};\ X_{n-1})$$

et par suite :

$$E([0, y'[;\ N;\ X_n) = E([0, y'[;\ N - kr^{n-1};\ X_{n-1}),$$

car :

$$E([0, y'[;\ kr^{n-1};\ X_n) = 0.$$

LEMME 3.3.4. — *Soient n et N des entiers tels que $1 \leqslant N \leqslant r^n$ et soit $y \in \overline{Y}_n$. On a alors :*

$$E([0, y[;\ N;\ X_n) \leqslant \textstyle\sum_{j=1}^{n} \Psi^{+}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\dfrac{N}{r^j}\right)$$

et :

$$-E([0, y[;\ N;\ X_n) \leqslant \textstyle\sum_{j=1}^{n} \Psi^{-}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\dfrac{N}{r^j}\right).$$

Preuve. — On procède par récurrence sur l'entier n.

Pour $n = 1$, le lemme 3.3.2 donne les inégalités.

Si le résultat est vrai à l'ordre $n - 1$, soient $y \in \overline{Y}_n$, N entre 1 et r^n et k tel que $kr^{n-1} < N \leqslant (k+1) r^{n-1}$.

D'après les lemmes précédents, on a :

$$E([0, y[;\ N;\ X_n) \leqslant E([0, y'[;\ N - kr^{n-1};\ X_{n-1}) + \Psi^{+}_{r, \sigma_{n-1}}\left(\frac{N}{r^n}\right)$$

et :

$$-E([0, y[;\ N;\ X_n) \leqslant -E([0, y'[;\ N - kr^{n-1};\ X_{n-1}) + \Psi^{-}_{r, \sigma_{n-1}}\left(\frac{N}{r^n}\right),$$

avec $y' \in \overline{Y}_{n-1}$. D'où, par hypothèse de récurrence :

$$E([0, y'[;\ N - kr^{n-1};\ X_{n-1}) \leqslant \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \Psi^{+}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\dfrac{N - kr^{n-1}}{r^j}\right) = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \Psi^{+}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\dfrac{N}{r^j}\right)$$

et :

$$-E([0, y'[; N-kr^{n-1}; X_{n-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} \Psi^{-}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right);$$

finalement on a bien :

$$E([0, y[; N; X_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \Psi^{+}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right)$$

et l'inégalité correspondante avec $(\Psi^{-}_{r, \sigma_j})_j$.

LEMME 3.3.5. — *Soient n et N entiers tels que $1 \leqslant N \leqslant r^n$. Il existe alors y et $z \in \overline{Y}_n$ tels que :*

$$E([0, y[; N; X_n) = \sum_{j=1}^{n} \Psi^{+}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right)$$

et :

$$-E([0, z[; N; X_n) = \sum_{j=1}^{n} \Psi^{-}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right).$$

Preuve. — On procède encore par récurrence sur n.

Pour $n=1$, le lemme 3.3.2 donne le résultat.

Si le résultat est vrai à l'ordre $n-1$, soit N tel que $1 \leqslant N \leqslant r^n$ et k tel que $kr^{n-1} < N \leqslant (k+1) r^{n-1}$.

Pour $N-kr^{n-1}$, qui est compris entre 1 et r^{n-1}, on a y' et z' dans $\overline{Y}_{n-1}$ tels que :

$$E([0, y'[; N-kr^{n-1}; X_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi^{+}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N-kr^{n-1}}{r^j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi^{+}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right)$$

et

$$-E([0, z'[; N-kr^{n-1}; X_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi^{-}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N-kr^{n-1}}{r^j}\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \Psi^{-}_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right).$$

Or, d'après le lemme 3.3.3, on a :

$$E([0, y'[; N-kr^{n-1}; X_{n-1}) = E([0, y'[; N; X_n)$$

et :

$$-E([0, z'[; N-kr^{n-1}; X_{n-1})= -E([0, z'[; N; X_n);$$

Dans $[y'-(1/r^{n-1}), y'[$, il y a un seul terme de X_n du type $x_{kr^{n-1}+i}$ (avec $1 \leqslant i \leqslant r^{n-1}$); il en est de même dans $[y', y'+(1/r^{n-1})[$.

Notons s et t ces deux termes; d'après le lemme 3.3.2, il existe $y \in \overline{Y}_n \cap]s, t]$ tel que :

$$E([0, y[; N; X_n)=E([0, y'[; N; X_n)+\Psi^+_{r, \sigma_{n-1}}\left(\frac{N}{r^n}\right);$$

On montre de même l'existence de $z \in \overline{Y}_n$ tel que :

$$-E([0, z[; N; X_n)= -E([0, z'[; N; X_n)+\Psi^-_{r, \sigma_{n-1}}\left(\frac{N}{r^n}\right),$$

d'où ce dernier lemme.

3.3.6. *Démonstration du théorème* 1, *corollaires*

Les deux premières formules sur D^+ et D^- s'obtiennent en rapprochant les lemmes 3.3.4, 3.3.5 et 3.3.1; les deux dernières résultent des relations classiques entre les différentes discrépances :

$$D(X, N)=D^+(X, N)+D^-(X, N)$$

et :

$$D^*(X, N)=\max(D^+(X, N), D^-(X, N)).$$

On peut en fait préciser le théorème 1 avec la propriété 3.2.1 (ii) des fonctions Ψ :

COROLLAIRE 1. — *Pour n et N tels que $1 \leqslant N \leqslant r^n$, on a :*

$$D^+(S^\Sigma_r, N)= \sum_{j=1}^n \Psi^+_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right)+\frac{N}{r^n}-N\sum_{j=n+1}^\infty \frac{\sigma_{j-1}(0)}{r^j};$$

$$D^-(S^\Sigma_r, N)= \sum_{j=1}^n \Psi^-_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right)+N\sum_{j=n+1}^\infty \frac{\sigma_{j-1}(0)}{r^j};$$

$$D(S^\Sigma_r, N)= \sum_{j=1}^n \Psi_{r, \sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right)+\frac{N}{r^n}.$$

Le calcul numérique des discrépances est facilité par ces formules, notamment quand la suite Σ est périodique.

Corollaire 2. — *La discrépance et la discrépance à l'origine de la suite* S_r^Σ *sont égales si et seulement si* $\Psi^+_{r,\sigma_j}=0$ *pour tout* $j\geqslant 0$ *ou* $\Psi^-_{r,\sigma_j}=0$ *pour tout* $j\geqslant 0$.

C'est le corollaire annoncé au paragraphe 2. Une implication est immédiate. Pour l'autre, on remarque que si les discrépances sont égales, on a $D^+(S_r^\Sigma, N)=0$ ou $D^-(S_r^\Sigma, N)=0$ pour tout N. Supposons par exemple qu'il existe N_0 tel que $D^-(S_r^\Sigma, N_0)=0$; si n_0 est défini par $r^{n_0-1}<N_0\leqslant r^{n_0}$, on a :

$$D^-(S_r^\Sigma, N_0)=\sum_{j=1}^{n_0}\Psi^-_{r,\sigma_{j-1}}\left(\frac{N_0}{r^j}\right)+N_0\sum_{j=n_0+1}^{\infty}\frac{\sigma_{j-1}(0)}{r^j},$$

d'où $\sigma_{j-1}(0)=0$ pour tout $j\geqslant n_0+1$. Par suite, on a :

$$D^+(S_r^\Sigma, N)\geqslant\frac{N}{r^{n_0}}\quad\text{pour tout } N$$

tel que $1\leqslant N\leqslant r^{n_0}$, d'où $D^-(S_r^\Sigma, N)=0$ pour tout entier $N\leqslant N_0$. Le même raisonnement s'applique pour D^+, d'où le corollaire 2.

Remarque. — Dans le cas où la suite Σ est constante et égale à σ, on retrouve les suites S_r^σ introduites dans [5].

3.4. Généralisation aux systèmes à base variable

3.4.1. Définitions. — Soit $R=(r_j)_{j\geqslant 0}$ une suite d'entiers vérifiant $r_0=1$ et $r_j\geqslant 2$ pour $j\geqslant 1$. Pour $j\geqslant 0$, σ_j désigne une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, r_{j+1}-1\}$, et on note Σ la suite $(\sigma_j)_{j\geqslant 0}$. Posons $R_j=\prod_{i=0}^{j} r_i$, et, pour n entier strictement positif, considérons le développement de $n-1$ en base R : $n-1=\sum_{j=0}^{\infty} a_j(n)\,R_j$; nous définissons alors la suite S_R^Σ à valeurs dans $[0, 1]$ par :

$$S_R^\Sigma(n)=\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j(a_j(n))\,R_{j+1}^{-1}.$$

L'étude des discrépances de ces suites se fait comme pour les suites S_r^Σ qu'elles généralisent. Nous donnons ci-dessous, sans démonstration, le théorème correspondant au théorème 1, puis nous indiquons un procédé pour construire et étudier certaines suites à partir de suites déjà connues.

3.4.2. Théorème 1 *bis*. — *Pour* $N\geqslant 1$, *on a les formules suivantes :*

$$D^+(S_R^\Sigma, N)=\sum_{j=1}^{\infty}\Psi^+_{r_j,\sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{R_j}\right);$$

$$D^-(S_R^\Sigma, N)=\sum_{j=1}^{\infty}\Psi^-_{r_j,\sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{R_j}\right);$$

$$D(S_R^\Sigma, N)=\sum_{j=1}^{\infty}\Psi_{r_j,\sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{R_j}\right).$$

Ce théorème admet des corollaires analogues à ceux du théorème 1.

3.4.3. *Suite $S_{rs}^{\sigma.\tau}$ associée aux couples (r, σ), (s, τ)*

Soient r et s des entiers au moins égaux à 2 et soit σ (resp. τ) une permutation de $\{0, 1, \ldots, r-1\}$ (resp. de $\{0, 1, \ldots, s-1\}$). On définit une permutation $\sigma.\tau$ de $\{0, 1, \ldots, rs-1\}$ par :

$$\sigma.\tau(l) = s\,\sigma(h) + \tau(k),$$

si :

$$l = kr + h \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant h \leqslant r-1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant k \leqslant s-1;$$

On note $S_{rs}^{\sigma.\tau}$ la suite définie par la suite constante $\sigma.\tau$; on a alors la proposition suivante :

PROPOSITION. — (i) *La fonction $\Psi_{rs,\,\sigma.\tau}^{+}$ vérifie la relation :*

$$\Psi_{rs,\,\sigma.\tau}^{+}(x) = \Psi_{s,\,\tau}^{+}(x) + \Psi_{r,\,\sigma}^{+}(sx);$$

on a les mêmes relations avec Ψ^{-} et Ψ.

(ii) *Soit S_R^{Σ} la suite définie par $R = (r_j)_{j \geqslant 0}$ et $\Sigma = (\sigma_j)_{j \geqslant 0}$ avec $r_{j+1} = r$ et $\sigma_j = \sigma$ si j est pair ou nul, $r_{j+1} = s$ et $\sigma_j = \tau$ si j est impair; on a alors $S_{rs}^{\sigma.\tau} = S_R^{\Sigma}$.*

Preuve. — (i) Pour éviter les confusions, désignons par Z_ρ la suite :

$$Z_\rho = \left(\frac{\rho(0)}{t}, \ldots, \frac{\rho(t-1)}{t}\right),$$

où ρ est une permutation de $\{0, \ldots, t-1\}$.

Soit m un entier tel que $1 \leqslant m \leqslant rs$; on a $m-1 = r(k-1) + h - 1$ avec $1 \leqslant h \leqslant r$ et $1 \leqslant k \leqslant s$; par définition de $\sigma.\tau$, on a $\sigma.\tau(m-1) = s\,\sigma(h-1) + \tau(k-1)$.

Soit alors a un entier tel que $0 \leqslant a \leqslant \sigma.\tau(m-1)$ (*voir* la définition de $\Psi_{rs,\,\sigma.\tau}^{+}$, § 2.3); on a $a = bs + c$ avec $0 \leqslant b \leqslant \sigma(h-1)$ et $0 \leqslant c \leqslant s-1$; traitons le cas où on a $0 \leqslant c \leqslant \tau(h-1)$.

Nous devons évaluer la quantité $A([0, a/rs[;\, m;\, Z_{\sigma.\tau}) - ax$, où $x \in [(m-1)/rs,\, m/rs]$; on vérifie facilement les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A\left(\left[0, \frac{a}{rs}\right[;\, m;\, Z_{\sigma.\tau}\right) &= A\left(\left[0, \frac{b}{r}\right[;\, r(k-1);\, Z_{\sigma.\tau}\right) \\ &\quad + A\left(\left[\frac{b}{r}, \frac{a}{rs}\right[;\, m;\, Z_{\sigma.\tau}\right) \\ &\quad + \operatorname{card}\left\{i;\, r(k-1) < i \leqslant m \text{ et } z_i \in \left[0, \frac{b}{r}\right[\right\}, \end{aligned}$$

$$A\left(\left[0, \frac{b}{r}\right[; r(k-1); Z_{\sigma.\tau}\right) = (k-1)b,$$

$$A\left(\left[\frac{b}{r}, \frac{a}{rs}\right[; m; Z_{\sigma.\tau}\right) = A\left(\left[0, \frac{c}{s}\right[; k; Z_{\tau}\right),$$

$$\operatorname{card}\left\{i; r(k-1) < i \leqslant m \text{ et } z_i \in \left[0, \frac{b}{r}\right[\right\} = A\left(\left[0, \frac{b}{r}\right[; h; Z_{\sigma}\right).$$

Par ailleurs :

$$x = \frac{k-1}{s} + y \qquad \text{avec} \quad \frac{h}{rs} \leqslant y \leqslant \frac{h+1}{rs},$$

d'où $ax = b(k-1) + cx + bsy$. Finalement, on a :

$$A\left(\left[0, \frac{a}{rs}\right[; m; Z_{\sigma.\tau}\right) - ax$$
$$= A\left(\left[0, \frac{c}{s}\right[; k; Z_{\tau}\right) - cx + A\left(\left[0, \frac{b}{r}\right[; h; Z_{\sigma}\right) - b(sx-k+1),$$

avec $0 \leqslant c \leqslant \tau(k-1)$ et $0 \leqslant b \leqslant \sigma(h-1)$.

Le cas où on a $\tau(k-1) < c < s$, puis les cas analogues pour $\sigma.\tau(m-1) < a < rs$ se traitent de la même façon.

Les relations obtenues montrent alors qu'on a bien :

$$\Psi^{+}_{rs,\,\sigma.\tau}(x) = \Psi^{+}_{r,\,\sigma}(sx) + \Psi^{+}_{s,\,\tau}(x).$$

(ii) On a successivement :

$$n-1 = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) r^j, \qquad n-1 = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(n) s^j$$

et

$$n-1 = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} c_j(n)(rs)^j \qquad \text{avec} \quad c_j(n) = rb_j(n) + a_j(n).$$

On en déduit que :

$$S_{rs}^{\sigma.\tau}(n) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \sigma.\tau(c_j(n))(rs)^{-j-1}$$
$$= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} s\,\sigma(a_j(n))(rs)^{-j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \tau(b_j(n))(rs)^{-j-1},$$

d'où :

$$S_{rs}^{\sigma.\tau}(n) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \sigma(a_j(n)) R_{2j+1}^{-1} + \sum_{j=0}^{\infty} \tau(b_j(n)) R_{2j+2}^{-1},$$

d'où $S_{rs}^{\sigma.\tau}(n) = S_R^{\Sigma}(n)$.

C.Q.F.D.

Remarques. — Quand R et Σ sont périodiques, de même période J, on a donc

$$S_R^\Sigma = S_{R_J}^{\Sigma_J} \quad \text{avec} \quad R_J = \prod_{i=0}^{J} r_i \quad \text{et} \quad \Sigma_J = \prod_{i=0}^{J-1} \sigma_i$$

(au sens du produit, qui est associatif, défini ci-dessus). En particulier, si R et Σ sont constantes, on obtient $S_r^\sigma = S_{r^n}^{\sigma^n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Au vu de nombreux cas étudiés, il ne semble pas que la généralisation aux systèmes variables apporte de meilleurs résultats quant aux faibles discrépances.

4. Étude asymptotique

4.1. Introduction

Les paragraphes 4 et 5 sont consacrés au comportement des discrépances pour N tendant vers l'infini. On peut tout d'abord donner un encadrement général qui situe les suites S_r^Σ du point de vue des faibles discrépances : c'est l'objet de la proposition ci-dessous.

La recherche des couples (r, Σ) donnant la plus faible discrépance pour les premières valeurs de r montre qu'on a intérêt à répéter la permutation σ qui donne le plus petit $d_{r,\sigma}$ ($d_{r,\sigma} = \max \Psi_{r,\sigma}$). Par contre, s'il s'agit de la discrépance à l'origine, il apparaît qu'on gagne à alterner une permutation donnée σ avec sa « symétrique » $\tau \circ \sigma$ (où τ est définie par $\tau(k) = r-1-k$).

Cela nous conduit à privilégier les suites constantes pour la recherche des faibles discrépances (th. 2, § 4.3) et les suites « alternées » pour la recherche des faibles discrépances à l'origine (th. 3, § 4.4). Auparavant, nous préparons les démonstrations par deux lemmes sur les fonctions Ψ (§ 4.2).

Proposition. — *Quels que soient r et Σ, on a les relations suivantes :*

$$\frac{r-2}{(r-1)\operatorname{Log} r} \leqslant s(S_r^\Sigma) \leqslant \frac{r}{4 \operatorname{Log} r}$$

et :

$$\frac{r-2}{2(r-1)\operatorname{Log} r} \leqslant s^*(S_r^\Sigma) \leqslant \frac{r}{4 \operatorname{Log} r}.$$

Preuve. — Soit $N \geqslant 1$ et n tel que $r^{n-1} \leqslant N \leqslant r^n$; d'après le corollaire 1 (*voir* 3.3.6), on a :

$$D(S_r^\Sigma, N) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_{r,\sigma_{j-1}}\left(\frac{N}{r^j}\right) + \frac{N}{r^n},$$

d'où, d'après la propriété 3.2.2 (iii), $D(S_r^\Sigma, N) \leqslant n(r/4)+1$; par suite, on a bien $\bar{s}(S_r^\Sigma) \leqslant r/4 \operatorname{Log} r$.

Soit θ la fonction définie par $\theta(x)=\min((r-1)x, 1-x)$ pour $\{x\} \in [0, 1/2]$ et $\theta(x)=\theta(1-x)$ pour $\{x\} \in [1/2, 1]$. D'après la propriété 3.2.1 (iv), on a : $\theta \leqslant \Psi_{r,\sigma}$ pour toute permutation σ; on aura donc un minorant de $s(S_r^\Sigma)$ si on a un minorant de :

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{Log} N}\sum_{j=1}^{\infty}\theta\left(\frac{N}{r^j}\right)\right).$$

Or la suite $(N_n)_n$ définie par $N_n=(r^n-1)/(r-1)$ vérifie :

$$\sum_{j=1}^{n}\theta\left(\frac{N_n}{r^j}\right)=n\frac{r-2}{r-1}+\frac{r^n-1}{r^n(r-1)^2},$$

comme le montre un calcul élémentaire; par suite on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\operatorname{Log} N_n}\sum_{j=1}^{\infty}\theta\left(\frac{N_n}{r^j}\right)\right)=\frac{r-2}{(r-1)\operatorname{Log} r},$$

d'où les inégalités annoncées pour $s(S_r^\Sigma)$.

Les inégalités analogues pour $s^*(S_r^\Sigma)$ sont immédiates.

Remarque. — On voit donc que pour les suites S_r^Σ les limites supérieures s et s^* sont finies. La majoration peut être légèrement améliorée (*voir* le corollaire qui suit le théorème 6). Les minorations n'ont d'intérêt que pour r assez petit; nous n'avons pas, pour l'instant, de minorant qui ne tende pas vers 0 quand r tend vers l'infini.

4.2. Deux lemmes sur les fonctions Ψ

LEMME 4.2.1. — *Soient J et K deux entiers tels que $1 \leqslant J \leqslant K$. On a alors :*

$$\max_{x\in\mathbf{R}}\left(\sum_{j=1}^{J}\Psi_j\left(\frac{x}{r^j}\right)\right)+\max_{x\in\mathbf{R}}\left(\sum_{j=J+1}^{K}\Psi_j\left(\frac{x}{r^j}\right)\right)-\max_{x\in\mathbf{R}}\left(\sum_{j=1}^{K}\Psi_j\left(\frac{x}{r^j}\right)\right)\leqslant 1.$$

Preuve. — Ce lemme est conséquence des trois propriétés suivantes :

La fonction $x \to \sum_{j=1}^{J}\Psi_j(x/r^j)$ est périodique de période r^J.

La fonction $x \to \sum_{j=J+1}^{K}\Psi_j(x/r^j)$ est périodique de période r^K; elle est maximum de fonctions affines sur les intervalles du type $[kr^J, (k+1)r^J]$.

Les pentes de la fonction ci-dessus sont majorées par r^{-J}.

En effet, les pentes des fonctions Ψ_j sont majorées par $r-1$ (*voir* la propriété 3.2.1) d'où les pentes de la fonction étudiée sont majorées par $(r-1)(r^{-J-1}+\ldots+r^{-K})=r^{-J}-r^{-K}$.

Pour obtenir le lemme, il suffit alors de remarquer que la fonction $x\to\sum_{j=1}^{J}\Psi_j(x/r^j)$ de période r^J vient s'ajouter sur tout intervalle $[kr^J, (k+1)r^J]$ à la fonction $x\to\sum_{j=J+1}^{K}\Psi_j(x/r^j)$ dont le maximum est atteint pour une extrémité d'un de ces intervalles; la différence entre somme des maxima et maximum de la somme est donc au plus égale à $r^J\times r^{-J}=1$.

LEMME 4.2.2. — *Pour n entier au moins égal à* 1, *on pose* :

$$\varphi_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\Psi\left(\frac{x}{r^j}\right),\qquad d_n=\max_{x\in\mathbf{R}}\varphi_n(x)\qquad et\qquad \alpha=\inf_{n\geqslant 1}\left(\frac{d_n}{n}\right).$$

Alors : $\alpha=\lim_{n\to\infty}d_n/n$, *et il existe* $\beta_n\in[0, 1]$ *tel que* $d_n=\alpha n+\beta_n$.

Preuve. — Soit n un entier fixé et m un entier quelconque; m s'écrit $m=an+b$ avec $0\leqslant b<n$, d'où :

$$\varphi_m(x)=\sum_{k=0}^{a-1}\varphi_n\left(\frac{x}{r^{kn}}\right)+\sum_{j=1}^{b}\Psi\left(\frac{x}{r^{an+j}}\right).$$

Il en résulte que $d_m\leqslant a\,d_n+d_b$, d'où la première égalité du lemme :

$$\inf_{n\geqslant 1}\frac{d_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n}.$$

En fait, par application itérée du lemme 4.2.1, on peut obtenir $d_m=a\,d_n+d_b-\delta_{m,n}$ avec $0\leqslant\delta_{m,n}\leqslant a$. On déduit alors de ce qui précède que :

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\delta_{m,n}}{m}=\frac{d_n}{n}-\alpha\qquad\text{et}\qquad\lim_{m\to\infty}\frac{\delta_{m,n}}{m}\leqslant\frac{1}{n};$$

d'où, en posant $\beta_n=n\lim_{m\to\infty}\delta_{m,n}/m$, la deuxième partie du lemme 4.2.2.

4.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

4.3.1. Montrons d'abord que $s(S_r^\sigma)=\alpha_{r,\sigma}/\operatorname{Log} r$.

D'après le corollaire 1 (*voir* 3.3.6), pour $N\geqslant 1$, on a :

$$D(S_r^\sigma, N)=\varphi_n(N)+\frac{N}{r^n},$$

avec n tel que $r^{n-1} < N \leqslant r^n$; par application du lemme 4.2.2, on en déduit que :

$$\frac{D(S_r^\sigma, N)}{\operatorname{Log} N} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} N}(\alpha_{r,\sigma} n + \beta_n + 1), \qquad \text{d'où} \quad s(S_r^\sigma) \leqslant \frac{\alpha_{r,\sigma}}{\operatorname{Log} r}.$$

Mais, d'autre part, il existe un entier N_n tel que $r^{n-1} \leqslant N_n \leqslant r^n$ et $d_n = \varphi_n(N_n)$. En effet : pour $r=2$ on a $\Psi_{r,\sigma}(x) = \min(x, 1-x)$; et pour $r \geqslant 3$, la fonction $\Psi_{r,\sigma}$ vérifie, d'après la propriété 3.2.1 :

$$\Psi_{r,\sigma}(x) = (r-1)x \qquad \text{pour} \quad x \in \left[0, \frac{1}{r}\right]$$

et :

$$\Psi_{r,\sigma}(x) \geqslant x \qquad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{r-2}{r}, \frac{r-1}{r}\right],$$

d'où $\Psi_{r,\sigma}$ est dominée sur $[0, 1/r]$ par sa translatée de $-(r-2)/r$; il en résulte que les entiers réalisant le maximum de φ_n dépassent r^{n-1}.

On a donc une suite croissante $(N_n)_n$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(S_r^\sigma, N_n)}{\operatorname{Log} N_n} = \frac{\alpha_{r,\sigma}}{\operatorname{Log} r},$$

d'où l'égalité annoncée.

4.3.2. Pour la deuxième partie du théorème, il suffit de constater que la fonction :

$$x \to \frac{x}{r^n} - \frac{\alpha_{r,\sigma}}{\operatorname{Log} r} \operatorname{Log} x$$

est convexe sur $[r^{n-1}, r^n]$, d'où elle est majorée par le maximum de ses valeurs aux bornes qui sont $\alpha_{r,\sigma} + (1/r) - n\alpha_{r,\sigma}$ et $1 - n\alpha_{r,\sigma}$; on a donc :

$$D(S_r^\sigma, N) \leqslant \frac{\alpha_{r,\sigma}}{\operatorname{Log} r} \operatorname{Log} N + \max\left(1, \frac{1}{r} + \alpha_{r,\sigma}\right) + \sup_{n \geqslant 1} \beta_n$$

d'où la majoration cherchée, d'après le lemme 4.2.2.

4.4. Démonstration du théorème 3

Nous commençons par deux lemmes qui introduisent l'ensemble A intervenant dans ce théorème.

LEMME 4.4.1. — *Soit A une partie de $\mathbb{N}$ et σ une permutation de $\{0, 1, \ldots, r-1\}$. On définit $\Sigma_A=(\sigma_j)_{j\geqslant 0}$ par $\sigma_j=\sigma$ si $j\in A$ et $\sigma_j=\tau\circ\sigma, j\notin A$, où τ est la permutation définie par $\tau(k)=r-k-1$ pour $0\leqslant k\leqslant r-1$. On a alors :*

$$D^*(S_r^{\Sigma_A}, N)=\max\left(\sum_{j=1, j\in A}^{\infty}\Psi_{r,\sigma}^{+}\left(\frac{N}{r^j}\right)+\sum_{j=1, j\notin A}^{\infty}\Psi_{r,\sigma}^{-}\left(\frac{N}{r^j}\right),\right.$$
$$\left.\sum_{j=1, j\in A}^{\infty}\Psi_{r,\sigma}^{-}\left(\frac{N}{r^j}\right)+\sum_{j=1, j\notin A}^{\infty}\Psi_{r,\sigma}^{+}\left(\frac{N}{r^j}\right)\right)$$

et $D(S_r^{\Sigma_A}, N)=D(S_r^{\sigma}, N)$.

Preuve. — Il suffit de vérifier que $\Psi_{r,\tau\circ\sigma}^{+}=\Psi_{r,\sigma}^{-}$ et $\Psi_{r,\tau\circ\sigma}^{-}=\Psi_{r,\sigma}^{+}$ pour obtenir ce lemme qui apparaît alors comme un corollaire du théorème 1.

Remarque. — L'intérêt de la permutation τ est d'échanger les fonctions $\Psi_{r,\sigma}^{+}$ et $\Psi_{r,\sigma}^{-}$; on a ainsi une relation étroite entre D^+ et D^-; et on voit sur la formule donnant D^* que, si on veut abaisser la discrépance à l'origine, il faut trouver A de sorte que, pour toute fonction Ψ, la somme $\sum_{j=1}^{n}\Psi(N/r^j)$ se partage, asymptotiquement, en deux parties égales. C'est l'objet du lemme 4.4.2.

LEMME 4.4.2. — *Soit $A=\bigcup_{H=1}^{\infty}A_H$ avec $A_H=\{H(H-1)+1, \ldots, H^2\}$. Alors pour toute fonction Ψ du type $\Psi_{r,\sigma}$ ou $\Psi_{r,\sigma}^{\pm}$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n^A}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n^{A^c}}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n}=\frac{\alpha}{2},$$

avec :

$$\varphi_n^A(x)=\sum_{j=1, j\in A}^{n}\Psi\left(\frac{x}{r^j}\right), \qquad \varphi_n^{A^c}(x)=\sum_{j=1, j\notin A}^{n}\Psi\left(\frac{x}{r^j}\right)$$

et :

$$d_n^A=\max_{x\in\mathbf{R}}\varphi_n^A(x), \qquad d_n^{A^c}=\max_{x\in\mathbf{R}}\varphi_n^{A^c}(x).$$

Preuve. — Étant donné $n\geqslant 1$, soit H_n tel que :

$$H_n(H_n-1)+1<n\leqslant(H_n+1)H_n.$$

Par application itérée du lemme 4.2.1, on obtient :

$$d_n^A=\sum_{H=1}^{H_n}\max_{x\in\mathbf{R}}\left(\sum_{j\in A_H, j\leqslant n}\Psi\left(\frac{x}{r^j}\right)\right)+O(H_n).$$

Pour H tel que $1 \leqslant H \leqslant H_n - 1$, on a :

$$\sum_{j \in A_H} \Psi\left(\frac{x}{r^j}\right) = \sum_{j=H(H-1)+1}^{H^2} \Psi\left(\frac{x}{r^j}\right);$$

d'où, d'après le lemme 4.2.2 :

$$\max_{x \in \mathbf{R}} \sum_{j \in A_H} \Psi\left(\frac{x}{r^j}\right) = \alpha H + \beta_H.$$

Finalement, on obtient :

$$d_n^A = \frac{\alpha}{2} H_n(H_n+1) + \sum_{H=1}^{H_n} \beta_H + O(H_n), \qquad \text{d'où} \quad \frac{d_n^A}{n} = \frac{\alpha}{2} + o(1).$$

On montre de même que $d_n^{A^c}/n = (\alpha/2) + o(1)$, d'où le lemme 4.4.2.

4.4.3. *Étude de* $D^+(S_r^{\Sigma A}, N)$.

Il résulte du corollaire 1 (3.3.6) et du lemme 4.4.1 que, pour n et N tels que $1 \leqslant N \leqslant r^n$ on a :

$$D^+(S_r^{\Sigma A}, N) = \sum_{j=1, j \in A}^{n} \Psi_{r,\sigma}^+\left(\frac{N}{r^j}\right) + \sum_{j=1, j \notin A}^{n} \Psi_{r,\sigma}^-\left(\frac{N}{r^j}\right) + \gamma \frac{N}{r^{n+1}},$$

avec $\gamma = \sum_{j=0}^{\infty} a_j/r^j$, où $a_j = r - 1 - \sigma(0)$ si $j \in A$ et $a_j = \sigma(0)$ si $j \notin A$; notons que $a_j \leqslant r-1$, d'où $\gamma \leqslant r$.

Soit alors $N \geqslant 1$ et n tel que $r^{n-1} < N \leqslant r^n$; d'après le lemme 4.4.2 appliqué successivement à :

$$\varphi_n^{+A}(x) = \sum_{j=1, j \in A}^{n} \Psi_{r,\sigma}^+\left(\frac{x}{r^j}\right) \qquad \text{et} \qquad \varphi_n^{-A^c}(x) = \sum_{j=1, j \notin A}^{n} \Psi_{r,\sigma}^-\left(\frac{x}{r^j}\right),$$

on a :

$$\frac{D^+(S_r^{\Sigma A}, N)}{\operatorname{Log} N} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} N}(d_n^{+A} + d_n^{-A^c} + 1);$$

d'où :

$$\overline{\lim}_{N \to \infty} \frac{D^+(S_r^{\Sigma A}, N)}{\operatorname{Log} N} \leqq \frac{\alpha_{r,\sigma}^+ + \alpha_{r,\sigma}^-}{2 \operatorname{Log} r}.$$

Montrons qu'en fait on a l'égalité dans la relation ci-dessus : pour tout n, il existe N_n tel que $1 \leqslant N_n \leqslant r^n$ et

$$\max_{x \in \mathbf{R}} (\varphi_n^{+A}(x) + \varphi_n^{-A^c}(x)) = \varphi_n^{+A}(N_n) + \varphi_n^{-A^c}(N_n);$$

on a donc :

$$D^+(S_r^{\Sigma_A}, N_n) = \max_{x\in\mathbf{R}}(\varphi_n^{+A}(x)+\varphi_n^{-A^c}(x)) + \frac{N_n}{r^{n+1}}\gamma;$$

d'où par application itérée du lemme 4.2.1, on a :

$$D^+(S_r^{\Sigma_A}, N_n) = \sum_{H=1}^{H_n}\left(\max_{x\in\mathbf{R}}\sum_{j=H(H-1)+1}^{H^2}\Psi_{r,\sigma}^+\left(\frac{x}{r^j}\right)\right.$$
$$\left. +\max_{x\in\mathbf{R}}\sum_{j=H^2+1}^{H^2+H}\Psi_{r,\sigma}^-\left(\frac{x}{r^j}\right)\right)+O(H_n)$$

(où H_n est tel que $H_n(H_n-1)<n\leqslant(H_n+1)H_n$); mais alors, par le lemme 4.2.2, on obtient :

$$D^+(S_r^{\Sigma_A}, N_n) = \frac{\alpha_{r,\sigma}^+ + \alpha_{r,\sigma}^-}{2}H_n(H_n+1)+O(H_n).$$

Or, en fait, l'entier N_n vérifie $r^{n-1-H_n}\leqslant N_n\leqslant r^n$, car l'une au moins des fonctions $\Psi_{r,\sigma}^+$, $\Psi_{r,\sigma}^-$ est dominée sur l'intervalle $[0, 1/r]$ par sa translatée de $-k/r$ avec $k>0$, convenablement choisi (on distingue les cas $\sigma(0)=0$ et $\sigma(0)>0$; dans le premier cas, si $\Psi^-=0$, Ψ^+ réalise la propriété avec $k=r-2$ et si $\Psi^-\neq 0$, c'est Ψ^- qui convient avec k tel que $\Psi^-\neq 0$ sur $[k/r, (k+1)/r]$ car $\Psi^-=0$ sur $[0, 1/r]$; dans le second cas, si $\sigma(1)<\sigma(0)$ c'est Ψ^+ qui réalise la propriété avec $k=1$, et si $\sigma(1)>\sigma(0)$, c'est Ψ^- toujours avec $k=1$).

Il résulte de cela que :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D^+(S_r^{\Sigma_A}, N_n)}{\operatorname{Log} N_n} = \frac{\alpha_{r,\sigma}^+ + \alpha_{r,\sigma}^-}{2\operatorname{Log} r},$$

car :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{Log} N_n}{n} = \operatorname{Log} r \qquad \text{d'où} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{H}_n(\mathrm{H}_n+1)}{\operatorname{Log} N_n} = \frac{1}{\operatorname{Log} r};$$

d'où l'égalité annoncée :

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{D^+(S_r^{\Sigma_A}, N)}{\operatorname{Log} N} = \frac{\alpha_{r,\sigma}^+ + \alpha_{r,\sigma}^-}{2\operatorname{Log} r}.$$

4.4.4. *Étude de* $D^*(S_r^{\Sigma_A}, N)$

La démonstration que nous venons de faire pour D^+ se répète pour D^-; de la relation $D^*=\max(D^+, D^-)$, on déduit alors que :

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{D^*(S_r^{\Sigma_A}, N)}{\operatorname{Log} N} = \frac{\alpha_{r,\sigma}^+ + \alpha_{r,\sigma}^-}{2\operatorname{Log} r},$$

d'où le théorème 3.

Remarque. — Si la discrépance et la discrépance à l'origine de S_r^σ sont égales, on a $s^*(S_r^{\Sigma_A})=(1/2)s(S_r^\sigma)$; c'est le cas notamment pour les suites S_r^I avec I permutation identique (*voir* le théorème 6); avec S_2^I, on retrouve le résultat obtenu en [1].

5. Étude numérique de quelques cas

5.1. Introduction

Les théorèmes 4, 5, 6 relèvent du même problème : étant donnée une suite S_r^σ ou $S_r^{\Sigma_A}$, calculer les constantes $\alpha_{r,\sigma}$ ou $\alpha_{r,\sigma}^+$, $\alpha_{r,\sigma}^-$ (*voir* les théorèmes 2 et 3), de sorte à obtenir $s(S_r^\sigma)$ ou $s^*(S_r^{\Sigma_A})$.

Nous savons résoudre ce problème, pour des cas assez simples, par des méthodes récurrentes exposées au paragraphe 5.3; nous en déduirons le théorème 5 (5.4) et le théorème 6 (5.5). Auparavant (5.2), nous indiquons comment on peut encadrer avec précision les constantes à calculer; c'est grâce à de telles limitations que nous avons déterminé les couples (r, σ) et (r, Σ_A) qui donnent les meilleurs résultats possibles pour r inférieur à 20; il en résulte aussi le théorème 4, la fonction Ψ_{12,σ_0} ne s'étant pas prêtée à nos méthodes récurrentes.

5.2. Encadrement pour les constantes α. Théorème 4.

5.2.1. On désigne par Ψ une fonction du type $\Psi_{r,\sigma}$, $\Psi_{r,\sigma}^+$ ou $\Psi_{r,\sigma}^-$, et par α la constante associée; posons $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\Psi(xr^k)$, et notons que :

$$\alpha=\inf_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}\max_{x\in[0,1]}F_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\max_{x\in[0,1]}F_n(x)\right).$$

Pour majorer α avec une précision donnée, il suffit de calculer $d_n=\max F_n(x)$ pour n allant de 1 à n_0, avec n_0 assez grand (d'après le lemme 4.2.2, on a :

$$\alpha=\frac{d_n}{n}-\frac{\beta_n}{n}\ \text{avec}\ \beta_n\in[0,1]\Big).$$

Ce type de calcul peut être considérablement réduit en utilisant la notion d'intervalle dominé (*voir* 5.3); malgré cela, on est vite limité par l'ampleur des calculs, même pour r assez petit.

Pour minorer, on détermine des valeurs de x telles que $(1/\nu n) F_{\nu n}(x)$ soit indépendant de n :

Soient ν et a des entiers tels que $1 \leqslant a \leqslant r^\nu$; alors on a :

$$F_{\nu n}\left(\frac{a}{r^\nu - 1}\right) = n \sum_{k=0}^{\nu-1} \Psi\left(\frac{ar^k}{r^\nu - 1}\right) = n F_\nu\left(\frac{a}{r^\nu - 1}\right);$$

d'où, quelques soient ν et a entiers vérifiant $1 \leqslant a \leqslant r^\nu$, on a :

$$\frac{1}{\nu} F_\nu\left(\frac{a}{r^\nu - 1}\right) \leqslant \alpha.$$

Ici également, pour ν donné, on peut se limiter aux valeurs de a intéressantes en éliminant les intervalles dominés.

5.2.2. *Démonstration du théorème* 4

Pour $r = 12$ et $\sigma_0 = (17698)(23\overline{10}45)$ (produit des deux permutations circulaires), la fonction $\Psi_{12, \sigma_0} = \Psi$ est définie par les relations suivantes :

$$\Psi(x) = 11x \qquad \text{pour} \quad x \in \left[0, \frac{1}{12}\right],$$

$$\Psi(x) = \max(1 - x, 6x) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right],$$

$$\Psi(x) = \max(2 - 6x, 4x) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right],$$

$$\Psi(x) = \max(2 - 4x, 3x) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right],$$

$$\Psi(x) = \max(2 - 3x, 7x - 2) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{5}{12}\right],$$

$$\Psi(x) = \max(3 - 5x, 2x) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\Psi(x) = \Psi(1 - x) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Notons qu'ici Ψ^+ et Ψ^- ne sont pas nulles et donc que la discrépance et la discrépance à l'origine de $S_{12}^{\sigma_0}$ sont différentes.

La majoration résulte du calcul à la machine de d_n pour $1 \leqslant n \leqslant 9$; le minimum est atteint pour $n=9$ avec $d_9=8,496\ldots$, ce qui donne : $s(S_{12}^{\sigma_0})<0{,}38$.

La minoration est obtenue pour $\nu=3$ et $a=829$ qui donnent :

$$\frac{1}{3}F_3\left(\frac{829}{1727}\right)=\frac{4828}{5181} \quad \text{d'où } 0{,}375\ldots=\frac{4828}{5181\,\mathrm{Log}\,12}\leqslant s(S_{12}^{\sigma_0}).$$

C'est la plus grande valeur pour ν allant de 2 à 6; en raison de la conjecture sur la rationalité de α (*voir* 5.6), nous pensons que :

$$s(S_{12}^{\sigma_0})=\frac{4828}{5181\,\mathrm{Log}\,12}.$$

5.3. MÉTHODE POUR LE CALCUL DE α

Comme ci-dessus, on pose : $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\Psi(xr^k)$; pour $n\geqslant 1$ et h tel que $0\leqslant h<r^n$, on note I_h^n l'intervalle $[h/r^n, (h+1)/r^n]$.

On dit que l'intervalle I_h^n est *dominé* (de rang n) si il existe J ne contenant pas h tel que pour tout $x\in I_h^n$ on ait :

$$F_n(x)\leqslant \max_{j\in J} F_n\left(x+\frac{j-h}{r^n}\right).$$

Un intervalle (de rang n) qui n'est pas dominé est dit *dominant* (de rang n).

On note D_n la réunion des intervalles dominants; la suite $(D_n)_n$ est décroissante et :

$$\alpha=\inf_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}\max_{x\in D_n}F_n(x)\right).$$

Le calcul de α se ramène donc à la détermination de D_n et du maximum de F_n sur D_n. On procède par récurrence sur n, ce qui exige la connaissance de la fonction F_n sur D_n (le passage de n à $(n+1)$ se faisant par addition de la fonction $x\to\Psi(xr^n)$). Pour simplifier la démonstration, on peut supprimer les intervalles de D_n qui sont dominés au rang m pour $n<m\leqslant n+n_0$ avec n_0 fixé).

Dans les cas simples (par exemple le cas où D_n est réduit à un seul intervalle) il n'y a pas de difficultés; par contre, les calculs deviennent inextricables quand Ψ est trop compliquée.

5.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5

5.4.1. Pour $r=12$ et $\sigma=(15)(29)(47)(610)$ (produit de transpositions), les fonctions $\Psi^+_{12,\sigma}=\Psi^+$ et $\Psi^-_{12,\sigma}=\Psi^-$ sont définies par les relations suivantes :

$$\Psi^+(x)=11\,x \quad \text{pour} \quad x\in\left[0, \frac{1}{12}\right],$$

$$\Psi^+(x)=\max(1-x,\ 6\,x) \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right],$$

$$\Psi^+(x)=\max(2-6\,x,\ 1-x) \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right],$$

$$\Psi^+(x)=\max(1-x,\ 6\,x-1) \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right],$$

$$\Psi^+(x)=\max(3-6\,x,\ 2\,x) \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{12}\right],$$

$$\Psi^+(x)=2\,x \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{5}{12}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\Psi^+(x)=\Psi^+(1-x) \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\Psi^-(x)=0 \quad \text{pour} \quad x\in\left[0, \frac{1}{5}\right],$$

$$\Psi^-(x)=5\,x-1 \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right],$$

$$\Psi^-(x)=1-3\,x \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right],$$

$$\Psi^-(x)=3\,x-1 \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{3}, \frac{5}{12}\right],$$

$$\Psi^-(x)=4-9\,x \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{5}{12}, \frac{4}{9}\right],$$

$$\Psi^-(x)=0 \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{4}{9}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\Psi^-(x)=\Psi^-(1-x) \quad \text{pour} \quad x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

La discrépance $(s(S_{12}^{\sigma})\geqslant(1/2)F_2(55/144)>0{,}401)$ et la discrépance à l'origine $(s^*(S_{12}^{\sigma})>0{,}371)$ de la suite S_{12}^{σ} ne sont pas intéressantes. Par contre, le couple $(12, \Sigma_A)$ donne la plus faible discrépance à l'origine actuellement connue. Il reste à calculer $\alpha_{12,\sigma}^{+}=\alpha^{+}$ et $\alpha_{12,\sigma}^{-}=\alpha^{-}$.

5.4.2. *Calcul de* α^-

Remarquons que la symétrie de la fonction Ψ^- permet de raisonner avec les demi-intervalles :

$$J_h^n=\left[\frac{h}{2\times 12^n}, \frac{h+1}{2\times 12^n}\right] \quad \text{pour} \quad 0\leqslant h<12^n,$$

au lieu des intervalles I_h^n, avec la même notion d'intervalles dominés et dominants.

Faisons alors l'hypothèse de récurrence suivante :

(i) le seul intervalle dominant de rang n est $J_{h_n}^n$ avec :

$$h_n=\frac{6}{11}(12^n-1);$$

(ii) sur $J_{h_n}^n$, F_n^- est la fonction affine de pente $a_n=-(3/11)(12^n-1)$ telle que :

$$F_n^-\left(\frac{h_n}{2\times 12^n}\right)=n\frac{2}{11}+\frac{9}{11^2}\left(1-\frac{1}{12^n}\right);$$

(iii) $$d_n^-=\max_{x\in J_{h_n}^n} F_n^-(x)=F_n^-(h_n).$$

Cette hypothèse est vraie pour $n=1$ (en fait il y a deux intervalles, mais ils jouent le même rôle); montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$ si elle est vraie pour n.

On a $F_{n+1}^-(x)=F_n^-(x)+\Psi^-(xr^n)$, d'où sur $J_{h_n}^n$, les pentes de F_{n+1}^- sont successivement :

$$a_n \quad \text{sur} \quad \left[\frac{h_n}{2\times 12^n}, \frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{1}{5}\right)\right],$$

$$a_n+5\times 12^n \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{1}{5}\right), \frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{1}{4}\right)\right],$$

$$a_n-3\times 12^n \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{1}{4}\right), \frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{1}{3}\right)\right],$$

$$a_n+3\times 12^n \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{1}{3}\right), \frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{5}{12}\right)\right],$$

$$a_n-9\times 12^n \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{5}{12}\right), \frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{4}{9}\right)\right],$$

$$a_n \quad \text{sur} \quad \left[\frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{4}{9}\right), \frac{1}{12^n}\left(\frac{h_n}{2}+\frac{1}{2}\right)\right].$$

Il apparaît donc que le seul intervalle dominant de rang $(n+1)$ est bien $J^{n+1}_{h_{n+1}}$ avec $h_{n+1}=(6/11)(12^{n+1}-1)$, d'où (i) au rang $(n+1)$.

Un calcul élémentaire montre que $a_{n+1}=-(3/11)(12^{n+1}-1)$ et que :

$$F^-_{n+1}\left(\frac{h_{n+1}}{2\times 12^{n+1}}\right)=F^-_n\left(\frac{h_n}{2\times 12^n}\right)$$
$$+a_n\frac{3}{12^{n+1}}+\frac{1}{4}=(n+1)\frac{2}{11}+\frac{9}{11^2}\left(1-\frac{1}{12^{n+1}}\right),$$

d'où (ii) et (iii).

On a donc montré que :

$$\alpha^-=\frac{2}{11} \qquad \text{et} \qquad \beta^-_n=\frac{9}{11^2}\left(1-\frac{1}{12^n}\right)$$

(*voir* le lemme 4.2.2).

5.4.3. *Calcul de* α^+

La méthode est la même que pour α^-, mais les calculs sont plus complexes; nous donnons les formules de récurrence sans écrire les vérifications.

(i) Il y a deux intervalles dominants de rang n qui ne sont pas dominés au rang $(n+1)$; leurs extrémités $u_n/12^n$, $u'_n/12^n$ (resp. $v_n/12^n$, $v'_n/12^n$) sont données par les formules suivantes $(k\geq 1)$:

$$u_1=6, \qquad v_1=6,$$
$$u_2=70, \qquad v_2=71,$$
$$u_{3k}=\frac{841}{1727}(12^{3k}-1),$$
$$v_{3k}=6\times 12^{3k-1}-\frac{214\times 12^2}{1727\times 12}(12^{3(k-1)}-1)-18,$$
$$u_{3k+1}=\frac{841\times 12}{1727}(12^{3k}-1)+6,$$

$$v_{3k+1}=6\times 12^{3k}-\frac{214}{1727}(12^{3k}-1),$$

$$u_{3k+2}=\frac{841\times 12^2}{1727}(12^{3k}-1)+70,$$

$$v_{3k+2}=6\times 12^{3k+1}-\frac{214\times 12}{1727}(12^{3k}-1)-1,$$

$$\begin{aligned} u'_1&=5, & v'_1&=5,\\ u'_2&=71, & v'_2&=70,\\ u'_{3k}&=u_{3k}+1, & v'_{3k}&=v_{3k}+1,\\ u'_{3k+1}&=u_{3k+1}-1, & v'_{3k+1}&=v_{3k+1}-1,\\ u'_{3k+2}&=u_{3k+2}+1, & v'_{3k+2}&=v_{3k+2}-1. \end{aligned}$$

(ii) Sur ces intervalles, la fonction F_n^+ est soit fonction affine (type 1) soit maximum de deux fonctions affines (type 2).

Notons U_n (resp. V_n) l'intervalle d'extrémités $u_n/12^n$, $u'_n/12^n$ (resp. $v_n/12^n$, $v'_n/12^n$); on a alors :

– sur U_{3k}, F_{3k}^+ est de type 2 avec pour pentes :

$$p_{3k}=-214\frac{12^{3k}-1}{1727} \quad \text{et} \quad p'_{3k}=p_{3k}+7\times 12^{3k-1};$$

– sur U_{3k+1}, F_{3k+1}^+ est de type 1, avec pour pente :

$$p_{3k+1}=2\times 12^{3k}-214\frac{12^{3k}-1}{1727} \quad \text{si} \quad k\geqslant 1 \quad \text{et} \quad p_1=2;$$

– sur U_{3k+2}, F_{3k+2}^+ est de type 2, avec pour pentes :

$$p_{3k+2}=-70\times 12^{3k}-214\frac{12^{3k}-1}{1727}, \qquad p'_{3k+2}=p_{3k+2}+7\times 12^{3k+1}$$

si :

$$k\geqslant 1 \quad \text{et} \quad p_2=-70, \quad p'_2=14;$$

– sur V_{3k}, F_{3k}^+ est de type 1, avec pour pente :

$$q_{3k}=-2\times 12^{3k-1}+12^{3k-2}+841\times 12\frac{12^{3(k-1)}-1}{1727}+2;$$

– sur $V_{3k+1}(k \geqslant 1) F_{3k+1}^{+}$ est de type 2, avec pour pentes :

$$q_{3k+1} = 841 \times 12 \frac{12^{3k}-1}{1727} + 2, \qquad q'_{3k+1} = q_{3k+1} - 7 \times 12^{3k};$$

– sur $V_{3k+2}(k \geqslant 1) F_{3k+2}^{+}$ est de type 2, avec pour pentes :

$$q_{3k+2} = 12^{3k+1} + 841 \times 12 \frac{12^{3k}-1}{1727} + 2, \qquad q'_{3k+2} = q_{3k+2} - 7 \times 12^{3k+1}.$$

(iii) La fonction F_n^{+} atteint son maximum sur U_n pour $u_n/12^n$, et on a :

$$F_{3k}^{+}\left(\frac{u_{3k}}{12^{3k}}\right) = k \frac{4815}{1727} + \frac{848 \times 214}{1727^2}\left(1 - \frac{1}{12^{3k}}\right);$$

$$F_{3k+1}^{+}\left(\frac{u_{3k+1}}{12^{3k+1}}\right) = k \frac{4815}{1727} + \frac{1682}{1727} + \frac{270^2}{1727^2} + \frac{4815}{1727^2 \times 12^{3k}};$$

$$F_{3k+2}^{+}\left(\frac{u_{3k+2}}{12^{3k+2}}\right) = k \frac{4815}{1727} + \frac{3302}{1727} + \frac{841 \times 214}{1727^2} - \frac{45796}{1727^2 \times 12^{3k+2}};$$

$$F_n^{+}\left(\frac{u'_n}{12^n}\right) = F_n^{+}\left(\frac{u_n}{12^n}\right) + \frac{|p_{n-1}|}{12^n} - \frac{1}{12} \qquad \text{pour} \quad n \not\equiv 1 \pmod 3.$$

La fonction F_n^{+} atteint son maximum sur V_n pour $v_n/12^n$, et on a :

$$F_n^{+}\left(\frac{v_n}{12^n}\right) = F_{n-2}^{+}\left(\frac{u_{n-2}}{12^{n-2}}\right) + \Psi^{+}\left(\frac{v_n}{12^{n-1}}\right) + \Psi^{+}\left(\frac{v_n}{12^n}\right),$$

$$F_n^{+}\left(\frac{v'_n}{12^n}\right) = F_n^{+}\left(\frac{v_n}{12^n}\right) + \frac{|q_{n-1}|}{12^n} - \frac{1}{12} \qquad \text{pour} \quad n \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Notons que les propriétés (ii) et (iii) déterminent entièrement la fonction F_n^{+} sur U_n et V_n; la vérification des propriétés (i), (ii), (iii) permet alors de conclure :

$$\alpha^{+} = \frac{4815}{3 \times 1727} = \frac{1605}{1727}.$$

5.4.4. D'après le théorème 3, on a donc :

$$s^{*}(S_{12}^{\Sigma_A}) = \left(\frac{1605}{1727} + \frac{2}{11}\right) \frac{1}{2 \operatorname{Log} 12} = 0{,}2235 \ldots,$$

d'où le théorème 5.

Remarques. — Un résultat plus faible s'obtient très rapidement; en effet, la constante α^+ peut être encadrée par la méthode exposée au paragraphe 5.2. On obtient ainsi (avec d_8^+ et F_3^+ (841/1727)) une bonne approche du résultat :

$$0{,}223\,5 < s^*(S_{12}^{\Sigma_A}) < 0{,}226\,5.$$

On peut aussi remarquer que le couple (12, σ_0) du théorème 4 donne une suite $S_{12}^{\Sigma_A^0}$ dont la discrépance à l'origine n'est pas très intéressante :

$$s^*(S_{12}^{\Sigma_A^0}) \geqslant \left(\frac{3}{11} + \frac{12}{13}\right)\frac{1}{2\,\mathrm{Log}\,12} = 0{,}240\ \ldots$$

5.5. Démonstration du théorème 6. Corollaires

5.5.1. Pour r quelconque et I permutation identique, on a $\Psi_{r,I}^- = 0$; et $\Psi_{r,I}^+ = \Psi_{r,I}$ est définie par les relations suivantes :

$$\Psi_{r,I}(x) = \max(k(1-x), (r-k-1)x) \qquad \text{pour} \quad x \in \left[\frac{k}{r}, \frac{k+1}{r}\right],$$

l'entier k allant de 0 à $r-1$.

Il suffit d'expliciter les fonctions affines intervenant dans la définition de la fonction $\Psi_{r,I}$ pour le voir.

5.5.2. *Calcul de $\alpha_{r,I}$ pour r pair*

On utilise encore la symétrie pour limiter les intervalles dominants aux demi-intervalles :

$$J_h^n = \left[\frac{h}{2\times r^n}, \frac{h+1}{2\times r^n}\right] \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant h < r^n.$$

On vérifie alors par récurrence les propriétés suivantes où n est un entier au moins égal à 1 :

(i) il existe un seul intervalle dominant de rang n; ses extrémités sont définies par les relations suivantes :

$$u_n = \frac{r}{2(r+1)}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{r^n}\right), \qquad u_n' = u_n + \frac{(-1)^n}{2r^n};$$

(ii) sur cet intervalle, F_n est la fonction affine de pente :

$$(-1)^{n+1}\frac{r}{2(r+1)}(r^n + (-1)^{n+1}),$$

telle que :

$$F_n(u_n)=n\frac{r^2}{4(r+1)}+\frac{r^2}{4(r+1)^2}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{r^n}\right);$$

(iii)
$$d_n=\max F_n=F_n(u_n).$$

Ces propriétés étant établies, on est en mesure de conclure :

$$\alpha_{r,l}=\frac{r^2}{4(r+1)} \qquad \text{et} \qquad \beta_n=\frac{r^2}{4(r+1)^2}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{r^n}\right)$$

(*voir* le lemme 4.2.2); le théorème 6 en résulte, pour le cas r pair :

$$s(S_r^l)=s^*(S_r^l)=\frac{r^2}{4(r+1)\operatorname{Log} r}.$$

5.5.3. *Calcul de $\alpha_{r,l}$ pour r impair*

On procède comme ci-dessus, et on obtient par récurrence les propriétés suivantes ($n\geqslant 1$) :

(i) il existe un seul intervalle dominant de rang n, noté $[u_n, u_n']$, défini par :

$$u_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^n}\right), \qquad u_n'=\frac{1}{2};$$

(ii) sur cet intervalle, F_n est la fonction affine de pente $-(1/2)(r^n-1)$ telle que :

$$F_n(u_n)=\frac{r-1}{4}n+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{r^n}\right) \qquad \text{et} \qquad d_n=F_n(u_n).$$

On en déduit que :

$$\alpha_{r,l}=\frac{r-1}{4} \qquad \text{et} \qquad \beta_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{r^n}\right),$$

d'où le théorème 6 pour r impair.

Remarques. — La détermination, puis la vérification des propriétés conduisant au calcul des constantes $\alpha_{r,l}$ sont facilitées par le tracé des graphes des fonctions $\Psi_{r,l}$; nous n'avons pas détaillé ces démonstrations fastidieuses, mais sans grandes difficultés.

La meilleure suite S_r^I est celle d'ordre 3 pour laquelle on a :

$$s(S_3^I)=s^*(S_3^I)=\frac{1}{2\text{ Log }3}=0{,}455\ \ldots;$$

la suite $S_3^{I_A}$ qui en résulte par le théorème 3 est aussi la meilleure parmi les suites $S_r^{I_A}$ et elle donne :

$$s^*(S_3^{I_A})=\frac{1}{4\text{ Log }3}=0{,}227\ \ldots$$

5.5.4. COROLLAIRE 3

Pour toute suite S_r^Σ on a la propriété :

$$s^*(S_r^\Sigma)\leqslant s(S_r^\Sigma)\leqslant s(S_r^I).$$

Preuve. — Il suffit pour cela de vérifier que $\Psi_{r,\sigma}\leqslant\Psi_{r,I}$ pour toute permutation σ.

On a déjà vu (*voir* la démonstration de 3.2.2 (iii)) que :

$$\Psi_{r,\sigma}\left(\frac{k}{r}\right)\leqslant k\left(1-\frac{k}{r}\right)\qquad\text{pour}\quad 0\leqslant k\leqslant r-1;$$

et on a déjà noté (*voir* la démonstration de 3.2.1 (iv)) que $\Psi_{r,\sigma}$ est le maximum de toutes les différences possibles entre les fonctions affines qui interviennent dans la définition de $\Psi_{r,\sigma}^+$.

Sur l'intervalle $[k/r, (k+1)/r]$, la fonction $\Psi_{r,\sigma}$ est donc de la forme $ux+v$ avec $v\leqslant 0$ et $u\geqslant 0$, ou $a-bx$ avec $a\leqslant k$ et $b\geqslant a$ (u, v, a, b sont des entiers compris, en valeur absolue, entre 0 et $r-1$).

Il en résulte bien que :

$$\Psi_{r,\sigma}(x)\leqslant\Psi_{r,I}(x)\qquad\text{pour}\quad x\in\left[\frac{k}{r},\frac{k+1}{r}\right]$$

et k tel que $0\leqslant k\leqslant r-1$, d'où la propriété annoncée.

5.5.5. COROLLAIRE 4

La suite S_r^I, comme fonction de r, vérifie la propriété asymptotique suivante :

$$\frac{r\text{ Log }2}{4\text{ Log }r}+O(1)\leqslant\overline{\lim}_{N\to\infty}\left(D(S_r^I, N)-\frac{\alpha_{r,I}}{\text{Log}\,r}\text{Log }N\right)\leqslant\frac{r}{4}+O(1).$$

Preuve. — Pour les majorations, il suffit de se reporter à la démonstration du théorème 2 (*voir* 4.3).

Dans le cas où r est pair et au moins égal à 4, on obtient :

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\left(D(S_r^I, N)-\frac{r^r \operatorname{Log} N}{4(r+1)\operatorname{Log} r}\right)\leqslant\frac{r^2(r+2)}{4(r+1)^2}+\frac{1}{r}.$$

Et dans le cas où r est impair et au moins égal à 5, on a :

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\left(D(S_r^I, N)-\frac{r-1}{4\operatorname{Log} r}\operatorname{Log} N\right)\leqslant\frac{r^2+4}{4r}.$$

Les minorations sont obtenues en calculant les limites pour des suites particulières :

Pour r pair, on obtient ainsi, avec $N_n=u_n r^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(D(S_r^I, N_n)-\frac{r^2}{4(r+1)\operatorname{Log} r}\operatorname{Log} N_n\right)$$
$$=\frac{3r^2+2r}{4(r+1)^2}-\frac{r^2}{4(r+1)\operatorname{Log} r}\operatorname{Log}\left(\frac{r}{2(r+1)}\right).$$

Pour r impair, la suite définie par :

$$N_n=\frac{r-2}{2r}r^n+\frac{1}{2}$$

donne :

$$\lim_{n\to\infty}\left(D(S_r^I, N_n)-\frac{r-1}{4\operatorname{Log} r}\operatorname{Log} N_n\right)=\frac{3}{4}\,\frac{r-2}{r}-\frac{r-1}{4\operatorname{Log} r}\operatorname{Log}\left(\frac{r-2}{2r}\right).$$

Notons que dans ce cas, la suite définie par $N_n'=u_n r^n$ donne une limite plus petite (sauf pour $r=3$) :

$$\lim_{n\to\infty}\left(D(S_r^I, N_n')-\frac{r-1}{4\operatorname{Log} r}\operatorname{Log} N_n'\right)=\frac{3}{4}+\frac{(r-1)\operatorname{Log} 2}{4\operatorname{Log} r}.$$

Remarque. — Rappelons que pour 2 et 3, nous avons obtenu les valeurs exactes pour les limites supérieures :

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\left(D(S_2^I, N)-\frac{\operatorname{Log} N}{3\operatorname{Log} 2}\right)=\frac{4}{9}+\frac{\operatorname{Log} 3}{3\operatorname{Log} 2}\qquad(\textit{voir}\ [2]);$$

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\left(D(S_3^I, N)-\frac{\operatorname{Log} N}{2\operatorname{Log} 3}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\operatorname{Log} 2}{2\operatorname{Log} 3}\qquad(\textit{voir}\ [5]).$$

Ces valeurs correspondent aux deux minorants trouvés pour r quelconque. Il est vraisemblable que ces minorants sont effectivement les valeurs exactes des limites supérieures; la complexité de la récurrence à mettre en œuvre nous a paru dépasser l'intérêt du résultat.

5.6. Hypothèse sur les constantes α

Tous les calculs effectués dans ce paragraphe 5 suggèrent la *conjecture* suivante :

Les constantes $\alpha_{r,\sigma}$, $\alpha^+_{r,\sigma}$, $\alpha^-_{r,\sigma}$ sont des rationnels dont les dénominateurs sont de la forme $q(r^q-1)$.

L'entier q est limité notamment par le nombre des maxima relatifs de la fonction ψ concernée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bejian (R.). – Sur certaines suites présentant une faible discrépance à l'origine, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 286, série A, 1978, p. 135-138.

[2] Bejian (R.) et Faure (H.). – Discrépance de la suite de Van der Corput, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 285, série A, 1977, p. 313-316.

[3] Dupain (Y.). – Discrépance à l'origine de la suite (n $[(1+\sqrt{5})/2]$, *Ann. Inst. Fourier*, t. XXIX, fasc. 1, 1979, p. 81-106.

[4] Dupain (Y.) et Sos (V. T.). – *Sur la discrépance à l'origine des suites* ($n\alpha$) (à paraître).

[5] Faure (H.). – Discrépance de suites associées à un système de numération, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 286, série A, 1978, p. 293-296.

[6] Haber (S.). – On a sequence of points of interest for numerical quadrature, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect.*, B 70, 1966, p. 127-136.

[7] Gillet (A.). – Sur la répartition modulo 1, *Thèse*, Marseille, 1968.

[8] Kuipers (L.) et Niederreiter (H.). – *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley and Sons, 1974.

[9] Meijer (H. G.). – The discrepancy of a g-adic sequence, *Indag. Math.*, t. 30, 1968, p. 54-66.

[10] Ramshaw (L.). – *On the Discrepancy of the Sequence Formed by the Multiples of an Irrational Number*, Stanford, California (à paraître).

[11] Rauzy (G.). – *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, P.U.F., Paris, 1976.

[12] Schmidt (W. M.). – Irregularities of distribution, VII, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 21, 1972, p. 45-50.

[13] Van der Corput (J. G.). – Verteilungsfunktionen, I, II, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetens.*, 38, 1935, p. 813-821, 1058-1066.