

BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL MEYER

Courbure des sommes de métriques

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 123-142

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__123_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__123_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COURBURE DES SOMMES DE MÉTRIQUES (*)

PAR

D. MEYER

ABSTRACT. — The basic idea of this study is the following: a manifold M is naturally equipped with the riemannian structure sum of two others, g_1 and g_2 , when viewed as diagonally (isometrically) embedded in the riemannian product $(M, g_1) \times (M, g_2)$.

One can express elementarily the curvature tensor of the path $(1-t) \cdot g_1 + t \cdot g_2$ in terms of $t \in [0, 1]$, of the curvature tensors and of the difference connexion tensor relative to g_1 and g_2 . One deduces results on the convexity of certain sub-sets of metrics. A new proof of the following result by H. WU is given: the set of kählerian structures with holomorphic sectional curvature $\leq -k$, $k \geq 0$ (with respect to a given complex structure) is shown to be convex. Among other results, the convexity of the space of metrics conformal to a given one and whose scalar curvature is $\geq k$, $k \geq 0$, is proved, under the assumption $\dim(M) \geq 6$.

RÉSUMÉ. — A la base de cette étude se trouve l'idée suivante : une variété M est naturellement munie de la structure somme de deux métriques g_1 et g_2 si on la considère plongée diagonalement dans le produit riemannien $(M, g_1) \times (M, g_2)$.

On peut exprimer simplement le tenseur de courbure du chemin $(1-t) \cdot g_1 + t \cdot g_2$ en fonction de $t \in [0, 1]$, des tenseurs de courbure et du tenseur différence de connexion relatifs à g_1 et g_2 . On en déduit des résultats de convexité pour certains sous-ensembles de métriques. On démontre ainsi un résultat de H. WU : la convexité de l'espace des structures kähleriennes de courbure sectionnelle holomorphe $\leq -k$, $k \geq 0$ (pour une structure complexe fixée) et plusieurs autres dont la convexité de l'espace des métriques conformes à une métrique donnée et dont la courbure scalaire est plus grande que $k \geq 0$ (en dimension au moins 6).

0. Introduction

Cet article est la première partie d'une étude consacrée à la courbure de sommes de métriques. A la base de cette étude se trouve l'idée du plongement diagonal : une variété M est naturellement munie de la structure somme de

(*) Texte reçu le 5 novembre 1979, révisé le 12 juin 1980.

D. MEYER, Université de Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques, Tour 45-55, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

deux métriques g_1 et g_2 si on la considère plongée diagonalement dans le produit $(M, g_1) \times (M, g_2)$. Les formules de Gauß et Codazzi-Mainardi relient alors classiquement les tenseurs de courbure des diverses métriques considérées. Le tenseur différence de connexion joue un rôle fondamental dans ces identités, car c'est, à peu de choses près, la seconde forme fondamentale de la variété plongée. Comme la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne g est la même que celle de la métrique $\alpha \cdot g$, si α est une constante > 0 , on peut exprimer simplement le tenseur de courbure du chemin $(1-t)g_1 + tg_2$ en fonction de $t \in [0, 1]$, des tenseurs de courbure de g_1 et g_2 et du tenseur différence de connexion relatif à g_1 et g_2 . Ceci est l'objet des paragraphes 1 à 4. Les paragraphes 5 à 7 sont consacrés à l'étude de propriétés de convexité de certains sous-ensembles de métriques. Dans le paragraphe 5, on redémontre un résultat dû à H. Wu; dans les paragraphes 6 et 7 certains sous-ensembles convexes, dans la classe conforme d'une métrique donnée, sont mis en évidence, et la dimension de la variété joue un rôle dans leur définition. Le paragraphe 9 est centré sur l'étude du comportement de la courbure scalaire et de la courbure de Ricci d'une métrique, après symétrisation sous son groupe de transformations conformes, supposé compact; là aussi la dimension intervient. Le paragraphe 8 est relatif au cas de la somme de plusieurs métriques. Il est utilisé dans le paragraphe 9, mais n'est pas indispensable.

Je tiens à remercier tout particulièrement M. Berger, qui m'a aiguillé vers les travaux de H. Wu [W 1], OBATA [01], GARDNER [Ga], et Jean-Pierre Bourguignon qui m'a soufflé le paragraphe 4 et qui m'a posé de nombreuses questions qui m'ont permis de donner à ce texte sa forme actuelle.

1. Une situation géométrique en algèbre linéaire euclidienne

Soit E un espace vectoriel réel muni de deux structures euclidiennes, notées g_1 et g_2 . On désigne par S_2^1 l'endomorphisme symétrique relativement à g_1 et défini positif, qui exprime g_2 en fonction de g_1 .

L'espace vectoriel E se plonge dans le produit $(E \times E, g_1 \times g_2)$ par l'application diagonale Δ et la structure euclidienne sur E induite par $\tilde{g} = g_1 \times g_2$, via Δ , est $g = g_1 + g_2$. Soient i_1 et i_2 les inclusions naturelles de E dans $E \times \{0\}$ et $\{0\} \times E$ respectivement. Si $\tilde{p}_\Delta$ désigne la projection orthogonale relativement à la métrique $\tilde{g}$ sur le sous-espace $\Delta(E)$, on peut exprimer $\tilde{p}_\Delta \circ i_1$ de manière unique comme $\Delta \circ T_1^2$ où T_1^2 est un certain automorphisme de E que nous allons expliciter.

LEMME 1. — On a :

$$\tilde{p}_\Delta \circ i_1 = \Delta \circ T_1^2 \quad \text{avec} \quad T_1^2 = (I + S_2^1)^{-1}$$

et

$$\tilde{p}_\Delta \circ i_2 = \Delta \circ T_2^1 \quad \text{avec} \quad T_2^1 = (I + S_2^1)^{-1} \circ S_2^1 = (I + S_1^2)^{-1},$$

où $(S_2^1)^{-1} = S_1^2$.

Preuve. — Pour tous les vecteurs u et v de E on a :

$$\tilde{g}(\tilde{p}_\Delta(i_1(u)), \Delta(v)) = \tilde{g}(i_1(u), \Delta(v))$$

et donc :

$$\tilde{g}(\Delta \circ T_1^2(u), \Delta(v)) = g_1(u, v)$$

ou encore

$$(g_1 + g_2)(T_1^2 u, v) = g_1(u, v)$$

et donc $T_1^2 = (I + S_2^1)^{-1}$. D'autre part :

$$\tilde{p}_\Delta \circ i_2 = \Delta - \tilde{p}_\Delta \circ i_1 = \Delta(I - T_1^2).$$

Puisque la deuxième partie du lemme se prouve comme la première en échangeant les rôles de g_1 et g_2 on a montré que $T_1^2 + T_2^1 = I$. ■

Remarquons enfin que, par définition même, T_1^2 , T_2^1 et S_2^1 sont des automorphismes de E symétriques relativement à g_1 qui sont définis positifs, se diagonalisent simultanément et commutent deux à deux.

On désigne par $\tilde{v}$ l'espace vectoriel orthogonal pour la métrique $\tilde{g}$ à la diagonale $\Delta(E)$ et par $\tilde{q}_\Delta$ la projection orthogonale complémentaire (toujours relativement à $\tilde{g}$) sur $\tilde{v}$. On a de manière évidente $\tilde{q}_\Delta + \tilde{p}_\Delta = I$ et $\tilde{q}_\Delta \circ i_1 = -\tilde{q}_\Delta \circ i_2$; en effet par linéarité de $\tilde{q}_\Delta$, pour tout vecteur u de E on a :

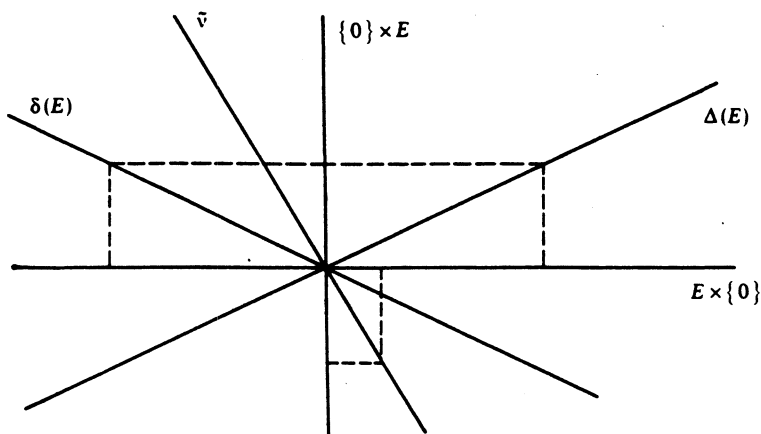
$$\tilde{q}_\Delta(u, 0) = \tilde{q}_\Delta(u, u) - \tilde{q}_\Delta(0, u).$$

On appelle θ l'isomorphisme de E sur $\tilde{v}$ défini par $\tilde{q}_\Delta \circ i_1$. Un calcul facile montre que $\theta = i_1 \circ T_2^1 - i_2 \circ T_1^2$.

On désigne par δ le plongement antidiagonal de E défini par $\delta(u) = (u, -u)$. Lorsque $g_1 = g_2$ il est clair que $\text{Im } \delta = \tilde{v}$. La figure suivante illustre la situation géométrique décrite ici.

Il est clair que tout vecteur (v, w) de $E \times E$ se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de $\Delta(E)$ et d'un vecteur de $\delta(E)$:

$$(v, w) = \frac{1}{2}[(v + w, v + w) + (v - w, w - v)].$$



LEMME 2. — Pour tout vecteur (v, w) de $E \times E$ on a :

$$\tilde{q}_\Delta(v, w) = \theta(v - w) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \tilde{q}_\Delta \circ \delta = \theta.$$

Preuve. — En effet on a :

$$\tilde{q}_\Delta(v, w) = \frac{1}{2} \tilde{q}_\Delta(v - w, w - v) = \frac{1}{2} [\tilde{q}_\Delta \circ i_1(v - w) + \tilde{q}_\Delta \circ i_2(w - v)] = \theta(v - w).$$

Si u est un vecteur quelconque de E on a donc :

$$\tilde{q}_\Delta(u, -u) = \theta(2u) = 2\theta(u). \quad \blacksquare$$

2. Courbure de la somme de deux métriques riemanniennes

Dans la suite M désignera une variété C^∞ , paracompacte et de dimension $m \geq 2$. On suppose M munie de deux métriques riemanniennes g_1 et g_2 . On considère $M \times M$ munie de la métrique produit $\tilde{g} = g_1 \times g_2$. Si $\Delta : M \rightarrow M \times M$ est l'inclusion diagonale, on voit que M est naturellement munie, via Δ , de la métrique $g = g_1 + g_2$. Soit $x = (x_1, x_2)$ un point de $M \times M$. On note i_1^x (resp. i_2^x) les inclusions des facteurs : $i_1^x(\xi) = (x_1, \xi)$. Les projections naturelles sont π_1 et π_2 . Soit u un vecteur tangent en p à M . Alors le vecteur $d\Delta_p(u) = (di_1^p(u), di_2^p(u))$ est tangent en $P = (p, p)$ à $M \times M$. On a :

$$(i) \quad \tilde{g}(\tilde{R}(U, V)W, Z) = g_1(R_1(u_1, v_1)w_1, z_1) + g_2(R_2(u_2, v_2)w_2, z_2),$$

où $\tilde{R}$ (resp. R_i) est le tenseur de courbure de la métrique $\tilde{g}$ (resp. g_i , $i = 1, 2$) et u_i est mis pour la projection de U sur le i -ième facteur (cf. [GKM], p. 99).

Si D^1 et D^2 désignent respectivement les dérivées covariantes de Lévi-Civita des métriques g_1 et g_2 on sait que le tenseur « différence de connexion », que l'on notera h , défini par : $h(u, v) = D_u^1 \mathcal{V} - D_u^2 \mathcal{V}$ (où $\mathcal{V}$ prolonge v autour de p), est un tenseur bilinéaire symétrique à valeurs vectorielles dans $T_p M$.

On définit une nouvelle métrique riemannienne sur M de la manière suivante : cette métrique $\hat{g}$ est telle que l'application linéaire θ , décrite pour $E = T_p M$ dans le paragraphe 1, soit une isométrie à valeurs dans $(\tilde{v}, \tilde{g}_{(p, p)})$.

Un calcul facile montre que, pour tous les vecteurs u et v :

$$\hat{g}(u, v) = (g_1 + g_2)(T_1^2 \circ T_2^1(u), v).$$

THÉOREME. — Pour tous les vecteurs u, v, w et z tangents en p à M , on a :

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad (g_1 + g_2)(R_{1+2}(u, v)w, z) \\ = g_1(R_1(u, v)w, z) + g_2(R_2(u, v)w, z) \\ + \hat{g}(h(u, z), h(v, w)) - \hat{g}(h(u, w), h(v, z)). \end{aligned}$$

Note. — On écrira $G(u, v, w, z)$ pour l'expression tensorielle égale à la troisième ligne de (I), en référence à Gauß.

On a $\alpha(d\Delta u, d\Delta v) = \theta \circ h(u, v)$ pour deux vecteurs u et v tangents (arbitraires) en un point p de M .

Preuve. — Tout d'abord, puisque l'on a $\Delta^* \tilde{g} = g_1 + g_2$, on a aussi l'égalité :

$$\text{(ii)} \quad (g_1 + g_2)(R_{1+2}(u, v)w, z) = \tilde{g}(\tilde{R}(d\Delta u, d\Delta v)d\Delta w, d\Delta z),$$

où $\tilde{R}$ (resp. R_{1+2}) désigne le tenseur de courbure de $\Delta(M)$ (resp. de M) correspondant à la métrique induite par $\tilde{g}$ (resp. par $g_1 + g_2$).

Mais l'équation de Gauß (cf. [GKM], p. 105 ou [KN], p. 23, t. II);

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \tilde{g}(\tilde{R}(d\Delta u, d\Delta v)d\Delta w, d\Delta z) \\ = \tilde{g}(\tilde{R}(d\Delta u, d\Delta v)d\Delta w, d\Delta z) \\ + \tilde{g}(\alpha(d\Delta u, d\Delta w), \alpha(d\Delta v, d\Delta z)) \\ - \tilde{g}(\alpha(d\Delta u, d\Delta z), \alpha(d\Delta v, d\Delta w)), \end{aligned}$$

où α est la seconde forme fondamentale de $\Delta(M)$ dans $M \times M$ munie de $\tilde{g}$, nous permet d'écrire l'équation;

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad & (g_1 + g_2)(R_{1+2}(u, v), w, z) \\ &= g_1(R_1(u, v)w, z) + g_2(R_2(u, v), w, z) \\ & \quad + \tilde{g}(\alpha(d\Delta u, d\Delta z), \alpha(d\Delta v, d\Delta w)) \\ & \quad - \tilde{g}(\alpha(d\Delta u, d\Delta w), \alpha(d\Delta v, d\Delta z)). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant réécrire la deuxième ligne de (iv) de manière à retrouver $G(u, v, w, z)$.

Soient $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ deux champs de vecteurs produits. Si $\tilde{\nabla}$ désigne la dérivée covariante suivant $\tilde{g}$, on a :

$$(\tilde{\nabla}_{\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2} \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2)_x = di_1^x(D_{\mathcal{U}_1}^1 \mathcal{V}_1)_{x_1} + di_2^x(D_{\mathcal{U}_2}^2 \mathcal{V}_2)_{x_2}.$$

La preuve est laissée au lecteur, qui pourra en tirer la formule (i) de ce paragraphe. Remarquons que, vu le caractère tensoriel de la formule que nous cherchons à établir, il suffit de calculer avec des champs produits.

La définition de la seconde forme fondamentale permet d'écrire :

$$\alpha(d\Delta u, d\Delta v) = \tilde{q}_\Delta [di_1^p[D_u^1 \mathcal{V}]_p + di_2^p[D_u^2 \mathcal{V}]_p].$$

Le lemme 2 permet donc de conclure. ■

3. Tenseur de courbure d'un chemin affine de métriques riemanniennes

On applique la situation décrite dans les paragraphes 1 et 2 en munissant le premier facteur de la métrique $(1-t)g_1$ et le second de la métrique tg_2 , pour t choisi dans $[0, 1]$.

COROLLAIRE. — Si g_t est la métrique $(1-t)g_1 + tg_2$ et si R_t est le tenseur de courbure de cette métrique, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad & g_t(R_t(u, v)w, z) \\ &= (1-t)g_1(R_1(u, v)w, z) + tg_2(R_2(u, v)w, z) \\ & \quad + \hat{g}_t(h(u, z), h(v, w)) - \hat{g}_t(h(u, w), h(v, z)), \end{aligned}$$

où :

$$\hat{g}_t(u, v) = g_1\left(\frac{t(1-t)S_2^1}{(1-t)I + tS_2^1}u, v\right) = g_2\left(\frac{t(1-t)I}{(1-t)I + tS_2^1}u, v\right),$$

avec :

$$g_2(., .) = g_1(S_2^1 ., .) \quad \text{et} \quad h = D^1 - D^2.$$

Preuve. — Il est essentiel de remarquer que la connexion de Levi-Civita de la métrique $\alpha.g$ ne dépend pas de la constante réelle strictement positive α . Le théorème du paragraphe 2 permet alors d'écrire la formule attendue avec $\hat{g}_t(., .) = (1-t)g_1({}_tT_2^1, ., .)$; mais par définition de ${}_tT_2^1$, on a :

$$tg_2(., .) = ((1-t)g_1 + tg_2)({}_tT_2^1 ., .)$$

et donc

$$tg_1(S_2^1 ., .) = g_1((1-t).{}_tT_2^1 + t.S_2^1 \circ {}_tT_2^1 ., .),$$

d'où l'expression annoncée pour $\hat{g}_t$. ■

4. Expression du tenseur différence de courbure en fonction du tenseur différence de connexion pour deux métriques g_1 et g_2 .

On va retrouver une identité classique en géométrie riemannienne en écrivant l'équation de Codazzi-Mainardi de la situation décrite aux paragraphes 1 et 2. Dans un système de coordonnées choisi, cette identité n'est autre que celle (cf. [KN], p. 145, t. I) qui exprime les composantes du tenseur de courbure d'une métrique riemannienne (ici g_1) en fonction de ses symboles de Christoffel et de leurs dérivées premières (faire g_2 plate). L'intérêt est que cette identité acquiert ainsi un statut géométrique qui la rattache à la théorie des sous-variétés. Pour des applications récentes, voir R. GARDNER ([Ga], p. 440) qui écrit dans le langage des repères mobiles.

THÉORÈME. — L'équation bien connue :

$$(III) \quad R_1(u, v)w - R_2(u, v)w = (D_u^1 h)(v, w) - (D_v^1 h)(u, w) \\ - h(u, h(v, w)) + h(v, h(u, w))$$

(pour tous les u, v et w) est l'équation de Codazzi-Mainardi de la situation géométrique décrite aux paragraphes 1 et 2.

Preuve. — Avec les notations des paragraphes 1 et 2, l'équation Codazzi-Mainardi est la suivante :

$$(i) \quad \tilde{q}_\Delta[\tilde{R}(U, V)W] = \tilde{q}_\Delta[\tilde{\nabla}_U(\alpha(V, W))] - \tilde{q}_\Delta[\tilde{\nabla}_V(\alpha(U, W))] \\ + \alpha(U, \tilde{\nabla}_V W) - \alpha(V, \tilde{\nabla}_U W) - \alpha([U, V], W);$$

ici U, V, W désignent des champs sur $M \times M$ qui prolongent les vecteurs tangents U, V, W et $\tilde{\nabla}$ est la connexion (dérivée covariante) de L. C. de la

métrique induite sur $\Delta(M)$ par $\tilde{g}=g_1 \times g_2$. Cette équation consiste simplement à écrire dans le membre de droite la composante normale de $\tilde{\nabla}_U \tilde{\nabla}_V W - \tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_U W - \tilde{\nabla}_{[U, V]} W$; pour une référence, voir [KN], p. 25, t. II. D'après le lemme 2, paragraphe 1, on a :

$$(ii) \quad \tilde{q}_\Delta[\tilde{R}(U, V)W] = \theta(R_1(u, v)w - R_2(u, v)w)$$

si $U=(u, u)$, $V=(v, v)$, $W=(w, w)$, ce que nous supposons jusqu'à la fin de ce paragraphe. A l'aide des lemmes 2 et du théorème du paragraphe 2, on écrit :

$$\tilde{q}_\Delta[\tilde{\nabla}_U[\alpha(V, W)]] = \theta[D_u^1[T_2^1 \circ h(\mathcal{V}, \mathcal{W})] + D_u^2[T_1^2 \circ h(\mathcal{V}, \mathcal{W})]].$$

D'après la définition de h et l'égalité $T_1^2 + T_2^2 = I$, on a :

$$(iii) \quad \begin{aligned} \tilde{q}_\Delta[\tilde{\nabla}_U[\alpha(V, W)] - \tilde{\nabla}_V[\alpha(U, W)]] \\ = \theta[D_u^1[h(\mathcal{V}, \mathcal{W})] - D_v^1[h(\mathcal{U}, \mathcal{W})] \\ - h(u, T_1^2 \circ h(v, w)) + h(v, T_1^2 \circ h(u, w))]. \end{aligned}$$

Exprimons maintenant $\tilde{\nabla}$ à l'aide de D^1 et D^2 : par construction on a $\tilde{\nabla}_U V = d\Delta(D_u^{1+2}\mathcal{U})$. Mais, par définition de la seconde forme fondamentale, $\tilde{\nabla}_U V = \tilde{\nabla}_U V - \alpha(U, V)$. D'où, grâce au théorème du paragraphe 2 :

$$D_u^{1+2}\mathcal{V} = D_u^1\mathcal{V} - T_2^1 h(u, v) = D_u^2\mathcal{V} + T_1^2 \circ h(u, v).$$

Ceci permet d'écrire :

$$(iv) \quad \begin{aligned} \alpha(U, \tilde{\nabla}_V W) - \alpha(V, \tilde{\nabla}_U W) - \alpha([U, V], W) \\ = \theta[h(u, D_v^1\mathcal{W}) + h(D_v^1\mathcal{U}, w) - h(v, D_u^1\mathcal{W}) - h(D_u^1\mathcal{V}, w) \\ + h(v, T_2^1 \circ h(u, w)) - h(u, T_2^1 \circ h(v, w))]. \end{aligned}$$

Puisque θ est un isomorphisme de E sur $\tilde{V}$ (cf. § 1), on a, en regroupant dans (i) les identités (ii), (iii) et (iv), l'identité (III) attendue. ■

5. Application de la situation du paragraphe 2 à la courbure holomorphe dans le cas kählerien

On va donner une nouvelle démonstration d'un théorème de H. Wu (cf. [W1]). On suppose que M est une variété complexe munie de deux métriques kähleriennes g_1 et g_2 (cf. [KN], t. II, p. 149) de même structure complexe sous-jacente J .

Si u est un vecteur tangent à M , alors $K_1(u)$ (resp. $K_2(u)$, resp. $K_{1+2}(u)$) désignera la courbure sectionnelle holomorphe du vecteur u (i. e. la courbure sectionnelle du plan holomorphe $u \wedge Ju$) relativement à la métrique g_1 (resp. g_2 , resp. g_{1+2}).

THÉORÈME. — Si $K_1(u) \leq -k_1$ et $K_2(u) \leq -k_2$ avec k_1 et $k_2 > 0$ (resp. $K_1(u) \leq 0$ et $K_2(u) \leq 0$) on a $K_{1+2}(u) \leq -k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$ (resp. $K_{1+2}(u) \leq 0$).

Preuve. — La variété $(M \times M, g_1 \times g_2)$ est kählerienne et $\Delta(M)$ est une sous-variété kählerienne. Il reste alors à écrire que la courbure sectionnelle holomorphe d'une sous-variété kählerienne est inférieure ou égale à la courbure sectionnelle holomorphe de la variété kählerienne ambiante (ceci est classique, cf. par exemple [KN], t. II, p. 175-176). Plus précisément, en revenant à la formule (iv) du paragraphe 2, on a, puisque $J d\Delta(u) = d\Delta(Ju)$ la formule :

$$\begin{aligned} K_{1+2}(u) \cdot \|u\|_{1+2}^4 &= K_1(u) \cdot \|u\|_1^4 + K_2(u) \cdot \|u\|_2^4 \\ &\quad + \tilde{g}(\alpha(J \cdot d\Delta(u), J \cdot d\Delta(u)), \alpha(d\Delta(u), d\Delta(u))) \\ &\quad - \|\alpha(d\Delta(u), J \cdot d\Delta(u))\|_g^2. \end{aligned}$$

D'où, en appliquant la proposition 9.1 de [KN], t. II, p. 175 :

$$K_{1+2}(u) \cdot \|u\|_{1+2}^4 = K_1(u) \cdot \|u\|_1^4 + K_2(u) \cdot \|u\|_2^4 - 2\|\alpha(d\Delta(u), d\Delta(u))\|_g^2.$$

On en tire l'inégalité :

$$K_{1+2}(u) \leq -(k_1 \cdot \|u\|_1^4 + k_2 \cdot \|u\|_2^4) / \|u\|_{1+2}^4.$$

Ceci entraîne le résultat attendu (puisque $\|u\|_{1+2}^2 = \|u\|_1^2 + \|u\|_2^2$) en appliquant l'inégalité élémentaire :

$$(\lambda^2 k_1 + \mu^2 k_2) / (\lambda + \mu)^2 \geq k_1 \cdot k_2 / (k_1 + k_2)$$

vraie pour tous les λ, μ, k_1 et k_2 réels strictement positifs (dont la démonstration est laissée au lecteur). ■

Remarque 1. — H. Wu démontre en fait le résultat précédent dans le cas hermitien, pour la courbure sectionnelle holomorphe définie par la connexion hermitienne (qui coïncide avec la connexion de Levi-Civita dans le cas kählerien). La démonstration ci-dessus est encore valable à condition de démontrer une formule de Gauß spéciale au cas des connexions hermitiennes (cf. [W2], p. 215-216 et [K], p. 37-39).

Dans le même esprit, on a la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soit M une variété complexe. L'ensemble des structures kähleriennes, relatives à cette structure complexe, dont la courbure sectionnelle holomorphe est partout $\leq -k$ (resp. $< -k$) est un convexe si $k \geq 0$. C'est un cône convexe si $k = 0$.*

Preuve. — On a, en suivant la démonstration précédente avec $(1-t)g_1$ en place de g_1 et tg_2 en place de g_2 :

$$K_{g_t}(u) \cdot \|u\|_{g_t}^4 \leq K_{(1-t)g_1}(u) \|u\|_{(1-t)g_1}^4 + K_{tg_2}(u) \|u\|_{tg_2}^4.$$

Mais, par hypothèse, on a :

$$(1-t)K_{(1-t)g_1}(u) \leq -k \quad \text{et} \quad tK_{tg_2}(u) \leq -k.$$

Posant $\lambda = \|u\|_1^2$ et $\mu = \|u\|_2^2$ on obtient $\|u\|_{g_t}^4 = ((1-t)\lambda + t\mu)^2$. La démonstration est achevée; par convexité on a pour tout t dans $[0, 1]$ l'inégalité :

$$(1-t)\lambda^2 + t\mu^2 \geq ((1-t)\lambda + t\mu)^2.$$

Remarquons que l'inégalité est atteinte pour $t \in]0, 1[$ si et seulement si $\lambda = \mu$. La recherche des génératrices extrémales des cônes convexes et des points extrémaux des convexes mis en évidence dans la proposition précédente sera l'objet d'un travail ultérieur. ■

Remarque. — Comme H. Wu (cf. [W1]) on déduit facilement le corollaire :
Soit M une variété hermitienne compacte à courbure sectionnelle holomorphe $\leq -k$ (resp. $< -k$) avec $k > 0$. Il existe une métrique invariante par le groupe des transformations holomorphes (qui est fini, cf. [W2], p. 220) à courbure sectionnelle holomorphe $\leq -k$ (resp. $< -k$). La preuve consiste à écrire une récurrence facile qui montre que la métrique moyenne arithmétique (des transformées de la métrique initiale) vérifie bien la propriété demandée. Le fait que le groupe des $-$ transformations holomorphes d'une variété hermitienne compacte à courbure sectionnelle holomorphe strictement négative soit fini intervient de manière essentielle (cf. [W1], p. 1107). On démontrera des résultats analogues au paragraphe 9.

6. Courbure de Ricci de métriques riemanniennes conformes

Dans ce paragraphe on supposera que g_1 et g_2 sont deux métriques riemanniennes conformes de M , i. e. qu'il existe une fonction réelle C^∞ sur

M , soit e^ψ , telle que $g_2 = e^\psi \cdot g_1$. Le tenseur différence de connexion a alors pour expression (cf. [GKM], p. 90, n° A (vi)) :

$$(i) \quad h(u, v) = D_u^1 \mathcal{V} - D_v^2 \mathcal{V} = -\frac{1}{2} [u(\psi)v + v(\psi)u - g_1(u, v) D^1 \psi],$$

où $D^1 \psi$ est mis pour le gradient de ψ relativement à la métrique g_1 .

Remarquons que $g_t = (1-t)g_1 + tg_2$ avec $t \in [0, 1]$ est conforme à g_1 (on pourrait redémontrer les résultats de ce paragraphe à l'aide de la formule de [GKM], p. 97, n° A (iv)). Soit σ le plan engendré par deux vecteurs tangents orthonormés pour g_1 , u et v (on écrira aussi $\sigma = u \wedge v$). On note $G'(\sigma)$ pour $G'(u, v, v, u)$, où G' est le terme égal à l'expression écrite à la troisième ligne de la formule (II) du paragraphe 3.

D'après (i) on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(u, u) = \frac{1}{2} \cdot D^1 \psi - u(\psi) \cdot u, \\ h(v, v) = \frac{1}{2} \cdot D^1 \psi - v(\psi) \cdot v, \\ h(u, v) = -\frac{1}{2} [u(\psi) \cdot v + v(\psi) \cdot u]. \end{array} \right.$$

Puisque l'on a par ailleurs $S_2^1 = e^\psi \cdot I$, on obtient, en revenant au corollaire du paragraphe 3 :

$$(ii) \quad G'(u \wedge v) = \frac{1}{4} \frac{(1-t)te^\psi}{(1-t)+te^\psi} \cdot [\|d\psi\|_1^2 - 3[(u(\psi))^2 + (v(\psi))^2]].$$

Remarque 1. — En un point où $d\psi = 0$, le tenseur h est nul et G' aussi. Par contre en un point où $d\psi$ est non nul, si σ contient $D^1 \psi$, on a $G'(\sigma) < 0$; si σ est orthogonal à $D^1 \psi$, on a $G'(\sigma) > 0$ et par continuité il existe des plans σ tels que $G'(\sigma) = 0$. Pour voir ceci on peut partir directement de (ii) ou, plus géométriquement, appliquer la remarque 5 et le lemme 1 de [M].

Soit $(u_i)_{i=1, \dots, m}$ une base orthonormée de $T_p M$ pour la métrique g_1 . On suppose toujours $m \geq 2$. On a :

$$(iii) \quad \sum_{i=2}^m G'(u_1 \wedge u_i) = \varphi \cdot [(m-4)\|d\psi\|_1^2 - 3(m-2)(u_1(\psi))^2],$$

avec

$$\varphi = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1-t)te^\psi}{(1-t)+te^\psi}$$

qui est ≥ 0 (et même > 0 pour $t \in]0, 1[$). Cette formule s'obtient simplement en sommant convenablement dans (ii). Dans la suite du paragraphe, on désigne par k un réel ≥ 0 .

THÉORÈME. — Soit M une variété de dimension ≤ 4 . L'ensemble des structures riemanniennes conformes à l'une d'entre elles et à courbure de Ricci vérifiant $\text{Ric}_g(\cdot, \cdot) \leq -k \|\cdot\|_g^2$ (resp. $\text{Ric}_g(\cdot, \cdot) < -k \|\cdot\|_g^2$) est un convexe que l'on notera $\mathcal{R}_k^-$. C'est un cône convexe si $k=0$.

Preuve. — On prend la trace une fois dans la formule (II) du paragraphe 3; on trouve, si Ric_t (resp. $\text{Ric}_1, \text{Ric}_2$) désigne Ric_{g_t} (resp. $\text{Ric}_{g_1}, \text{Ric}_{g_2}$) :

$$(iv) \quad \text{Ric}_t(u_1, u_1) \cdot ((1-t) + t\psi) \\ = \text{Ric}_1(u_1, u_1)(1-t) + \text{Ric}_2(u_1, u_1) \cdot t\psi + \sum_{i=2}^m G^i(u_1 \wedge u_i)$$

(remarquer que $\text{Ric}_{ag}(\cdot, \cdot) = \text{Ric}_g(\cdot, \cdot)$). D'où le résultat cherché en revenant à (iii) et par convexité. ■

Remarque 2. — On peut en fait donner un résultat plus précis, dont l'énoncé serait analogue à l'énoncé du théorème du paragraphe précédent. ■

Remarque 3. — Dès que la dimension de M est supérieure ou égale à 5 la conclusion du théorème 1 (qui est un théorème local) est en général fausse.

En effet, si u_1 est orthogonal, pour g_1 , à $D^1\psi$, on a :

$$\sum_{i=2}^m G^i(u_1 \wedge u_i) = \varphi \cdot (m-4) \|d\psi\|_1^2 \geq 0;$$

si u_1 est colinéaire à $D^1\psi$, on a :

$$\sum_{i=2}^m G^i(u_1 \wedge u_i) = 2 \cdot \varphi \cdot (1-m) \|d\psi\|_1^2 \leq 0.$$

D'autre part il est possible de construire dans $\mathbb{R}^m - \{0\}$ une métrique riemannienne Ricci-plate et non trivialement conforme à la métrique canonique; poser :

$$\psi = \text{Log} \left(\left[\frac{1}{4} \|x\| \right]^{-4} \right) \quad \text{et} \quad g_2 = e^\psi \cdot g_1.$$

Un calcul facile à l'aide de la formule de [GKM], p. 97, n° A(iv) montre que g_2 est bien Ricci-plate; attention, cette métrique est singulière à l'origine et ne peut être complète, par un résultat de J. CHEEGER et D. GROMOLL [CG]. La formule (iv), de ce paragraphe 6, montre, avec le début de cette remarque, que la courbure de Ricci de la métrique g_t a les deux signes en tout point de $\mathbb{R}^m - \{0\}$.

On suppose M connexe et de dimension ≤ 4 jusqu'à la fin de ce paragraphe. On va chercher les points extrémaux de $\mathcal{R}_k^-$ (resp. les génératrices extrémales de $\mathcal{R}_0^-$) au sens de [B], p. 105, déf. 1 et p. 107, déf. 2.

On notera g_0 une métrique à laquelle toutes les autres métriques de $\mathcal{R}_k^-$ sont conformes.

PROPOSITION. — Si $k > 0$, les points extrémaux éventuels de $\mathcal{R}_k^-$, sont les métriques g de $\mathcal{R}_k^-$ qui sont telles que pour tout point de M la forme bilinéaire semi-définie négative $\text{Ric}_g + k \|\cdot\|_g^2$ soit nulle dans une direction au moins.

Si $k = 0$ et $\dim M = 2$ ou 3 , les génératrices extrémales éventuelles de $\mathcal{R}_0^-$ sont les demi-droites positives portées par les métriques de $\mathcal{R}_0^-$ dont la courbure de Ricci s'annule dans au moins une direction en tout point de M .

Si $k = 0$ et $\dim M = 4$, les demi-droites positives portées par les métriques à courbure de Ricci nulle sont, si elles existent, des génératrices extrémales de $\mathcal{R}_0^-$.

Preuve. — Tout d'abord, soit g une métrique de $\mathcal{R}_k^-$ dont la courbure de Ricci est $< -k \|\cdot\|_g^2$ en un point p de M au moins. On peut trouver un ouvert de carte Ω contenant p dans lequel $\text{Ric}_g < -k \|\cdot\|_g^2$. Soit e^Ψ une fonction à support compact dans Ω . Comme Ric_g dépend continument de g et de ses dérivées premières et secondes, il est clair que $g + e^\Psi \cdot g_0$ et $g - e^\Psi \cdot g_0$ sont encore des métriques g' vérifiant $\text{Ric}_{g'} < -k \|\cdot\|_{g'}^2$ dans Ω et $\leq -k \|\cdot\|_{g'}^2$ dans M , pourvu que $\sup_{x \in \Omega, l=0,1,2} |D^{(l)} e^\Psi \cdot g_0|$ soit assez petit dans Ω (ici $D^{(l)}|x$ désigne une dérivée partielle d'ordre l dans l'ouvert de carte Ω , prise au point x). Or on peut écrire :

$$g = \frac{1}{2} \{ (g + e^\Psi \cdot g_0) + (g - e^\Psi \cdot g_0) \}$$

et, manifestement, $g + e^\Psi \cdot g_0$ et $g - e^\Psi \cdot g_0$ ne sont ni égaux, ni même proportionnels en général à g (tout ce raisonnement est valable pour tout réel k).

Cas $k > 0$. — Supposons que g est dans $\mathcal{R}_k^-$ et telle que $\text{Ric}_g + k \|\cdot\|_g^2$ s'annule en tout point de M dans une direction u au moins. Soient g_1 et g_2 deux métriques de $\mathcal{R}_k^-$ telles que $g = (1-t)g_1 + tg_2$. Alors d'après (iv) on a :

$$\begin{aligned} -k \|u\|_g^4 &\leq \text{Ric}_{g_1}(u, u) \|u\|_{(1-t)g_1}^2 \\ &\quad + \text{Ric}_{g_2}(u, u) \|u\|_{g_2}^2 \leq -k (\|u\|_1^4 (1-t) + \|u\|_2^4 t). \end{aligned}$$

Ceci donne encore :

$$((1-t)\|u\|_1^2 + t\|u\|_2^2)^2 \geq \|u\|_1^4(1-t) + \|u\|_2^4 \cdot t;$$

par convexité ceci entraîne l'égalité et donc $\text{Ric}_g(u, u) = -k\|u\|_1^2$ et $\text{Ric}_{g_2}(u, u) = -k\|u\|_2^2$ et aussi $\|u\|_1 = \|u\|_2$. Mais comme g_1 est conforme à g_2 , ceci entraîne $g_1 = g_2 = g$.

Cas $k=0$ et $\dim M = 2$ ou 3 . — Dans ce cas il faut revenir à (iv). Si $g \in \mathcal{R}_0^-$ et Ric_g s'annule dans une direction u au moins, en tout point de M et si $g = g_1 + g_2$ avec $g_2 = e^\psi \cdot g_1$ et $g = (g_1 + g_2)/2$, alors d'après (iv) $\text{Ric}_{g_1}(u, u) = \text{Ric}_{g_2}(u, u) = 0$, et d'après (iv) et (iii), on a $d\psi = 0$. Ceci implique $\psi = \text{Cte}$ sur M et donc g_1 et g_2 proportionnelles sur M . La demi-droite positive $Dr^+(g) = \{\lambda g / \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}\}$ est une génératrice extrémale de $\mathcal{R}_0^-$.

Cas de la dimension 4. — Dans ce cas (iii) entraîne seulement $u(\psi) = 0$. En notant Ker Ric_g le sous-espace vectoriel des directions isotropes pour la forme bilinéaire semi-définie négative Ric_g , on peut encore écrire $\text{Ker}(\text{Ric}_g) \subset \text{Ker } d\psi$ en tout point de M . Si $\text{Ric}_g = 0$ sur M , on a donc $d\psi = 0$ sur M et on conclut comme ci-dessus.

Remarque 4. — Si M est compacte, connexe et sans bord d'après les théorèmes 1, 2 de [01], dus à OBATA, il n'y a pas de génératrice extrémale pour $\mathcal{R}_0^-$ qui soit portée par une métrique riemannienne à courbure de Ricci identiquement nulle, sauf si $\mathcal{R}_0^-$ est réduit à cette génératrice extrémale. Sous les mêmes hypothèses, si $k < 0$, d'après le théorème 6 de [01], il y a unicité d'un éventuel point extrémal g dans $\mathcal{R}_k^-$, dont la courbure de Ricci vérifierait $\text{Ric}_g = -k\|\cdot\|_g^2$.

7. Courbure scalaire des métriques riemanniennes conformes

On reprend les hypothèses et les notations du paragraphe 6, et k est ≥ 0 .

THÉORÈME. — Soit M une variété de dimension ≤ 6 . L'ensemble des structures riemanniennes conformes à l'une d'entre elles et à courbure scalaire $\leq -k$ (resp. $< -k$) est un convexe noté $\mathcal{S}_k^-$. Si $k=0$, c'est un cône convexe. Si $\dim(M) \geq 6$, l'ensemble de métriques riemanniennes conformes à l'une d'entre elles et à courbure scalaire $\geq k$ (resp. $> k$) est un convexe noté $\mathcal{S}_k^+$. Si $k=0$, c'est un cône convexe.

Preuve. — En prenant encore une fois la trace dans (iii) on a :

$$(v) \quad \sum_{i \neq j} G^i(u_i \wedge u_j) = \varphi(m^2 - 7m + 6) \|d\psi\|_1^2$$

et (iv) devient (Scal_t (resp. Scal_1 , Scal_2) désigne la courbure scalaire de g_t (resp. g_1 , g_2)) :

$$(vi) \quad \text{Scal}_t \cdot ((1-t) + te^\Psi)^2 = \text{Scal}_1 (1-t) + \text{Scal}_2 \cdot t \cdot e^{2\Psi} + \sum_{i \neq j} G^t(u_i \wedge u_j).$$

D'où le résultat en remarquant que l'on a :

$$(m^2 - 7m + 6) = (m-1)(m-6) \text{ et par convexité. } \blacksquare$$

Remarque 1. — Si $\dim(M) = 6$, on a le résultat particulier suivant :
l'ensemble des métriques riemanniennes conformes à l'une d'entre elles et à courbure scalaire nulle forme un cône convexe et l'on a :

$$(vi)\text{-bis} \quad \text{Scal}_t \cdot ((1-t) + te^\Psi)^2 = \text{Scal}_1 (1-t) + \text{Scal}_2 \cdot t \cdot e^{2\Psi}.$$

Cependant si M est compacte, sans bord et connexe, deux métriques conformes à courbure scalaire nulle sont proportionnelles comme le montre un théorème d'OBATA (cf. [01], th. 2).

Remarque 2. — Le rôle spécial joué par la dimension 6 dans le problème de Yamabe apparaît déjà de manière géométriquement inexpliquée dans un article de T. AUBIN (cf. [A]), comme me l'a signalé J.-P. Bourguignon.

Remarque 3. — On peut ici aussi énoncer le théorème de manière analogue au théorème du paragraphe 5.

Remarque 4. — Si $m = \dim(M)$ vérifie $2 \leq \dim(M) < 6$ il est faux qu'un ensemble de métriques riemanniennes conformes à l'une d'entre elles et à courbure scalaire ≥ 0 soit un cône convexe. En effet $\sum_{i \neq j} G^t(u_i \wedge u_j) < 0$ si $d\Psi \neq 0$. Et en reprenant la fonction $\psi = \text{Log}([1/4 \|x\|]^{-4})$ de la remarque 4, paragraphe 6 on voit que la courbure scalaire Scal_t de la métrique $(1-t)g_1 + te^\Psi g_1$ sur $\mathbb{R}^m - \{0\}$ (où g_1 est la métrique canonique) est strictement négative. De même si $\dim(M) > 6$ en inversant les signes.

On suppose M connexe. On va chercher les points extrémaux (resp. les génératrices extrémales) des convexes $\mathcal{S}_k^-$ et $\mathcal{S}_k^+$ (resp. des cônes convexes $\mathcal{S}_0^-$ et $\mathcal{S}_0^+$) mis en évidence au théorème précédent. On suppose $k \neq 0$ ou $\dim(M) \neq 6$.

PROPOSITION. — Si $k > 0$, les points extrémaux éventuels de $\mathcal{S}_k^-$ (resp. $\mathcal{S}_k^+$) sont les métriques riemanniennes à courbure scalaire constante $-k$ (resp. k).

Les génératrices extrémales éventuelles de $\mathcal{S}_0^-$ (resp. $\mathcal{S}_0^+$) sont les demi-droites positives portées par les métriques à courbure scalaire constante nulle.

Preuve. — La démonstration étant pour l'essentiel analogue à celle de la proposition du paragraphe précédent ne sera pas reprise ici. ■

Remarque 5. — En dimension 6 et si $k=0$, cette démonstration échoue puisque (vi)-bis ne fournit aucun contrôle sur $d\psi$. D'après la remarque 1, ceci est naturel; en général une métrique g à courbure scalaire nulle peut s'écrire $g=(g_1+g_2)/2$ avec g_1 et g_2 conformes à g , mais g_1 et g_2 non colinéaires à g . Cependant, d'après le théorème 2 de [O1] (encore!) si M est compacte, connexe et sans bord, pour toute métrique g à courbure scalaire nulle sur M , $Dr^+(g)$ est la génératrice extrémale des cônes convexes $\mathcal{S}_0^+$ et $\mathcal{S}_0^-$ qui sont réduits à celle-ci; le théorème 1 de [O1] exprime que si $\mathcal{S}_0^+$ est non vide, $\mathcal{S}_0^- - \mathcal{S}_0^+$ est vide, et réciproquement.

Remarque 6. — Si M est compacte, connexe et sans bord le théorème d'OBATA (th. 6 de [O1]) déjà cité permet en outre (cf. remarque 4, §6) de dire que si g est une métrique extrémale de $\mathcal{S}_k^-$ (à courbure scalaire constante égale à $-k < 0$) elle est *unique*.

Remarque 7. — Pour une surface M , où courbure de Ricci et courbure scalaire coïncident avec la notion usuelle de courbure de Gauß, il existe une autre obstruction à l'existence d'une génératrice extrémale sur $\mathcal{S}_0^-$, qui elle est indépendante de la métrique g choisie. Le théorème de Gauß-Bonnet affirme en effet que l'intégrale de la courbure de Gauß sur la surface M (compacte, connexe et sans bord) est un invariant topologique égal à $2\pi \cdot \chi(M)$, où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M . Si M est une surface à caractéristique d'Euler < 0 , on sait qu'il existe sur M une métrique à courbure de Gauß < 0 (cf. [KW]). Le cône $\mathcal{S}_0^-$ relatif à g est non vide mais n'admet pas de génératrice extrémale.

On va, pour conclure, exposer des résultats semblables au corollaire de H. WU énoncé au paragraphe 5, dans le cas où le groupe de transformations considéré est celui des transformations conformes, que l'on supposera compact : ceci n'est pas une vraie restriction; d'après un théorème de J. LELONG-FERRAND et M. OBATA (cf. [LF] et [O2]), parmi les variétés riemanniennes compactes connexes et sans bord, seule la sphère, munie d'une métrique conforme à la métrique standard, possède un groupe de transformations conformes non compact.

Cependant on va se servir d'une forme du théorème du paragraphe 2 généralisée au cas de plusieurs métriques.

8. Courbure du barycentre de plusieurs métriques

Soit $(g_a)_{a=1, \dots, A}$ une famille de structures riemanniennes sur M . La variété M plongée diagonalement dans le produit $\prod_{a=1}^A (M, g_a)$ est naturellement munie de la métrique somme $g_1 + \dots + g_A = g$. On note encore Δ le plongement diagonal. Soit $x = (x_1, \dots, x_A)$ un point de M^A . On note i_a^x l'inclusion du a -ième facteur M dans M^A :

$$i_a^x(\xi) = (x_1, \dots, x_{a-1}, \xi, x_{a+1}, \dots, x_A).$$

On a :

$$(i) \quad \tilde{g}(\tilde{R}(U, V)W, Z) = \sum_{a=1}^A g_a(R_a(u_a, v_a)w_a, z_a),$$

où $\tilde{g}$ désigne le produit des métriques g_a , $\tilde{R}$ (resp. R_a) est le tenseur de courbure de la métrique $\tilde{g}$ (resp. g_a) et u_a est mis pour la projection de U sur le a -ième facteur. On désigne par h_a^b le tenseur différence de connexion $D^a - D^b$.

On désigne par α la seconde forme fondamentale de $\Delta(M)$ plongée dans $(M^A, \tilde{g})$ et $P = (p, \dots, p)$ est un point de $\Delta(M)$.

LEMME. — On a $\alpha_P = \sum_{a=1}^A di_a^P \sum_{b=1}^A T_b h_a^b$ où T_b est défini comme étant l'unique isomorphisme de TM vérifiant $\tilde{p}_\Delta \circ di_b = \Delta \circ T_b$.

Preuve. — On a $\alpha_P = \tilde{q}_\Delta(\tilde{D}_U V)$ où U désigne un vecteur tangent en P à $\Delta(M)$, et V un champ qui prolonge V en un champ tangent à $\Delta(M)$ autour de P . Si U est un tel vecteur on a :

$$\tilde{p}_\Delta(U) = (\sum_{b=1}^A T_b u_b, \dots, \sum_{b=1}^A T_b u_b)$$

par définition de T_b . Donc

$$\tilde{q}_\Delta(\tilde{D}_U V) = (D_u^1 \mathcal{V} - \sum_{b=1}^A T_b D_u^b \mathcal{V}, \dots, D_u^A \mathcal{V} - \sum_{b=1}^A T_b D_u^b \mathcal{V}),$$

où $U = (u, \dots, u)$ et $V = (\mathcal{V}, \dots, \mathcal{V})$ et le résultat en écrivant que :

$$I = \sum_{b=1}^A T_b. \quad \blacksquare$$

THÉORÈME. — Pour tous les vecteurs tangents en p à M , u, v, w et z , on a :

$$(IV) \quad g(R(u, v)w, z) = \sum_{a=1}^A g_a(R_a(u, v)w, z) \\ + \sum_{a=1}^A [g_a \sum_{b=1}^A T_b h_a^b(u, z), \sum_{b=1}^A T_b h_a^b(v, w)) \\ - g_a(\sum_{b=1}^A T_b h_a^b(u, w), \sum_{b=1}^A T_b h_a^b(v, z))].$$

On note encore $G(u, v, w, z)$ la deuxième ligne de (IV) et $G^a(u, v, w, z)$ chacune des composantes de la somme, i. e. $G = \sum_{a=1}^A G^a$.

Preuve. — C'est la formule de Gauß déjà citée au paragraphe 2 et le lemme. ■

9. Symétrisation sous le groupe conforme et courbure

On va se servir de la propriété suivante (qu'on ne démontrera pas). Soit $\mathcal{G}$ un groupe de Lie compact et μ sa mesure de Haar de masse 1. Alors μ est limite d'une suite $(1/N) \sum_{i=1}^N \delta_{\varphi_{i,N}}$ lorsque $N \rightarrow \infty$ où les $\delta_{\varphi_{i,N}}$ sont des masses de Dirac de points $\varphi_{i,N}$ convenablement répartis. Si $\mathcal{G}$ est un groupe compact de transformation conformes de la variété riemannienne (M, g) la métrique symétrisée sous le groupe $\mathcal{G}$, soit :

$$g_s = \int_{\varphi \in \mathcal{G}} (\varphi^* \cdot g) d\mu(\varphi)$$

est donc aussi obtenue par :

$$g_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_{i,N}^* \cdot g.$$

THÉORÈME 1. — Si M est de dimension 2, 3 ou 4 et si g est à courbure de Ricci $\leq -k \parallel \cdot \parallel_g^2 < 0$ (resp. ≤ 0), alors g_s est à courbure de Ricci $\leq -k \parallel \cdot \parallel_{g_s}^2 < 0$ (resp. ≤ 0).

THÉORÈME 2. — Si la dimension n de M vérifie $2 \leq n \leq 6$ et si g est à courbure scalaire $\leq -k < 0$ (resp. ≤ 0), alors g_s est à courbure scalaire $\leq -k < 0$ (resp. ≤ 0). Si M est de dimension ≥ 6 et si g est à courbure scalaire $\geq k > 0$ (resp. ≥ 0), alors g_s est à courbure scalaire $\geq k > 0$ (resp. ≥ 0).

Preuve des théorèmes. — On désigne par g_N la métrique $(1/N) \sum_{i=1}^N \varphi_{i,N}^* g$. On a d'abord le :

LEMME 1. — Les énoncés des théorèmes précédents sont vrais si l'on remplace g_s par g_N .

Preuve. — Si la métrique g vérifie une inégalité de courbure en tout point de M , la métrique $\varphi^* g$, déduite de la métrique g par le difféomorphisme φ , la vérifie aussi. Appliquons maintenant la formule (IV) du théorème du paragraphe précédent à la famille de métriques $\{(1/N) \varphi_{i,N}^* g\}_{i=1, \dots, N}$.

On obtient en dimension ≤ 4 et pour tout vecteur u :

$$(i) \quad \text{Ric}_{g_N}(u, u) \cdot \|u\|_{g_N}^2 \leq \sum_{i=1}^N \text{Ric}_{(1/N) \varphi_{i,N}^* g}(u, u) \cdot \|u\|_{(1/N) \varphi_{i,N}^* g}^2$$

et l'on conclut par l'inégalité de Schwarz.

D'autre part, en dimension ≤ 6 on a :

$$(ii) \quad \text{Scal}_{g_N} \cdot \|u\|_{g_N}^4 \leq \sum_i \text{Scal}_{(1/N)\varphi_{i,N}^*} \cdot \|u\|_{(1/N)\varphi_{i,N}^*}^4$$

et l'inégalité va en sens contraire si la dimension est ≥ 6 . Ceci entraîne la seconde partie du lemme 1, encore grâce à l'inégalité de Schwarz, en prenant garde que $\text{Scal}_{\alpha g} = 1/\alpha \cdot \text{Scal}_g$ pour toute constante $\alpha > 0$ ■

Remarque. — Ce lemme pourrait aussi se démontrer par récurrence sur le nombre de métriques (i.e. en faisant appel uniquement à la formule (I) du théorème paragraphe 2 et à ses conséquences); c'est ainsi que procède H. WU dans [W1], p. 1107, pour la démonstration du corollaire énoncé au paragraphe 5.

Il reste à examiner les questions de convergence, i.e. à s'assurer que les dérivées premières et secondes de la métrique g_N convergent bien vers les dérivées premières et secondes de g_S lorsque $N \rightarrow \infty$. Ceci sera l'objet du :

LEMME 2. — Soit K un voisinage de carte compact de M . Si $D^{[r]}|_x$ désigne la dérivée r -ième de l'expression qui suit le symbole $D^{[r]}$, prise au point $x \in K$, on a :

$$(\forall x \in K) \quad \text{et} \quad (\forall r \in \mathbb{N}), \quad D^{[r]}g_{N|x} \rightarrow D^{[r]}g_{S|x}.$$

Preuve. — D'après la définition de g_N si μ_N désigne la mesure $1/N \sum_{i=1}^N \delta_{\varphi_i, N}$ on a :

$$D^{[r]}g_{N|x} = D^{[r]} \left(\int_{\mathcal{G}} \varphi^* g \cdot d\mu_N(\varphi) \right)_x = \int_{\mathcal{G}} D^{[r]}(\varphi^* g)|_x d\mu_N(\varphi).$$

Or, d'après le choix de μ_N il y a convergence vague de la suite μ_N (lorsque $N \rightarrow \infty$) vers la mesure de Haar μ . Donc :

$$D^{[r]}g_{N|x} \rightarrow \int_{\mathcal{G}} D^{[r]}(\varphi^* g)|_x \cdot d\mu(\varphi).$$

Puisque $\sup_{x \in K, \varphi \in \mathcal{G}} |D^{[r]}(\varphi^* g)|_x|$ existe pour tout $r \in \mathbb{N}$ par continuité de la norme Sup et de l'application $D^{[r]}(\varphi^* g)$ et compacité de $\mathcal{G}$ et K , le résultat suit par application du théorème de convergence dominé de Lebesgue. ■

La convergence des dérivées premières et secondes de g_N vers celles de g_S assure celle de toutes les courbures considérées dans ce paragraphe ■

COROLLAIRE. — Le groupe des transformations conformes d'une classe conforme de métriques contenant une métrique à courbure de Ricci négative est fini si la variété est compacte et de dimension inférieure ou égale à 4.

Preuve. — D'après le théorème de J. LELONG-FERRAND et M. OBATA ce groupe est compact (cf. [O2] et [LF]). D'après le théorème 1 c'est un groupe d'isométries pour la métrique g_s , qui est à courbure de Ricci négative. Comme M est compacte, il n'y a pas d'isométries infinitésimales, d'où le résultat.

En fait ce corollaire est vrai en toute dimension : il faut appliquer un résultat de Lichnérowicz (cf. [Li], p. 134, § 84, n° 2).

BIBLIOGRAPHIE

- [A] AUBIN (T.). — Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, *J. Math pures et appl.*, vol 55, 1976, p. 269-296.
- [B] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 1 et 2, Hermann, Paris 1966; *Éléments de math.*, fasc. XV.
- [CG] CHEEGER (J.) and GROMOLL (D.). — The splitting theorem for manifolds of nonnegative ricci curvature, *J. Diff. geom.*, vol. 6, 1971, p. 119-128.
- [Ga] GARDNER (R.). — Subscalar pairs of metrics and hypersurfaces with a nondegenerate second fundamental form, *J. diff. geom.*, vol. 1972, p. 437-458.
- [GKM] GROMOLL (D.), KLINGENBERG (W.) and MEYER (W.). — *Riemannsche Geometrie im Großen*, Springer, 1968, *lectures notes in maths.*, n° 55.
- [K] KOBAYASHI (S.). — *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York, 1970: *Pure and applied math.*, n° 2.
- [KN] KOBAYASHI (S.) and NOMIZU (K.). — *Foundations of differential geometry*, John Wiley, 1969, *Interscience tracts in pure and applied math.*
- [KW] KAZDAN (J.) and WARNER (F.). — Scalar curvature and conformal deformations of riemannian structure, *J. diff. geom.*, vol. 10, 1975, p. 113-134.
- [LF] LELONG-FERRAND (J.). — Transformations conformes et quasi conformes des variétés riemanniennes compactes (démonstration de la conjecture de Lichnérowicz), *Mém. Acad. Roy. Belg. Cl. Sc. Mém. Coll.*, In 8°, vol. 39, 1971.
- [Li] LICHNÉROWICZ (A.). — *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958, *Travaux et recherches mathématiques*.
- [M] MEYER (D.). — Courbure sectionnelle et opérateur de courbure en codimension plus grande que 2, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 288, série A, 1979, p. 1029-1032.
- [O1] OBATA (M.). — Conformal transformations of compact riemannian manifolds, *Illin. J. math*, vol. 6, n°2, 1962, p. 292-295.
- [O2] OBATA (M.). — The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds, *J. diff. geom.*, vol. 6, 1971, p. 247-258.
- [W1] WU (H.). — A remark on holomorphic sectional curvatures, *Indiana University, Math. J.*, Vol. 22, n° 11, 1973, p. 1103-1108.
- [W2] WU (H.). — Normal families of holomorphic mappings, *Acta math.*, vol. 119, 1967, p. 193-233.