JÉRÔME BRUN

Les fibrés de rang deux sur $\mathbb{P}_2$ et leurs sections

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 457-473
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__457_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 457-473.

LES FIBRÉS DE RANG DEUX SUR $\mathbb{P}_2$ ET LEURS SECTIONS

PAR

JÉRÔME BRUN (*)

RÉSUMÉ. — On étudie sur une surface, et plus particulièrement sur le plan projectif, la relation entre fibrés de rang deux et sous-ensembles de codimension deux. On montre aussi que le fibré stable générique de rang deux sur $\mathbb{P}_2$ admet au plus un groupe de cohomologie non nul.

ABSTRACT. — We study on a surface, particularly on the projective plane, the relation between rank-two bundles and two-codimensional subsets. We also show that the generic stable rank-two bundle on $\mathbb{P}_2$ has at most one non-zero cohomology group.

Soient X une surface algébrique projective lisse définie sur un corps algébriquement clos k, $Y \subset X$ un ensemble de n points distincts, I_Y l'idéal de Y dans $\mathcal{O}_X$, L un fibré de rang un sur X.

On dit qu'un fibré vectoriel algébrique E de rang deux sur X est associé à Y s'il existe une section de E dont l'idéal d'annulation est I_Y. L'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés associés à Y et de déterminant L est noté $\mathbb{E}(L, Y)$; son étude est le principal objet de ce travail.

En utilisant l'éclatement de Y, et en s'inspirant donc de SCHWARZENBERGER [8], on donne d'abord (1.8) une condition nécessaire et suffisante portant sur L et Y pour que $E(L, Y)$ soit non vide (c'est un résultat démontré par GRIFFITHS-HARRIS [3] dans le cas complexe).

Ensuite, on prend pour X le plan projectif $\mathbb{P}_2(k)$ noté $\mathbb{P}_2$; $\mathbb{E}(\mathcal{O}(a), Y)$ étant noté $\mathbb{E}(a, Y)$. Après quelques généralités sur $\mathbb{E}(a, Y)$ (§ 2), on est amené à définir une notion de position générale pour des systèmes de points de $\mathbb{P}_2$

(*) Texte reçu le 12 novembre 1979.

Jérôme BRUN, Département de Mathématiques, Université de Nice, Parc Valrose, 06034 Nice Cedex.

(§ 3). On peut alors décrire assez précisément $\mathbb{E}(a, Y)$ quand Y est en position générale (§ 4).

Les fibrés ainsi contruits permettent de démontrer des résultats sur les fibrés stables (§ 5), par exemple (5.2) : le fibré stable générique de rang deux sur $\mathbb{P}_2$ possède au plus un groupe de cohomologie non nul (cf. *fig.* 2, pour l'explicitation de ce résultat en fonction des classes de Chern).

NOTATIONS. — Si A est un fibré sur X : $A^\vee$ désigne le dual de A et $h^i(A)$ la dimension du k-espace vectoriel $H^i(X, A)$.

Si $a \in \mathbb{R}$, on note a^+ la partie positive de $a (a^+ := \sup(a, 0))$, a^- la partie négative de $a (a^- := \sup(-a, 0))$ et $[a]$ la partie entière de a (le plus grand entier $\leqslant a$).

1. Existence de fibrés associés à un ensemble de points

Soient L un fibré de rang un sur X, et Y un ensemble de n points de $X : y_1, \ldots, y_n$.

Pour étudier $\mathbb{E}(L, Y)$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés associés à Y et de déterminant L, on introduit : $\pi : \hat{X} \to X$, l'éclatement de Y; $\Delta \subset \hat{X}$, la réunion des droites exceptionnelles $\Delta_i = \pi^{-1}(y_i)$; $j : \Delta \hookrightarrow \hat{X}$ et $j_i : \Delta_i \hookrightarrow \hat{X}$, les inclusions; ω_X et $\omega_{\hat{X}}$, les fibrés canoniques de X et $\hat{X}$; N, le fibré de rang un sur $\hat{X}$: $\pi^* L^\vee \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}(2\Delta)$; ($\mathcal{O}_{\hat{X}}$ sera parfois noté simplement $\mathcal{O}$).

La méthode consiste à étudier $\mathbb{F}$, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés F sur $\hat{X}$ qui s'insèrent dans une extension du type suivant :

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{O}_{\hat{X}}(\Delta) \to F \to \pi^* L \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}(-\Delta) \to 0.$$

Ces extensions sont classifiées dans $H^1(\hat{X}, N)$.

Soit $\mathbb{F}_0$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{F}$ dont la restriction à chaque Δ_i est triviale. Les deux lemmes suivants sont implicites dans SCHWARZENBERGER [8] :

LEMME 1.1. — *Les ensembles* $\mathbb{E}(L, Y)$ *et* $\mathbb{F}_0$ *sont en bijection* via π^*.

Démonstration. — Si E appartient à $\mathbb{E}(L, Y)$, $\pi^* E$ admet une section avec zéro simple en Δ, et donc $\pi^* E \otimes \mathcal{O}(-\Delta)$ admet une section qui ne s'annule pas, d'où la suite exacte de fibrés sur $\hat{X}$:

$$0 \to \mathcal{O} \to \pi^* E \otimes \mathcal{O}(-\Delta) \to \pi^* L \otimes \mathcal{O}(-2\Delta) \to 0,$$

car $\Lambda^2(\pi^* E) = \pi^*(\Lambda^2 E) = \pi^* L$. En tensoriant par $\mathcal{O}(\Delta)$, on obtient $\pi^* E$ dans une extension du type (1).

Réciproquement, un élément de $\mathbb{F}_0$ est de la forme $\pi^* E$ d'après le théorème 5 de [8], et on vérifie sans peine qu'alors E est dans $\mathbb{E}(L, Y)$.

LEMME 1.2. — *Soit* $\varepsilon \in H^1(\hat{X}, N)$ *et* F *le fibré de l'extension* (1) *correspondante. Le fibré* F *appartient à* $\mathbb{F}_0$ *si et seulement si, pour tout* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *on a* $j_i^*(\varepsilon) \neq 0$.

Démonstration. — Rappelons que l'inclusion $j_i : \Delta_i \hookrightarrow X$ induit une application $j_i^* : H^1(\hat{X}, N) \to H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i})$. La restriction de (1) à Δ_i s'écrit :

$$0 \to \mathcal{O}_{\Delta_i}(-1) \to F|_{\Delta_i} \to \mathcal{O}_{\Delta_i}(1) \to 0,$$

et l'élément correspondant à cette extension sur $\Delta_i \simeq \mathbb{P}_1$ est :

$$j_i^*(\varepsilon) \in H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i}) = H^1(\Delta_i, \mathcal{O}_{\Delta_i}(-2)) \simeq k.$$

La restriction $F|_{\Delta_i}$ est donc triviale si et seulement si $j_i^*(\varepsilon)$ est non nul.

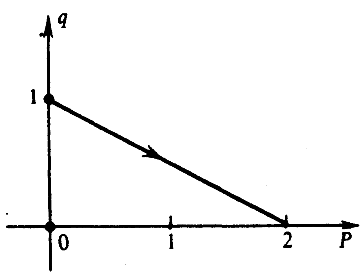
CONCLUSION 1.3. — L'ensemble $\mathbb{E}(L, Y)$ est non vide si et seulement si aucune des applications $j_i^* : H^1(\hat{X}, N) \to H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i})$ n'est identiquement nulle.

En effet, Ker j_i^* est alors un hyperplan H_i de $H^1(\hat{X}, N)$ et tout $\varepsilon \in H^1(\hat{X}, N) \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ donne un élément de $\mathbb{F}_0$.

LEMME 1.4. — *Pour tout fibré* A *de rang un sur* $\hat{X}$, *on a une suite exacte naturelle :*

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(X, \pi_* A) \to H^1(\hat{X}, A) \to H^0(X, R^1 \pi_* A) \\ \to H^2(X, \pi_* A) \to H^2(\hat{X}, A) \to 0. \end{aligned}$$

Démonstration (cette suite se rencontre dans la littérature, *cf* par exemple ODA [7], p. 253, mais sous une forme incomplète).



On utilise la convergence de la suite spectrale de Leray de terme :

$$E_2^{p,q} := H^p(X, R^q \pi_* A) \Rightarrow H^{p+q}(\hat{X}, A).$$

Les seuls termes $E_2^{p,q}$ éventuellement non nuls sont les suivants : $E_2^{0,0}$, $E_2^{0,1}$, $E_2^{0,2}$, $E_2^{1,0}$ car le support de $R^1 \pi_* A$ est de dimension zéro.

L'aboutissement de la suite de Leray donne :

– en degré un :

$$0 \to E_\infty^{1,0} \to H^1(\hat{X}, A) \to E_\infty^{0,1} \to 0;$$

– en degré deux :

$$E_\infty^{2,0} = H^2(\hat{X}, A).$$

D'autre part, l'homologie de l'unique différentielle s'écrit :

$$0 \to E_\infty^{0,1} \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to E_\infty^{2,0} \to 0.$$

On déduit de cela une suite :

$$0 \to E_\infty^{1,0} \to H^1(\hat{X}, A) \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to H^2(\hat{X}, A) \to 0$$

qui, en remarquant que $E_\infty^{1,0} = E_2^{1,0}$, est la suite annoncée.

LEMME 1.5. — *Si A est un fibré du type $\pi^* B \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}(2\Delta)$, où B est un fibré de rang un sur X, alors la flèche naturelle $H^0(X, R^1 \pi_* A) \to H^1(\Delta, A|_\Delta)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de démontrer le lemme pour $A = \mathcal{O}(2\Delta)$, et aussi pour le cas où π est l'éclatement d'un seul point y, avec $\pi^{-1}(y) = \Delta$ d'idéal J dans $\hat{X}$.

Le faisceau $R^1 \pi_* A$, étant de support y, est isomorphe à sa complétion J-adique, laquelle, d'après un théorème de Grothendieck (*cf.* par exemple HARTSHORNE [4], III.11.1) est isomorphe naturellement à $\varprojlim H^1(\Delta, A|_{\Delta_n})$ où Δ_n est le n-ième voisinage infinitésimal de Δ : Δ muni du faisceau $\mathcal{O}_{\hat{X}}/J^{n+1}$. Tensoriant par $A = \mathcal{O}(2\Delta)$ la suite :

$$0 \to J^{n+1}/J^{n+2} \to \mathcal{O}/J^{n+2} \to \mathcal{O}/J^{n+1} \to 0,$$

on obtient, en remarquant que :

$$J^{n+1}/J^{n+2} \simeq \bigotimes\nolimits_{n+1} J/J^2 \simeq \mathcal{O}_\Delta(n+1),$$

$$0 \to \mathcal{O}(2\Delta) \otimes \mathcal{O}_\Delta(n+1) \to A|_{\Delta_{n+1}} \to A|_{\Delta_n} \to 0.$$

Or $\mathcal{O}(2\Delta)\otimes\mathcal{O}_\Delta=\mathcal{O}_\Delta(2\Delta.\Delta)=\mathcal{O}_\Delta(-2)$, et donc on obtient la suite sur Δ :

$$0\to\mathcal{O}_\Delta(n-1)\to A|_{\Delta_{n+1}}\to A|_{\Delta_n}\to 0$$

ce qui prouve, comme $H^1(\Delta, \mathcal{O}_\Delta(n-1))=0$ pour $n\geqslant 0$, que :

$$H^1(\Delta, A|_{\Delta_{n+1}})=H^1(\Delta, A|_{\Delta})\qquad \text{pour}\quad n\geqslant 0.$$

Ainsi, $\varprojlim H^1(\Delta, A|_{\Delta_n})=H^1(\Delta, A|_\Delta)$, ce qui démontre le lemme.

PROPOSITION 1.6. – *Pour le fibré $N=\pi^* L^\vee\otimes\mathcal{O}(2\Delta)$, on a la suite exacte :*

$$0\to H^1(X, L^\vee)\to H^1(\hat{X}, N)$$
$$\xrightarrow{\oplus j_i^* \hat{X}}\bigoplus_{i=1}^n H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i})\to H^2(X, L^\vee)\to H^2(\hat{X}, N)\to 0.$$

Démonstration. – L'inclusion j^* est obtenue en composant les flèches naturelles données par 1.4 et 1.5 :

$$H^1(\hat{X}, N)\to H^0(X, R^1\pi_* N)\simeq H^1(\Delta, N|_\Delta).$$

La proposition en découle car $\pi_* N=L^\vee$.

LEMME 1.7. – $h^2(\hat{X}, N)=h^0(X, L\otimes\omega_X\otimes I_Y)$.

Démonstration. – Le fibré canonique de $\hat{X}$ est $\omega_{\hat{X}}=\pi^*\omega_X\otimes\mathcal{O}_{\hat{X}}(\Delta)$ (*cf.* par exemple [4], V.3.3). Par dualité de Serre, on a :

$$h^2(\hat{X}, N)=h^0(\hat{X}, N^\vee\otimes\omega_{\hat{X}})=h^0(\hat{X}, \pi^*(L\otimes\omega_X)\otimes\mathcal{O}_{\hat{X}}(-\Delta))$$
$$=h^0(X, L\otimes\omega_X\otimes I_Y),$$

d'après la formule d'adjonction car $\pi_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(-\Delta)=I_Y$.

THÉORÈME 1.8. – *L'ensemble $\mathbb{E}(L, Y)$ est non vide si et seulement si la condition suivante est réalisée : pour tout i, $1\leqslant i\leqslant n$, toute section de $L\otimes\omega_X$ qui s'annule en $Y-\{y_i\}$ s'annule également en y_i.*

N.B. – Dans le cadre analytique complexe, ce résultat est démontré par GRIFFITHS-HARRIS ([3], prop. 1.33).

Démonstration. – D'après 1.3, $\mathbb{E}(L, Y)$ est non vide si et seulement si aucun des j_i^* n'est identiquement nul. Fixons un indice i, $1\leqslant i\leqslant n$, et décomposons ainsi l'éclatement π :

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\pi_i"] \arrow[rr, bend right, "\pi"'] & X_i \arrow[r, "\pi_i'"] & X \end{tikzcd}$$

où π'_i est l'éclatement de $Y-\{y_i\}$ et π_i l'éclatement de $\pi_i'^{-1}(y_i)$.

Notons $\Delta^i=\bigcup_{k\neq i}\pi_i'^{-1}(y_k)$ et N_i le fibré sur X_i :

$$\pi_i'^{*} L^{\vee}\otimes\mathcal{O}_{X_i}(2\Delta^i).$$

On a évidemment $N_i=\pi_{i*}N$ et $N=\pi_i^{*}N_i\otimes\mathcal{O}_{\hat{X}}(2\Delta_i)$.

La suite 1.6 appliquée à l'éclatement π_i s'écrit :

$$0\to H^1(X_i, N_i)\to H^1(\hat{X}, N)$$

$$\xrightarrow{j_i^*} H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i})\to H^2(X_i, N_i)\to H^2(\hat{X}, N)\to 0.$$

Or $H^1(\Delta_i, N|_{\Delta_i})$ est de dimension un. La restriction j_i^* est donc nulle si et seulement si $h^2(X_i, N_i)$ égale $h^2(\hat{X}, N)$. Avec 1.7, cette égalité devient :

$$h^0(X, L\otimes\omega_X\otimes I_i)=h^0(X, L\otimes\omega_X\otimes I_Y),$$

où I_i désigne l'idéal de $Y-\{y_i\}$. C'est bien la condition cherchée.

Remarque 1.9. — La condition de 1.8 est réalisée en particulier si $L\otimes\omega_X$ n'a pas de sections, c'est-à-dire si $H^2(X, L^{\vee})=0$, qui est une condition bien connue (*cf.* [2]).

2. Fibrés associés à des points dans $\mathbb{P}_2$

A partir de maintenant, on prend pour X le plan projectif $\mathbb{P}_2$. Si a appartient à $\mathbb{Z}$ et si Y est un ensemble de n points de $\mathbb{P}_2$, l'ensemble $\mathbb{E}(\mathcal{O}(a), Y)$ est noté $\mathbb{E}(a, Y)$. On considèrera les classes de Chern des fibrés sur $\mathbb{P}_2$ comme des entiers, et, si $E\in\mathbb{E}(a, Y)$, on a, en particulier, $c_1(E)=a$ et $c_2(E)=n$.

DÉFINITION 2.1. — *Si $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$ est un ensemble de n points de $\mathbb{P}_2$, on note a_Y le plus grand entier a tel que, pour tout i, $1\leqslant i\leqslant n$, toute courbe de degré $a-3$ contenant $Y-\{y_i\}$ contienne y_i.*

Le résultat suivant est la traduction de 1.8 :

PROPOSITION 2.2. — *L'ensemble $\mathbb{E}(a, Y)$ est non vide si et seulement si $a\leqslant a_Y$.*

2.3. REMARQUES SUR LA FONCTION $Y\mapsto a_Y$

1° Voici ses valeurs pour $n\leqslant 4$:

$$.\mapsto 2;\quad ..\mapsto 3;\quad .\,^{\bullet}\,.\mapsto 3;\quad ...\mapsto 4;$$

$$:\,:\mapsto 4;\quad .\,:\,.\mapsto 3;\quad ....\mapsto 5.$$

2° Quand $n=9$, et quand trois points quelconques de Y ne sont pas alignés et six quelconques pas sur une conique, deux cas peuvent se produire :

(a) ces neuf points sont intersection de deux cubiques; alors $a_Y=6$, car toute cubique passant par huit d'entre eux contient le neuvième (*cf.* par exemple [4], V.4.5);

(b) ces neuf points ne sont pas intersection de deux cubiques; alors $a_Y=5$.

3° Si $n\geqslant 2$, on a toujours $3\leqslant a_Y\leqslant n+1$. Cependant, on vérifie facilement que les deux extrêmes sont atteints pour des positions relativement « voisines » :

– $a_Y=3$ si et seulement si $n-1$ exactement des points sont alignés;

– $a_Y=n+1$ si et seulement si les n points sont alignés (le fibré correspondant étant d'ailleurs alors $\mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(n)$).

2.4. La cohomologie des fibrés de $\mathbb{E}(a, Y)$

Si E appartient à $\mathbb{E}(a, Y)$ écrivons la suite exacte associée à une section s de E s'annulant en Y (*cf.* par exemple [5], 1.1) :

$$0\to\mathcal{O}\xrightarrow{s}E\to I_Y(a)\to 0.$$

Comme $h^1(\mathcal{O}(t))$ est nul pour tout $t\in\mathbb{Z}$, et $h^2(\mathcal{O}(t))$ est nul pour $t\geqslant -2$, on en tire :

– pour $t\in\mathbb{Z}$: $h^0(E(t))=h^0(\mathcal{O}(t))+h^0(I_Y(a+t))$;

– pour $t\geqslant -2$: $h^1(E(t))=h^1(I_Y(a+t))$

3. Les systèmes de points de $\mathbb{P}_2$

Notation. – t_n désigne le plus petit entier positif t tel que :

$$\frac{(t+1)(t+2)}{2}\geqslant n.$$

Définition 3.1. – *Un ensemble Y de n points de $\mathbb{P}_2$ est dit en position générale quand les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *pour tout entier p, toute courbe de degré p contient au plus $((p+1)(p+2)/2)-1$ points de Y;*

(ii) *pour tout $y\in Y$, il existe une courbe C de degré t_n telle que $C\cap Y=Y-\{y\}$.*

Rappel. — Pour tout entier d et pour tout ensemble de points Z, on a l'inégalité évidente :

$$(\star) \qquad h^0(I_Z(d)) \geqslant \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - \# Z\right)^+.$$

PROPOSITION 3.2. — *Un ensemble Y est en position générale si et seulement si, pour tout entier d et tout $Z \subset Y$, $(\star)$ est une égalité.*

Avant de démontrer cette proposition, il faut établir le :

LEMME 3.3. — *Si Y est en position générale, tout $Z \subset Y$ est en position générale.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que si $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ est en position générale, $Z = \{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ l'est aussi (l'ensemble vide étant évidemment en position générale). Or, pour Z, (i) est trivialement satisfait; (ii) l'est aussi si $t_{n-1} = t_n$.

Si $t_{n-1} = t_n - 1$, c'est-à-dire si :

$$n = \frac{(t_{n-1}+1)(t_{n-1}+2)}{2} + 1,$$

il faut trouver une courbe de degré t_{n-1} contenant par exemple $y_1, \ldots, y_{n-2}$ et pas y_{n-1}. Or, d'après l'inégalité $(\star)$, il existe au moins une courbe de degré t_{n-1} contenant $y_1, \ldots, y_{n-2}$ puisque :

$$\frac{(t_{n-1}+1)(t_{n-1}+2)}{2} - (n-2) = 1;$$

cette courbe ne peut contenir $n-1$ points de Y d'après la condition (i) pour Y : elle ne contient donc pas y_{n-1}.

Démonstration de la proposition 3.2. — Quand $(\star)$ est une égalité pour tout entier d et tout $Z \subset Y$, la vérification des conditions (i) et (ii) pour Y est immédiate.

Réciproquement, il suffit, d'après 3.3, de montrer que si $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ est en position générale, alors on a :

$$h^0(I_Y(d)) = \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2} - n\right)^+ \quad \text{pour tout } d.$$

Fixons d et démontrons cela par récurrence sur n. $Z=\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ est en position générale d'après 3.3 et, d'après l'hypothèse de récurrence pour Z et l'inégalité ($\star$) pour Y, on a :

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2}-n \leqslant h^0(I_Y(d)) \leqslant h^0(I_Z(d)) = \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2}-n+1\right)^+.$$

Si $n \geqslant ((d+1)(d+2)/2)+1$, $h^0(I_Y(d))=0$,

Q.E.D.

Si $n \leqslant ((d+1)(d+2)/2)$, il suffit de montrer que $h^0(I_Y(d))$ diffère de $h^0(I_Z(d))$. Or, dans ce cas, on a $d \geqslant t_n$, et cette différence résulte donc de la condition 3.1 (ii) pour Y.

PROPOSITION 3.4. — *Soient d un entier positif et Y un ensemble de n points en position générale. Alors :*

$$h^0(I_Y(d)) = \left(\frac{(d+1)(d+2)}{2}-n\right)^+,$$

$$h^1(I_Y(d)) = \left(n-\frac{(d+1)(d+2)}{2}\right)^+.$$

Démonstration. — En considérant la cohomologie de la suite :

$$0 \to I_Y(d) \to \mathcal{O}(d) \to \mathcal{O}/I_Y(d) \to 0,$$

on obtient :

$$h^1(I_Y(d)) = h^0(I_Y(d)) + n - \frac{(d+1)(d+2)}{2},$$

ce qui donne le résultat d'après 3.2.

PROPOSITION 3.5. — *Pour tout entier k, il existe des systèmes de k points en position générale.*

Démonstration. — La proposition est évidente pour $k=1$. Supposons la démontrée jusqu'à l'entier n.

Soit $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$ un système de n points en position générale. Cherchons les conditions sur y pour que $Y \cup \{y\}$ soit en position générale.

Pour tout $(((p+1)(p+2)/2)-1)$-uple de points de Y, donc en position générale d'après 3.3, il existe, d'après 3.4, une seule courbe de degré p le contenant. Avec la condition :

(C i) « y n'appartient pas à la réunion (finie) de ces courbes »; la condition 3.1 (i) sera vérifiée pour $Y \cup \{y\}$.

D'autre part :

$$\frac{(t_{n+1}+1)(t_{n+1}+2)}{2} \geqslant n+1.$$

On peut donc choisir une courbe Γ de degré t_{n+1} contenant Y. Avec la condition :

(C ii) « y n'appartient pas à Γ »

la condition 3.1 (ii) sera vérifiée pour $Y \cup \{y\}$ et y. Elle le sera également pour $Y \cup \{y\}$ et y_i. En effet, il s'agit de trouver une courbe de degré $\leqslant t_{n+1}$, contenant $Y - \{y_i\}$, y et pas y_i.

Or, d'après 3.1 (ii) pour Y et y_i, il existe une courbe Γ_i de degré t_n contenant $Y - \{y_i\}$ et pas y_i. Si on note γ et γ_i les équations de Γ et Γ_i, la courbe d'équation $\gamma_i(y)\gamma - \gamma(y)\gamma_i$ est une des courbes cherchées.

Ainsi, pour tout y appartenant au complémentaire dans $\mathbb{P}_2$ d'un nombre fini de courbes, $Y \cup \{y\}$ est en position générale, ce qui démontre par récurrence la proposition.

Remarque 3.6. — On montre facilement que l'ensemble des n-uples en position générale forme un ouvert de Zariski dense de $\mathrm{Hilb}^n \mathbb{P}_2$.

4. Fibrés associés à des points en position générale

DÉFINITION 4.1. — *Si $n \geqslant 1$, on note a_n le plus grand entier a tel que*

$$\frac{(a-2)(a-1)}{2} \leqslant n-1.$$

On a $a_n = [(3+\sqrt{8n-7})/2]$ et la table suivante :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a_n	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	

PROPOSITION 4.2. — *Soit Y un ensemble de n points en position générale. Alors $a_Y = a_n$, et donc l'ensemble $\mathbb{E}(a, Y)$ est non vide si et seulement si $a \leqslant a_n$.*

Démonstration. — Soient $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$ et $Y_i=Y-\{y_i\}$. Y_i est en position générale d'après 3.3. Par définition, a_Y est le plus grand entier a tel que, pour tout i,

$$1\leqslant i\leqslant n, \quad h^0(I_Y(a-3))=h^0(I_Y(a-3)).$$

D'après 3.4, ceci ne peut se produire que si $h^0(I_{Y_i}(a-3))=0$, c'est-à-dire, quand $a\geqslant 3$, si $(a-2)(a-1)/2\leqslant n-1$. ■

PROPOSITION 4.3. — *Soient Y un système de n points en position générale et a un entier tel que* $1\leqslant a\leqslant a_n$. *Pour tout fibré E de* $\mathbb{E}(a, Y)$, *on a :*

$$(a) \qquad h^0(E)=1+\left(\frac{(a+1)(a+2)}{2}-n\right)^+;$$

$$(b) \qquad h^0(E(-1))=\left(\frac{a(a+1)}{2}-n\right)^+;$$

$$(c) \qquad h^1(E(l))=\left(n-\frac{(a+l+1)(a+l+2)}{2}\right)^+ \quad \textit{pour} \quad l\geqslant 0;$$

(*d*) *E est stable sauf si* (*a*, *n*) *est l'un des couples suivants :* (2, 1); (2, 2); (3, 2); (4, 4); (4, 5).

Démonstration. — Les propriétés (*a*), (*b*) et (*c*) résultent immédiatement de 2.4 et de 3.4.

D'après le critère classique de stabilité (*cf.* TAKEMOTO [9], prop. 4.1), *E* est stable si et seulement si son normalisé n'a pas de sections, c'est-à-dire, d'après 2.4, si et seulement si :

$$h^0\left(E\left(\left[-\frac{a}{2}\right]\right)\right)=h^0\left(I_Y\left(a+\left[-\frac{a}{2}\right]\right)\right)=h^0\left(I_Y\left(\left[\frac{a}{2}\right]\right)\right)=0,$$

c'est-à-dire, d'après 3.4, si et seulement si :

$$n\geqslant\frac{([a/2]+1)([a/2]+2)}{2}.$$

Comme $a\leqslant a_n$, on a :

$$n\geqslant\frac{(a-2)(a-1)}{2}+1.$$

On en déduit que E est sûrement stable si $a-3\geqslant[a/2]$, c'est-à-dire si $a\geqslant 5$. L'examen des cas $a=1, 2, 3, 4$ donne le résultat (*d*).

Ces résultats se lisent sur la figure 1. Au sujet des fibrés de la zone hachurée, on peut énoncer le lemme suivant qui résulte de 4.3 :

LEMME 4.4. — *Si a et n sont tels que* $a \geqslant 1$ *et :*

$$\frac{a(a+1)}{2} \leqslant n \leqslant \frac{(a+1)(a+2)}{2},$$

alors il existe un fibré E, stable, de classes de Chern a et n, tel que $h^0(E(-1))=0$ *et, pour* $l \geqslant 0$, $h^1(E(l))=0$.

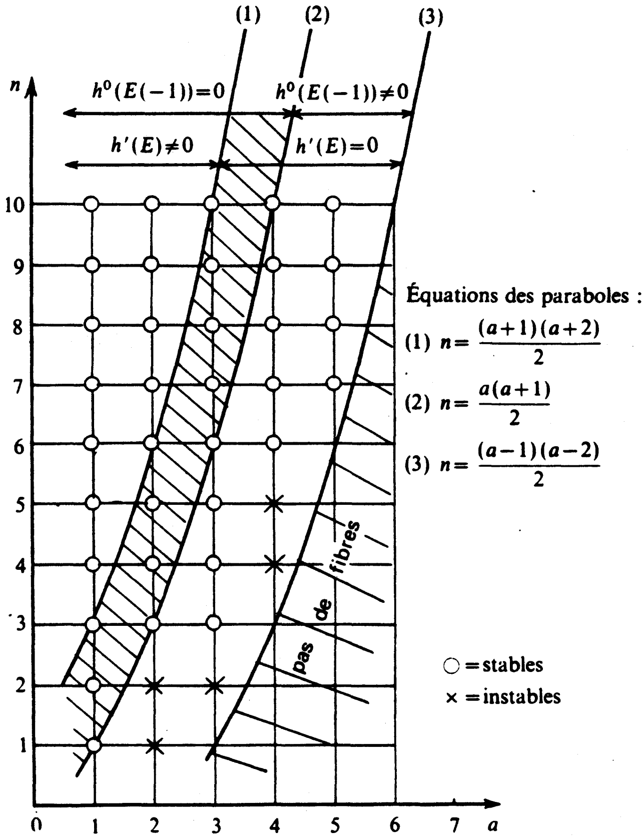


Fig. 1. — Fibrés E de première classe de Chern $a \geqslant 1$, admettant une section s'annulant en n points en position générale.

5. Le fibré stable générique

On note $M(c_1, c_2)$ le module des fibrés stables de rang deux sur $\mathbb{P}_2$, de classes de Chern c_1 et c_2. On confond abusivement $M(c_1, c_2)$ avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels fibrés. La phrase : « le fibré générique de $M(c_1, c_2)$ vérifie la propriété X » signifie que la propriété X est vérifiée dans un ouvert de Zariski dense de $M(c_1, c_2)$.

Rappelons que les fibrés stables de classes de Chern données forment une famille limitée (TAKEMOTO [9], cor. 4.2) et que la variété algébrique lisse $M(c_1, c_2)$ est irréductible (*cf.* BARTH [1] et MARUYAMA [6], prop. 7.5).

Si E est un fibré de $M(c_1, c_2)$ et si $c_1 \leqslant 0$, alors $h^0(E)=0$ d'après le critère de stabilité déjà mentionné. On en déduit par dualité de Serre que si E est un fibré de $M(c_1, c_2)$ et si $c_1 \geqslant -6$, alors $h^2(E)=0$.

Enfin, si E est un fibré de rang deux sur $\mathbb{P}_2$ de classes de Chern c_1 et c_2, le théorème de Riemann-Roch donne la caractéristique d'Euler-Poincaré de E :

$$\chi(E)=\frac{(c_1+1)(c_1+2)}{2}-c_2+1=:\chi(c_1, c_2)$$

(*cf.*, par exemple [5], 3.2).

THÉORÈME 5.1. — *Soit $c_1 \geqslant 1$. Le fibré générique E de $M(c_1, c_2)$ est tel que :*

$$h^0(E)=(\chi(c_1, c_2))^+ \qquad et \qquad h^1(E)=(\chi(c_1, c_2))^-.$$

Démonstration. — Soit E dans $M(c_1, c_2)$ avec $c_1 \geqslant 1$. D'après la remarque précédente, on a $h^2(E)=0$ et donc, pour $i=0, 1$, si $h^i(E)=0$, alors h^{1-i} a la valeur indiquée dans le théorème. Or la propriété $h^i(E)=0$ est Zariski-ouverte dans $M(c_1, c_2)$: cela résulte immédiatement du fait que la famille $M(c_1, c_2)$ est limitée et du théorème général de semi-continuité (*cf.* [4], th. III.12.8). Comme $M(c_1, c_2)$ est irréductible, il suffit, pour démontrer le théorème, d'exhiber :

(*a*) si $\chi(c_1, c_2)<0$, un fibré E tel que $h^0(E)=0$;

(*b*) si $\chi(c_1, c_2)\geqslant 0$, un fibré E tel que $h^1(E)=0$.

Si E est dans $M(c_1, c_2)$ et si t appartient à $\mathbb{Z}$, les classes de Chern de $E(t)$ sont :

$$\begin{cases} a_t=c_1+2t, \\ n_t=c_2+tc_1+t^2. \end{cases}$$

LEMME. — *Il existe un unique entier t_0 tel que :*

$$\frac{a_{t_0}(a_{t_0}+1)}{2}\leqslant n_{t_0}\leqslant\frac{(a_{t_0}+1)(a_{t_0}+2)}{2}$$

(*cela signifie que* (a_{t_0}, n_{t_0}) *appartient à la zone hachurée de la figure* 1).

En effet, la double inéquation :

$$\frac{a_t(a_t+1)}{2}\leqslant n_t\leqslant\frac{(a_t+1)(a_t+2)}{2}$$

est équivalente à :

$$\underbrace{t^2+t(c_1+1)+\frac{c_1^2+c_1}{2}}_{A(t)}\leqslant c_2\leqslant \underbrace{t^2+t(c_1+3)+\frac{c_1^2+3c_1}{2}+1}_{B(t)}$$

et on constate que $A(t+1)=B(t)+1$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de t_0, et démontre le lemme.

Il est clair que si :

$$\chi(c_1, c_2)=\frac{(c_1+1)(c_1+2)}{2}-c_2+1$$

est <0 (resp. $\geqslant 0$), alors t_0 est >0 (resp. $\leqslant 0$).

D'après le lemme 4.4, il existe un fibré F dans $M(a_{t_0}, n_{t_0})$ tel que $h^0(F(-1))=0$ et, pour $l\geqslant 0$, $h^1(F(l))=0$. Alors le fibré $E :=F(-t_0)$ satisfait (a) et (b).

COROLLAIRE 5.2. — *Le fibré stable générique possède au plus un groupe de cohomologie non nul.*

Démonstration. — Si $-6\leqslant c_1\leqslant 0$, cela est vrai pour tous les fibrés de $M(c_1, c_2)$. Si $c_1\geqslant 1$, cela résulte de 5.1. On en déduit le cas général par dualité de Serre.

Comme application, on obtient la figure 2.

COROLLAIRE 5.3. — *Pour le fibré générique E de* $M(c_1, c_2)$, *on a, pour tout* $t\in\mathbb{Z}$: $h^1(E(t))=(\chi(E(t)))^-$.

Démonstration. — D'après 5.2, pour tout $t\in\mathbb{Z}$, il existe un ouvert de Zariski dense U_t de $M(c_1, c_2)$ tel que, pour tout E dans U_t, on ait $h^1(E(t))=(\chi(E(t)))^-$.

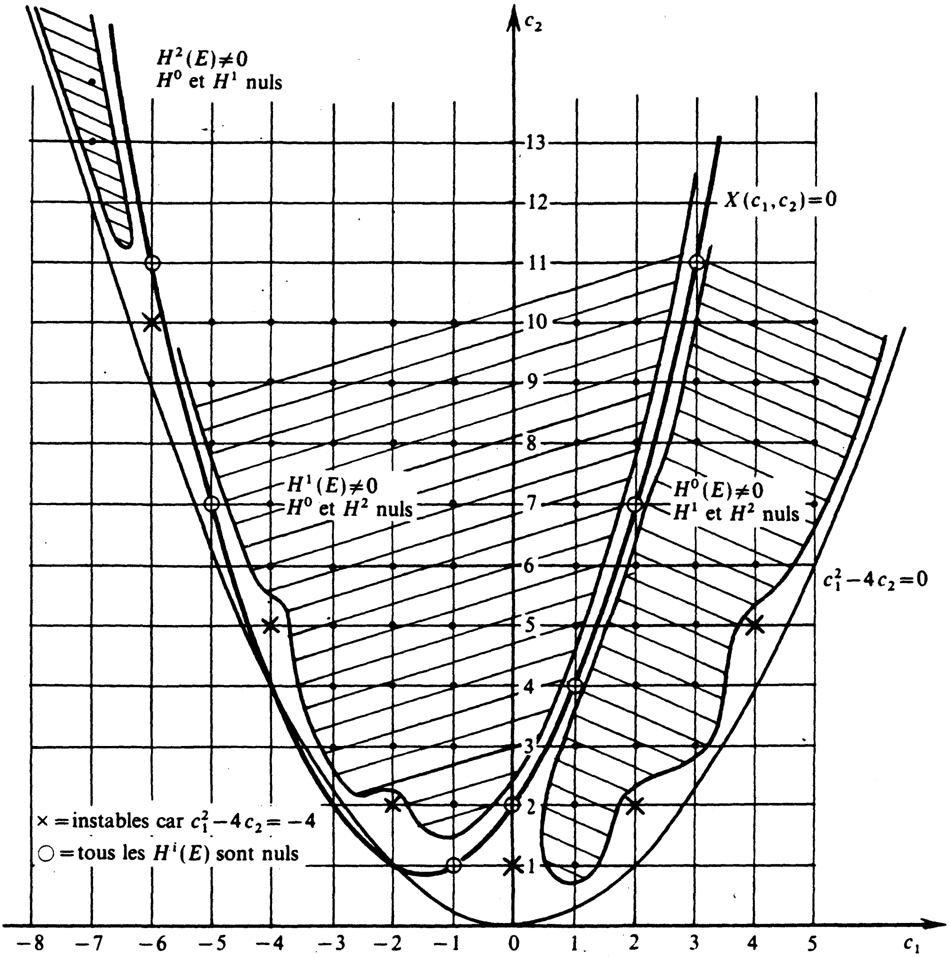


Fig. 2. — La cohomologie du fibré générique E de $M(c_1, c_2)$.

D'autre part, il existe des entiers relatifs n_1 et n_2 ($n_1 \leqslant n_2$), dépendant de c_1 et c_2, tels que, pour tout fibré E de $M(c_1, c_2)$ et pour tout entier n n'appartenant pas à l'intervalle $[n_1, n_2]$, on ait : $h^1(E(n))=0$ (ce résultat classique peut par exemple se déduire de la limitation de la famille $M(c_1, c_2)$ et du théorème relatif d'annulation de Serre; pour une autre démonstration, *cf.* Elencwajg-Forster [10], th. 3.2).

L'assertion de 5.3 est donc vérifiée pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et pour tout E appartenant à $\cap_{n_1 \leqslant n \leqslant n_2} U_n$, donc pour E générique.

Nous allons énoncer ce résultat dans le cadre des fibrés normalisés c'est-à-dire de première classe de Chern 0 ou -1. Si E est un fibré normalisé, on note $s(E)$ le plus petit entier s tel que $H^0(E(s)) \neq 0$.

Si E est de classe de Chern 0 et n (resp. -1 et n), on a, pour $t \in \mathbb{Z}$:

$$\chi(E(t)) = (t+1)(t+2) - n \qquad (\text{resp. } \chi(E(t)) = (t+1)^2 - n).$$

On est donc amené aux définitions :

$$h_n := \text{le plus grand entier } h \text{ tel que } h(h+1) \leqslant n,$$

$$k_n := \text{le plus grand entier } k \text{ tel que } k^2 \leqslant n.$$

Il est clair que pour tout fibré E de $M(0, n)$ (resp. de $M(-1, n)$) on a $s(E) \leqslant h_n$ (resp. $s(E) \leqslant k_n$) (*cf.* prop. 7.1 de [5]). On déduit du corollaire 5.3 le :

COROLLAIRE 5.4. — (i) *pour le fibré générique E de $M(0, n)$, on a :*

$$s(E) = h_n \quad \textit{et} \quad h^1(E(t)) = 0 \quad \textit{pour } t \geqslant h_n;$$

(ii) *pour le fibré générique E de $M(-1, n)$, on a :*

$$s(E) = k_n \quad \textit{et} \quad h^1(E(t)) = 0 \quad \textit{pour } t \geqslant k_n.$$

On a la table de valeurs suivantes :

n	1	2	3	4	5	6	7	...
h_n		1	1	1	1	2	2	...
k_n	1	1	1	2	2	2	2	...

5.5. Il est facile de construire des fibrés stables dont le h^0 et le h^1 sont non nuls simultanément.

Soient par exemple $n \geqslant 4$, $a \geqslant 1$ tel que $((a+1)(a+2)/2) < n$ et Y un ensemble de n points en position générale. Alors, d'après 4.3, les éléments E de $\mathbb{E}(a, Y)$ sont stables et vérifient :

$$h^0(E) = 1 \qquad \text{et} \qquad h^1(E) = n - \frac{(a+1)(a+2)}{2}$$

(on peut d'ailleurs montrer dans ce cas que les fibrés de $\mathbb{E}(a, Y)$ admettent une famille universelle dont la base est de dimension $n - ((a-2)(a-1)/2) - 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARTH (W.). — Moduli of vector bundles on the projective plane, *Invent. Math.*, vol. 42, 1977, p. 63-91.

[2] GRAUERT (H.) und MULICH (G.). — Vektorbündel Vom Rang 2 über dem n-dimensionalen komplex-projectiver Raum, *Manu scripta Math.*, vol. 16, 1975, p. 75-100.

[3] GRIFFITHS (P.) and HARRIS (J.). — Residues and zero-cycles on algebraic varieties, *Ann. math.*, vol. 108, 1978, p. 461-505.

[4] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1977.

[5] HARTSHORNE (R.). — Stable Vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$, *Math. Ann.*, vol. 238, 1978, p. 229-280.

[6] MARUYAMA (M.). — Moduli of stable sheaves II, *J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 18, 1978, p. 557-614.

[7] ODA (T.). — Vector bundles on abelian surfaces, *Invent. Math.*, vol. 13, 1971, p. 247-260.

[8] SCHWARZENBERGER (R.). — Vector bundles on algebraic surfaces, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 11, 1961, p. 601-622.

[9] TAKEMOTO (F.). — Stable vector bundles on algebraic surfaces, *Nagoya Math. J.*, vol. 47, 1972, p. 29-48.

[10] ELENOWAJG (G.) and FORSTER (O.). — Bounding cohomology groups of vector bundles on $\mathbb{P}_n$, *Math. Ann.*, vol. 246, 1980, p. 251-270.

Note. — Herbert Lange démontre, par des méthodes différentes, le résultat du corollaire 5.4, dans l'article : Invertierbare Untergarben maximalen Grades von Rang-2 Vektorbündeln auf der projektiven Ebene, *Archiv der Mathematik*, vol. 34, 1980, p. 313-321.