BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHÈLE MASTRANGELO

Différentiabilité fine et différentiabilité sur des compacts

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 3-15

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__3_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 3-15.

DIFFÉRENTIABILITÉ FINE ET DIFFÉRENTIABILITÉ SUR DES COMPACTS

PAR

MICHÈLE MASTRANGELO (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous considérons la théorie du potentiel newtonien sur $\mathbf{R}^d$. Soient A un ouvert fin de $\mathbf{R}^d$, et f une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbf{R}$. Nous disons que f estfinement différentiable en un point x appartenant à A, de différentielle $\nabla f(x) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε, $\mathbf{P}^x$-presque sûrement strictement positif tel que, pour tout temps d'arrêt $S \leqslant T_\varepsilon$, on ait

$$\mathbf{E}^x\left[\frac{|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]|}{\|X(S) - x\|}\right] < \varepsilon,$$

où le processus X est le brownien standard dans $\mathbf{R}^d$.

Nous démontrons que, si f est finement différentiable sur un ouvert fin A, alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset A$, tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus K_\varepsilon$ soit majorée par ε et sur lequel f est différentiable, les deux différentielles ainsi obtenues étant égales.

ABSTRACT. — In this paper, we consider the theory of the newtonian potential on $\mathbf{R}^d$. Let A be a finely open set of $\mathbf{R}^d$, and f a real valued function on A. We say that f is finely differentiable at point x of A, of differential $\nabla f(x) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ if, for all real $\varepsilon > 0$, there exists a stopping time T_ε, $\mathbf{P}^x$- almost everywhere strictly positive such that, for all stopping time $S \leqslant T_\varepsilon$, one has

$$\mathbf{E}^x\left[\frac{|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]|}{\|X(S) - x\|}\right] < \varepsilon,$$

where X is the brownian process on $\mathbf{R}^d$.

We demonstrate that, if f is finely differentiable on a finely open set A, there exists, for all real $\varepsilon > 0$, a compact set $K_\varepsilon \subset A$, such that the Lebesgue measure of $A \setminus K_\varepsilon$ is majorised by ε and on which f is differentiable, the two differentials thus obtained being equal.

(*) Texte reçu le 7 novembre 1978, révisé le 7 mai 1979.

Michèle MASTRANGELO, Équipe d'analyse, Tour 46, université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/ 3 /$ 5.00

DÉFINITION. — Dans ce travail, nous disons qu'une fonction f, presque-borélienne [4], définie sur un ouvert fin A de $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est finement différentiable en un point x de A, de différentielle $\nabla f(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε, $\mathbb{P}^x$-presque sûrement strictement positif, tel que, pour tout temps d'arrêt $S \leqslant T_\varepsilon$, on ait

$$\mathbb{E}^x\left[\frac{|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S)-x]|}{\|X(S)-x\|}\right] < \varepsilon.$$

REMARQUE 1. — *Si A est ouvert et si f est différentiable en $x \in A$, alors elle y est finement différentiable.*

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact de x, $V(x, \varepsilon)$, tel que, pour tout $y \in V(x, \varepsilon)$,

$$\frac{|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]|}{\|y-x\|} < \varepsilon.$$

Notant T_ε le temps d'entrée dans le complémentaire de $V(x, \varepsilon)$, nous voyons que f est finement différentiable en x.

PROPOSITION 2. — *Si f est finement différentiable sur un ouvert fin A, elle y est finement continue et, par conséquent, elle est mesurable pour la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. — Soit x un point de A, alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε, $\mathbb{P}^x$-presque sûrement strictement positif tel que, pour tout temps d'arrêt $S \leqslant T_\varepsilon$, on ait

$$\mathbb{E}^x\left[\frac{|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S)-x]|}{\|X(S)-x\|}\right] < \varepsilon.$$

Supposons f non finement continue en x; il existerait alors un réel $\alpha > 0$ et un borélien B, finement adhérent à x, tels que, pour tout $y \in B$, on ait

$$|f(y) - f(x)| > \alpha.$$

Comme B est finement adhérent à x, $\mathbb{P}^x$-presque sûrement,

$$T_B = 0 = \inf\{T_K;\ K \text{ compact} \subset B\}.$$

Soient ε un réel strictement inférieur à $\alpha/4$, et S un temps d'arrêt inférieur à T_ε et au temps d'entrée dans le complémentaire de la boule de rayon

$$\rho = \inf(1, \alpha/2\|\nabla f(x)\|) \quad \text{si} \quad \|\nabla f(x)\| > 0,$$
$$\rho = 1 \quad \text{si} \quad \nabla f(x) = 0.$$

Il existe alors un compact $K \subset B$ tel que

$$\mathbb{P}^x(\{T_K < S\}) > 2^{-1}.$$

Nous notons R le temps d'arrêt, $R = S \wedge T_K < T_{\alpha/4}$, et nous voyons que

$$\mathbb{E}^x\left[\frac{|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R)-x]|}{\|X(R)-x\|}\right]$$

$$\geqslant \mathbb{E}^x[|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R)-x]|]$$

$$\geqslant \mathbb{E}^x[|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R)-x]| . \mathbf{1}_{\{X(R) \in B\}}],$$

— si $\nabla f(x) \neq 0$,

$$\geqslant \mathbb{E}^x[|\alpha - \|\nabla f(x)\| . \text{sup ess} \|X(R)-x\|| . \mathbf{1}_{\{X(R) \in B\}}]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left|\alpha - \|\nabla f(x)\| \frac{\alpha}{2\|\nabla f(x)\|}\right| \geqslant \frac{\alpha}{4},$$

—et si $\nabla f(x) = 0$,

$$\geqslant \frac{1}{2}\alpha.$$

On obtient une impossibilité. La fonction f est finement continue en x.

D'après un résultat de Fuglède [2], une fonction finement continue est de première classe de Baire; elle est, par conséquent, mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Théorème 3. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A, finement différentiable en un point $x \in A$. Pour tout réel $\alpha > 0$, il existe un voisinage fin de x, $V(x, \alpha)$, tel que, pour tout y appartenant à $V(x, \alpha)$, on ait*

$$|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x]| < \alpha \|y-x\|.$$

Remarque relative au théorème 3. — Nous pourrions, *a priori*, penser qu'une formulation, un peu plus restrictive de la différentiabilité fine, puisse permettre d'obtenir une différentiabilité suivant la définition de Whitney qui s'exprimerait ici de la manière suivante : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage fin de x, $V(x, \alpha)$, tel que, pour tout (y, z) appartenant à $V(x, \alpha) \times V(x, \alpha)$, on ait

$$|f(y) - f(z) - \nabla f(x)[y-z]| < \alpha \|y-z\|.$$

La notion qui semblerait alors adéquate serait la suivante : f serait dite finement différentiable si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T_ε,

$\mathbb{P}^x$-strictement positif tel que tout couple (S, Σ) de temps d'arrêts vérifiant, $\mathbb{P}^x$ presque sûrement, $0 \leqslant \Sigma < S \leqslant T_\varepsilon$ satisfasse à

$$\mathbb{E}^x\left[\frac{|f \circ X(S) - f \circ X(\Sigma) - \nabla f(x)[X(S) - X(\Sigma)]|}{\|X(S) - X(\Sigma)\|}\right] < \varepsilon.$$

Cependant le raisonnement du théorème 3 ne permettrait pas alors d'obtenir une différentiabilité suivant Whitney; en effet, posant

$$\Phi(y, z) = \frac{|f(y) - f(z) - \nabla f(x)[y - z]|}{\|y - z\|},$$

le fait que lim sup fine $\Phi(y, z)$, pour $y \to x$, $z \to x$, $y \neq z$, soit non nulle, n'implique nullement l'existence de deux boréliens $N(x)$ et $P(x)$, tous deux finement adhérents à x, et tels que

$$\forall y \in N(x), \quad \forall z \in P(x), \qquad \text{on ait } \Phi(y, z) \geqslant \alpha.$$

Démonstration. — Si l'énoncé de ce théorème était faux, il existerait un réel $\alpha > 0$ tel que

$$B = \{ y \in A;\ |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| \geqslant \alpha \|y - x\| \}$$

soit finement adhérent à x.

Nous aurions alors, $\mathbb{P}^x$-presque sûrement,

$$T_B = 0 = \inf\{ T_K;\ K \text{ compact} \subset B \}.$$

Nous considérons un temps d'arrêt $S \leqslant T_{\alpha/2}$. Il existe un compact $K \subset B$ tel que

$$\mathbb{P}^x(\{ S \wedge T_K = T_K \}) > 2^{-1}.$$

Nous notons $R = S \wedge T_K < T_{\alpha/2}$, et nous voyons que

$$\mathbb{E}^x\left[\frac{|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R) - x]|}{\|X(R) - x\|}\right] \geqslant \mathbb{E}^x\left[\frac{|f \circ X(R) - f(x) - \nabla f(x)[X(R) - x]|}{\|X(R) - x\|} . 1_{\{X(R) \in B\}}\right] \geqslant \alpha/2.$$

Nous obtenons une contradiction avec le fait que R est majoré par $T_{\alpha/2}$; d'où nous déduisons le théorème 3.

Proposition 4. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A, et finement différentiable en un point x de A, alors la différentielle $\nabla f(x)$ est unique.*

Démonstration. — *Soit* $\nabla f(x)$ et $Df(x)$ deux différentielles fines de f en x. Pour tout réel $\alpha>0$, d'après le théorème 3, on peut déterminer des voisinages fins $V(x, \alpha)$ et $W(x, \alpha)$ tels que

$$\forall y \in V(x, \alpha), \quad \frac{|f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]|}{\|y-x\|}<\alpha$$

et

$$\forall y \in W(x, \alpha), \quad \frac{|f(y)-f(x)-Df(x)[y-x]|}{\|y-x\|}<\alpha.$$

On peut en déduire que, pour tout y appartenant à $V(x, \alpha) \cap W(x, \alpha)$, on a

$$\frac{|[Df(x)-\nabla f(x)][y-x]|}{\|y-x\|}<2\alpha.$$

Or $V(x, \alpha) \cap W(x, \alpha)$ est un voisinage fin de x, par conséquent l'ensemble des $(y-x)/\|y-x\|$, où y décrit $V(x, \alpha) \cap W(x, \alpha)$, est dense (pour la norme de $\mathbb{R}^d$) dans la sphère unité; on peut conclure que, pour tout réel $\alpha>0$, la norme de l'opérateur $[Df(x)-\nabla f(x)]$ est majorée par 2α, et $Df(x)=\nabla f(x)$.

Lors de travaux antérieurs [3], j'ai utilisé la notion de différentiabilité stochastique qui se définit de la manière suivante : Soit f une fonction définie sur un ouvert fin $A \subset \mathbb{R}^d$; nous disons que f est stochastiquement différentiable en un point $x \in A$, de différentielle $\nabla f(x)$ appartenant à $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ si, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un temps d'arrêt T_ε, $\mathbb{P}^x$-presque sûrement strictement positif, pour lequel tout temps d'arrêt $S \leqslant T_\varepsilon$ vérifie

$$\mathbb{E}^x[|f \circ X(S)-f(x)-\nabla f(x)[X(S)-x]|^2]<\varepsilon \mathbb{E}^x(S).$$

Comme corollaire du théorème 3, nous pouvons démontrer que la différentiabilité fine implique la différentiabilité stochastique et que les deux différentielles sont égales.

PROPOSITION 5. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A, finement différentiable en un point $x \in A$, alors f est stochastiquement différentiable en x et les deux différentielles fine et stochastique sont égales.*

Démonstration. — D'après le théorème 3, nous savons que, pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un voisinage fin compact de x, $V(x, \varepsilon)$, tel que, pour tout $y \in V(x, \varepsilon)$, nous ayons

$$|f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]|<\varepsilon\|y-x\|.$$

Si S est un temps d'arrêt majoré par $T_\varepsilon = T_{CV(x,\varepsilon)}$, alors, pour presque toute trajectoire, nous avons

$$|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]| < \varepsilon \| X(S) - x \|.$$

En élevant au carré, et en intégrant par rapport à $\mathbb{P}^x$, nous voyons que

$$\mathbb{E}^x[|f \circ X(S) - f(x) - \nabla f(x)[X(S) - x]|^2] < \varepsilon^2 \mathbb{E}^x(S).$$

Par suite, f est stochastiquement différentiable en x, et la différentielle stochastique est égale à la différentielle fine.

Nous allons maintenant établir un raffinement du théorème 3, et montrer que, si f est finement différentiable en $x \in A$, il existe un ensemble M_x, effilé en x, tel que $(f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]) / \| y - x \|$ converge vers zéro lorsque y tend vers x, au sens de la norme, sur $A \setminus M_x$.

THÉORÈME 6. — *Soit f une fonction définie sur un ouvert fin A et finement différentiable en un point x de A. Il existe un ensemble M_x, effilé en x, tel que $\nabla f(x)$ soit la différentielle de x, au sens de la norme, sur $A \setminus M_x$, c'est-à-dire : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\rho(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $y \in [A \cap B(x, \rho(\varepsilon))] \setminus M_x$, $(|f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]|) / \| y - x \|$ soit majoré par ε.*

Démonstration. — Sur A, nous considérons la fonction

$$\Phi = \left(y \mapsto \frac{|f(y) - f(y) - \nabla f(x)[y - x]|}{\| y - x \|} \right) \quad \text{si} \quad y \neq x,$$

$$\Phi(x) = 0.$$

Cette fonction est finement continue (en y) et converge vers zéro, lorsque y tend finement vers x.

Utilisant l'assertion (b) du théorème T.72 de [4], nous pouvons déduire qu'il existe un ensemble M_x, effilé en x tel que Φ converge vers zéro, lorsque y tend vers x, au sens de la norme, dans $A \setminus M_x$.

THÉORÈME 7. — *Soit f une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin A. Alors son gradient fin, ∇f, est mesurable pour la mesure de Lebesgue sur A.*

Démonstration. — Utilisant le théorème 6, nous allons établir que les dérivées partielles $\partial f / \partial e = \nabla f . e$ (e vecteur unitaire de $\mathbb{R}^d$) sont mesurables.

Nous notons $\Delta(e)$ un ouvert (pour la norme), non effilé en 0 et tel que $|y . e| / \| y \|$ tende vers 1, quand y converge vers zéro, y appartenant à $\Delta(e)$.

Un tel ouvert existe toujours. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on peut, par exemple, prendre

$$\Delta(e)=\left\{y\in\mathbb{R}^d,\ \|y\|<1 \text{ et } \frac{\|y\|-|y.e|}{\|y\|^2}<1\right\}.$$

Nous notons Ω l'ensemble des trajectoires browniennes, et nous introduisons les fonctions φ, définies sur $A\times\Omega\times\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x,\omega,t)=\begin{cases}\dfrac{f[X_\omega(t)+x]-f(x)}{X_\omega(t).e} \\ \text{si} \\ \quad X_\omega(t)+x\in[\Delta(e)+x]\cap A, \\ 0 \quad \text{si} \quad X_\omega(t)+x\notin[\Delta(e)+x]\cap A.\end{cases}$$

L'application $(\omega\mapsto X_\omega(t))$ est $\mathbb{P}^0$-mesurable, par suite $((x,\omega)\mapsto X_\omega(t)+x)$ est $(dx\times\mathbb{P}^0)$-mesurable.

Or f est de première classe de Baire, car elle est finement continue, par suite

$$((x,\omega)\mapsto f[X_\omega(t)+x]-f(x))$$

est $(dx\times\mathbb{P}^0)$-mesurable.

De même, $(\omega\mapsto X_\omega(t).e)$ est $\mathbb{P}^0$-mesurable, et $\mathbf{1}_{\{X_\omega(t)+x\in[\Delta(e)+x]\cap A\}}$ est $(dx\times\mathbb{P}^0)$-mesurable. On peut donc conclure que, t étant fixé, $((x,\omega)\mapsto\varphi(x,\omega,t))$ est $(dx\times\mathbb{P}^0)$-mesurable.

Or, pour $\mathbb{P}^0$-presque chaque trajectoire, le temps d'entrée de $X_\omega+x$ dans M_x est strictement positif. Il existe donc un réel $\rho(\omega)>0$ tel que, pour tout $t>0$ et $t<\rho(\omega)$, $X_\omega(t)+x$ appartienne à $A\setminus M_x$.

Nous voyons alors que, lorsque t tend vers zéro,

$$\lim_{t\to 0,\,(X_\omega(t)+x)\in[\Delta(e)+x]}\varphi(x,\omega,t)=\frac{\partial f}{\partial e}(x)=\nabla f(x).e$$

et

$$\lim_{t\to 0,\,(X_\omega(t)+x)\notin[\Delta(e)+x]}\varphi(x,w,t)=0.$$

Comme, $\mathbb{P}^0$-presque sûrement, le temps d'entrée de $X_\omega+x$ dans $\Delta(e)+x$ est nul, et comme $\Delta(e)+x$ est ouvert, il existe une suite (t_n) de *rationnels* strictement positifs, t_n tendant vers zéro, tels que, pour tout n, $(X_\omega(t_n)+x)$ appartienne à $[\Delta(e)+x]\cap[A\setminus M_x]$.

Nous pouvons en déduire que, $\mathbb{P}^0$-presque sûrement,

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) = \limsup \varphi(x, \omega, t) + \liminf \varphi(x, \omega, t).$$

$$(t \to 0,\ t \in \mathbb{Q}_+^*).$$

L'une des deux limites étant égale à $\partial f/\partial e(x)$ et l'autre étant nulle, suivant le signe de $\partial f/\partial e(x)$.

Les deux fonctions

$$\limsup \varphi(x, \omega, t) \qquad (t \to 0,\ t \in \mathbb{Q}_+^*)$$

et

$$\liminf \varphi(x, \omega, t) \qquad (t \to 0,\ t \in \mathbb{Q}_+^*),$$

sont, toutes deux, $(dx \times \mathbb{P}^0)$-mesurables; la fonction $\partial f/\partial e()$ est donc égale, $\mathbb{P}^0$-presque sûrement à une fonction $(dx \times \mathbb{P}^0)$-mesurable, qui est alors, nécessairement, $\mathbb{P}^0$-presque sûrement constante sur les $\{x) \times \Omega$.

La fonction

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x) = \mathbb{P}^0 [\limsup_{t \to 0,\, t \in \mathbb{Q}_+^*} \varphi(x, \omega, t) + \liminf_{t \to 0,\, t \in \mathbb{Q}_+^*} \varphi(x, \omega, t)],$$

est donc mesurable pour la mesure de Lebesgue sur A.

Construction explicite d'ensembles effilés $M(x)$. — Soient x un point de A et n un entier; nous notons

$$A_n = \{ y \in A;\ \|y - x\|^{-1} |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| > n^{-1} \}.$$

Soit p un réel strictement positif fixé, nous notons e_C^p le potentiel d'équilibre de C, enveloppe inférieure régularisée de l'ensemble des fonctions p-excessives qui majorent 1 sur C.

L'ensemble A_n est effilé en x, par suite, d'après le lemme XV, T. 69 de [4] :

$$\lim_{r \to 0} e^p_{A_n \cap B(x, r)}(x) = 0.$$

Nous désignons par r_n le réel

$$r_n = \inf [1, \sup \{ r > 0;\ e^p_{A_n \cap B(x, r)}(x) < 2^{-n-2} \}].$$

Nous notons

$$M_1(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [A_n \cap B(x, r_n)].$$

Nous écrivons λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

PROPOSITION 8. — *L'ensemble*

$$\mathcal{R} = \{ r>0,\ \forall r' \leqslant r,\ \lambda[M_1(x) \cap B(x, r')] \leqslant 2^{-1} \lambda[B(x, r')] \}$$

est non vide.

Désignant par ρ *la borne supérieure de* $\mathcal{R}$, *l'ensemble* $M(x) = M_1(x) \cap B(x, \rho)$ *est alors un ouvert fin effilé en* x, *vérifiant l'énoncé du théorème* 6 *et tel que, pour tout* $\alpha > 0$,

$$\lambda[M(x) \cap B(x, \alpha)] \leqslant 2^{-1} \lambda[B(x, \alpha)].$$

Démonstration. — D'après la sous-additivité des réduites,

$$e^{p}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[A_n \cap B(x, r_n)]}(x) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n-2} < 1.$$

Ceci implique, d'après la remarque XV 65, (*b*) de [4], que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [A_n \cap B(x, r_n)]$ est effilé en x.

Par ailleurs, la définition de $M_1(x)$ implique que le rapport

$$\| y-x \|^{-1} | f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x] |$$

converge vers zéro avec $\| y-x \|$, lorsque y reste dans $A \setminus M_1(x)$. Comme $M_1(x)$ est effilé en x, x est point de densité de $A \setminus M_1(x)$; par conséquent,

$$(\lambda[B(x, r)])^{-1} . \lambda[M_1(x) \cap B(x, r)],$$

converge vers zéro avec r, et l'ensemble $\mathcal{R}$ est bien non vide. L'assertion de la proposition 8 se déduit alors de manière immédiate.

PROPOSITION 9. — *Soit* f *une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin* A. *Pour tout réel* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $L = L(\varepsilon) \subset A$, *tel que la mesure de Lebesgue de* $A \setminus L$ *soit majorée par* ε, *sur lequel* f *et* ∇f *soient continues et tel que*, $\forall \alpha > 0$, $\exists \eta = \eta(\alpha) > 0$, $\forall x \in L$, $\forall y \in B(x, \eta) \setminus M(x)$:

$$\| y-x \|^{-1} | f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x] | < \alpha.$$

Démonstration. — Pour tout entier $m \geqslant 1$ et tout $x \in A$, il existe un réel $\eta(x, m) > 0$ tel que, pour tout $y \in B[x, \eta(x, m)] \setminus (M(x) \cup \{ x \})$, on ait

$$\| y-x \|^{-1} | f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y-x] | < m^{-1}.$$

Comme f et ∇f sont mesurables sur A, utilisant la caractérisation de Lusin, nous pouvons, pour tout $\varepsilon > 0$, déterminer un compact $J \subset A$, tel que la mesure de $A \setminus J$, soit majorée par $\varepsilon/2$ et sur lequel f et ∇f soient continues.

Pour tout entier $m \geqslant 1$ et tout réel $\eta > 0$, nous notons

$$Q(m, \eta) = \{ x \in J, \forall y \in B(x, \eta) \setminus (M(x) \cup \{x\}), \\ \|y-x\|^{-1} |f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]| < m^{-1} \}.$$

Nous voyons que

$$J \setminus Q(m, \eta) = \{ x \in J, \exists y \in B(x, \eta) \setminus (M(x) \bigcup \{x\}), \\ \|y-x\|^{-1} |f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]| \geqslant m^{-1} \}.$$

Dans $J \times J \times J = J^3$, nous considérons l'ensemble

$$\Lambda = \{ x \in J, y \in B(x, \eta) \setminus (M(x) \cup \{x\}), \\ z \in \{ \|y-.\|^{-1} |f(y)-f(.)-\nabla f(.)[y-.]| \geqslant m^{-1} \} \}.$$

D'après la construction de $M(x)$, donnée à la proposition 8, et la mesurabilité de f et ∇f, Λ est borélien dans l'ensemble produit $J \times J \times J = J^3$. Nous notons P l'hyperplan $\{x=z\}$. Nous voyons que $J \setminus Q(m, \eta)$ est la projection sur la première coordonnée de $\Lambda \cap P$. Par suite $J \setminus Q(m, \eta)$ est mesurable, et $Q(m, \eta)$ est aussi mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Comme $\bigcup_{\eta > 0} Q(m, \eta) = J$, on peut, pour tout $m \in \mathbb{N}$, déterminer un réel $\eta(m) > 0$, tel que la mesure de Lebesgue de $J \setminus Q(m, \eta(m))$ soit majorée par $\varepsilon . 2^{-m-2}$. Notant ensuite $Q = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Q(m, \eta(m))$, la mesure de $A \setminus Q$ est majorée par ε. L'ensemble Q contient un compact $L = L(\varepsilon)$ tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus L$ soit encore majorée par ε et sur lequel l'énoncé de la proposition 9 est vrai.

THÉORÈME 10. — *Soit f une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin $A \subset \mathbb{R}^d$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K = K(\varepsilon)$, contenu dans A, tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus K$ soit majorée par ε et tel que la restriction de f à K soit différentiable.*

Démonstration. — Nous reprenons les notations des propositions 8 et 9. L'ensemble des points de L qui ne sont pas des points de densité pour L est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Nous désignons par $K = K(\varepsilon)$ un compact, contenu dans l'ensemble des points de densité de L et tel que la mesure de Lebesgue de $A \setminus K$ soit majorée par ε.

Pour établir la différentiabilité de la restriction de f à K, il suffit de montrer que la restriction f/L est différentiable en tout point de K.

Si f/L n'était pas différentiable en un point $x \in K$, il existerait un réel $\alpha > 0$ et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, contenue dans $M(x)$ et convergeant vers x, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(y_n) - f(x) - \nabla f(x)[y_n - x]| > \alpha \|y_n - x\|.$$

Notant $\eta = \eta(\alpha/10)$ le réel défini à la proposition 9, nous voyons que, pour tout $z \in B(y_n, \eta) \setminus M(y_n)$,

$$|f(z) - f(y_n) - \nabla f(y_n)[z - y_n]| < \alpha \|z - y_n\|/10.$$

Utilisant la continuité de ∇f sur L, nous pouvons supposer, en nous limitant éventuellement à une suite cofinale des (y_n), que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la norme $\|\nabla f(y_n) - \nabla f(x)\|$ est majorée par $\alpha/10$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il apparaît alors que, pour tout z appartenant à $B[y_n, \inf(\eta, 2^{-1}\|y_n - x\|)] \setminus M(y_n)$, on a la minoration suivante :

$$\begin{aligned}
&|f(z) - f(x) - \nabla f(x)[z - x]| \\
&\qquad = |f(y_n) - f(x) - \nabla f(x)[y_n - x] + f(z) \\
&\quad - f(y_n) - \nabla f(y_n)[z - y_n] + [\nabla f(y_n) - \nabla f(x)][z - y_n]| \\
&\qquad \geqslant \alpha \|y_n - x\| - \alpha \|z - y_n\|/10 - \alpha \|z - y_n\|/10 \\
&\qquad \geqslant \alpha \frac{2}{3} \|z - x\| - \alpha \|z - x\|/10 - \alpha \|z - x\|/10 \geqslant \frac{\alpha}{3} \|z - x\|.
\end{aligned}$$

Nous voyons que l'ensemble

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B[y_n, \inf(\eta, 2^{-1}\|y_n - x\|)] \setminus M(y_n)$$

est contenu dans l'ensemble

$$E = \{ y \in L;\ |f(y) - f(x) - \nabla f(x)[y - x]| > \frac{\alpha}{3} \|y - x\|.$$

Comme f est finement différentiable en x, E est la trace sur L d'un ensemble effilé en x. Le point x est donc un point de densité 0 de $E \cap L$.

Nous allons montrer que C est la trace sur L d'un ensemble Γ de densité supérieure non nulle en x. Nous notons

$$\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ y \in A,\ \|y - y_n\| < \inf[\eta, 2^{-1}\|y_n - x\|],\ y \notin M(y_n) \}.$$

Soit r un réel >0, alors il existe un n tel que $3/2\|y_n-x\|\leqslant\inf(r,\eta)$ et

$$\lambda\left\{\Gamma\cap B\left(x,\frac{3}{2}\|y_n-x\|\right)\right\}$$
$$\geqslant\lambda\left\{[B(y_n,2^{-1}\|y_n-x\|)\setminus M(y_n)]\cap B\left(x,\frac{3}{2}\|y_n-x\|\right)\right\}$$
$$\geqslant 2^{-1}\lambda[B(y_n,2^{-1}\|y_n-x\|]\geqslant 2^{-d-1}\|y_n-x\|^d\Lambda,$$

où Λ désigne la mesure de Lebesgue d'une boule de rayon 1 :

$$\lambda\left\{\Gamma\cap \mathrm{B}\left(x,\frac{3}{2}\|y_n-x\|\right)\right\}\geqslant 2^{-1}.3^{-d}\lambda\left\{B\left(x,\frac{3}{2}\|y_n-x\|\right)\right\}.$$

Nous voyons alors que

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\lambda[\Gamma\cap \mathrm{B}(x,r)]}{\lambda[B(x,r)]}\geqslant 2^{-1}3^{-d}>0.$$

Or x est point de densité de L, d'après la définition de K, ce qui signifie que

$$\frac{\lambda[L\cap B(x,r)]}{\lambda[B(x,r)]}\to 1 \qquad (r\to 0).$$

Il en résulte que

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\lambda[C\cap B(x,r)]}{\lambda[B(x,r)]}\geqslant 2^{-1}.3^{-d}>0.$$

Or E vérifie, d'après le critère de Wiener,

$$\lim_{r\to 0}\frac{\lambda[E\cap B(x,r)]}{\lambda[B(x,r)]}=0.$$

On obtient donc une contradiction avec l'inclusion $C\subset E$, et le théorème est démontré.

THÉORÈME 11. — *Soit f une fonction définie et finement différentiable sur un ouvert fin $A\subset\mathbb{R}^d$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un compact $C\subset A$, tel que la mesure de Lebesgue de $A\setminus C$ soit majorée par ε et une fonction $g\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$ tels que $f/C=g/C$.*

Démonstration. — Soit C compact, contenu dans $K=K(\varepsilon)$, sur lequel les fonctions f et ∇f soient continues, et tel que la mesure de Lebesgue de $A\setminus C$ soit majorée par ε.

Nous considérons la fonction $\Phi(x, y)$, définie sur $C \times C$ par

$$\Phi(x, y) = \frac{|f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]|}{\|y-x\|}, \quad \text{si} \quad y \neq x,$$

$$\Phi(x, x) = 0, \qquad \forall x \in C.$$

Comme f/C est différentiable et comme f et ∇f sont continues, Φ est continue sur $C \times C$; il existe donc une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $(x, y) \in C \times C$,

$$|f(y)-f(x)-\nabla f(x)[y-x]| < M \|y-x\|.$$

Utilisant un résultat de H. Whitney (exposé au théorème VI, 4.7 de [6]), dans lequel nous supposons que $\gamma = k = 1$ et $j = 0$, nous savons qu'une fonction continûment différentiable sur un compact se prolonge en une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}^d$.

Il existe donc une fonction g, continûment différentiable sur $\mathbb{R}^d$ qui prolonge f/C, d'où l'énoncé du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Fuglede (B.). — *Finely harmonic functions.* — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Lecture Notes in mathematics*, 289).

[2] Fuglede (B.). — *Remarks on fine continuity and the base operation in potential theory*, *Math. Ann.* (à paraître).

[3] Mastrangelo (M.) et Dehen (D.). — Différentiabilité fine, Différentiabilité stochastique, différentiabilité stochastique de fonctions finement harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 28, 1978, fasc. 2, p. 161-186.

[4] Meyer (P.-A.). — *Processus de Markov.* — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Lecture Notes in Mathematics*, 26).

[5] Stein (E. M.). — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* — Princeton, Princeton University Press, 1970 (*Princeton mathematical Series*, 30).

[6] Whitney (H.). — Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 36, 1934, p. 63-89.