BULLETIN DE LA S. M. F.

G. CHRISTOL
T. KAMAE
MICHEL MENDÈS FRANCE
GÉRARD RAUZY

Suites algébriques, automates et substitutions

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 401-419
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__401_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 401-419.

SUITES ALGÉBRIQUES, AUTOMATES ET SUBSTITUTIONS

PAR

G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES-FRANCE
et G. RAUZY (*)

RÉSUMÉ. — Soit $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments. On montre (théorème 1) que la série formelle $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n \in \mathbb{F}_q[[X]]$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$ si et seulement si la suite des coefficients (f_n) est engendrée par un automate fini. On en déduit que si $f(X)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$ et sur $\mathbb{F}_{q'}(X)$ alors $f(X)$ est rationnelle pourvu que $\log q/\log q' \notin \mathbb{Q}$.

On étudie ensuite la nature déterministe des suites algébriques et on illustre les résultats généraux par plusieurs exemples.

SUMMARY. — Let $\mathbb{F}_q$ be the finite field with q elements. We prove that the series $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n X^n \in \mathbb{F}_q[[X]]$ is algebraic over $\mathbb{F}_q(X)$ if and only if the sequence of coefficients (f_n) can be generated by a finite automata (Theorem 1). As a consequence of a result of Cobham's, it is then shown that if $f(X)$ is algebraic both over $\mathbb{F}_q(X)$ and $\mathbb{F}_{q'}(X)$, then $f(X)$ is rational provided $\log q/\log q' \notin \mathbb{Q}$.

The deterministic nature of algebraic sequences is also discussed and several examples serve to illustrate the general theory.

1. Introduction

Soit $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ une suite infinie de 0 et de 1. On pose $\xi=\sum_0^{\infty} \varepsilon_n 2^{-n}$ et $\eta=\sum_0^{\infty} \varepsilon_n 3^{-n}$. La conjecture suivante, toute vraisemblable qu'elle paraisse, est à ce jour hors d'atteinte : si l'un des nombres ξ ou η est irrationnel, alors l'un d'entre eux est transcendant. Une des conséquences de l'étude qui suit est que si on munit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ respectivement de l'addition et de la

(*) Texte reçu le 10 octobre 1979, révisé le 25 février 1980.

G. CHRISTOL, 5, allée de Gradins, 91350 Grigny.

T. KAMAE, Department of Mathematics, Osaka City University, Sujimoto-Cho, Osaka, Japan.

M. MENDÉS-FRANCE, Mathématiques et Informatique, Université Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

G. RAUZY, Unité d'Enseignement et de Recherche, Marseille Luminy, Mathématiques-Informatique, 70, rue Léon Lachamp, 13288 Marseille Cedex 2.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/401/$ 5.00

multiplication « sans retenue », la conjecture est vraie. Plus précisément, soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments et $\mathbb{F}_3$ le corps à trois éléments. Soient :

$$\xi=\sum_0^\infty \varepsilon_n X^n \in \mathbb{F}_2((X)) \qquad \text{et} \qquad \eta=\sum_0^\infty \varepsilon_n X^n \in \mathbb{F}_3((X)).$$

Si ξ est algébrique sur $\mathbb{F}_2(X)$ et η algébrique sur $\mathbb{F}_3(X)$, alors ξ et η sont l'un et l'autre rationnels.

Ce résultat apparaîtra comme corollaire d'un théorème de COBHAM [5] et de notre théorème 1. Ce dernier affirme l'équivalence de trois méthodes pour engendrer certaines suites déterministes :

(i) Une méthode algébrique : solution d'une équation algébrique;
(ii) Une méthode topologique : point fixe d'une certaine transformation;
(iii) Une méthode mécaniste : génération par automate fini.

Ce travail sera complété par une étude spectrale due à KAMAE.

Dans tout cet article, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble $\{0,1,2,\ldots\}$.

2. Suites algébriques

Soit K un corps fini de caractéristique p. $K((X))$ représente le corps des séries formelles à coefficients dans K. Un élément f de $K((X))$ est donc de la forme

$$f=f(X)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j X^j, \qquad f_j \in K,$$

où tous les f_{-j} sont nuls dès que j est suffisamment grand. L'injection $K^{\mathbb{N}} \hookrightarrow K((X))$ définie par

$$(f_0, f_1, \ldots) \to \sum_{j=0}^{\infty} f_j X^j$$

permet d'identifier une suite infinie avec une série formelle. En particulier $K^{\mathbb{N}}$ se trouve muni d'une structure d'anneau : l'addition se fait coordonnée à coordonnée et le produit est le produit de Cauchy.

Si une série formelle f (resp. une suite) vérifie l'égalité

$$a_\nu f^\nu + a_{\nu-1} f^{\nu-1} + \ldots + a_1 f + a_0 = 0,$$

où les a_k $(0 \leqslant k \leqslant \nu)$ sont des polynômes $(\in K[X])$ non tous nuls, on dit que f est algébrique (sur $K(X)$). La série algébrique f est une suite algébrique si et seulement si le coefficient non nul de plus haut degré vérifie $a_\nu(0) \neq 0$.

Il est facile de voir qu'une suite f est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si elle est algébrique de degré 1 (rationnelle). Donnons un second exemple, moins trivial, de suite algébrique. A tout entier $n \geqslant 0$ on associe la somme des chiffres de n représenté en base 2.

Si cette somme est paire, on pose $f_n=0$ et sinon $f_n=1$. La suite $f=(f_n)$ considérée comme élément de $(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ vérifie

$$(1+X)^3 f^2+(1+X)^2 f+X=0.$$

Cette suite, appelée suite de Morse, est donc quadratique. (Elle a été étudiée par de multiples auteurs [6], [8], [13], [14], [15], [16], [20], [23], [24], [26], [27], [33], [35].)

On remarquera que la suite $f+(1+X)^{-1}=(1+f_n)$ vérifie la même équation que f. Cette suite ne diffère de f que par la nomenclature de ses éléments. Ainsi, à la nomenclature près, les deux solutions de l'équation quadratique précédente représentent l'une et l'autre la suite de Morse. Nous reviendrons sur cet exemple.

Baum et Sweet [1] ont donné un exemple intéressant de suite cubique sur $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}$. Il s'agit de l'unique solution f de l'équation

$$f^3+Xf+1=0.$$

On se convaincra aisément en résolvant

$$f^4+Xf^2+f=0$$

que $f=(f_n)$ est la fonction caractéristique des entiers n qui ont la propriété suivante. Dans leur représentation binaire, il n'existe aucune plage de 0 de longueur impaire. Ainsi

$$f=1+X+X^3+X^4+X^7+X^9+\ldots$$

Nous verrons d'autres exemples dans la suite de cet article.

3. Substitutions

Soit Σ un ensemble fini contenant deux éléments au moins. Selon l'usage, Σ est appelé alphabet et les éléments de Σ^k sont appelés mots de longueur $k\,(k\geqq 1)$. On convient que Σ^0 est l'ensemble dont le seul élément est le mot vide. On pose

$$\Sigma^*=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Sigma^k.$$

L'ensemble Σ^* est muni de l'opération concaténation. Si $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ sont des mots, on pose

$$\subset_{i=1}^{\nu} m_i=m_1\,m_2\ldots m_\nu\in\Sigma^*.$$

La longueur est notée $|\ldots|$ en sorte que $|\subset_{i=1}^{\nu} m_i|=\sum_{i=1}^{\nu}|m_i|$.

Plus généralement, on pourra considérer des concaténations infinies

$$\subset_{i=1}^{\infty} m_i=m_1\,m_2\,m_3\ldots\in\Sigma^{\mathbb{N}}.$$

Soit $k \geqslant 1$ un entier. Soit σ une application $\Sigma \to \Sigma^k$. On prolonge σ à une application $\Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma^{\mathbb{N}}$ notée encore σ, définie comme suit. Si $x=(x_n) \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, alors

$$\sigma(x) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma(x_i) \in \Sigma^{\mathbb{N}}.$$

σ s'appelle une substitution d'ordre k, ou plus brièvement une k-substitution (en anglais : uniform tag system with modulus k [6]).

Munissons Σ^* et $\Sigma^{\mathbb{N}}$ de la métrique naturelle d :

$$d(x_0\, x_1\, x_2, \ldots, y_0\, y_1\, y_2 \ldots) = (\inf\{ n \geqslant 1 / x_{n-1} \neq y_{n-1} \})^{-1}.$$

Si $x=(x_n)$ et $y=(y_n)$ débutent par la même lettre $x_0 = y_0$, alors

$$d(\sigma x, \sigma y) \leqslant \frac{1}{k} d(x, y).$$

Supposons alors $k > 1$ et admettons l'existence d'une lettre $l \in \Sigma$ telle que $\sigma(l) \in l.\Sigma^*$. Soit $x \in l\Sigma^{\mathbb{N}}$. En désignant par σ^n la n-ième itérée de σ, on a donc pour tout $n \leqslant m$:

$$d(\sigma^n x, \sigma^m x) \leqslant \frac{1}{k^n} d(x, \sigma^{m-n} x) \leqslant \frac{1}{k^n}.$$

La suite $\sigma^n x$ converge donc vers un élément $s \in l\Sigma^{\mathbb{N}}$ qui est un point fixe de la substitution σ : $\sigma s = s$. On dit que s est engendré par une k-substitution.

Soit Ξ un ensemble fini et soit $\tau : \Sigma \to \Xi$. Si la suite $s \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ est engendrée par une k-substitution, on dira que la suite $\tau(s) = (\tau(s_n)) \in \Xi^{\mathbb{N}}$ est elle aussi engendrée par une k-substitution (uniform tag sequence of modulus k).

La suite de Morse dont il a déjà été fait mention fournit un exemple classique de suite engendrée par une 2-substitution. On choisit en effet $\Sigma = \Xi = \{a, b\}$, $\tau =$ identité et $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ba$. La substitution σ admet deux points doubles dans $\Sigma^{\mathbb{N}}$, l'un dans $a\Sigma^{\mathbb{N}}$ et l'autre dans $b\Sigma^{\mathbb{N}}$. Tous deux sont une représentation de la suite de Morse.

La suite de BAUM et SWEET est elle aussi engendrée par une 2-substitution. On prend $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Xi = \{0, 1\}$, $\tau(a) = \tau(b) = 1$, $\tau(c) = \tau(d) = 0$ et la 2-substitution σ est définie par

$$\sigma a = ab, \qquad \sigma b = cb, \qquad \sigma c = bd, \qquad \sigma d = dd.$$

σ admet donc deux points fixes. Le premier dans $a\Sigma^{\mathbb{N}}$ qui donne lieu à la suite de BAUM et SWEET, le second dans $d\Sigma^{\mathbb{N}}$ qui donne lieu à la suite triviale 0.

4. Automates et suites k-reconnaissables ([7], [10])

Soit $k \geqslant 2$ un entier et soit $[k]$ l'ensemble $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ (le symbole $[\ldots]$ désigne aussi « la partie entière »; nous espérons que ce double emploi ne provoquera pas de confusion).

Un k-automate A est la donnée de :

(i) deux alphabets Σ et Ξ;

(ii) un point initial $x_0 \in \Sigma$;

(iii) une application $\varphi : [k] \times \Sigma \to \Sigma$;

(iv) une application $\tau : \Sigma \to \Xi$.

Pour tout élément $(j, x) \in [k] \times \Sigma$, on pose $\varphi(j, x) = j(x)$, plus simplement jx. On prolonge l'application $\varphi : [k] \times \Sigma \to \Sigma$ en une application $[k]^* \times \Sigma \to \Sigma$ de la façon suivante : soit $e_l e_{l-1} \ldots e_0 \in [k]^*$ et $x \in \Sigma$. On définit par récurrence

$$e_l e_{l-1} \ldots e_0 x = e_l e_{l-1} \ldots e_1 (e_0 x)$$

et $\varphi(\emptyset, x) = x$ pour tout $x \in \Sigma$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier qu'on développe en base k :

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} e_j(n) k^j.$$

Soit $l = [\log n / \log k]$. Si $j > l$, $e_j(n) = 0$ et $e_l(n) \neq 0$. L'entier n admet donc la représentation

$$e_l(n) e_{l-1}(n) \ldots e_0(n) \in [k]^*.$$

Au nombre 0 on associe le mot vide.

Soit alors $x \in \Sigma$. On pose

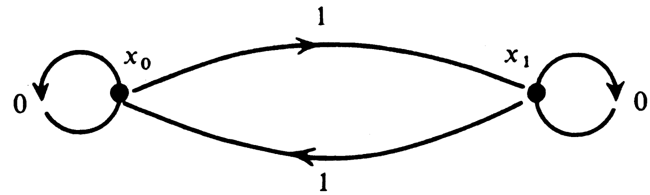
$$nx = e_l(n) e_{l-1}(n) \ldots e_1(n) e_0(n) x.$$

Ainsi, lorsque n parcourt la suite de tous les entiers, nx_0 décrit une suite infinie d'éléments dans Σ et $\tau(nx_0)$ décrit une suite infinie d'éléments dans Ξ. On dit qu'une suite $t \in \Xi^{\mathbb{N}}$ est k-reconnaissable s'il existe un k-automate $(\Sigma, x_0, \varphi, \Xi, \tau)$ tel que $t = (t_n) = (\tau(nx_0))$.

La suite de Morse, déjà vue à deux reprises, est 2-reconnaissable. En effet, le 2-automate suivant « engendre » la suite de Morse :

$$\begin{array}{ll} \Sigma = \{x_0, x_1\}, & \Xi = \{0, 1\}, \\ \varphi(0, x_0) = x_0, & \varphi(0, x_1) = x_1, \\ \varphi(1, x_0) = x_1, & \varphi(1, x_1) = x_0, \\ \tau(x_j) = j, & (j = 1, 2). \end{array}$$

Schématiquement, l'automate peut se représenter ainsi :



On laisse au lecteur le plaisir de montrer que la suite de BAUM et SWEET est 2-reconnaissable.

Remarque. — Dans la littérature mathématique on trouve, outre notre définition, une définition voisine de k-automate. L'application φ peut en effet être définie sur $\Sigma \times [k]$ et prolongée à $\Sigma \times [k]^*$. Si n est un entier positif dont la représentation en base k est $e_l e_{l-1} \ldots e_0$ on pose pour tout $x \in \Sigma$:

$$\varphi(x, n) = xn = xe_l e_{l-1} \ldots e_0.$$

Ici, e_l opère d'abord sur x, puis e_{l-1} sur $xe_l \in \Sigma$, etc. Pour cette raison, on dit que l'automate est à lecture directe alors que dans notre définition précédente il s'agissait d'automates à lecture inverse.

D'après [10], p. 18, les familles de suites k-reconnaissables pour les automates à lecture directe et à lecture inverse coïncident. Dans notre article, nous ne considérons que les k-automates à lecture inverse.

5. Équivalence des trois notions

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit Ξ un ensemble fini non vide, soit $t = (t_n) \in \Xi^{\mathbb{N}}$ et soit p un nombre premier. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *la suite t est p-reconnaissable;*

(ii) *t est engendré par une p-substitution;*

(iii) *il existe un corps fini K de caractéristique p et une injection $\alpha : \Xi \hookrightarrow K$ telle que $\alpha(t) = (\alpha(t_n))$ soit algébrique sur $K(X)$.*

L'équivalence des propriétés (i) et (ii) est due à COBHAM [6] (qui considère des automates à lecture directe). L'équivalence s'établit sans avoir à supposer que p est premier. La restriction n'intervient que pour la propriété (iii).

6. Preuve que (i) $\Rightarrow$ (iii)

Soit $t \in \Xi^{\mathbf{N}}$ une suite p-reconnaissable. Soit K un corps fini de caractéristique p, ayant autant ou plus d'éléments que Ξ. L'ensemble Ξ peut alors s'injecter dans K. Ainsi, quitte à renommer les éléments de Ξ, on pourra considérer que $t \in K^{\mathbf{N}}$. Montrons alors que t est algébrique sur $K(X)$.

Notons $q = p^s$ le nombre d'éléments de K.

Pour $r \in [q]$, on considère l'application $\mathrm{A}_r : K((X)) \to K((X))$ définie par

$$A_r(\sum_n v_n X^n) = \sum_n v_{qn+r} X^n.$$

Soit $\mathcal{N}$ le semi-groupe engendré par l'identité et les A_r pour la loi de composition. A tout $v = \sum_n v_n X^n \in K((X))$ on associe son orbite

$$\mathcal{N}(v) = \{A(v)/A \in \mathcal{N}\}.$$

D'après [10], proposition 3.3, p. 107, on sait que $\mathcal{N}(v)$ est fini si et seulement si v est q-reconnaissable c'est-à-dire p-reconnaissable. Donc $\mathcal{N}(t)$ est fini.

Soit E l'espace vectoriel sur $K(X)$ engendré par $\mathcal{N}(t)$ et soit F l'espace vectoriel sur $K(X)$ engendré par les g^q, $g \in \mathcal{N}(t)$. Nous montrons dans un premier temps que $E = F$. En effet, si $g_{(1)}, g_{(2)}, \ldots, g_{(N)}$ est une base de E, alors pour tout $g \in E$;

$$g = \sum_{k=1}^{N} c_k g_{(k)}$$

donc

$$g^q = \sum_{k=1}^{N} c_k^q g_{(k)}^q$$

ce qui montre que $g_{(1)}^q, g_{(2)}^q, \ldots, g_{(N)}^q$ est un système de générateurs pour F. Ainsi

$$\dim F \leqslant \dim E \leqslant \operatorname{card} \mathcal{N}(t).$$

Par ailleurs, pour tout $g \in \mathcal{N}(t)$, on a

$$g = \sum_{r=0}^{q-1} X^r (A_r(g))^q.$$

Or $(A_r(g))^q \in (\mathcal{N}(t))^q \subset F$, donc $E \subset F$, ce qui, vu l'inégalité précédente, entraîne $E = F$.

Soit maintenant G l'espace vectoriel engendré sur $K(X)$ par les produits du type

$$\prod_{g \in \mathcal{N}(t)} g^{\lambda(g)},$$

où $\lambda : \mathcal{N}(t) \to \mathbb{N}$ n'est pas identiquement nul. Alors $t \in G$, G est un anneau donc $t\,G \subset G$. Or, d'après un résultat classique (S. LANG [22], p. 2), on a l'implication

$$\dim G < \infty \quad \Rightarrow \quad t \text{ algébrique}$$

et de plus le degré de t ne dépasse pas $\dim G$. Pour établir l'algébricité de t il nous suffit donc de montrer que G est de dimension finie.

Soit $g \in \mathcal{N}(t)$. Alors, puisque $E = F$, g^q est une combinaison linéaire à coefficients dans $K(X)$ des $h \in \mathcal{N}(t)$. Par suite, G est engendré par les

$$\Pi_{g \in \mathcal{N}(t)}\, g^{\lambda(g)} \qquad \text{où} \quad \lambda(g) < q.$$

il en résulte

$$\dim G \leqslant q^{|\mathcal{N}(t)|} - 1,$$

où $|\mathcal{N}(t)|$ est le cardinal de $\mathcal{N}(t)$.

C.Q.F.D.

7. Preuve que (iii) $\Rightarrow$ (i)

Soit K un corps fini de caractéristique p à $q = p^s$ éléments, $f = (f_n)$ une suite algébrique sur $K(X)$, α une injection d'un ensemble fini Ξ dans K et $t = (t_n) = (\alpha^{-1} f_n)$. Nous montrons ci-dessous que t est q-reconnaissable (ce qui démontrera que t est p-reconnaissable d'après [10]) ou ce qui revient au même que f est q-reconnaissable.

Nous reprenons les notations du paragraphe 6. Comme nous l'avons déjà vu, il suffit de montrer que $\mathcal{N}(f)$ est fini.

f étant algébrique sur $K(X)$, l'espace vectoriel engendré par les f^n $(n \in \mathbb{N})$ est de dimension finie sur $K(X)$, et il existe donc des éléments $a_0, \ldots, a_k$ de $K[X]$ non tous nuls tels que :

$$\textstyle\sum_{i=0}^{k} a_i . f^{q^i} = 0.$$

Soit j le plus petit entier tel qu'existe une relation du type précédent avec $a_j \neq 0$. Montrons que $j = 0$. En effet, comme

$$a_j = \textstyle\sum_{r=0}^{q-1} X^r (A_r(a_j))^q,$$

il existe un entier r tel que $A_r(a_j) \neq 0$.

De la relation $\sum_{i=j}^{k} a_i f^{q^i} = 0$ on déduit alors $\sum_{i=j}^{k} A_r(a_i f^{q^i}) = 0$ soit encore, compte tenu du fait que pour g et h dans $K((X))$ $A_r(g^q h) = g\,A_r(h)$, et en supposant $j \neq 0$,

$$\textstyle\sum_{i=j}^{k} A_r(a_i)\, f^{q^{i-1}} = 0$$

qui est une relation du type précédent où le coefficient de $f^{q^{j-1}}$ est différent de 0, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur j.

On a donc une relation

$$\sum_{i=0}^{k} a_i f^{q^i}=0 \qquad \text{avec} \quad a_0\neq 0.$$

Posant $g=f/a_0$, on a

$$g=\sum_{i=1}^{k} b_i g^{q^i} \qquad \text{où} \quad b_i=-a_i a_0^{q^i-2}\in K[X].$$

Soit $N=\sup(\deg a_0, \sup_{i=1,\ldots,k}\deg b_i)$, et soit H l'ensemble des h de $K((X))$ de la forme

$$h=\sum_{i=0}^{k} c_i g^{q^i}, \qquad c_i\in K[X], \quad \deg c_i\leqslant N,$$

H est un ensemble fini, et $f=a_0 g$ appartient à H. Il suffit donc de montrer que H est stable par les applications A_r.

Or, si h appartient à H, on a

$$A_r(h)=A_r(c_0 g+\sum_{i=1}^{k} c_i g^{q^i})=A_r(\sum_{i=1}^{k}(c_0 b_i+c_i)g^{q^i})$$
$$=\sum_{i=1}^{k} A_r(c_0 b_i+c_i)g^{q^{i-1}}.$$

Comme $\deg(c_0 b_i+c_i)\leqslant 2N$, $\deg A_r(c_0 b_i+c_i)\leqslant 2N/q\leqslant N$ et par conséquent $A_r(h)$ appartient bien à H, ce qui termine la démonstration.

Une démonstration de nature différente, s'appuyant notamment sur le théorème de la diagonale de FURSTENBERG [12] (*voir* aussi [11]) est donnée dans [4].

8. Problème de transcendance

Dans [5], COBHAM démontre que si k et k' sont deux entiers tels que $\log k/\log k'\notin \mathbb{Q}$ et si une suite t est à la fois k-reconnaissable et k'-reconnaissable, alors t est périodique à partir d'un certain rang. Compte tenu du théorème 1, ce résultat se traduit de la façon suivante.

COROLLAIRE. — *Soient K et K' deux corps finis de caractéristiques différentes, soit Ξ un ensemble fini non vide et soient $\alpha : \Xi \hookrightarrow K$ et $\alpha' : \Xi \hookrightarrow K'$ deux injections. Si la suite $t\in\Xi^{\mathbb{N}}$ est telle que $\alpha(t)$ soit algébrique sur $K(X)$ et $\alpha'(t)$ soit algébrique sur $K'(X)$, alors t est périodique à partir d'un certain rang. En d'autres termes, si un élément irrationnel a même développement dans $K((X))$ et dans $K'((X))$ alors il est transcendant sur l'un des deux corps $K(X)$ ou $K'(X)$.*

A la lumière du résultat précédent, on peut se poser la question suivante. Soit $t\in\Xi^{\mathbb{N}}\subset\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite k-reconnaissable. Est-il vrai que pour tout entier $g\geqslant 2$, le nombre *réel* $\sum_0^\infty t_n g^{-n}$ est soit rationnel soit transcendant? Divers auteurs, dont DEKKING [9], KUBOTA [21], LOXTON et VAN DER POORTEN [34] ont montré que si la suite $t \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est la suite de Morse, alors $\sum_0^\infty t_n 2^{-n}$ est transcendant. Récemment (fin 1979), LOXTON et VAN DER POORTEN auraient complètement résolu le problème (communication privée).

9. Déterminisme

Ainsi que nous l'énoncions dans l'introduction, les suites que nous étudions sont déterministes, c'est-à-dire d'entropie nulle [19], [28].

Soit $t \in \Xi^{\mathbb{N}}$ une suite définie sur un ensemble fini Ξ, dont le nombre d'éléments est $|\Xi|$.

Soit $H_n(t) = \operatorname{card}\{t_j t_{j+1} \ldots t_{j+n-1} \in \Xi^n / j \in \mathbb{N}\} \leqslant |\Xi|^n$.

L'entropie $H(t)$ de la suite t vérifie l'inégalité

$$H(t) \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log H_n(t).$$

Cette inégalité nous sert à établir le résultat suivant (reformulation du théorème 2 [6]).

THÉORÈME 2. — *Soit $k \geqslant 2$ un entier. Toute suite k-reconnaissable est déterministe, donc en particulier toute suite algébrique sur $K(X)$ où K est un corps fini est déterministe.*

Preuve. — Soit $t \in \Xi^{\mathbb{N}}$ une suite k-reconnaissable. Elle est engendrée par une k-substitution. Il existe donc un ensemble fini Σ, une application $\sigma : \Sigma \to \Sigma^k$ se prolongeant en une substitution $\sigma : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \Sigma^{\mathbb{N}}$, et une application $\tau : \Sigma \to \Xi$ telle que $t = \tau(s)$ et $s = \sigma(s)$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma(s_n) = s_{kn} s_{kn+1} \ldots s_{kn+k-1} \in \Sigma^k.$$

A priori, s_n peut prendre $|\Sigma|$ valeurs quand n parcourt $\mathbb{N}$ donc

$$H_k(s) = H_k(\sigma s) \leqslant k |\Sigma|^2$$

et plus généralement

$$H_{k^\nu}(s) \leqslant k^\nu |\Sigma|^2$$

pour tout $\nu \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier positif. Il existe un entier $\nu \geqslant 0$ tel que $k^{\nu-1} \leqslant n < k^\nu$. Alors :

$$H_n(s) \leqslant H_{k^\nu}(s) \leqslant k^\nu |\Sigma|^2 \leqslant nk |\Sigma|^2$$

donc

$$H(s) \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log H_n(s) = 0.$$

Comme

$$H(t)=H(\tau(s))\leqslant H(s)$$

on en déduit $H(t)=0$.

C.Q.F.D.

On sait (*voir* par exemple [28]) que toute suite presque périodique au sens de Besicovitch est déterministe. On peut alors se poser la question : les suites que nous étudions ici sont-elles ou non presque périodiques, lorsqu'elles ne sont pas périodiques à partir d'un certain rang?

Montrons seulement ici que *la suite de Morse* 01101001... *n'est pas presque périodique au sens de Besicovitch.*

Cette suite a pour terme général $v(n)$ égal à 0 ou 1 selon que la somme des chiffres de l'écriture de n en base 2 est paire ou impaire.

Supposons cette suite presque périodique au sens de Besicovitch. Quelque soit $\varepsilon>0$ il existe alors [28] un entier s tel que :

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\operatorname{card}\{n<N,\ v(n)\neq v(n+s)\}<\varepsilon.$$

Soit $\eta_l\ldots\eta_1$ l'écriture de s en base 2, avec $\eta_l=1$.

Soit n un entier dont l'écriture en base 2 se termine par $\varepsilon_l\ldots\varepsilon_1$ avec $\varepsilon_l=1$. $n+s$ se termine alors par $\zeta_l\ldots\zeta_0$ et il y a une retenue.

En d'autres termes si :

n se termine par $0\ \underbrace{1\ldots1}_{r}\ \ \varepsilon_l\ldots\varepsilon_1$;

$n+s$ se termine par $1\ \underbrace{0\ldots0}_{r}\ \ \zeta_l\ldots\zeta_1$,

en outre les chiffres précédents sont identiques pour n et $n+s$.

On aura donc $v(n)=v(n+s)$ ou $v(n)\neq v(n+s)$ selon la parité de r, et la densité de l'ensemble des n dont l'écriture en base 2 se termine par $\varepsilon_l\ldots\varepsilon_0$, et tels que $v_n\neq v_{n+s}$ sera donc égale soit à $(1/2^{l+1})+(1/2^{l+3})+\ldots$ soit à $(1/2^{l+2})+(1/2^{l+4})+\ldots$ en tout cas supérieure ou égale à $1/(3\times 2^l)$.

Il y a par ailleurs 2^{l-1} mots binaires du type $\varepsilon_l\ldots\varepsilon_1$ avec $\varepsilon_l=1$. On aura donc :

$$\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\operatorname{card}\{n<N,\ v(n)\neq v(n+s)\}\geqslant 2^{l-1}\times\frac{1}{3\times 2^l}=\frac{1}{6}$$

ce qui contredit l'hypothèse si ε est choisi inférieur à $1/6$.

Remarque. — Cette propriété résulte également de l'étude spectrale de la suite (existence d'une composante continue [23] et [35]).

Par contre, *la suite* $w=(w(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *point fixe de la substitution* $\begin{cases}0\to 01\\ 1\to 00\end{cases}$ *n'est pas périodique à partir d'un certain rang, mais est presque périodique au sens de Besicovitch.*

On vérifie immédiatement que $w(2n)=0$, $w(2n+1)=1-w(n)$.

Il en résulte que quelques soient les entiers k, q, r de $\mathbb{N}$ avec $0\leqslant r<2^k$ on a

$$w(2^k q+r)=w(r)$$

sauf si le développement de r en écriture binaire ne comporte que des 1, c'est-à-dire sauf si $r=2^k-1$.

Il existe donc un polynôme trigonométrique

$$P_k(n)=\sum\nolimits_{0\leqslant j<2^k} c_{j,k}\, e^{2i\pi jn/2^k},$$

tel que $w(n)=P_k(n)$ sauf éventuellement si $n=2^k-1\,(\mathrm{mod}\,2^k)$ et on peut choisir P_k [par exemple en prenant $P_k(n)=w(n)$ pour $n=0,\ldots,2^k-1$] de manière à ce qu'il prenne sur $\mathbb{N}$ uniquement les valeurs 0 ou 1.

Pour un tel choix, on aura alors :

$$\overline{\lim}_{n<N}\frac{1}{N}\sum\nolimits_{n<N}|w(n)-P_k(n)|\leqslant\frac{1}{2^k}$$

quantité qui peut être rendue aussi petite que l'on veut, ce qui entraîne que w est presque périodique au sens de Besicovitch.

Par ailleurs, si $f=\Sigma\, w(n)x^n$ est l'élément de $\mathbb{F}_2((x))$ associé à w, f vérifie l'équation

$$x(1+x^2)f^2+(1+x^2)f+x=0$$

dont on prouve aisément qu'elle n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2(x)$, ce qui entraîne que la suite w n'est pas périodique à partir d'un certain rang.

Notons que compte tenu des exemples précédents, les deux autres types de 2-substitution sur un ensemble à deux éléments sont (aux changements de notations près) :

$$\begin{cases}0\to 10\\ 1\to 01\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}0\to\alpha\beta\\ 1\to\alpha\beta.\end{cases}$$

Le premier n'admet pas de point fixe, le deuxième un point fixe périodique.

10. Les suites de Morse généralisées

Nous nous proposons d'illustrer la théorie précédente en décrivant dans le détail une sous-classe de suites quadratiques. Pour simplifier l'exposé nous choisirons $K = \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} = \{0, 1\}$.

Commençons par généraliser la notion de mots construits sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Soit z un symbole différent de 0 et de 1. Un mot « généralisé » u est un élément de $\{0, 1, z\}^*$ qui, s'il est non vide, débute nécessairement par 0 ou 1 :

$$u \in \{0, 1\}\{0, 1, z\}^*.$$

Ainsi, si u est non vide,

$$u = u_{l-1}\, u_{l-2} \ldots u_1\, u_0, \qquad u_{l-1} \neq z.$$

Si u ne contient aucune lettre z, on dira que u est un *mot simple*; sinon u est un *mot composé*. (Le symbole z peut être interprété comme un trait d'union. Dans notre modèle, on admettra des mots se terminant par un ou plusieurs traits d'union ou encore des mots ayant plusieurs traits d'union consécutifs.) Que le mot soit simple ou composé, sa longueur est $|u| = l$.

Un mot est dit *trivial* s'il ne contient que les lettres 0 et z. Il est non trivial s'il contient une fois au moins la lettre 1.

Soit $u = u_l u_{l-1} \ldots u_0$ un mot généralisé (à partir de maintenant on emploiera le vocable « mot » pour désigner un « mot généralisé »). Soit $n \geqslant 0$ un entier et soit :

$$\ldots e_k(n)\, e_{k-1}(n) \ldots e_1(n)\, e_0(n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}},$$

où $e_k(n) = 0$ pour $k > [\log n/\log 2]$ le développement binaire de n que l'on notera encore n si aucune confusion n'est possible.

Le développement est précédé d'une « queue infinie » de 0. Le nombre d'apparitions de u dans n est par définition

$$\mu(u, n) = \operatorname{card}\{i \geqq 0 / \forall j \in [l],\ u_j \neq z \Rightarrow u_j = e_{j+i}(n)\}.$$

Si donc u est trivial, alors $\mu(u, n)$ est infini. Par contre, si u est non trivial, alors $\mu(u, n)$ est fini. Dans ce cas, on considère la suite infinie

$$\mu = \mu(u) = \mu(u, 0)\, \mu(u, 1)\, \mu(u, 2) \ldots$$

où chaque composante est réduite modulo 2.

La suite $\mu(1)$ est la suite classique de Morse. La suite $\mu(11)$ est la suite de RUDIN-SHAPIRO ([3], [31], [32]) qui vérifie l'inégalité

$$\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{\mu(11,n)}e^{2i\pi nx}\right| \leqslant 5\sqrt{N}$$

pour tout $x \in \mathrm{R}$ et tout $N \in \mathbb{N}$.

Nous nous proposons d'étudier les propriétés générales des suites $\mu(u)$ appelées ici suites de Morse.

Au mot simple $u = u_{l-1}u_{l-2}\ldots u_0$ est associé l'entier

$$\nu(u) = \sum_{j=0}^{l-1} u_j 2^j.$$

Soit maintenant v un mot composé de longueur l qui contient la lettre z en k endroits $(0 \leqslant k < l)$. En remplaçant tout à tour chacune de ces lettres z par 0 ou 1 on obtient 2^k mots de longueur l. Soit $E(v)$ leur ensemble. On appelle *spectre* de v l'ensemble

$$\mathrm{sp}(v) = \{\nu(u)/u \in E(v)\}.$$

Ainsi v est un mot simple si et seulement si son spectre ne contient qu'un seul élément.

On remarquera que si v est non trivial alors $0 \notin \mathrm{sp}(v)$.

On définit enfin le polynôme

$$P_v = \sum_{n \in \mathrm{sp}(v)} X^n.$$

THÉORÈME 3. — *Soit u un mot non trivial. La suite $\mu = \mu(u)$ est quadratique*

$$(1+X)^{2^{|u|+1}}\mu^2 + (1+X)^{2^{|u|}}\mu + P_u = 0.$$

Ce résultat est établi au paragraphe suivant. D'après le théorème 1, μ est engendré par une 2-substitution. Nous nous proposons de décrire complètement la génération de μ à partir d'une substitution mais, pour en faciliter l'exposé, nous généralisons la notion de substitution.

Soient j et k deux entiers, $1 \leqslant j < k$. Soit :

$$\sigma : \{0, 1\}^j \to \{0, 1\}^k.$$

Comme au paragraphe 3, on prolonge σ en une application $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\sigma(\mathop{\complement}_{i=0}^{\infty} x_i) = \mathop{\complement}_{i=0}^{\infty} \sigma(x_{ij}x_{ij+1}\ldots x_{ij+j-1}).$$

Une telle application σ s'appelle une (j, k)-substitution. En particulier, une $(1, k)$-substitution n'est autre qu'une k-substitution.

Considérons les quatre 2-substitutions $\theta^{(0)}$, $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, $\theta^{(3)}$ définies par

$$\begin{cases} \theta^{(0)}(d)=d,\, d, & d\in\{0, 1\}, \\ \theta^{(1)}(d)=1-d,\, d, \\ \theta^{(2)}(d)=d,\, 1-d, \\ \theta^{(3)}(d)=1-d,\, 1-d. \end{cases}$$

Nous établirons le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit u un mot non trivial. Soit $k=2^{|u|-1}$. La suite $\mu(u)$ est point fixe de la $(k, 2k)$-substitution σ définie par*

$$\sigma(v_0 v_1 \ldots v_{k-1}) = \textstyle\coprod_{j=0}^{k-1} \theta^{(\alpha_j)}(v_j), \qquad v_j\in\{0, 1\},$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_j&=0 \quad \textit{si} \quad 2j\notin \mathrm{sp}(u) \quad \textit{et} \quad 2j+1\notin \mathrm{sp}(u), \\ \alpha_j&=1 \quad \textit{si} \quad 2j\in \mathrm{sp}(u) \quad \textit{et} \quad 2j+1\notin \mathrm{sp}(u), \\ \alpha_j&=2 \quad \textit{si} \quad 2j\notin \mathrm{sp}(u) \quad \textit{et} \quad 2j+1\in \mathrm{sp}(u), \\ \alpha_j&=3 \quad \textit{si} \quad 2j\in \mathrm{sp}(u) \quad \textit{et} \quad 2j+1\in \mathrm{sp}(u). \end{aligned}$$

Le théorème 3 généralise une remarque de BAUM, HERZBERG, LOMONACO Jr et SWEET [2]. Le théorème 4 généralise la propriété génératrice de la suite de Morse.

11. Preuve du théorème 3

Soit $u=u_{l-1}u_{l-2}\ldots u_0$ un mot *simple* de longueur l. Alors :

$$\mu(u, n) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{l-1} (e_{k+j}(n)+\bar{u}_j) \pmod 2$$

où $\bar{u}_j=1-u_j$. Le premier terme ($k=0$) de la somme ci-dessus

$$\varphi_u(n) = \textstyle\prod_{j=0}^{l-1} (e_j(n)+\bar{u}_j)$$

est la fonction caractéristique de la progression arithmétique $2^l\,\mathbb{N}+\nu(u)$. φ_u admet donc la période 2^l. Maintenant si $a\in\{0, 1\}$:

$$e_0(2n+a)=a,$$

$$e_k(2n+a)=e_{k-1}(n), \qquad k\geqslant 1$$

donc

$$\mu(u, 2n+a)=\varphi_u(2n+a)+\mu(u, n).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mu(u) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\mu(u,n)X^n\\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\mu(u,2n)X^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\mu(u,2n+1)X^{2n+1}\\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\mu(u,n)X^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\mu(u,n)X^{2n+1}\\ &\quad+\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_u(2n)X^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_u(2n+1)X^{2n+1}\\ &=(1+X)\mu^2(u)+\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_u(n)X^n\\ &=(1+X)\mu^2(u)+X^{\nu(u)}(1+X)^{-2^{|u|}},\end{aligned}$$

d'où

$$(1)\qquad (1+X)^{2^{|u|+1}}\mu^2+(1+X)^{2^{|u|}}\mu+X^{\nu(u)}=0$$

Cette égalité établit le théorème 3 pour les mots simples.

Soit maintenant v un mot composé. Remarquons que

$$\mu^j(v)=\textstyle\sum_{u\in E(v)}\mu^j(u)\qquad (j=1,\,2)$$

et que

$$P_v=\textstyle\sum_{u\in E(v)}X^{\nu(u)}.$$

L'égalité (1) sommée sur l'ensemble $E(v)$ conduit à

$$(1+X)^{2^{|v|}}\mu^2(v)+(1+X)^{2^{|v|}}\mu(v)+P_v=0.$$

C.Q.F.D.

12. Preuve du théorème 4

Soit u un mot non trivial et soit $k=2^{|u|-1}$. Montrons que la $(k,\,2k)$-substitution σ définie par

$$v_0\,v_1\,\ldots\,v_{k-1}\overset{\sigma}{\rightarrow}\textstyle\bigcap_{j=0}^{k-1}\theta^{(\alpha_j)}(v_j)$$

engendre bien $\mu(u)$. A cet effet, nous montrons d'abord que les suites $t\in\{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$ points fixes de σ vérifient

$$(2)\qquad (1+X)^{2^{|u|+1}}t^2+(1+X)^{2^{|u|}}t+P_u=0.$$

Soit donc

$$t=\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}t_n X^n$$

une suite (série formelle) invariante par σ. On a

$$t=\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k-1}t_{n+kj}X^{n+kj}$$

d'où

$$\sigma(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\sigma\left(\sum_{n=0}^{k-1}t_{n+kj}X^{n+kj}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k-1}\theta^{(\alpha_n)}(t_{n+kj}X^{n+kj}),$$

où il est entendu que

$$\begin{aligned}\theta^{(0)}(t_m X^m)&=t_m X^{2m}+t_m X^{2m+1},\\ \theta^{(1)}(t_m X^m)&=(1-t_m)X^{2m}+t_m X^{2m+1},\\ \theta^{(2)}(t_m X^m)&=t_m X^{2m}+(1-t_m)X^{2m+1},\\ \theta^{(3)}(t_m X^m)&=(1-t_m)X^{2m}+(1-t_m)X^{2m+1}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\sigma(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k-1}&(t_{n+kj}X^{2n+2kj}+t_{n+kj}X^{2n+2kj+1})\\ &+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n<k,\,\alpha_n=1}X^{2n+2kj}+\sum_{n<k,\,\alpha_n=2}X^{2n+2kj+1}\\ &\qquad+\sum_{n<k,\,\alpha_n=3}(X^{2n+2kj}+X^{2n+2kj+1})\\ &\qquad\qquad=t^2(1+X)+(1+X)^{-2k}P_u.\end{aligned}$$

L'égalité $t=\sigma(t)$ établit alors (2).

Il reste à observer que les deux zéros de l'équation (3) diffèrent par le terme additif $(1+X)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}X^n$.

Ainsi, les deux zéros $t=(t_n)$ et $\bar{t}=(1-t_n)$ sont l'un et l'autre points fixes de σ. Comme $\mu(u)$ vérifie (2), $\mu(u)$ est bien point fixe de σ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUM (L.) et SWEET (M.). — Continued fractions of algebraic power series in characteristic 2, *Ann. Math.*, t. 103, 1976, p. 593-610.

[2] BAUM (L.), HERZBERG (N.), LOMONACO Jr (S.) et SWEET (M.). — Fields of almost periodic sequences, *J. Combinat. Theory (A)*, t. 22, 1977, p. 169-180.

[3] BRILLHART (J.) et CARLITZ (L.). — Note on the Shapiro polynomials. *Proc. Am. Math. Soc.*, t. 25, 1970, p. 114-118.

[4] CHRISTOL (G.). — Ensembles presque périodiques k-reconnaissables, *Theoretical Computer Science*, t. 9, 1979, p. 141-145.

[5] COBHAM (A.). — On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata, *Mathem. Syst. Theory*, t. 3, 1969, p. 186-192.

[6] COBHAM (A.). — Uniform tag sequences, *Mathem. Syst. Theory*, t. 6, 1972, p. 164-192.

[7] CONWAY (J. H.). — *Regular algebra and Finite machines*, Chapman and Hall, 1971.

[8] COQUET (J.), KAMAE (T.) et MENDES FRANCE (M.). — Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, t. 105, 1977, p. 369-384.

[9] DEKKING (M.). — Transcendance du nombre de Thue-Morse, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 285, 1977, série A, p. 157-160.

[10] EILENBERG (S.). — *Automata, Languages and Machines*, vol. A, 1974, Academic Press.

[11] FLIESS (M.). — Sur divers produits de séries formelles, *Bull. Soc. Math. France*, t. 102, 1974, p. 181-191.

[12] FURSTENBERG (H.). — Algebraic functions over finite fields, *J. Algebra*, t. 7, 1967, p. 271-277.

[13] GOTTSCHALK (W. H.) et HEDLUND (G. A.). — Topological dynamics, *Amer. Math. Soc.* Colloquium Publications, t. 36, 1955.

[14] HEDLUND (G. A.). — Remarks on the work of Axel Thue on sequences, *Nordisk Mat. Tidskr.*, t. 15, 1967, p. 148-150.

[15] KAKUTANI (S.). — Ergodic theory of shift transformations, *Proceedings of the 5th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* [1965, Berkeley], p. 405-414, Berkeley, University of California Press.

[16] KAKUTANI (S.). — Strictly ergodic symbolic dynamical systems, *Proceedings of the 6th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* [1970, Berkeley], vol. 2, p. 319-326, Berkeley, University of California Press.

[17] KAMAE (T.). — Spectrum of a substitution minimal set, *J. Math. Soc. Japan*, t. 22, 1970, p. 567-578.

[18] KAMAE (T.). — A topological invariant of substitution minimal sets, *J. Math. Soc. Japan*, t. 24, 1972, p. 285-306.

[19] KAMAE (T.). — Subsequences of normal sequences, *Israel J. of Math.*, t. 16, 1973, p. 121-149.

[20] KEANE (M.). — Generalized Morse sequences, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 10, 1968, p. 335-353.

[21] KUBOTA (K. K.). — An application of Kronecker's theorem to transcendence theory, *Séminaire Théorie des Nombres*, Bordeaux, 1975-76, exposé 25.

[22] LANG (S.). — *Algebraic numbers*, 1964, Addison-Werley.

[23] MAHLER (K.). — On the translation properties of a simple class of arithmetical functions, *J. Math. and Phys.*, t. 6, 1927, p. 158-163.

[24] MARTIN (J.). — Generalized Morse sequences on *n* symbols, *Proc. Am. Math. Soc.*, t. 54, 1976, p. 379-383.

[25] MARTIN (J.). — The structure of generalized Morse minimal sets on *n* symbols, *Trans. Am. Math. Soc.*, t. 232, 1977, p. 343-355.

[26] MORSE (M.). — Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, *Trans. Am. Math. Soc.*, t. 22, 1921, p. 84-100.

[27] QUEFFELEC (M.). — Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, t. 107, 1979, p. 385-421.

[28] RAUZY (G.). — Nombres normaux et processus déterministes, *Acta Arith.*, t. 29, 1976, p. 211-225.

[29] RAUZY (G.). — Propriétés statistiques de suites arithmétiques, Collection SUP, *Le Mathématicien*, t. 15, 1976, Presses Univ. de France.

[30] RAUZY (G.). — Une généralisation du développement en fraction continue, *Séminaire Théorie des Nombres*, Delange-Pisot-Poitou, 1976, Paris.

[31] RUDIN (W.). — Some theorems on Fourier coefficients, *Proc. Am. Math. Soc.*, t. 10, 1959, p. 855-859.

[32] SHAPIRO (H. S.). — *Extremal problems for polynomials and power series*, Thesis MIT, 1951.

[33] THUE (A.). — *Über die gegenseitige lage gleicher Teile gewisser Zeichenreichen Videnskabsselskabets Skrifter I Mat. nat. Kl.*, Christiania, 1906.

[34] VAN DER POORTEN (A.). — Propriétés arithmétiques et algébriques de fonctions satisfaisant une classe d'équations fonctionnelles, *Séminaire Théorie des Nombres*, Bordeaux, 1974-1975, exposé 7.

[35] WIENER (N.). — Generalized Harmonic Analysis, *Acta Mathem.*, t. 55, 1930, p. 117-258 (en particulier p. 204-209).