BULLETIN DE LA S. M. F.

P. MOLINO

# Le problème d'équivalence pour les pseudogroupes de Lie : méthodes intrinsèques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 108 (1980), p. 95-111
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__95_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Bull. Soc. math. France*,
108, 1980, p. 95-111.

# LE PROBLÈME D'ÉQUIVALENCE POUR LES PSEUDOGROUPES DE LIE : MÉTHODES INTRINSÈQUES

PAR

P. MOLINO

RÉSUMÉ. — Si $V$ est une variété différentiable, $\alpha$ une 1-forme sur $V$ à valeurs dans une algèbre de Lie de dimension finie $g$ vérifiant $d\alpha+(1/2)[\alpha, \alpha]=0$, le théorème classique de Darboux dit que $\alpha$ est localement induite à partir de la forme fondamentale d'un groupe de Lie $G$ d'algèbre de Lie $g$ par une application différentiable (locale) de $V$ dans $G$. Dans le présent travail on généralise ce problème à la dimension infinie en travaillant dans la catégorie des variétés « à présentation projective » et des algèbres de Lie « linéairement compactes » au sens de V. Guillemin. On obtient ainsi un problème d'équivalence généralisé pour les $\Gamma$-structures au sens de Haefliger. Les résultats obtenus dans le cas « régulier » fournissent la clé du problème crucial de passage au quotient dans l'étude du problème d'équivalence d'E. Cartan.

SUMMARY. — Let $V$ be a differentiable manifold, $G$ a Lie group, $g$ the Lie algebra of $G$, $\alpha$ a 1-form on $V$ with values in $g$. If $d\alpha+(1/2)[\alpha, \alpha]=0$, the classical Darboux equivalence theorem says that $\alpha$ is locally induced from the left invariant form on $G$ by a local mapping $V \to G$. In the present paper a generalisation of Darboux's problem to infinite dimensional manifolds is given, using manifolds "with projective presentation" and "linearly compact Lie algebras" in the sense of V. Guillemin. A generalised equivalence problem is obtained, adapted to the notion of Haefliger's $\Gamma$-structure. In the "regular case" results are obtained which are the key of a crucial part in E. Cartan's equivalence problem, namely passage to the quotient for almost-s tructures.

Dans l'étude du problème d'équivalence d'E. Cartan (*voir* [2]) deux types de méthodes ont été exploités dans la période récente, en particulier pour donner une solution définitive au problème d'intégrabilité des $G$-structures (résolu par V. Guillemin dans [5] pour le cas des structures de type fini).

D'une part en effet, en s'inspirant de la théorie des déformations de D. C. Spencer (*voir* [16]), on peut considérer localement une presque-structure au sens de V. Guillemin-S. Sternberg (*voir* [8]) comme une déformation de la structure modèle. L'avantage est de fournir une présentation naturelle du problème d'équivalence en termes de cohomologie

(*) Texte reçu le 11 octobre 1978, révisé le 24 septembre 1979.

PIERRE MOLINO, Mathématiques, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, place Eugène-Bataillon, 34000 Montpellier (France).


© Gauthier-Villars

non abélienne (cohomologie de Spencer). C'est par cette méthode que H. Goldschmidt-D. C. Spencer ont obtenu (*voir* [4] et [3]) une démonstration du théorème d'équivalence pour les pseudo-groupes de Lie transitifs sur $\mathbb{R}^n$ contenant les translations. En particulier ceci résout le problème d'intégrabilité pour les $G$-structures.

D'autre part, en utilisant les idées antérieures de V. Guillemin et A. Pollack (*voir* [14]) et de C. Buttin-P. Molino (*voir* [1]) on a donné dans $[12]_a$ une autre démonstration du même théorème (th. I de $[12]_a$) ainsi qu'une caractérisation infinitésimale des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires qui sont localement à coefficients constants (th. II de $[12]_a$). La méthode utilisée s'appuie sur une étude « intrinsèque » des presque-structures en tant qu'espaces de repères. L'avantage (à notre avis décisif...) de cette méthode est de permettre une démonstration élémentaire du théorème de « passage au quotient pour les presque-structures » (prop. 22 de $[12]_a$), un des points de la théorie les plus difficiles à établir par la première méthode. On a indiqué dans $[12]_b$ comment s'explique cette difficulté : en gros, en considérant une presque-structure comme une déformation de la structure modèle on perd la possibilité de l'étudier en tant qu'espace de repères sur sa base et d'utiliser directement, pour le passage au quotient, une version adaptée du théorème de Frobenius.

Le but du présent travail est à la fois de présenter le problème d'équivalence dans un cadre plus général et de montrer par là même comment les méthodes intrinsèques s'introduisent de façon naturelle.

Le point de départ est de remarquer que pour les structures de type fini le théorème d'équivalence peut être regardé comme un cas particulier du théorème de Darboux sur les formes à valeurs dans une algèbre de Lie vérifiant l'équation de Maurer-Cartan (*voir* par exemple [11], p. 165).

Ceci étant on cherche à généraliser le problème de Darboux au cas de la dimension infinie. On travaille pour cela dans la catégorie des variétés « à présentation projective » (*voir* § 2 ci-dessous) c'est-à-dire en gros des limites projectives de variétés. On considère (§ 3) des formes à valeurs dans des algèbres de Lie linéairement compactes au sens de V. Guillemin (*voir* [6]). On obtient ainsi une bonne généralisation à la fois du problème d'équivalence de Cartan et du problème de Darboux. En un sens ceci correspond à une notion de presque-structure associée à la notion de $\Gamma$-structure de Haefliger (*voir* [9]).

On esquisse une étude élémentaire de ce problème en se restreignant au cas des structures « régulières » (ce qui correspond au cas des feuilletages sans singularités). On obtient ainsi un résultat qui donne la clé du passage au quotient (th. 1) et aussi une formulation dans ce cadre du Lemme de réduction de $[12]_a$ (th. 2). Les outils essentiels de la démonstration indiquée dans $[12]_a$ pour le théorème d'équivalence relatif aux pseudo-groupes de Lie transitifs sur $\mathbb{R}^n$ contenant les translations sont ainsi démontrés de façon élémentaire dans un cadre plus général.

On remarquera pour terminer qu'il serait naturel de placer également dans ce cadre l'étude des structures avec singularités (*voir* par exemple [10] et [13]).

Je remercie M. Tong van Duc pour une observation utile sur la rédaction de 2.1.

## 1. Rappels sur le problème d'équivalence d'E. Cartan

On reprend les notations de $[12]_a$ et on renvoie à cet exposé pour les détails. *Voir* aussi I. Singer, S. Sternberg [15] et V. Guillemin [6]. La différentiabilité est toujours entendue au sens $C^\infty$.

1.1. Soient $M$ une variété de dimension $n$, $\Gamma_M$ un pseudo-groupe de Lie transitif (PLT) sur $M$. Pour $k \geqslant 1$ on choisit une orbite $E^k_M(M, p^k, G_k)$ du relevé $\Gamma^k_M$ de $\Gamma_M$ dans le fibré $B^k(M)$ des repères d'ordre $k$ de $M$, de façon que les structures $(E^k_M)_{k\geqslant 1}$ se projettent l'une sur l'autre. Pour $1 \leqslant l < k$ on note $p^k_l : E^k_M \to E^l_M$ la projection naturelle. $G_k$ s'identifie donc au groupe de Lie des $k$-jets en un point $x$ de $M$ des éléments de $\Gamma_M$ de source et but $x$.

On dira que $(E^k_M)_{k\geqslant 1}$ est une *suite de définition* de $\Gamma_M$. Une telle suite n'est pas unique et on passe d'une suite de définition de $\Gamma_M$ à une autre par conjugaison dans la suite $(B^k(M))_{k\geqslant 1}$ des fibres de repères de $M$.

1.2. La forme fondamentale $\theta^k_M$ sur $B^k(M)$ est à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^n_{k-1} = J^{k-1}_0 T(\mathbb{R}^n)$ des $(k-1)$-jets de champs de vecteurs à l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Le crochet des champs de vecteurs définit sur $\mathbb{R}^n_{k-1}$ un *crochet d'algèbre de Lie tronquée* à valeurs dans $\mathbb{R}^n_{k-2}$ :

$$(1) \qquad [\ ,\ ] : \mathbb{R}^n_{k-1} \times \mathbb{R}^n_{k-1} \to \mathbb{R}^n_{k-2}.$$

Pour $1 \leqslant l < k$ on note $t^{k-1}_{l-1} : \mathbb{R}^n_{k-1} \to \mathbb{R}^n_{l-1}$ la projection naturelle.

On munit la limite projective $\hat{D}(\mathbb{R}^n)$ des $\mathbb{R}^n_{k-1}$ de la topologie limite projective des topologies discrètes. $\hat{D}(\mathbb{R}^n)$ devient ainsi une *algèbre de Lie topologique*, « linéairement compacte » au sens de V. Guillemin [6].

Si $t_{k-1} : \hat{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n_{k-1}$ est la projection naturelle, $\hat{D}_{k-1}$ le noyau de cette projection, on obtient une filtration de $\hat{D}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\hat{D}(\mathbb{R}^n) = \hat{D}_{-1} \supset \hat{D}_0 \supset \ldots \supset \hat{D}_{k-1} \supset \ldots \tag{2}$$

par des sous-algèbres de Lie ouvertes formant un système fondamental de voisinages de 0 dans $\hat{D}(\mathbb{R}^n)$ et vérifiant :

$$[\hat{D}_i, \hat{D}_j] \subset \hat{D}_{i+j} \quad \text{quels que soient } i, j,\ i+j \geqslant -1. \tag{3}$$

*En restriction à la structure d'ordre* $k$ $E^k_M$ de la suite de définition $(E^k_M)_{k\geqslant 1}$ de $\Gamma_M$, la forme fondamentale $\theta^k_M$ est à valeurs dans une sous-algèbre de Lie tronquée $A_{k-1}$ de $\mathbb{R}^n_{k-1}$. $A_{k-1}$ s'identifie à l'algèbre de Lie tronquée des $(k-1)$-jets de $\Gamma_M$-champs de vecteurs en un point $x$ de $M$. De plus la sous-algèbre de Lie tronquée de $A_{k-1}$ formée des $(k-1)$-jets de $\Gamma_M$-champs nuls en $x$ s'identifie à l'algèbre de Lie du groupe de Lie $G_{k-1}$. La limite projective $\hat{L}$ des $A_{k-1}$ est une sous-algèbre de Lie (linéairement compacte) fermée de $\hat{D}(\mathbb{R}^n)$ qui sera dite *algèbre formelle de* $\Gamma_M$ *associée à la suite de définition* $(E^k_M)_{k\geqq 1}$. On notera :

$$\hat{L} = \hat{L}_{-1} \supset \hat{L}_0 \supset \ldots \supset \hat{L}_{k-1} \supset \ldots \tag{4}$$

la filtration induite par (2) sur $\hat{L}$. On aura alors les relations analogues à (3) :

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] \subset \hat{L}_{i+j} \quad \text{quels que soient } i, j,\ i+j \geqslant -1. \tag{5}$$

1.3. SOIT $V$ UNE VARIÉTÉ DE MÊME DIMENSION $n$ QUE LA VARIÉTÉ « MODÈLE » $M$.

Une *presque-*$\Gamma_M$*-structure* sur $V$ est définie par la donnée d'une suite $(E^k_V)_{k\geqslant 1}$ de structures d'ordre $k$ sur $V$, c'est-à-dire de sous-fibrés principaux des fibres de repères $B^k(V)$, se projetant l'une sur l'autre et vérifiant :

(i) $\forall k$, $E^k_V(V, p^k, G_k)$ a même groupe structural que la structure d'ordre $k$ « modèle » $E^k_M$ ;

(ii) $\forall k$ la forme fondamentale $\theta^k_V$ de $B^k(V)$, en restriction à $E^k_V$, est à valeurs dans $A_{k-1}$.

On dit que $(E^k_V)_{k\geqslant 1}$ est la *suite de définition de la presque-*$\Gamma_M$*-structure* modelée sur $(E^k_M)_{k\geqslant 1}$. Si on change de suite de définition pour $\Gamma_M$ on obtient pour la presque-structure une nouvelle suite de définition, conjuguée de la précédente et modelée sur la nouvelle suite de définition du PLT.

Une *équivalence locale* de la presque-structure sur la structure modèle sera un difféomorphisme local $\varphi$ de $V$ dans $M$ tel que pour tout $k \geqslant 1$ le relevé $B^k(\varphi)$ de $\varphi$ dans les fibrés de repères d'ordre $k$ envoie (localement) $E_V^k$ sur $E_M^k$.

*Le problème d'équivalence pour* $\Gamma_M$ s'énonce alors : si $(E_V^k)_{k \geqslant 1}$ est la suite de définition modelée sur $(E_M^k)_{k \geqslant 1}$ d'une presque-$\Gamma_M$-structure arbitraire, existe-t-il au voisinage de chaque point de $V$ une équivalence locale de la presque-structure $(E_V^k)_{k \geqslant 1}$ sur la structure modèle $(E_M^k)_{k \geqslant 1}$?

*Si la réponse à cette question est affirmative on dira que le théorème d'équivalence est vrai pour* $\Gamma_M$.

**2. Variétés à présentation projective** (*voir* également [17])

2.1. SOIT $(V^i, \pi_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}; i>j}$ UN SYSTÈME PROJECTIF où pour tout entier $i$ $V^i$ est une variété différentiable (de dimension finie) et, pour $i>j$, $\pi_j^i$ une surmersion $V^i \to V^j$. Considérons l'espace topologique $\hat{V}$ limite projective des $V^i$ et notons $P^i : \hat{V} \to V^i$ la projection naturelle. Un ouvert de $\hat{V}$ est élémentaire s'il est préimage d'une de ses projections.

On suppose :

(P.P.1) $\forall \hat{x} = (x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \hat{V}$ et $\forall i \in \mathbb{N}$ il existe un voisinage ouvert $\Omega^i$ de $x^i$ dans $V^i$ et une section $\sigma^i : \Omega^i \to \hat{V}$ telle que $\sigma^i(x^i) = \hat{x}$, $P^i \circ \sigma^i = \mathrm{Id}_{\Omega^i}$ et $P^j \circ \sigma^i$ différentiable pour tout $j \in \mathbb{N}$ [*existence de sections locales*].

(P.P.2) $\forall \hat{x} = (x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in \hat{V}$ il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ et un voisinage ouvert $\Omega^{j_0}$ de $x^{j_0}$ dans $V^{j_0}$ tels que, pour tout $y^{j_0} \in \Omega^{j_0}$ et pour tout $i > j_0$, $(\pi_{j_0}^i)^{-1}(y^{j_0})$ soit connexe dans $V^i$ [*connexité locale de* $\hat{V}$].

On dira alors que la famille $\mathscr{P} = (P^i, V^i, \pi_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}; i>j}$ est une *présentation projective différentiable* (en abrégé P.P.) de l'espace $\hat{V}$.

Si $\mathscr{P}' = (P'^i, V'^i, \pi'^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}, i>j}$ est une autre P.P. de $\hat{V}$, on dira que $\mathscr{P}$ *est plus fine que* $\mathscr{P}'$ si $\forall i \in \mathbb{N}$ il existe un entier $j$ et une surmersion $\psi_i^j : V^j \to V'^i$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \hat{V} \arrow[r] \arrow[d, "P'^i"'] & V^j \arrow[dl, "\psi_i^j"] \\ V'^i & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

*Deux P.P. seront dites équivalentes* si chacune est plus fine que l'autre.

Notons encore que si $\hat{\Omega}$ est un ouvert élémentaire de $\hat{V}$ et si $\mathscr{P} = (P^i, V^i, \pi_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}; i>j}$ est une P.P. de $\hat{V}$, en posant $\Omega^i = P^i(\hat{\Omega})$ on voit que $\mathscr{P}_{\hat{\Omega}} = (P^i, \Omega^i, \pi_j^i)_{i,j \in \mathbb{N}; i>j}$ est une P.P. de $\hat{\Omega}$ qui sera dite *induite par* $\mathscr{P}$ *sur* $\hat{\Omega}$. La connexité locale de $\hat{V}$ intervient de façon essentielle pour vérifier l'axiome (P.P.1) sur la famille induite.

2.2. SOIT MAINTENANT $\hat{V}$ UN ESPACE TOPOLOGIQUE LOCALEMENT CONNEXE A BASE DÉNOMBRABLE D'OUVERTS.

Un *atlas différentiable à présentation projective* sur $\hat{V}$ sera une famille $(\hat{\Omega}_\lambda, \mathscr{P}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de couples où $(\hat{\Omega}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est un recouvrement ouvert de $\hat{V}$ et où, $\forall\lambda\in\Lambda$, $\mathscr{P}_\lambda$ est une P.P. de $\hat{\Omega}_\lambda$, avec la condition de compatibilité :

(A.P.P.) $\forall\lambda, \mu\in\Lambda$, si $\hat{\Omega}_{\lambda\mu}=\hat{\Omega}_\lambda\wedge\hat{\Omega}_\mu\neq\emptyset$, $\hat{\Omega}_{\lambda\mu}$ est un ouvert élémentaire dans $\hat{\Omega}_\lambda$ et $\hat{\Omega}_\mu$ et les P.P. induites sur $\hat{\Omega}_{\lambda\mu}$ par $\mathscr{P}_\lambda$ et $\mathscr{P}_\mu$ sont équivalentes.

Deux atlas à P.P. sur $\hat{V}$ sont équivalents si leur réunion est encore un atlas. Une classe d'équivalence d'atlas à P.P. est une structure de *variété à présentation projective* sur $\hat{V}$. Les éléments des atlas de la classe sont alors dits *cartes à P.P. de la variété*. Un ouvert de $\hat{V}$ est élémentaire si ses traces sur les domaines des cartes sont des ouverts élémentaires.

*Exemples* 1. — Toute variété de dimension finie admet une structure naturelle de variété à P.P.

2. Tout ouvert élémentaire $\hat{\Omega}$ d'une variété à P.P. $\hat{V}$ admet une structure induite de variété à P.P. On dit que $\hat{\Omega}$, muni de cette structure induite, est une *sous-variété ouverte* de $\hat{V}$.

3. L'espace $\hat{B}(M)$ limite projective des fibres de repères $B^k(M)$ admet pour présentation projective $(P^k, B^k(M), p^k_l)_{k,l\in\mathbf{N};k>l}$, où $P^k : \hat{B}(M)\to B^k(M)$ est la projection naturelle. Muni de la structure de variété à P.P. correspondante, $\hat{B}(M)$ est dit *espace des repères d'ordre infini de $M$*.

4. Si $(E^k_M)_{k\geq 1}$ est une suite de définition de $\Gamma_M$, $\hat{E}_M$ l'espace limite projective des $E^k_M$, la présentation projective $(P^k, E^k_M, p^k_l)_{k,l\in\mathbf{N};k>l}$ munit $\hat{E}_M$ d'une structure de variété à P.P. On dit que $\hat{E}_M$, muni de cette structure est *l'espace de définition de $\Gamma_M$ dans $\hat{B}(M)$* défini par la suite $(E^k_M)_{k\geq 1}$.

On définit de même *l'espace de définition $\hat{E}_V$ modelé sur $\hat{E}_M$ d'une presque-$\Gamma_M$-structure* sur $V$.

2.3. ESPACE TANGENT EN UN POINT; MORPHISMES; FORMES DIFFÉRENTIELLES

*Soient $\hat{V}$ une variété à P.P.*, $\hat{x}$ un point de $\hat{V}$, $\mathscr{P}$ une P.P. du voisinage ouvert $\hat{\Omega}$ de $\hat{x}$. Autrement dit $(\hat{\Omega}, \mathscr{P})$ est une carte à P.P. de $\hat{V}$. Si $\mathscr{P}=(P^i, \Omega^i, \pi^i_j)_{i,j\in\mathbf{N};i>j}$ et si $\hat{x}=(x^i)_{i\in\mathbf{N}}$ notons $T_{\hat{x}}(\hat{V})$, la limite projective des espaces $T_{x^i}(\Omega^i)$ munie de la topologie limite projective des topologies discrètes. $T_{\hat{x}}(\hat{V})$ est donc un espace vectoriel topologique linéairement compact qui est dit *espace tangent en $\hat{x}$ à $\hat{V}$*. Si on change de carte, on obtient une nouvelle présentation de cet espace comme limite projective d'espaces vectoriels de dimensions finies. Il est d'ailleurs facile de donner une définition intrinsèque de cet espace vectoriel topologique comme espace de dérivations.

*Soient maintenant* $\hat{W}$ *une autre variété à P.P.*, $\hat{\varphi} : \hat{V} \to \hat{W}$ une application continue. On dira que $\hat{\varphi}$ est différentiable (*morphisme de variétés à P.P.*) si elle admet au voisinage de chaque point une « *présentation projective* » dans le sens suivant : on se ramène localement au cas où $\hat{V}$ et $\hat{W}$ admettent des P.P. globales, respectivement $(P^i, V^i, \pi^i_j)_{i,j\in\mathbb{N};i>j}$ et $(Q^i, W^i, \chi^i_j)_{i,j\in\mathbb{N};i>j}$ et on impose alors que *pour tout* $j \in \mathbb{N}$ *il existe* $i$ *et une application différentiable* $\varphi^i_j$ : $V^i \to W^j$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \hat{V} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{W} \\ {\scriptstyle P^i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q^j} \\ V^i & \xrightarrow[\varphi^i_j]{} & W^j \end{array}$$

Si $\hat{\varphi} : \hat{V} \to \hat{W}$ est différentiable on définit *l'application linéaire tangente* à $\hat{\varphi}$ en un point $\hat{x}$ comme l'application linéaire continue

$$(7) \qquad T_{\hat{x}}(\hat{\varphi}) : \quad T_{\hat{x}}(\hat{V}) \to T_{\hat{\varphi}(\hat{x})}(\hat{W})$$

obtenue comme limite projective des applications $T_{x^i}(\varphi^i_j)$ où $x^i = P^i(\hat{x})$.

Avec ces définitions, si $(P^i, V^i, \pi^i_j)_{i,j\in N;i>j}$ est une P.P. globale de $\hat{V}$ les projections $P^i : \hat{V} \to V$ sont différentiables et les sections locales $\sigma^i : \Omega^i \to \hat{V}$ dont l'axiome (P.P.1) postule l'existence au voisinage de chaque point de $V^i$ sont aussi différentiables.

*Soient* $F$ *un espace vectoriel de dimension finie*, $\hat{\beta}$ la correspondance qui à chaque point $\hat{x}$ de $\hat{V}$ associe une application $p$-linéaire alternée $\hat{\beta}_{\hat{x}}$ de $T_{\hat{x}}(\hat{V})$ dans $F$. On dira que $\hat{\beta}$ *est une p-forme* (différentiable) *sur* $\hat{V}$ *à valeurs dans* $F$ si elle admet au voisinage de chaque point une « *présentation finie* » en le sens suivant : on se ramène localement au cas où $\hat{V}$ admet une P.P. globale $(P^i, V^i, \pi^i_j)_{i,j\in\mathbb{N};i>j}$ et on impose qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et une $p$-forme $\beta^i$ sur $V^i$ (différentiable) à valeurs dans $F$ telle que

$$\hat{\beta}_{\hat{x}} = \beta^i_{x^i} \circ T_{\hat{x}}(P^i) \quad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{V} \qquad \text{avec} \quad x^i = P^i(\hat{x}).$$

ce que l'on note

$$\hat{\beta} = P^{i*}\beta^i.$$

La propriété est visiblement intrinsèque (indépendante de la P.P. utilisée).

Si $\hat{\beta}$ est une $p$-forme sur $\hat{V}$ à valeurs dans $F$ on définit (localement) sa différentielle à l'aide d'une P.P. de la variété en posant

$$d\hat{\beta} = P^{i*} d\beta^i. \tag{8}$$

Notons enfin que si $\hat{\varphi} : \hat{W} \to \hat{V}$ est un morphisme de variétés à P.P., $\hat{\beta}$ une $p$-forme sur $\hat{V}$ à valeurs dans $F$, on définit la $p$-forme $\hat{\varphi}^* \hat{\beta}$ sur $\hat{W}$ comme en dimension finie en posant

$$(\hat{\varphi}^* \hat{\beta})_{\hat{x}} = T_{\hat{x}}(\hat{\varphi})^* \hat{\beta}_{\hat{\varphi}(\hat{x})} \tag{9}$$

et qu'on a encore la propriété de commutation avec la différentielle

$$\hat{\varphi}^* (d\hat{\beta}) = d(\hat{\varphi}^* \hat{\beta}). \tag{10}$$

### 3. $\hat{L}$-structures sur les variétés à présentation projective

Dans la suite $\hat{L}$ représentera comme au paragraphe 1 l'algèbre formelle du PLT $\Gamma_M$ associée à la suite de définition $(E^k_M)_{k\geq 1}$, munie de sa structure d'algèbre de Lie topologique linéairement compacte.

Avec les notations antérieures, $(t_i, A_i, t^i_j)_{i,j\in\mathbb{N};i>j}$ pourra être regardé comme une *présentation projective de* $\hat{L}$. On obtiendrait une autre P.P. de $\hat{L}$ par exemple en la considérant comme l'algèbre formelle du prolongement $\Gamma^k_M$ de $\Gamma_M$ au fibré de repères $E^k_M$.

3.1. $\hat{V}$ ÉTANT UNE VARIÉTÉ A P.P. une $p$-forme $\hat{\beta}$ sur $\hat{V}$ à valeurs dans $\hat{L}$ sera une correspondance $\hat{x} \to \hat{\beta}_{\hat{x}}$ qui à tout $\hat{x} \in \hat{V}$ associe une forme $p$-linéaire alternée sur $T_{\hat{x}}(\hat{V})$ à valeurs dans $\hat{L}$ admettant au voisinage de chaque point une *présentation projective* dans le sens suivant : en se ramenant localement au cas où $\hat{V}$ admet une P.P. globale $(P^i, V^i, \pi^i_j)_{i,j\in\mathbb{N};i>j}$ on impose que pour tout entier $i$ la forme $t_i \circ \hat{\beta}$ ait une présentation finie $\beta^{j(i)}_i$ sur $V^{j(i)}$, soit :
(11) $\forall i \in \mathbb{N}$ il existe $j(i) \in \mathbb{N}$ et $\beta^{j(i)}_i$ différentiable sur $V^{j(i)}$ tels que $t_i \circ \hat{\beta} = P^{j(i)*} \beta^{j(i)}_i$.

La propriété est visiblement indépendante de la P.P. choisie de $\hat{V}$; elle l'est également de la P.P. de $\hat{L}$.

Comme pour les formes à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie on définit la différentielle $d\hat{\beta}$ (il suffit d'imposer $t_i \circ d = d \circ t_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$) et la forme $\hat{\varphi}^* \hat{\beta}$ induite sur la variété à P.P. $\hat{W}$ par un morphisme $\hat{\varphi} : \hat{W} \to \hat{V}$. La formule (10) reste visiblement exacte.

Enfin le crochet des formes sur $\hat{V}$ à valeurs dans $\hat{L}$ se définit exactement comme dans le cas où $\hat{V}$ et $\hat{L}$ sont de dimensions finies.

Ceci étant, *une $\hat{L}$-structure sur la variété à P.P. $\hat{V}$* sera définie par la donnée d'une 1-forme $\hat{\alpha}$ sur $\hat{V}$ à valeurs dans $\hat{L}$ vérifiant l'équation de Maurer-Cartan :

$$d\hat{\alpha}+\frac{1}{2}[\hat{\alpha},\hat{\alpha}]=0. \tag{12}$$

La $\hat{L}$-structure sera dite *régulière* si pour tout $\hat{x}\in\hat{V}$ l'application linéaire continue $\hat{\alpha}_{\hat{x}} : T_{\hat{x}}(\hat{V})\to\hat{L}$ est *surjective.*

3.2. Exemples de $\hat{L}$-structures

Soit, *avec les notations de* 2.2, $\hat{E}_M$ l'espace de définition de $\Gamma_M$ dans $\hat{B}(M)$ défini par la suite $(E_M^k)_{k\geqslant 1}$. On définit sur $\hat{E}_M$ une 1-forme $\hat{\theta}_M$ à valeurs dans $\hat{L}$ en posant

$$t_{i-1}\circ\hat{\theta}_M=P^{i*}\theta_M^i \tag{13}$$

et l'équation de Maurer-Cartan pour $\hat{\theta}_M$ résulte de l'équation correspondante pour les formes fondamentales (*voir* [8] ou [12]$_a$).

$\hat{\theta}_M$ définit donc une $\hat{L}$-structure sur $\hat{E}_M$ qui sera dite *$\hat{L}$-structure modèle.*

*Plus généralement,* soit $\hat{E}_V$ l'espace de définition modelé sur $\hat{E}_M$ d'une presque-$\Gamma_M$-structure sur $V$. On définit de façon analogue la 1-forme $\hat{\theta}_V$ sur $\hat{E}_V$ comme limite projective des formes fondamentales $\theta_V^k$ sur $E_V^k$. $\hat{\theta}_V$ définit alors une $\hat{L}$-structure sur $\hat{E}_V$ qui sera dite *associée à la presque-$\Gamma_M$-structure* considérée.

*Les exemples précédents* sont des exemples de $\hat{L}$-structures régulières. Donnons un exemple de $\hat{L}$-structure n'ayant pas nécessairement cette propriété en utilisant la notion de *$\Gamma_M$-structure de Haefliger* (*voir* [9]) : soient $W$ une variété différentiable de dimension quelconque et $(U_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ une famille de couples où $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ forme un recouvrement ouvert de $W$ et où $\forall\alpha\in\mathscr{A}\ f_\alpha : U_\alpha\to M$ est différentiable, avec la condition de recollement :

(14) $\forall\alpha,\ \beta\in\mathscr{A}$ avec $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ il existe $g_{\alpha\beta}\in\Gamma_M$ tel que $f_\alpha$ et $g_{\alpha\beta}\circ f_\beta$ coïncident sur $U_\alpha\cap U_\beta$.

La famille $(U_\alpha, f_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ définit sur $W$ une $\Gamma_M$-structure de Haefliger.

Si $\hat{E}_\alpha=f_\alpha^*\hat{E}_M$ désigne la limite projective des fibrés induits $f_\alpha^* E_M^k$, $\hat{\theta}_\alpha$ la limite projective des formes $f_\alpha^*\theta_M^k$, on a en notant $\hat{f}_\alpha$ l'application naturelle de $\hat{E}_\alpha$ dans $\hat{E}_M$ :

$$\hat{\theta}_\alpha=\hat{f}_\alpha^*\hat{\theta}_M. \tag{15}$$

Pour $g_{\alpha\beta}\in\Gamma_M$, la limite projective $\hat{g}_{\alpha\beta}$ des relevés $B^k(g_{\alpha\beta})$ de $g_{\alpha\beta}$ dans $E_M^k$ est un automorphisme local de $\hat{E}_M$.

Dans la somme disjointe $\coprod_{\alpha\in\mathscr{A}} \hat{E}_\alpha$ on identifie alors $\hat{x}_\alpha \in \hat{E}_\alpha$ et $\hat{x}_\beta \in \hat{E}_\beta$ s'ils se projettent au même point de $U_\alpha \cap U_\beta$ et si $\hat{f}_\alpha(\hat{x}_\alpha) = \hat{g}_{\alpha\beta} \circ \hat{f}_\beta(\hat{x}_\beta)$. On obtient ainsi une variété à P.P. $\hat{E}_W$ sur laquelle les formes locales $\hat{\theta}_\alpha$ définissent une forme $\hat{\theta}_W$ à valeur dans $\hat{L}$ et vérifiant (12).

On dira que $(\hat{E}_W, \hat{\theta}_W)$ est *la $\hat{L}$-structure associée à la $\Gamma_M$-structure de Haefliger considérée.*

Compte tenu de cet exemple *il est naturel de considérer la théorie des $\hat{L}$-structures comme une théorie des presque-structures de Haefliger.*

*Si $(\hat{V}, \hat{\alpha})$ est une variété à P.P. munie d'une $\hat{L}$-structure* et si $\hat{\varphi} : \hat{W} \to \hat{V}$ est un morphisme de variétés à P.P., la forme induite $\hat{\varphi}^* \hat{\alpha}$ définit une *$\hat{L}$-structure induite par $\hat{\varphi}$* sur la variété $\hat{W}$.

3.3. Problème de Darboux généralisé

Soit $(\hat{V}, \hat{\alpha})$ une variété à P.P. munie d'une $\hat{L}$-structure.

Le *problème de Darboux généralisé* est le suivant : existe-t-il pour tout $\hat{x} \in V$ un voisinage ouvert élémentaire $\hat{\Omega}$ de $\hat{x}$ dans $\hat{V}$ et un morphisme de variétés à P.P. $\hat{\varphi} : \hat{\Omega} \to \hat{E}_M$ tel que sur $\hat{\Omega}$ on ait $\hat{\alpha} = \hat{\varphi}^* \hat{\theta}_M$? Autrement dit toute $\hat{L}$-structure est-elle localement, au voisinage de chaque point, induite à partir de la $\hat{L}$-structure modèle? Si la réponse à cette question est affirmative *on dira que le théorème de Darboux généralisé est vrai pour le PLT considéré $\Gamma_M$.*

Au point de vue terminologie on a noté que les éléments de $\Gamma_M$ se relèvent en automorphismes locaux de $\hat{E}_M$. Ces automorphismes relevés laissent invariante la forme $\hat{\theta}_M$. Notons $\hat{\Gamma}_M$ le pseudo-groupe des automorphismes locaux de $\hat{E}_M$ qui laissent $\hat{\theta}_M$ invariante. Une $\hat{L}$-structure pourra être également dite *presque-$\hat{\Gamma}_M$-structure*. On dira que c'est *une $\hat{\Gamma}_M$-structure* si elle est localement induite à partir de la structure modèle.

On voit que *le problème de Darboux généralisé est la version du problème d'équivalence de Cartan adaptée à la notion de $\hat{\Gamma}_M$-structure, c'est-à-dire de structure de Haefliger sur les variétés à P.P.*

## 4. Problème de Darboux généralisé pour les $\hat{L}$-structures régulières

4.1. En ce qui concerne les $\hat{L}$-structures régulières le problème de Darboux généralisé se ramène essentiellement au problème d'équivalence de Cartan pour $\Gamma_M$ comme le prouve le résultat fondamental suivant :

Théorème 1. *Soient $\hat{L}$ l'algèbre de Lie formelle filtrée du pseudo-groupe de Lie $\Gamma_M$, $(\hat{V}, \hat{\alpha})$ une $\hat{L}$-structure régulière, $\hat{x}$ un point quelconque de $\hat{V}$. Il existe un* *voisinage ouvert $\hat{\Omega}$ de $\hat{x}$ et une variété $W$ munie d'une presque-$\Gamma_M$-structure de façon que si $(\hat{E}_W, \hat{\theta}_W)$ est la $\hat{L}$-structure associée à la presque-$\Gamma_M$-structure on ait un morphisme $\hat{\varphi} : \hat{\Omega} \to \hat{E}_W$ de variétés à présentation projective pour lequel $\hat{\alpha} = \hat{\varphi}^* \hat{\theta}_W$ sur $\hat{\Omega}$.*

*Démonstration.* — Par localisation on peut se ramener au cas où $\hat{V}$ admet une P.P. globale $(P^i, V^i, \pi^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}; i > j}$. On peut également imposer qu'il existe une section différentiable $\sigma^0 : V^0 \to \hat{V}$ et que $\forall x^0 \in V^0, \forall i \in \mathbb{N}$ on ait $(\pi^i_0)^{-1}(x^0)$ connexe dans $V^i$. On impose enfin que $V^0$ soit connexe et simplement connexe.

Pour $i \in \mathbb{N}$ soit $j_0(i)$ le plus petit entier pour lequel $t_i \circ \hat{\alpha}$ soit projetable en $\alpha_i^{j_0(i)}$ sur $V^{j_0(i)}$. En posant $V'^{i+1} = V^{j_0(i)}$ on obtient une nouvelle P.P. de $\hat{V}$. En d'autres termes ceci permet de se ramener au cas où $j_0(i) = i + 1$ quel que soit $i$. Pour simplifier les notations on notera alors $\alpha_{i+1}$ la forme sur $V^{i+1}$ obtenue par projection de $t_i \circ \hat{\alpha}$.

Pour $i = 0$, considérons en chaque point de $V^1$ le noyau de la forme $\alpha_1$. Par régularité de $\hat{\alpha}$, donc de $\alpha_1$, on obtient ainsi un champ d'éléments de contact sur $V^1$. En appliquant la formule de Maurer-Cartan à $\alpha_2$ sur $V^2$ on voit que la préimage par $\pi^2_1$ de ce champ d'éléments de contact est intégrable. Donc le champ d'éléments sur $V^1$ est intégrable. Par localisation on se ramène au cas où c'est le feuilletage simple défini par une surmersion de $V^1$ sur $W$. On change alors de P.P. pour $\hat{V}$ en remplaçant $W$ par $V^0$. On s'est donc ramené au cas où le noyau de $\alpha_1$ sur $V^1$ est en chaque point le noyau de l'application tangente à $\pi^1_0$.

Ceci étant, en tout point $x^1$ de $V^1$, avec $\pi^1_0(x^1) = x^0$, la forme $\alpha_1$ définit un isomorphisme de $T_{x^0}(V^0)$ sur $A_0 = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un repère $z^1$ de $V^0$. La correspondance $x^1 \to z^1$ définit une application différentiable

$$\varphi^1 : \quad V^1 \to B^1(V^0)$$

pour laquelle par construction on a

$$\alpha_1 = \varphi^{1*} \theta^1_{V^0}.$$

Soit alors $\psi^2_1 : V^2 \to B^1(V^0)$ l'application composée $\varphi^1 \circ \pi^2_1$. En appliquant l'identité de Maurer-Cartan (tronquée par $t_0$) on voit qu'en chaque point $x^2$ de $V^2$ le noyau de l'application linéaire tangente à $\psi^2_1$ coïncide avec le noyau de $\alpha_2$. On voit aussi que *sur les vecteurs verticaux pour $\pi^2_0$ la forme $\alpha_2$ est projetable sur $B^1(V^0)$ par $\psi^2_1$ en la forme qui associe à un vecteur vertical de $B^1(V^0)$ l'élément correspondant de l'algèbre de Lie du* *groupe structural*. En effet, si $X^2$ est un vecteur tangent en $x^2 \in V^2$ vertical pour la projection $\pi_0^2$, $X^1$ sa projection sur $B^1(V^0)$ et si $Y^2$ est un vecteur tangent quelconque en $x^2$, $Y^1$ sa projection sur $B^1(V^0)$, on a

$$t_1^2 \, d\alpha_2(X^2, Y^2) + [\alpha_2(X^2), \alpha_2(Y^2)] = 0$$

or comme $t_1^2 \circ \alpha_2$ se projette en $\theta_{V^0}^1$ sur $B^1(V_0)$ :

$$t_1^2 \, d\alpha_2(X^2, Y^2) = d\theta_{V^0}^1(X^1, Y^1) = -\omega(X^1).\theta_{V^0}^1(Y^1)$$

où $\omega$ est la forme qui au vecteur vertical $X^1$ associe l'élément correspondant de l'algèbre de Lie du groupe structural de $B^1(V_0)$ et où . désigne l'action de cette algèbre de matrices sur $\mathbb{R}^n$.

Comme d'autre part $t_1^2 \circ \alpha_2(X^2) = 0$, $[\alpha_2(X^2), \alpha_2(Y^2)]$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ obtenu par l'action linéaire de la matrice $\alpha_2(X^2)$ sur $t_1^2 \circ \alpha_2(Y^2) = \theta_{V^0}^1(Y^1)$. On a donc

$$\omega(X^1).\theta_{V^0}^1(Y^1) = \alpha_2(X^2).\theta_{V^0}^1(Y^1),$$

et comme ceci est vrai pour tout $Y^2$, on en déduit $\omega(X^2) = \alpha_2(X^2)$. D'où le résultat.

*Ceci étant* considérons la section $\varphi^1 \circ P^1 \circ \sigma^0$ de $B^1(V^0)$ et le sous-fibré principal $E_{V^0}^1$ de $B^1(V^0)$ obtenu à partir de cette section par agrandissement au groupe structural $G_1$ de $E_M^1$. Par construction (en utilisant la connexité de $(\pi_0^1)^{-1}(x^0)$ pour tout $x^0$) on voit que $\varphi^1$ *induit une submersion*

$$\varphi^1 : \quad V^1 \to E_{V^0}^1 \qquad \text{telle que} \quad \varphi^{1*} \theta_{V^0}^1 = \alpha_1.$$

*Si* $x^2 \in V^2$ *avec* $y^1 = \psi_1^2(x^2)$, $\alpha_2$ définit en $y^1$ un isomorphisme de $T_{y^1}(E_{V^0}^1)$ sur $A_1$ déterminé par $(\alpha_2)_{x^2}$. Cet isomorphisme associe aux vecteurs verticaux en $y^1$ les éléments correspondants de l'algèbre de Lie du groupe structural. Comme de plus $t_1^2 \circ \alpha_2 = \psi_1^{2*} \theta_{V^0}^1$ il en résulte que l'isomorphisme considéré est l'inverse d'un repère d'ordre 2 $z^2$ en $x^0 = \pi_0^2(x^2)$. La correspondance $x^2 \to z^2$ détermine une application différentiable

$$\varphi^2 : \quad V^2 \to B^2(V^0)$$

telle que

$$\varphi^{2*} \theta_{V^0}^2 = \alpha_2.$$

On recommence alors le raisonnement fait à l'ordre 1 et on démontre que $\varphi^2$ est une submersion de $V^2$ dans un sous-fibré principal $E_{V^0}^2$ de $B^2(V^0)$ de même groupe structural $G_2$ que $E_M^2$.

En poursuivant cran par cran la construction on obtient la suite de définition $(E^k_{V^0})_{k\geqslant 1}$ d'une presque-$\Gamma_M$-structure sur $V^0$ modelée sur $(E^k_M)_{k\geqslant 1}$, avec pour tout $k$ une submersion $\varphi^k : V^k \to E^k_{V^0}$ telle que $\varphi^{k*}\theta^k_{V^0} = \alpha_k$. D'où le résultat.

C.Q.F.D.

On voit que la démonstration repose d'une part sur le théorème de Frobenius d'autre part sur la caractérisation des espaces de repères dans la suite de définition d'une presque-$\Gamma_M$-structure à l'aide des formes fondamentales.

COROLLAIRE. — *Le théorème de Darboux généralisé est vrai pour* $\Gamma_M$ dans le cas des structures régulières *si et seulement si le théorème d'équivalence est vrai pour* $\Gamma_M$.

4.2. MONTRONS COMMENT LE THÉORÈME 1 DONNE LA CLÉ DU « PASSAGE AU QUOTIENT »

Supposons que le pseudo-groupe $\Gamma_M$ laisse invariante une fibration $\rho : M \to N$ où la dimension de $N$ est $q$. Pour simplifier les questions de connexité on supposera qu'on a des sections différentiables $s : N \to M$ de $\rho$ et $\sigma : M \to \hat{E}_M$ et que les fibres de $\rho$ sont connexes.

Notons $P^k_{M_\rho}$ le fibré des repères d'ordre $k$ sur $M$ adaptés à $\rho$, c'est-à-dire des $k$-jets de source 0 de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dans $M$ qui se projettent localement en difféomorphismes de $\mathbb{R}^q$ dans $N$. Notons $GL_{(n,q)k}$ le groupe structural de $P^k_{M_\rho}$, $\mathbb{R}^{n,q}_{k-1}$ la sous-algèbre de Lie tronquée de $\mathbb{R}^n_{k-1}$ où la forme fondamentale de $P^k_{M_\rho}$ prend ses valeurs. $\mathbb{R}^{n,q}_{k-1}$ est l'espace des $(k-1)$-jets à l'origine des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ projetables sur $\mathbb{R}^q$.

On a une projection naturelle

$$(16) \qquad \rho^k : \quad P^k_{M_\rho} \to B^k(N)$$

et un morphisme d'algèbres de Lie tronquées

$$(17) \qquad \tau^{n,q}_{k-1} : \quad \mathbb{R}^{n,q}_{k-1} \to \mathbb{R}^q_{k-1},$$

de telle sorte que

$$(18) \qquad \rho^k\theta^k_N = \tau^{n,q}_{k-1} \circ \theta^k_M \quad \text{sur } P^k_{M_\rho}.$$

*En passant au besoin à une suite de définition conjuguée* on peut toujours supposer

$$(19) \qquad E^k_M \subset P^k_{M_\rho}, \qquad \forall k \geqslant 1,$$

d'où par restriction de (17) une application de $A_{k-1}$ dans $\mathbb{R}^q_{k-1}$ dont on notera l'image $a_{k-1}$ et le noyau $n_{k-1}$. On obtient donc la suite exacte d'algèbre de Lie tronquées

$$(20) \qquad 0 \to n_{k-1} \to A_{k-1} \xrightarrow{\tau^{n,q}_{k-1}} a_{k-1} \to 0$$

et par passage à la limite projective la suite exacte d'algèbres de Lie linéairement compactes

(21) $\quad 0 \to \hat{I} \to \hat{L} \xrightarrow{\hat{\tau}} \hat{L}' \to 0$ ($\hat{I}$ est *l'idéal fermé de* $\hat{L}$ *défini par* $\rho$).

Soient $z^k \in E^k_M$, $z^{k+1} \in E^{k+1}_M$ au-dessus de $z^k$. La forme fondamentale au point $z^{k+1}$ définit un isomorphisme

$$(22) \qquad \theta^{k+1}_{M z^{k+1}} : \quad T_{z^k}(E^k_M) \simeq A_k.$$

Si $F^k_{M z^k}$ est la préimage par cet isomorphisme du noyau $\eta_k$, on voit d'après (20) et (18) que $F^k_{M z^k}$ est le noyau de l'application linéaire tangente en $z^k$ à :

$$(23) \qquad \rho^k : \quad E^k_M \to B^k(N).$$

Par suite $\rho^k$ est de rang constant. Si $\overline{E}'^k_N$ est son image (18) prouve que $\theta^{k+1}_N$ en restriction à $\overline{E}'^{k+1}_N$ est à valeurs dans $a_k$. On voit alors (comme au paragraphe précédent) que $\overline{E}'^k_N$ est un ouvert d'un sous-fibré principal $E'^k_N(N, G'_k)$ de $B^k(N)$, obtenu par agrandissement de la section $\rho^k \circ P^k \circ \sigma \circ s$, dont le groupe structural a pour algèbre de Lie :

$$(24) \qquad g'_k = a_k \cap gl_{(q,k)},$$

où $gl(q, k)$ est identifié au sous-espace de $\mathbb{R}^q_k$ formé des $k$-jets de champs de vecteurs qui s'annulent à l'origine.

Comme les automorphismes locaux de la suite $(E^k_M)_{k \geq 1}$ se projettent en automorphismes locaux de la suite $(E'^k_N)_{k \geq 1}$ *on voit que* $(E'^k_N)_{k \geq 1}$ *est la suite de définition d'un PLT sur N que nous noterons* $\Gamma'_N$.

*Le problème du passage au quotient pour* $(\Gamma_M, \rho)$ s'énonce alors : $(E^k_V)_{k \geq 1}$ étant la suite de définition modelée sur $(E^k_M)_{k \geq 1}$ d'une presque-$\Gamma_M$-structure sur $V$, définit-elle une presque-$\Gamma'_N$-structure sur une variété quotient (locale) de $V$?

*En termes de $\hat{L}$-structures, une réponse affirmative est donnée par le théorème* 1 *:*

Considérons la $\hat{L}$-structure $(\hat{E}_V, \hat{\theta}_V)$ associée à la presque-$\Gamma_M$-structure. Posons alors :

$$(25) \qquad \hat{\alpha}' = \hat{\tau} \circ \hat{\theta}_V.$$

Il est clair que $(\hat{E}_V, \hat{\alpha}')$ est une $\hat{L}'$-structure, d'où le résultat compte tenu du fait que la structure est régulière et qu'on est donc dans les conditions d'application du théorème.

4.3. UN THÉORÈME GÉNÉRAL DE RÉDUCTION

On va donner maintenant, dans le cadre de l'étude des $\hat{L}$-structures régulières, une formulation du lemme de réduction de $[12]_a$. Les données sont les suivantes :

*Considérons sur $M$ un sous-pseudo-groupe de Lie transitif $\gamma_M$ de $\Gamma_M$.* Soient $(e^k_M)_{k\geqslant 1}$ une suite de définition de $\gamma_M$ subordonnée à la suite de définition $(E^k_M)_{k\geqslant 1}$ de $\Gamma_M$, *$\hat{l}$ l'algèbre formelle de $\gamma_M$* associée à la suite $(e^k_M)_{k\geqslant 1}$.

*Soient $\hat{I}$ un idéal fermé de $\hat{L}$ contenu dans $\hat{l}$, $\hat{L}'$ l'algèbre de Lie topologique quotient $\hat{L}/\hat{I}$.*

Pour tout $k \geqslant 0$ soient $z^{k+1}$ un point de $E^{k+1}_M$, $z^k$ sa projection sur $E^k_M$. $z^{k+1}$ définit un isomorphisme linéaire de $A_k$ sur $T_{z^k}(E^k_M)$. Si $Q^k_{z^k}$ est l'image par cet isomorphisme de $i_k = t_k(\hat{I})$ on définit ainsi un champ d'éléments intégrable $Q^k$ sur $E^k_M$.

Pour $k=0$ on définit ainsi (localement) une fibration $\rho : M \to N$.

Pour $k>0$ on obtient un morphisme de fibrés principaux $\rho^k : E^k_M \to \tilde{E}^k_N(N, \tilde{G}_k)$ où $\tilde{G}_k$ est un groupe de Lie quotient de $G_k$ — $\rho^k$ induit en particulier un morphisme de fibrés principaux, noté encore $\rho^k$, de $e^k_M$ sur un sous-fibré principal $\tilde{e}^k_N$ de $\tilde{E}^k_N$. On prendra garde que $\tilde{E}^k_N$ n'est pas un fibré de repères sur $N$!

D'après les propriétés élémentaires des algèbres de Lie linéairement compactes (*voir* V. Guillemin [6]) il existe un entier $k_0$ tel que $\hat{I}$ soit le plus grand idéal de $\hat{L}$ contenu dans $\hat{L}_{k_0} + \hat{l}$. Autrement dit, si on considère $\hat{L}$ comme l'algèbre formelle du PLT relevé $\Gamma^{k_0}_M$ associée à la suite de définition $(E^k_M)_{k\geqq k_0+1}$, $\hat{I}$ est l'idéal de $\hat{L}$ défini par la fibration invariante $\rho^{k_0}$.

Notons $N' = \tilde{E}^{k_0}_N$ et $\Gamma'_{N'}$ le PLT sur $N'$ défini par passage au quotient à partir de $\Gamma^{k_0}_M$. $\Gamma'_{N'}$ admet pour suite de définition $(\tilde{E}^k_N)_{k\geqslant k_0+1}$ et *$\hat{L}'$ est l'algèbre formelle de $\Gamma'_{N'}$ associée à cette suite de définition.*

Compte tenu de ces constructions élémentaires on a :

THÉORÈME 2. — *Si le théorème de Darboux généralisé est vrai par $\Gamma'_{N'}$ et $\gamma_M$ dans le cas des structures régulières, il l'est encore pour $\Gamma_M$.*

*Démonstration.* — D'après le corollaire du théorème 1 il suffit de démontrer le théorème général d'équivalence pour $\Gamma_M$.

*Soit donc* $(E_V^k)_{k\geq 1}$ *la suite de définition modelée sur* $(E_M^k)_{k\geq 1}$ *d'une presque-*$\Gamma_M$*-structure sur* $V$.

En appliquant la technique de passage au quotient pour les presque-structures aux fibrations invariantes $\rho$, $\rho^1, \ldots, \rho^{k_0}, \ldots$ on obtient une fibration locale

$$\rho_V : \quad V \to W$$

et des fibrations $\rho_V^1, \ldots, \rho_V^{k_0}, \ldots$ au-dessus de $\rho_V$ pour lesquelles : $\rho_V^k : E_V^k \to \tilde{E}_W^k(W, \tilde{G}_k)$ est un morphisme de fibrés principaux.

Sur $W' = \tilde{E}_W^{k_0}$ la suite de structures $(\tilde{E}_W^k)_{k\geq k_0+1}$ définit une presque-$\Gamma'_{N'}$-structure, donc (par hypothèse) une $\Gamma'_{N'}$-structure. A équivalence près on est (localement) ramené au cas où $W' = N'$ et $\tilde{E}_W^k = \tilde{E}_N^k$.

Considérons alors pour tout $k$ le sous-fibré principal $\tilde{e}_N^k$ de $\tilde{E}_N^k$ et sa préimage $e_V^k$ par le morphisme de fibrés principaux $\rho^k : E_M^k \to \tilde{E}_N^k$. *Par construction* $(e_V^k)_{k\geq 1}$ *est la suite de définition modelée sur* $(e_M^k)_{k\geq 1}$ *d'une presque-*$\gamma_M$*-structure sur* $V$ *subordonnée à la presque-*$\Gamma_M$*-structure donnée.* Par hypothèse cette presque-$\gamma_M$-structure est une $\gamma_M$-structure. On pourra donc trouver (localement) une équivalence $\varphi : V \to M$ de cette presque-$\gamma_M$-structure sur la structure modèle. $\varphi$ *sera automatiquement une équivalence de la presque-*$\Gamma_M$*-structure donnée sur la* $\Gamma_M$*-structure modèle.* En effet, de :

$$B^k(\varphi)(e_V^k) = e_M^k \quad \text{pour tout } k$$

on déduit, $B^k(\varphi)$ étant un morphisme de fibrés principaux de $B^k(V)$ sur $B^k(M)$ :

$$B^k(\varphi)(E_V^k) = E_M^k \quad \text{pour tout } k$$

d'où le résultat.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BUTTIN (C.) et MOLINO (P.). — *Théorème général d'équivalence pour les pseudo-groupes de Lie plats transitifs*, *J. Diff. Geometry*, vol. 9, 1974, p. 347-354.

[2] CARTAN (E.). — *Groupes infinis, systèmes différentiels, théories d'équivalence œuvres complètes*, II, vol. 2, 1953, p. 571-714, Gauthier-Villars, Paris.

[3] GOLDSCHMIDT (H.). — *The integrability problem for Lie equations*. Preprint. 1978.

[4] GOLDSCHMIDT (H.) and SPENCER (D. C.). — *On the non-linear cohomology of Lie equations I, II*, *Acta Math.*, vol. 136, 1976, p. 103-239.

[5] GUILLEMIN (V.). — *The integrability problem for G-structures*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 116, 1965, p. 544-560.

[6] GUILLEMIN (V.). — *A Jordan-Holder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras*, *J. Diff. Geometry*, vol. 2, 1968, p. 313-345.

[7] GUILLEMIN (V.) and STERNBERG (S.). — *An algebraic model of transitive differential geometry*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 70, 1964, p. 16-47.

[8] GUILLEMIN (V.) and STERNBERG (S.). — *Deformation theory of pseudogroup structures*, *Memoirs of the A.M.S.*, 1966.

[9] HAEFLIGER (A.). — *Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes*, *Comment. Math. Helv.*, vol. 32, 1958, p. 248-329.

[10] MALGRANGE (B.). — *Frobenius avec singularité codimension* 1, *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 46, 1976, p. 163-176.

[11] MALLIAVIN (P.). — *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann, Paris, 1972.

[12]$_a$ MOLINO (P.). — *Théorie des G-structures : le problème d'équivalence*, *Lecture Notes in Math.*, n° 588, 1977, Springer-Verlag, Berlin.

[12]$_b$ MOLINO (P.). — *Le problème d'équivalence pour les G-structures : méthode intrinsèque et cohomologie non abélienne de Spencer*, Preprint, 1978.

[13] MOUSSU. — *Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de* (*Pfaff*, *Ann. Inst. Fourier*, vol. 26, 1976, p. 171-220.

[14] POLLACK (A. S.). — *The integrability problem for pseudogroup structures*, *J. of Diff. Geometry*, vol. 9, 1974, p. 355-390.

[15] SINGER (I.) and STERNBERG (S.). — *The infinite groups of Lie and Cartan*, *J. An. Math.*, vol. 15, 1965, p. 1-114.

[16] SPENCER (D. C.). — *Deformation of structures on manifolds defined by transitive continuous pseudogroups*, *Ann. of Math.*, vol. 76, (2), 1962, p. 306-445.

[17] VERONA (M. E.). — *A de Rham Theorem for generalised manifolds*, *Procee. of the Edimburgh. Math. Soc.*, vol. 22, 1979, p. 127-135.