BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE RAMIS

Dimension cohomologique locale des modules fuchsiens

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 341-363
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__341_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 341-363.

DIMENSION COHOMOLOGIQUE LOCALE DES MODULES FUCHSIENS

par

J.-P. RAMIS

RÉSUMÉ. — Sur une variété analytique complexe nous relions la dimension cohomologique locale du faisceau structural (et plus généralement d'un module cohérent holonome fuchsien sur l'anneau des opérateurs différentiels analytiques) le long d'un sous-ensemble analytique aux « nombres de Betti » de ce sous-ensemble analytique (et plus généralement à des invariants convenables). Nous généralisons ainsi des résultats de BARTH et OGUS. Nos techniques sont basées sur la théorie des D-modules.

ABSTRACT. — On a complex analytic manifold whe find a relation between local cohomological dimension of the structural sheave (and more generally of a coherent holonomic fuchsian *D*-module) along an analytic subset and "Betti numbers" of this analytic subset (and more generally suitable invariants). So we generalize results of BARTH and OGUS. Our technics are based upon *D*-modules theory.

Dans toute la suite X désignera un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et Y, Z des sous-ensembles analytiques de X. On notera O_X le faisceau structural de X, D_X le faisceau d'anneaux (non commutatifs) des opérateurs différentiels d'ordre fini à coefficients dans O_X, et Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximal sur X.

Si M est un D_X-module cohérent (ou plus généralement $M^{\cdot}$ un complexe borné à droite de D_X-modules, à cohomologie cohérente et d'amplitude bornée), on désignera par $S^{\cdot}$ sa « solution » : $S^{\cdot} = \mathbf{R}\, Hom_{D_X}(M; O_X)$ pour les

(*) Texte reçu le 15 février 1979, révisé le 24 septembre 1979.

J.-P. RAMIS, Institut de Recherche mathématique avancée, Laboratoire associé au C.N.R.S., Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/341/\$ 5.00

modules à gauche et $S^{\cdot} = \mathbf{R}\ Hom_{D_X}(M; \Omega_X)$ pour les modules à droite (*cf.* [8], [14], [15]). Localement (et tout ce qui suit est local) on considèrera $S^{\cdot}$ comme un complexe borné de fibrés holomorphes (à fibre de dimension finie) et opérateurs différentiels d'ordre fini et on remplacera M (ou $M^{\cdot}$) par un complexe « parfait » (i. e. à objets libres de type fini et borné) de D_X-modules; inversement à un complexe borné de fibrés holomorphes et opérateurs différentiels d'ordre fini $S^{\cdot}$ on peut évidemment associer un unique complexe parfait $M^{\cdot}$ de D_X-modules à gauche (resp. $N^{\cdot}$ de D_X-modules à droite) tel que $S^{\cdot} = Hom_{D_X}(M^{\cdot}; O_X)$ (resp. $S^{\cdot} = Hom_{D_X}(N^{\cdot}; \Omega_X)$. (On remarquera qu'en fait les solutions de M D_X-cohérent, ou plus généralement de $M^{\cdot}$ borné à droite, à cohomologie cohérente et d'amplitude bornée, s'interprètent comme un complexe borné à gauche, quasi isomorphe en degrés r, pour r arbitrairement grand, à un complexe borné de fibrés holomorphes et opérateurs différentiels d'ordre fini; l'objet M, ou plus généralement le complexe $M^{\cdot}$, étant eux-mêmes quasi isomorphes en degrés $-r$, pour r arbitrairement grand, à un complexe parfait de D_X-modules (*cf.* [15], [35]); nous ferons donc un abus systématique nécessitant des modifications mineures, que nous laissons au lecteur, dans le but de ne pas alourdir inutilement la rédaction.) Le complexe de fibrés et opérateurs $S^{\cdot}$ sera considéré comme défini à homotopie différentielle près et le complexe parfait $M^{\cdot}$ à homotopie D_X-linéaire près. (Pour la notion d'homotopie différentielle et son étude, le lecteur se reportera à Ramis [35].)

1. Introduction

La technique des D-modules qui s'est développée considérablement depuis le travail de Sato, Kawai et Kashiwara [14] a pris une place importante en Analyse; il ne semble pas par contre que les géomètres et les topologues aient bien remarqué quels remarquables outils pouvait leur fournir cette théorie. Les D-modules sont en particulier beaucoup mieux adaptés que les connexions pour traiter des problèmes de singularités. (Si l'on « plie en quatre » une connexion, on n'a plus de connexion, mais on a encore un « système holonome »!) Je citerai dans ce sens le résultat établi dans Ramis [8], selon lequel, par « intégration dans la fibre » pour une application propre (l'analogue de l'image directe), le D_X-module associé au faisceau structural O_X donne un *système holonome fuchsien*; résultat beaucoup plus précis que la « *régularité de la connexion de Gauss-Manin* ». Nous voudrions donner dans cet article un autre exemple d'application géométrico-topologique de la théorie des D_X-modules. La théorie étant écrite classiquement dans le cadre de la Géométrie analytique (sur $\mathbb{C}$), nous y sommes restés; ceci étant, on peut actuellement développer une théorie très satisfaisante pour les opérateurs différentiels à coefficients dans le faisceau structural d'un schéma (au-dessus de *Spec* $\mathbb{C}$) : il y a quelques difficultés dues à l'élimination indispensable des opérateurs différentiels d'ordre infini, que l'on peut surmonter (signalons par exemple que, tandis que la démonstration de [14] de l'important théorème « *d'involutivité des caractéristiques* » ne s'étend pas, celle donnée par MALGRANGE passe sans problème dans le cadre algébrique); on consultera à ce propos le livre récent de BJ RK [26].

Outre des concepts et résultats de la théorie « classique » des D-modules, nous ferons dans cet article un usage constant de ceux de RAMIS [8]. Une certaine familiarité avec ce dernier article est donc conseillée au lecteur. Celui qui n'est pas familier avec la théorie « classique » pourra par exemple se reporter à BOUTET-LEJEUNE-MALGRANGE [15], qui est très clair, à PHAM [34], qui est très pédagogique et fait remarquablement le lien avec des approches plus habituelles, à BJÖRK [20] qui est très complet, et bien sûr aux travaux de l'école japonaise (plus difficiles d'accès pour le lecteur non averti), *cf.* toutefois [25].

DÉFINITION 1.1. — *Soit F* un *O_X-module. Soit $y \in Y$* :

(i) ***la dimension cohomologique locale algébrique de Y en y relativement à F est***

$$LCD\,(X;\,[Y];\,F)(y)=\operatorname{Sup}\{\,k\in\mathbb{N}/(H^k_{[Y]}(X;\,F))_y\neq 0\};$$

(ii) *la dimension cohomologique locale algébrique de Y en y est*

$$LCD\,(X;\,[Y])\,(y)=LCD\,(X;\,[Y];\,O_X)(y).$$

Soit F un faisceau de $\mathbb{C}_X$-espaces vectoriels. Soit $y \in Y$.

(i′) *la dimension cohomologique locale de Y en y relativement à F est*

$$LCD\,(X;\,Y;\,F)\,(y)=\operatorname{Sup}\{\,k\in\mathbb{N}/(H^k_Y\,(X;\,F))_y\neq 0\}.$$

(ii′) *la dimension cohomologique locale de Y en y* est

$$LCD\,(X;\,Y)\,(y)=LCD\,(X;\,Y;\,O_X)(y).$$

LEMME 1.2. — ***Soit F un O_X-module quasi cohérent (algébriquement). On a***

$$LCD(X;\,[Y];\,F)\leqslant LCD\,(X;\,[Y])$$

et

$$LCD(X;\,Y;\,F)\leqslant LCD(X;\,Y).$$

Localement on écrit $0 \to G \to O_X^l \to F \to 0$. Si $LCD\ (X;[Y])=p$,

$$H^k_{[Y]}(X;F) \simeq H^{k+1}_{[Y]}(X;G) \qquad \text{pour} \quad p<k.$$

Plus généralement on écrit localement

$$0 \to G_r \to O_X^{l_r} \to \ldots \to O_X^{l_1} \to F \to 0$$

et on a

$$H^k_{[Y]}(X;F)=H^{k+r}_{[Y]}(X;G_r) \qquad \text{pour} \quad p<k;$$

pour r assez grand on constate que ce faisceau est nul. L'autre inégalité s'établit de façon semblable.

LEMME 1.3. — *On a* $LCD\ (X;[Y])=LCD(X;Y)$.

Le D_X-module O_X est D_X-cohérent, holonome, fuchsien (*cf.* [8], [9] et ci-dessous 2); *on a donc*

$$H^k_Y(X;O_X)=D_X^\infty \otimes^L_{D_X} H^k_{[Y]}(X;O_X);$$

comme D_X^∞ *est fidèlement plat sur* D_X [14], *la nullité de* H^k_Y *est équivalente à celle de* $H^k_{[Y]}$.

Ce lemme ramène le calcul de $LCD\ (X;Y)$ à celui de $LCD\ (X;[Y])$; ce dernier est plus algébrique, donc plus facile...

LEMME 1.4. — *Supposons Y intersection complète de codimension p dans X en $y \in Y$. On a*

$$LCD(X;[Y])(y)=LCD(X;Y)(y)=p.$$

Plus généralement si Y est défini par p équation en y, on a

$$LCD(X;Y)(y) \leqslant p.$$

Remarque 1.5. — Si M est D_X-cohérent, il est O_X-quasi cohérent (localement $D_X \approx O_X^{\mathbb{N}}$, comme O_X-module); on peut donc lui appliquer les lemmes 1.2 et 1.4. Si M est un D_X-module à gauche (resp. à droite), on note

$$M^\infty=D_X^\infty \otimes_{D_X} M \ (\text{resp. } M \otimes_{D_X} D_X^\infty).$$

Si M est un D_X-module cohérent, holonome, fuchsien, on se propose de calculer la dimension cohomologique locale de M^∞ (ou ce qui revient au même la dimension cohomologique locale algébrique de M) en fonction de la restriction $S^\cdot_{X|Y}$ de la solution $S^\cdot$ de M à Y. Dans le cas où $M=O_X$ (et $M^\infty=O_X$) nous déterminerons ainsi $LCD\ (X;Y)$ en fonction d'invariants cohomologiques du faisceau $\mathbb{C}_Y$ (du type « nombres de Betti »); en effet dans ce cas $S^{\cdot}$ est le complexe de DE RHAM $\Omega^{\cdot}_X$ qui est une résolution de $\mathbb{C}_X$; ce dernier résultat est une généralisation d'un théorème de BARTH (qui traite le cas où Y est à singularité isolée; *cf.* [2]), et une version transcendante d'un théorème d'OGUS [7].

Compte tenu des propriétés des modules fuchsiens, notre problème se ramène à calculer $LCD\ (X;\ Y;\ M^{\infty}) = LCD\ (X;\ [Y];\ M)$ en fonction du complété formel $S^{\cdot}_{X \hat{|} Y}$ (en effet $S^{\cdot}_{X|Y} \to S^{\cdot}_{X \hat{|} Y}$ est un quasi-isomorphisme); le problème est alors essentiellement algébrique. Notre méthode est inspirée du travail d'OGUS réinterprété en termes de D_X-modules au lieu de connexions : l'interprétation en termes de D_X-modules dégage mieux la véritable nature de la question et permet d'obtenir un résultat plus général tout en éliminant certaines difficultés techniques fort gênantes pour l'extension au cas transcendant; le lecteur constatera que notre méthode convenablement adaptée (il faudrait remplacer D_X par les opérateurs différentiels d'ordre fini à coefficients dans le faisceau structural d'un schéma convenable au-dessus de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$), *cf.* plus haut, permettrait de redémontrer assez agréablement le théorème d'OGUS. En d'autres termes, si l'inspiration « géométrique » de notre démonstration est voisine de celle de BARTH et OGUS, notre technique est assez différente; nous remplaçons les isomorphismes

$$O_0 \otimes_{\mathbb{C}} H^q(\partial A;\ \mathbb{C}) \to H^q(\partial A;\ O_{\partial A})$$

et

$$k[[t_1, \ldots, t_n]] \otimes_k H^q_p(Y) \to H^q_p(\chi;\ O_\chi)$$

de BARTH et OGUS (*cf.* [2], p. 2 : Isomorphie-Satz et [7], p. 328 (*)) par une suite spectrale associée à l'isomorphisme (pour $Z \subset Y$) :

$$\mathbf{R}\,Hom_{D_X}(\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}(M);\ \mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}(O_X)) \to \mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X \hat{|} Y});$$

nous utilisons de manière essentielle un résultat de KASHIWARA (si M est D_X-cohérent holonome, les $H^k_{[Y]}(M)$ le sont aussi) et un « théorème de structure » (assez élémentaire), également dû à KASHIWARA (si M est D_X-cohérent holonome, à support dans Z, en tout point $y \in Z$ « générique » on a un isomorphisme local $M \approx (D_X\, \delta_Z)^m$). Signalons que BARTH et OGUS utilisaient des arguments de dualité (dualité de Serre pour l'un, dualité locale de Grothendieck pour l'autre) que nous avons éliminés (ce qui est naturel : il y a en quelque sorte dualité entre le point de vue des D_X-modules et celui des connexions) : on constatera que, même dans le cadre algébrique qui est celui d'OGUS, l'emploi de la dualité est subordonné à l'élimination de difficultés topologiques en relation avec des questions de séparation (ce qui n'est pas fait pour surprendre le géomètre analytique [1], [10], [13]); pour l'extension au cas transcendant, ces difficultés deviennent considérables (mélange de topologies **FN** et **DFN**) et me paraissent très difficiles à surmonter sauf dans le cas où Y est à singularité isolée (cas traité par BARTH [2]).

2. Quelques rappels sur les modules fuchsiens

Le lecteur se reportera pour les démonstrations à [8] et [9] ([1]).

Si $M^{\cdot}$ est un complexe borné de D_X-modules à gauche (resp. à droite) D_X-cohérents, on notera Sol $(M^{\cdot})=\mathbf{R}\ Hom_{D_X}\ (M^{\cdot}; O_X)$ (resp. $\mathbf{R}\ Hom_{D_X}$ $(M^{\cdot}; \Omega_X)$) et $DR\ (M^{\cdot})=\mathbf{R}\ Hom_{D_X}\ (O_X; M^{\cdot})$ (resp. $\mathbf{R}\ Hom_{D_X}\ (\Omega_X; M^{\cdot})$); on vérifie facilement que $DR\ (M^{\cdot})=\Omega_X \otimes^L_{D_X} M^{\cdot}$ (resp. $DR(M^{\cdot})=M^{\cdot} \otimes^L_{D_X} O_X$).

On peut considérer $\mathrm{Sol}(M^{\cdot})$ et $DR\ (M^{\cdot})$ comme des complexes bornés de fibrés holomorphes et opérateurs différentiels d'ordre fini (avec l'abus systématique signalé plus haut), définis à homotopie (par des opérateurs différentiels d'ordre fini) près, si $M^{\cdot}$ est défini à quasi-isomorphisme près. On peut alors définir ([2]) $S^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$ et $\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(S^{\cdot})$ pour $S^{\cdot}=\mathrm{Sol}(M^{\cdot})$ ou $DR(M^{\cdot})$.

Un complexe de fibrés holomorphes et opérateurs différentiels d'ordre fini $S^{\cdot}$ étant donné (à homotopie différentielle près), il y a deux façons « naturelles » de définir $S^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$ et $\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}S^{\cdot}$. L'une (que nous appellerons « *naïve* ») consiste à construire « à la main » un représentant de $R\,Hom_{D_X}$ $(M^{\cdot}; O_{X\hat{|}Y})$ et un représentant de $\mathbf{R}\,Hom_{D_X}\ (M^{\cdot}; \mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}O_X)$. (On note $M^{\cdot}$ l'unique complexe *parfait* de D_X-modules à gauche tel que Hom_{D_X} $(M^{\cdot}; O_X)=S^{\cdot}$.) Les objets ainsi obtenus seront considérés comme appartenant à la catégorie dérivée de celle des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X; on pourrait évidemment être plus précis ([3]). L'autre (que nous appellerons « *sophistiquée* ») consiste à exploiter des résultats de RAMIS [8] : on prend des représentants privilégiés de $\mathbf{R}\,Hom_{D_X}\ (\mathbf{R}\underline{\Gamma}[Y]M^{\cdot}; O_X)$ et de $(\mathbf{R}\,Hom_{D_X}$ $(\mathbf{R}\underline{\Gamma}[Y]N^{\cdot}; \Omega_X))^*$ (où $N^{\cdot}=Hom_{D_X}\ (M^{\cdot}; D_X)$ est un complexe parfait de D_X-modules à droite). Les objets ainsi construits sont des complexes de fibrés holomorphes (à fibre de dimension finie) et opérateurs d'ordre fini, définis, comme $S^{\cdot}$, à homotopie différentielle près.

([1]) *Cf.* remarque 4.11.

([2]) On se contentera ici de définitions locales.

([3]) $S^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$ est en fait défini à homotopie $\mathbb{C}$-linéaire près (et même mieux...).

Il faut évidemment comparer les deux définitions : on constate que l'on passe de la définition « sophistiquée » à la définition « naïve » par « *oubli* » (l'objet sophistiqué et l'objet naïf correspondant sont égaux dans la catégorie dérivée de celle des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X). Dans la suite du texte nous laissons à la sagacité du lecteur le choix (parfois impératif) de la définition des $S^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$ et $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}\,S^{\cdot}$ qui interviennent; nous dirons quelques mots ci-dessous de la définition d'objets comme $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}\,S^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$: il y a trois définitions qui coïncident de manière non tout à fait triviale par « oubli ». (Nous remercions le référée d'avoir attiré notre attention sur le dernier point.)

(i) *Définitions « naïves »*.

Commençons par rappeler la structure naturelle de D_X-module (à gauche) sur $O_{X\hat{|}Y}$ et la structure naturelle de complexe de D_X-modules (à gauche), à quasi-isomorphisme près, de $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}\,O_X$, et plus généralement de $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}\,M^{\cdot}$. (*Cf.* KASHIWARA [5] ou RAMIS [8].)

Ces structures reposent sur les inclusions triviales suivantes :

Soient J un idéal de O_X et $D \in D_X$ un opérateur différentiel d'ordre $\leq k$. On a

$$DJ^n \subset J^{n-k} \quad \text{et} \quad D_X J^n D \subset D_X J^{n-k} \qquad (n \in \mathbb{N};\ k < n).$$

On en déduit des applications

$$O_X/J^n \xrightarrow{D} O_X/J^{n-k};$$

et en passant à la limite projective une application $O_{X\hat{|}Y} \xrightarrow{D} O_{X\hat{|}Y}$ qui ne dépend que de $Y = V(J)$ (Nullstellensatz). On a ainsi une structure de D_X-module à gauche sur $O_{X\hat{|}Y}$; par ailleurs si $S^{\cdot} : \ldots \to S^i \xrightarrow{D_i} S^{i+1} \to \ldots$ est un complexe de fibrés et opérateurs différentiels d'ordre fini, on a un complexe $S^{\cdot}_{X\hat{|}Y} : \ldots \to S^i_{X\hat{|}Y} \xrightarrow{D_i} S^{i+1}_{X\hat{|}Y} \to \ldots$; il est clair que $S^{\cdot}_{X\hat{|}Y} = Hom_{D_X}(M^{\cdot}; O_{X\hat{|}Y})$ (avec $Hom_{D_X}(M^{\cdot}; O_X) = S^{\cdot}$). Si $S^{\cdot}$ est défini à homotopie différentielle près, $S^{\cdot}_{X\hat{|}Y}$ est défini à homotopie $\mathbb{C}$-linéaire près (et même un peu mieux...).

Passons à la structure de « complexe de D_X-module » de $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}\,M^{\cdot}$ et à la définition de $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}\,S^{\cdot}$.

Notons $\iota : Y \hookrightarrow X$ l'injection naturelle. On a (voir plus haut) des applications $D_X J^n \xrightarrow{D} D_X J^{n-k}$, d'où des applications $D_X/D_X J^n \to D_X/D_X J^{n-k}$.

On en déduit des applications

$$Hom_{D_X}(D_X J^n; F) \leftarrow Hom_{D_X}(D_X J^{n-k}; F),$$

et

$$Hom_{D_X}(D_X/D_X J^n; F) \leftarrow Hom_{D_X}(D_X/D_X J^{n-k}; F);$$

d'où en passant à la limite inductive, des applications

$$[\iota]_* F \xrightarrow{D} [\iota]_* F \qquad \text{et} \qquad \underline{\Gamma}_{[Y]} F \xrightarrow{D} \underline{\Gamma}_{[Y]} F$$

qui ne dépendent que de $Y=V(J)$ (Nullstellensatz). Si J est principal : $J=(f)$, on a $[\iota]_* F=(f)^{-1} F$; si F est un D_X-module à gauche, il y a sur $(f)^{-1} F$ une structure évidente de D_X-module à gauche qui coïncide avec celle que nous venons de mettre sur $[\iota]_* F$. Plus généralement, pour $J=(f_1, \ldots, f_l)=(f)$, le complexe de Cech $C^\cdot(U_{(f)}; F)$ fournit un représentant de $\mathbf{R}[\iota]_* F$ (*cf.* Ramis [8]); on en déduit un représentant de $\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]} F$ par un argument immédiat de cylindre.

Si maintenant $S^\cdot : \ldots \to S^i \xrightarrow{D_i} S^{i+1} \to \ldots$ est un complexe de fibrés holomorphes et opérateurs différentiels d'ordre fini, on a un double complexe $C^\cdot(U_{(f)}; S^\cdot)$ (les différentielles de Čech et les D_i commutent), dont le complexe simple associé est égal à $Hom_{D_X}(M^\cdot; C^\cdot(U_{(f)}; O_X))$ et fournit un représentant de $\mathbf{R}\,Hom_{D_X}(M^\cdot; \mathbf{R}[\iota]_* O_X)$ $(Hom_{D_X}(M^\cdot; O_X)=S^\cdot)$; à (f) fixé, quand $S^\cdot$ varie à homotopie différentielle près, il en est de même du complexe simple que nous venons de construire; si, plus généralement, on ne précise pas (f), le représentant de ce complexe sera noté $R[\iota]_* S^\cdot = R\,Hom_{D_X}(M^\cdot; \mathbf{R}[\iota]_* O_X)$ et considéré comme un objet de la catégorie dérivée de celle des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X.

La définition de $\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]} S^\cdot$ va alors de soi par un argument de cylindre.

Soit maintenant $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique; on définit (en s'inspirant des foncteurs analogues pour les schémas formels (*cf.* [24]).

$\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Z]} O_{X\hat{}Y}$ (par exemple en utilisant un complexe de Čech construit à partir de fonctions nulles sur Z et pas sur Y); on prendra garde au problème de *non-commutation* des limites inductives et projectives. On obtient ainsi un « complexe de D_X-modules à gauche » et on définit $\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Z]} S^\cdot_{X\hat{}Y}$ par $\mathbf{R}\,Hom_{D_X}(M^\cdot; \mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Z]} O_{X\hat{}Y})$ que l'on calcule par un argument de cylindre à partir du complexe simple associé à un complexe double convenable $C^\cdot(U_{(g)}; S^\cdot_{X\hat{}Y})$. En généralisant un résultat de MALGRANGE et RAMIS [8] (proposition 6.9; *cf.* aussi MEBKHOUT [33]), on obtient facilement l'égalité

$$\mathbf{R}\,Hom_{D_X}(M^\cdot;\, \mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Z]}\,O_{X\uparrow Y}) = \mathbf{R}\,Hom_{D_X}(\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}\,M^\cdot;\, \mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Z]}\,O_X).$$

(ii) Définitions « sophistiquées ».

Commençons par la nouvelle définition de $S^\cdot_{X\uparrow Y}$. D'après un résultat de [8] (proposition 6.9), on a

$$\mathbf{R}\,Hom_{D_X}(\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}\,M^\cdot;\, O_X) = \mathbf{R}\,Hom_{D_X}(M^\cdot;\, O_{X\uparrow Y}).$$

Cela suggère de prendre pour $S^\cdot_{X\uparrow Y}$ le complexe de fibres holomorphes et opérateurs différentiels d'ordre fini Hom_{D_X} $(M^\cdot_1;\, O_X)$, où $M^\cdot_1$ est un représentant parfait de $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}[Y]\,M^\cdot$ (ou plutôt d'un tronqué convenable...). Un tel objet est, à $S^\cdot$ fixé, défini à homotopie différentielle près; il en est de même si $S^\cdot$ varie à homotopie différentielle près.

Il est clair que l'on passe de la définition « sophistiquée » de $S^\cdot_{X\uparrow Y}$ à sa définition « naïve » par « oubli ».

Passons à $\mathbf{R}\,\Gamma_{[Y]}\,S^\cdot$. Soit $S^{*\cdot}$ *le complexe transposé de* $S^\cdot$. On a

$$\mathbf{R}\,\Gamma_{[Y]}\,S^\cdot = \mathbf{R}\quad Hom_{\mathbb{C}_X}(S^*_{X\uparrow Y};\, \mathbb{C}_X)$$

et un représentant est $(S^*_{X\uparrow Y})^*$ (*cf.* RAMIS [8]). Un représentant « sophistiqué » de $S^*_{X\uparrow Y}$ fournit ainsi par transposition le représentant cherché de $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}\,S^\cdot$. Plus précisément on peut construire le représentant de $S^{*\cdot}$ en utilisant des D_X-modules à droite : on pose $N^\cdot = Hom_{D_X}(M^\cdot;\, D_X)$; c'est un complexe parfait de D_X-modules à droite; on a

$$S^{*\cdot} = Hom_{D_X}(N^\cdot;\, \Omega_X) \qquad \text{et} \qquad S^*_{X\uparrow Y} = \mathbf{R}\; Hom_{D_X}(\mathbf{R}\,\Gamma_{[Y]}\,N^\cdot;\, \Omega_X).$$

On a ainsi construit un complexe de fibrés holomorphes et opérateurs d'ordre fini défini à homotopie différentielle près (sous les mêmes conditions pour $S^\cdot$) : c'est le représentant « sophistiqué » de $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}\,S^\cdot$. On revient évidemment à la définition « naïve » par « oubli ».

Revenons pour finir à $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}\,S^\cdot_{X\uparrow Y}$. Si l'on prend pour $S^\cdot_{X\uparrow Y}$ la définition « sophistiquée », on a $S^\cdot_{X\uparrow Y} = S^\cdot_1$ (où $S^\cdot_1$ est un complexe de fibres holomorphes et opérateurs différentiels d'ordre fini); on peut alors définir $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}\,S^\cdot_{X\uparrow Y}$ comme $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}\,S^\cdot_1$: on dispose pour cela de deux définitions et on a finalement trois définitions pour $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}\,S^\cdot_{X\uparrow Y}$. Le lecteur vérifiera facilement qu'elles coïncident par « oubli » dans la catégorie dérivée de celle des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X.

THÉORÈME 2.1. — *Soit $M^{\cdot}$ un complexe borné de D_X-modules cohérents holonomes* (*ou plus généralement à cohomologie holonome*) *à gauche* (*resp. à droite*). *Pour un sous-ensemble analytique Y de X, les conditions* (i), (ii), (iii) (resp. (i), (ii), (iii′)) *qui suivent sont équivalentes :*

(i) *l'application naturelle* $(\mathrm{Sol}\,(M^{\cdot}))_{X|Y} \to (\mathrm{Sol}\,(M^{\cdot}))_{X\uparrow Y}$ *est un isomorphisme dans la catégorie dérivée;*

(ii) *l'application naturelle* $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}\,DR(M^{\cdot})) \to \mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_Y(DR(M^{\cdot}))$ *est un isomorphisme dans la catégorie dérivée;*

(iii) *l'application naturelle* $D_X^{\infty} \otimes^{\mathbf{L}}_{D_X} \mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}(M^{\cdot}) \to \mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_Y(M^{\cdot\infty})$ *est un isomorphisme dans la catégorie dérivée;*

(iii′) *l'application naturelle* $\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}(M^{\cdot}) \otimes^{\mathbf{L}}_{D_X} D_X^{\infty} \to \mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_Y(M^{\cdot\infty})$ *est un isomorphisme dans la catégorie dérivée.*

DÉFINITION 2.2. — *Si les conditions du théorème précédent sont réalisées, on dira que $M^{\cdot}$ est régulier* (*ou fuchsien*) *le long de Y. Si $M^{\cdot}$ est régulier le long de tout Y, on dira que $M^{\cdot}$ est fuchsien.*

Exemples. — O_X, D_X-module à gauche associé à l'idéal $(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$ est fuchsien; M, D_X-module à gauche associé à l'idéal $(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{n-1}, x_n\,\partial/\partial x_n - \alpha)$ est fuschsien.

PROPOSITION 2.3. — *Soient $M^{\cdot}_g$ et $M^{\cdot}_d$ des complexes de D_X-modules respectivement à gauche et à droite vérifiant $M^{\cdot}_d = \Omega_X \otimes_{O_X} M^{\cdot}_g$ ou, ce qui est équivalent $M^{\cdot}_g = Hom_{O_X}(\Omega_X;\, M^{\cdot}_d)$* ([4]).

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *$M^{\cdot}_g$ est régulier le long de Y* (resp. fuchsien).

(ii) $M^{\cdot}_d$ est régulier le long de Y (resp. fuchsien).

La démonstration, très élémentaire, est laissée au lecteur.

La conjecture qui suit paraît délicate :

Conjecture 2.4. — Soit $M^{\cdot}$ un complexe de D_X-modules à gauche; $\mathbf{R}\,Hom_{D_X}(M^{\cdot};\, D_X) = N^{\cdot}$ est un complexe de D_X-modules à droite et $M^{\cdot} = \mathbf{R}\,Hom_{D_X}(N^{\cdot};\, D_X)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $M^{\cdot}$ est régulier le long de Y (resp. fuchsien);

(ii) $N^{\cdot}$ est régulier le long de Y (resp. fuchsien).

([4]) *Cf.* [5].

Avec les notations ci-dessus, on vérifie que Sol $(M^{\cdot})=DR(N^{\cdot})$ et Sol $(N^{\cdot})=DR(M^{\cdot})$. On en déduit que la conjecture suivante résulte de 2.4 :

Conjecture 2.5. — Soit $M^{\cdot}$ un complexe fuchsien. Soient Y et Z des sous-ensembles analytiques de X. On a, dans la catégorie dérivée

$$\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}((\mathrm{Sol}\ M^{\cdot})_{X\hat{|}Y})=\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{Z}((\mathrm{Sol}\ \mathrm{M}^{\cdot})_{X|Y}).$$

On établira plus loin cette conjecture dans certains cas particuliers.

Pour plus de précisions sur les modules fuchsiens, on se reportera à [8] et [9]. On pourra ultérieurement consulter les travaux [11] et [12], en préparation, et le travail de Kashiwara et Kawai, également en préparation. (*cf.* remarque 4.11.)

3. Les résultats

Définition 3.1. — *Soit $S^{\cdot}$ un complexe borné de fibrés holomorphes et opérateurs différentiels d'ordre fini, défini à homotopie différentielle près. Soient $y\in Y$ et Z_y un germe irréductible en y de sous-ensemble analytique, contenu dans Y. La $S^{\cdot}$-profondeur algébrique de Y en Z_y est l'entier $PR(X;\,[Y];\,S^{\cdot})(Z_y)$ défini de la façon suivante :*
$k\leqq PR(X;\,[Y];\,S^{\cdot})(Z_y)$ si et seulement s'il existe un germe de sous-ensemble analytique complexe $T_y\subset Z_y$, $\dim T_y<\dim Z_y$, tel que $(H^i_{[Z]}(X;\,S^{\cdot}_{X\hat{|}Y}))_z=0$ pour tout entier $i<k-\dim Z_y$ et tout $z\in Z-T$ au voisinage de y.

La $S^{\cdot}$-profondeur algébrique de Y_y est

$$PR(X;\,[\mathrm{Y}_y];\,S^{\cdot})=\mathrm{Inf}_{Z_y\subset Y_y,\ \text{irréductible}}\,PR(X;\,[Y];\,S^{\cdot})(Z_y).$$

Notation. — Si $S^{\cdot}=\Omega^{\cdot}_X$ (complexe de De Rham) on parlera de profondeur de De Rham algébrique au lieu de $\Omega^{\cdot}_X$-profondeur algébrique

$$DRPR(X;\,[Y])=\mathrm{PR}(X;\,[Y];\,\Omega^{\cdot}_X).$$

On constate que notre notion de profondeur algébrique est une version algébrico-transcendante de la notion de profondeur de De Rham introduite par Ogus dans [7].

On a l'analogue transcendant de la définition 3.1 :

Définition 3.2. — *Soit $S^{\cdot}$ un complexe borné de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, défini à quasi-isomorphisme près. Soient $y\in Y$ et Z_y un germe irréductible en y de sous-ensemble analytique complexe, contenu dans Y.*

La $S^{\cdot}$-profondeur de Y en Z_y est l'entier $PR(X;\ Y;\ S^{\cdot})(Z_y)$ défini de la façon suivante :

$k \leqslant PR(X;\ Y;\ S^{\cdot})(Z_y)$ *si et seulement s'il existe un germe de sous-ensemble analytique complexe* $T_y \subset Z_y$, $\dim\ T_y < \dim\ Z_y$, *tel que* $(H^i_Z(X;\ S^{\cdot}_{X|Y}))_z = 0$ *pour tout entier* $i < k - \dim\ Z_y$ *et tout* $z \in Z - T$ *au voisinage de* y.

La $S^{\cdot}$-profondeur de Y_y est

$$PR(X;\ Y_y;\ S^{\cdot}) = \mathrm{Inf}_{Z_y \subset Y_y,\ \text{irréductible}} PR(X;\ Y;\ S^{\cdot})(Z_y).$$

NOTATION. — Si $S^{\cdot} = \mathbb{C}_X$ on parlera ici aussi de profondeur de De Rham :

$$DRPR(X;\ Y) = PR(X;\ Y;\ \mathbb{C}_X) = PR(X;\ Y;\ \Omega^{\cdot}_X).$$

C'est l'analogue transcendant de la profondeur de De Rham introduite dans OGUS dans [7].

On a, pour $S^{\cdot} = \mathbb{C}_X$:

$$H^i_Z(X;\ S^{\cdot}_{X|Y}) = H^i_Z(X;\ \mathbb{C}_Y) = H^i(Y;\ Y - Z;\ \mathbb{C}).$$

Ceci conduit à une interprétation de la profondeur de De Rham en termes de « nombres de « Betti ».

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats fondamentaux :

THÉORÈME 3.3. — (i) *Soient M un D_X-module cohérent holonome,* $S^{\cdot} = \mathrm{Sol}\ M$. *On a, pour $y \in Y$:*

$$\mathrm{LCD}(X;\ [Y];\ M)(y) + PR(X;\ [Y_y];\ S^{\cdot}) = \dim\ X;$$

(ii) *si, de plus, M est régulier le long de Y, on a*

$$LCD(X;\ Y;\ M^{\infty})(y) + PR(X;\ Y_y;\ S^{\cdot}) = \dim\ X.$$

COROLLAIRE 3.4 :

$$LCD(X;\ [Y])(y) + DRPR(X;\ [Y_y])$$
$$= \mathrm{LCD}(X;\ Y)(y) + DRPR(X;\ Y_y) = \dim\ X$$

et

$$DRPR(X;\ [Y_y]) = DRPR(X;\ Y_y).$$

Remarque 3.5. — D'après 2.1 (iii) et la fidèle platitude de D^{∞}_X sur D_X, l'assertion 3.3 (ii) pour un modèle fuschsien résulte de

$PR(X; [Y_y]; S^\cdot) = PR(X; Y_y; S^\cdot)$ qui est une conséquence de la conjecture 2.5; la connaissance de cette conjecture permettrait donc de simplifier un peu notre démonstration.

Le théorème 3.3 va résulter des théorèmes 3.6 et 3.7 :

THÉORÈME 3.6. — *Soit M un D_X-module cohérent holonome. Soit Z un sous-ensemble analytique complexe de X contenu dans Y (que l'on peut supposer équidimensionnel). Soit s un entier tel que* Supp $H^i_{[Y]}(X; M) \subset Z$ *pour* $i > s$. *On a alors :*

(i) *pour tout entier* $k \geqslant s$, *les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *il existe un sous-ensemble analytique* $T \subset Z$, $\dim T < \dim Z$, *tel que l'on ait* $(H^i_{[Y]}(X; M))_z = 0$ *pour* $k < i$ *et* $z \in Z - T$;

(*b*) *il existe un sous-ensemble analytique* $T \subset Z$, $\dim T < \dim Z$, *tel que l'on ait* $(H^j_{[Z]}(X; S^\cdot_{X \uparrow Y}))_z = 0$ *pour* $j < \dim X - \dim Z - k$ *et* $z \in Z - T$. (*On peut choisir le même T dans* (*a*) *et* (*b*));

(ii) *soit* $i > s$ *un entier. Il existe un sous-ensemble analytique* $T \subset Z$, $\dim T < \dim Z$ *tel que l'on ait*

(*a*) $H^i_{[Y]}(X; M) \approx (D_X \delta_Y)^{m_i}$ *localement sur* $Z - T$ (5);

(*b*) $H^j_{[Z]}(S^\cdot_{X \uparrow Y}) \approx \mathbb{C}^{m_i}$ *localement sur* $Z - T$, *avec* $j - \dim X - \dim Z - I$.

THÉORÈME 3.7. — *Soit M un D_X-module cohérent holonome, régulier le long de Y. Soit Z un sous-ensemble analytique complexe contenu dans Y. On a*

$$\text{Supp } H^i_{[Y]}(M) = \text{Supp } H^i_Y(M^\infty).$$

Soit s un entier tel que ce support soit contenu dans Z, pour $i > s$. *On a alors :*

(i) *pour tout entier* $k \geqq s$, *les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *cf.* 3.6 (i) (*a*);

(*b*) *cf.* 3.6 (i) (*b*);

(*a'*) *il existe un sous-ensemble analytique* $T \subset Z$, $\dim T < \dim Z$, *tel que l'on ait* $(H^i_Y(X; M^\infty))_z = 0$ *pour* $k < i$ *et* $z \in Z - T$;

(*b'*) *il existe un sous-ensemble analytique* $T \subset Z$, $\dim T < \dim Z$, *tel que l'on ait* $(H^j_Z(S^\cdot_{X \mid Y}))_z = 0$ *pour* $j < \dim X - \dim Z - k$ *et* $z \in Z - T$;

(ii) *soit* $i > s$ *un entier. Il existe un sous-ensemble analytique* $T \subset Z$, $\dim T < \dim Z$ *tel que l'on ait*

(*a*) $H^i_Y(X; M) \approx (D^\infty_X \delta_Y)^{m_i}$ *localement sur* $Z - T$;

(*b*) $H^j_Z(S^\cdot_{X \mid Y}) \approx \mathbb{C}^{m_i}$ *localement sur* $Z - T$, *avec* $j = \dim X = \text{Dim } Z - i$. *De plus l'entier* m_i *est le même que celui de* 3.6 (ii) (*a*) et (*b*).

(5) δ_Y est la masse de Dirac sur Y.

Avant d'établir les théorèmes 3.6 et 3.7, nous allons montrer qu'ils impliquent le théorème 3.3. Plus précisément le théorème 3.6 entraîne 3.3 (i) et le théorème 3.7 entraîne 3.3 (ii). Nous nous contenterons de détailler la première assertion, la seconde s'établissant de manière analogue. On va prouver que :

(*a*) $\mathrm{PR}(X; [Y_y]; S^{\cdot}) \geqslant \dim X - LCD(X; [Y]; M)(y)$, puis que;

(*b*) $\mathrm{LCD}(X; [Y]; M)(y) \leqslant \dim X - PR(X; [Y_y]; S^{\cdot})$, ce qui entraînera l'égalité cherchée :

(*a*) posons $LCD(X; [Y]; M)(y) = s$. On a $(H^i_{[Y]}(X; M))_y = 0$ pour $s < i$; et $Z_y \subset Y_y$ irréductible étant fixé, on peut appliquer le théorème 3.6 (i) : (*a*) est vérifié pour $k = s$, donc (*b*) aussi et, pour $j < \dim X < \dim Z - s$, $H^j_{[Z]}(S^{\cdot}_{X\,|G\,Y})$ est nul en tout point « générique » de Z au voisinage de y; on a donc $\dim X - s \leqslant PR(X; [Y]; S^{\cdot})(Z_y)$ et, en faisant varier Z_y, $PR(X; [Y_y]; S^{\cdot}) \geqslant \dim X - s$;

(*b*) posons $PR(X; [Y_y]; S^{\cdot}) = m$. Si $Z_y \subset Y_y$ est un sous-ensemble analytique irréductible, on a $(H^j_{[Z]}(S^{\cdot}_{X\,\hat{\mid}\,Y}))_z = 0$ pour $j < m - \dim Z$ et $z \in Z$ « générique » au voisinage de y; on peut alors appliquer à nouveau le théorème 3.6 (i) : l'assertion (*b*) est vérifiée pour $k = \dim \mathrm{X} - m$, donc si $\mathrm{Supp}\, H^i_{[Y]}(X; M) \subset Z$ pour $i > \dim X - m = k$, alors (*a*) est vraie et on a $(H^i_{[Y]}(X; M))_z = 0$ pour $i > \dim X - m$ et $z \in Z$ « générique » et voisin de y.

Fixons maintenant un entier $i > \dim X - m$. Si $H^i_{[Y]}(X; M)$ n'est pas nul en y, il admet un support analytique Z, avec Z_y non vide. Appliquant ce qui précède à ce germe Z_y, on constate que $(H^i_{[Y]}(X; M))_{z \neq 0}$ pour tout $z \in Z$, ce qui contredit le fait que ce germe est nul en un z « générique ». De cette contradiction on déduit que $(H^i_{[Y]}(X; M))_y = 0$ pour $i > \dim X - m$, ce qui prouve que

$$LCD(X; [\mathrm{Y}]; M)(y) \leqslant \dim X - PR(X; [\mathrm{Y}_y]; S^{\cdot}).$$

La démonstration est ainsi terminée.

Il reste à établir les théorèmes 3.6 et 3.7. Il est clair que l'assertion (i) de ces théorèmes résulte de l'assertion (ii) (c'est le cas $m_i = 0$); quant à l'assertion (ii), nous allons la déduire de l'étude des deux suites spectrales définies dans les propositions 3.8 et 3.9 qui suivent :

PROPOSITION 3.8. — *Soit M un D_X-module cohérent holonome. Soit $Z \subset Y$:*
(i) *on a un isomorphisme naturel* (*dans la catégorie dérivée*) *:*

$$\mathbf{R}\, Hom_{D_X}(\mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Y]}(M); \mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}(O_X)) \simeq \mathbf{R}\,\underline{\Gamma}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X\,\hat{\mid}\,Y});$$

(ii) *si Z est lisse de codimension p dans X, on a un isomorphisme naturel (dans la catégorie dérivée) :*

$$T^{-p}\mathbf{R}\ Hom_{D_X}(\mathbf{R}\underline{\Gamma}[Y](M);\ H^p_{[Z]}(O_X)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X\hat{\mid} Y}),$$

et une suite spectrale

$$E_2^{i,j} = Ext^i_{D_X}(H^j_{[Y]}(M);\ H^p_{[Z]}O_X)) \quad\Rightarrow\quad H_{[Z]}{}^{p+i-j}(S^{\cdot}_{X\hat{\mid} Y}).$$

PROPOSITION 3.9. — *Soit M un D_X-module cohérent holonome régulier le long de Y. Soit $Z\subset Y$:*

(i) *on a un isomorphisme naturel (dans la catégorie dérivée) :*

$$\mathbf{R}\ Hom_{D_X^\infty}(\mathbf{R}\underline{\Gamma}_Y(M^\infty);\ \mathbf{R}\underline{\Gamma}_Z(O_X)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\underline{\Gamma}_Z(S^{\cdot}_{X\mid Y});$$

(ii) *si Z est lisse de codimension p dans X, on a un isomorphisme naturel (dans la catégorie dérivée) :*

$$T^{-p}\mathbf{R}\ Hom_{D_X^\infty}(\mathbf{R}\underline{\Gamma}[Y](M);\ H^p_{[Z]}(O_X)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X\hat{\mid} Y}),$$

et une suite spectrale

$$^\infty E_2^{i,j} = Ext^i_{D_X^\infty}(H^j_Y(M^\infty);\ H^p_Z(O_X)) \quad\Rightarrow\quad H^{p+i-j}(S^{\cdot}_{X\mid Y}).$$

On a des isomorphismes naturels

$$\mathbf{R}\ \mathrm{Hom}_{D_X}(\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(M);\ O_X) \to \mathrm{S}^{\cdot}_{X\hat{\mid} Y}$$

et

$$\mathbf{R}\ Homtop_{D_X^\infty}(\mathbf{R}\underline{\Gamma}_Y\ (M^\infty);\ O_X) \to S^{\cdot}_{X\mid Y}$$

(*cf.* [8]). Si M est régulier le long de Y $\mathbf{R}\ \underline{\Gamma}_Y(M^\infty) = D_X^\infty \otimes_{D_X} \mathbf{R}\ \underline{\Gamma}_{[Y]}(M)$ et $\mathbf{R}\ \underline{\Gamma}_{[Y]}(M)$ est r-quasi isomorphe à un complexe parfait de D_X-modules (r arbitrairement petit); on en déduit que

$$\mathbf{R}\ Homtop_{D_X^\infty}(\mathbf{R}\ \underline{\Gamma}_Y(M); O_X) = \mathbf{R}\ \mathrm{Hom}_{D_X^\infty}(\mathbf{R}\ \underline{\Gamma}_Y(M);\ O_X) = S^{\cdot}_{X\mid Y}.$$

Il est alors facile d'établir les assertions (i) de 3.8 et 3.9; la première partie de l'assertion (ii) s'en déduit immédiatement; il reste à établir les suites spectrales. Nous allons le faire dans le cas de 3.8 (l'autre cas est analogue). Supposons pour simplifier que $\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Y]}(M)$ est représentable par un complexe parfait $L^{\cdot}$ (complexe borné de D_X-modules libres de type fini) : si ce n'est pas le cas, l'argument est voisin. Soit $I^{\cdot}$ une résolution D_X-injective de $H^p_{[Z]}(O_X)$. On a alors :

$$Hom_{D_X}(L^{\cdot};\ I^{\cdot}) = T^p\mathbf{R}\underline{\Gamma}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X\hat{\mid} Y};\ Hom_{D_X}(L^{\cdot};\ I^{\cdot})$$

est un complexe double, gradué par $(i, j) \in Z \times Z$: $(Hom_{D_X}(L^j; I^i))_{(i, j)}$. Dérivant par rapport à j on obtient $(Hom_{D_X}(H^j_{[Y]}(M); I^i))_{(i, j)}$; dérivant ensuite par rapport à i, on obtient $E_2^{i, j} = Ext^i_{D_X}(H^j_{[Y]}(M); H^p_{[Z]}(O_X))$. La cohomologie du complexe simple associé est par ailleurs celle de $T^p \mathbf{R} \underline{\Gamma}[Z](S^{\cdot}_{X \mid Y})$, c'est-à-dire $H^{p+i-j}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X \mid Y})$.

L'analyse de la suite spectrale de 3.8 (celle de 3.9 s'en déduit) va s'appuyer sur des résultats de Kashiwara : $H^j_{[Y]}(M)$ est D_X-cohérent holonome; s'il est à support dans Z, la structure aux points « génériques » de Z est donnée par le :

THÉORÈME 3.10 (KASHIWARA). — *Si N est D_X-cohérent holonome à support dans Z, il existe un sous-ensemble analytique $T \subset Z$,* dim $T <$ dim Z, *tel que N soit localement isomorphe à $(D_X \delta_Z)^m$* sur $Z - T$.

Ce résultat est établi dans [4]. On peut supposer Z lisse (on met les singularités de Z dans T); on utilise l'isomorphisme naturel entre D_X-modules cohérents holonomes à support dans Z et D_Z-modules cohérents holonomes. Enfin si N' est D_Z-cohérent holonome, quitte à enlever T convenable (analytique, de codimension $\geqslant 1$), on peut supposer que son support singulier est contenu dans $Z - T$ (pour N' restreint à $Z - T$) et N' est alors localement de la forme O_Z^m (*cf.* [15]).

Les théorèmes 3.6 et 3.7 se déduisent immédiatement des propositions 3.11 et 3.12 qui suivent :

PROPOSITION 3.11. — *Soit* M un *D_X-module cohérent holonome. Soit $Z \subset Y$ une sous-variété analytique (lisse) de codimension p dans X, avec* Supp $H^j_{[Y]}(M) \subset Z$ *pour $s < j$. Il existe alors un sous-ensemble analytique* $T \subset Z$, dim $T <$ dim Z, *tel que, sur $Z - T$* :

(i) $E_2^{i, j} = 0$ *pour $s < j$ et $i \neq 0$;*

(ii) *on a des « edge-homomorphisms » injectifs*

$$Hom_{D_X}(H^j_{[Y]}(M); H^p_{[Z]}(O_X)) = E_2^{0, j} \to H^{p-j}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X \mid Y}),$$

qui sont des isomorphismes pour $s \leqq j$;

(iii) *on a des isomorphismes locaux, pour $s < j$* :

$$H^j_{[Y]}(M) \approx (D_X \delta_Z)^{m_j} \quad \text{et} \quad H^{p-j}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X \mid Y}) \approx \mathbf{C}_Z^{m_j}.$$

PROPOSITION 3.12. — *Dans les conditions de la proposition* 3.11, *on suppose, de plus, M régulier le long de Y. On a alors* Supp $H^j_{[Y]}(M) =$ Supp $H^j_Y(M) \subset Z$, *pour $s < j$. Il existe alors un sous-ensemble analytique $T \subset Z$,* dim $T <$ dim Z, *tel* *que, outre les assertions* (i), (ii), (iii) *de* 3.11, *on ait :*

(i′) ${}^{\infty}E^{i,j}=0$ *pour* $s<j$ et $i\neq 0$,

(ii′) *il y a des « edge-homomorphisms » injectifs*

$$\mathcal{H}om_{D_X}(H^j_Y(M);\ H^p_Z(O_X))={}^{\infty}E_2^{0,j}\to H^{p-j}_Z(S^{\cdot}_{X|Y}),$$

qui sont des isomorphismes pour $s\leqslant j$;

(iii′) *on a des isomorphismes locaux, pour* $s<j$:

$$H^j_Y(M^{\infty}_X)\approx(D^{\infty}_X\,\delta_Z)^{m_j}$$

et

$$H^{p-j}_z(S^{\cdot}_{X\hat{|}Y})=H^{p-j}_{[Z]}(S^{\cdot}_{X\hat{|}Y})=H^{p-j}_Z(S^{\cdot}_{X|Y})\approx\mathbb{C}^{m_j}_Z.$$

Nous allons établir la proposition 3.11; la proposition 3.12 se prouve de façon analogue.

Sous les conditions de 3.11, on peut appliquer le théorème de structure 3.10 aux D_X-modules cohérents holonomes $N=H^j_{[Y]}(M)$ pour $s<j$. On obtient (pour T convenable) : $H^j_{[Y]}(M)\approx(D_X\,\delta_Z)^{m_j}$ localement sur $Z-T$, pour $s<j$. On a par ailleurs localement sur z : $H^p_Z(O_X)\approx D^{\infty}_X\,\delta_Z$.

LEMME 3.13. — *Pour Z lisse :*

(i) $\mathbf{R}\,\mathcal{H}om_{D_X}(D_X\,\delta_Z;\ D_X\,\delta_Z)=\mathcal{H}om_{D_X}(D_X\,\delta_Z;\ D_X\,\delta_Z)=\mathbb{C}_Z$;

(ii) $\mathbf{R}\,\mathcal{H}om_{D^{\infty}_X}(D^{\infty}_X\,\delta_Z;\ D^{\infty}_X\,\delta_Z)=\mathcal{H}om_{D^{\infty}_X}(D^{\infty}_X\,\delta_Z;\ D^{\infty}_X\,\delta_Z)=\mathbb{C}_Z$.

Nous laissons la démonstration au lecteur.

On déduit du lemme 3.13 la dégénérescence de la suite spectrale de 3.8 (ii) pour $s<j$: on a alors

$$E_2^{i,j}=\mathcal{E}xt^i_{D_X}(H^j_{[Y]}(M);\ H^p_{[Z]}(O_X))\approx\begin{cases}0 & \text{pour}\quad i\neq 0\\ \mathbb{C}^{m_j} & \text{pour}\quad i=0,\end{cases}$$

localement sur $Z-T$.

En effet $\mathcal{E}xt^j_{D_X}(H^j_{[Y]}(M);\ H^p_{[Z]}(O_X))\approx\mathcal{E}xt^j_{D_X}((D_X\,\delta_Z)^m;\ D_X\,\delta_Z)$ localement sur $Z-T$.

Au r-ième étage de la suite spectrale, on a la différentielle $d_r^{i,j}: E_r^{i,j}\to E_r^{i+r,\,j+r-1}$. Comme $E_2^{i,j}=0$ pour $i<0$, on a des « edge-homomorphisms » injectifs $E_2^{0,j}\to H^{p-j}_Z(S^{\cdot}_{X|Y})$, qui, compte tenu de la dégénérescence, sont des isomorphismes pour $s\leqslant j$ (et *a fortiori* pour $s<j$...).

4. Quelques applications

Les applications les plus intéressantes de nos résultats fondamentaux sont liées à une meilleure connaissance des modules fuchsiens [6]. Toutefois le cas $M=O_X$ fournit déjà un certain nombre de résultats, à ma connaissance, nouveaux.

DÉFINITION 4.1. — *Soit $y \in Y$. On appellera profondeur de Fuchs de Y_y (dans X) l'entier*

$$FPR(X;\ Y_y)=\operatorname{Inf}_{M \text{ fuchsien}} PR(X;\ Y_y;\ \operatorname{Sol} M).$$

On constate immédiatement que $\mathrm{FPR}(X;\ Y_y) \leqslant DRPR(X;\ Y_y)$. Par ailleurs, il est clair que $H^i(Y;\ Y-\{y\};\mathbb{C})=0$ pour $i<DRPR(X;\ Y_y)$, et, plus généralement, $H^i_{\{y\}}(X;\ S^{\cdot}_{X\mid Y})=0$ pour $i<PR(X;\ Y_y;\ S^{\cdot}_{X\mid Y})$. D'où la :

PROPOSITION 4.2 :

(i) $H^i(Y;\ Y-\{y\};\ \mathbb{C})=0$ *pour* $i<\dim X-LCD(X;\ Y)(y)$;

(ii) $H^i_{\{y\}}(X;\ S^{\cdot}_{X\mid Y})=0$ *pour* $i<\dim X-LCD(X;\ Y;\ M)(y)$ (*pour M fuchsien*).

LEMME 4.3. — *Si Y est intersection complète de codimension p en $y \in Y$, on a*

(i) $$LCD(X;\ [Y]\ (y)=LCD(X;\ Y)(y)=p$$

et donc $DRPR(X;\ [Y_y])=DRPR(X;\ Y_y)=\dim Y_y$;

(ii) $LCD(X;\ Y;\ M)(y) \leqq p$ *et donc* $PR(X;\ Y_y;\ S^{\cdot}) \geqq \dim Y_y$;

(iii) $FPR(X;\ Y_y)=\dim Y_y$.

On en déduit la :

PROPOSITION 4.4. — *Si Y est intersection complète en $y \in Y$, on a* :

(i) $H^i(Y;\ Y-\{y\};\ \mathbb{C})=0$ pour $i<\dim Y_y$;

(ii) $H^i_{\{y\}}(X;\ S^{\cdot}_{X\mid Y})=0$ *pour* $i<\dim Y_y$ (*pour M fuchsien*).

On établit de façon analogue la :

PROPOSITION 4.5. — *Si Y est définissable par p équations en $y \in Y$, on a :*

(i) $H^i(Y;\ Y-\{y\};\ \mathbb{C})=0$ *pour* $i<\dim X-p$;

(ii) $H^i_{\{y\}}(X;\ S^{\cdot}_{X\mid Y})=0$ *pour* $i<\dim X-p$ (*pour M fuchsien*).

Remarque 4.6. — Si Y est intersection complète à singularité isolée en y, on a évidemment des résultats plus précis : $\pi_i(Y;\ Y-\{y\})=0$ pour $i<\dim Y_y$ (*cf.* [3] et [6]).

---

[6] Remarque 4.11.

Suivant une idée d'OGUS [7] (proposition 4.17), on peut obtenir les généralisations suivantes :

Soient Y et Z des sous-ensembles analytiques fermés de X. Si F est un faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X on a la suite spectrale

$$H_Z^p H_Y^q(F) \Rightarrow H_{Z\cap Y}^{p+q}(F).$$

Si F est un faisceau de O_X-modules, on a la suite spectrale

$$H_{[Z]}^p H_{[Y]}^q(F) \Rightarrow H_{[Z\cap Y]}^{p+q}(F).$$

On déduit de cette dernière le :

LEMME 4.7 :

(i) *Si F est un faisceau de O_X-modules quasi cohérent (algébriquement), on a*

$$LCD(X;[Z\cap Y];F)\leqslant LCD(X;[Z])+LCD(X;[Y];F);$$

(ii) $LCD(X;[Z\cap Y])=LCD(X;Z\cap Y)$
$$\leqslant LCD(X;[Y])+LCD(X;[Z])=LCD(X;Y)+LCD(X;Z).$$

En effet, si $LCD(X;\{Z])+LCD(X;[Y];F)<p+q$, on a $LCD(X;[Z])<p$ ou $LCD(X;[Y];F)<q$, c'est-à-dire $H_{[Z]}^p H_{[Y]}^p(F)=0$ (puisque $H_{[Y]}^q(F)$ est quasi cohérent), ou $H_{[Y]}^q(F)=0$.

En appliquant ceci à $F=M$, D_X-module cohérent holonome, on obtient la :

PROPOSITION 4.8. — *Soit $x\in Z\cap Y$. On a :*

(i) $PR(X;[Z\cap Y)_x];S^\cdot)\geqslant PR(X;[Y_x];S^\cdot)-LCD(X;[Z])(x)$;

(ii) *Si, de plus Z est intersection complète de codimension p dans X (7), on a*

$$PR(X;[(Z\cap Y)_x];S^\cdot)\geqslant PR(X;[Y_x];S^\cdot)-p.$$

Si M est fuchsien, on a :

(i') $PR(X;(Z\cap Y)_x;S^\cdot)\geqslant PR(X;Y_x;S^\cdot)-LCD(X;Z)(x)$;

(ii') *si, de plus, Z est intersection complète de codimension p dans X (7), on a*

$$PR(X;(Z\cap Y)_x;S^\cdot)\geqslant PR(X;Y_x;S^\cdot)-p.$$

Appliquant ceci à $M=O_X$, on obtient le :

COROLLAIRE 4.9. — *Soit $x\in Z\cap Y$. On a :*

(i) $DRPR(X;(Z\cap Y)_x)\geqslant DRPR(X;Y_x)-LCD(X;Z)(x)$;

(7) Ou, plus généralement si z est définissable par p équations en x.

(ii) *si, de plus, Z est intersection complète de codimension p dans X* (7), *on a*

$$DRPR(X; (Z \cap Y)_x) \geqslant DRPR(X; Y_x) - p.$$

Remarque 4.10. — Il y a une intersection non vide entre nos résultats et ceux de L. KAUP [17], [18] : 4.4 (i) et 4.5 (i); par exemple (l'invariant « *tab* » de L. KAUP est lié au nombre d'équations nécessaires pour définir un germe analytique). Les résultats de L. KAUP sont valables pour des faisceaux localement libres de groupes abéliens; par contre, nos résultats font intervenir l'invariant *LCD* qui est plus précis que « *tab* » et s'étendent à certains faisceaux constructibles. Il n'est sans doute pas sans intérêt pour une meilleure compréhension ultérieure de ces questions de comparer les méthodes : le travail de L. KAUP est basé sur la *dualité de Poincaré* pour les espaces analytiques [16] et nous avons montré [8] que la version singulière sans torsion de la dualité de Poincaré est une variante de la dualité de Serre et est fondamentalement liée à nos techniques de *D*-modules (*cf.* aussi [19]).

Remarque 4.11 (octobre 1979). — Une première version de cet article a été diffusée sous forme de préprint en *février* 1978 (I.R.M.A., Strasbourg). Depuis cette date la théorie des D_X-modules *fuchsiens* s'est développée de manière « explosive ». Il me paraît utile d'en faire ici un bref historique tout en donnant quelques références.

L'étude de la situation classique (Théorie de Fuchs) a été reprise assez récemment (vers 1970) par divers auteurs; je citerai DELIGNE [21], GÉRARD-LEVELT [22], MALGRANGE [29], [30]. Après ces travaux on disposait d'une conception beaucoup plus claire de ladite situation. Dans [31] MALGRANGE pose le problème de construire une classe de *D*-modules, stable par les opérations usuelles de la « géométrie », et permettant de généraliser à plusieurs variables la théorie de Fuchs. (Dans le cadre plus restreint des connexions cela avait été fait : DELIGNE [21], GÉRARD-LEVELT [23].) Un peu plus tard PHAM conjecture les relations entre modules fuchsiens et « *distributions de classe de Nilsson* ».

J'ai apporté une première réponse au problème posé par MALGRANGE dans deux exposés aux Séminaires DOLBEAULT et LELONG (printemps 76 et 77); exposés rédigés et diffusés sous forme de preprint (I.R.M.A., mai 77), ultérieurement publié dans le « Séminaire LELONG-SKODA » [8]. Indépendamment KASHIWARA et OSHIMA [26] proposaient un critère *microlocal* de régularité. Ma définition présentait deux inconvénients : elle ne se vérifiait pas *a priori* microlocalement aux points génériques de la variété caractéristique et on ne pouvait en donner une version purement algébrique;

par contre O_X et les systèmes associés à une connexion régulière au sens de DELIGNE [21] vérifiaient (*non trivialement*) ma définition, ce qui, compte tenu de la *stabilité* de la classe introduite par un certain nombre d'opérations géométriques (restriction, images directes...) permettait de fabriquer pas mal de systèmes holonomes fuchsiens. La définition de KASHIWARA-OSHIMA, simple et agréable présentait l'inconvénient de ne pas se prêter facilement à une démonstration de la stabilité de la classe obtenue.

Aujourd'hui la situation a fait de considérable progrès :

KASHIWARA et KAWAI, dans un article remarquable (annoncé en 78 [27], et diffusé sous forme de preprint durant l'été 79 [28]) étudient systématiquement les modules fuchsiens du point de vue microlocal : ils montrent en particulier que la définition de KASHIWARA-OSHIMA [26] et celle de RAMIS [8] sont *équivalentes*.

VAN DEN ESSEN dans un certain nombre de papiers, puis dans sa thèse [36], introduit une nouvelle notion (*purement algébrique*) de D_X-module fuchsien. BJORK démontre dans son livre [20] que la définition de VAN DEN ESSEN et celle de RAMIS [8] sont équivalentes.

La notion de système fuchsien est donc actuellement assez claire. (Il n'en est pas de même de celle de système fuchsien le long d'une sous-variété.)

Signalons pour terminer que MEBKHOUT reprend dans sa thèse la définition de RAMIS [8] ([8]) et prouve, avec cette définition, une très jolie version (locale) de la conjecture de « Riemann-Hilbert » : il y a équivalence entre la catégorie des complexes bornés à droite de D_X-modules à gauche, à cohomologie *D_X-cohérente*, *holonome*, *fuchsienne*, d'amplitude bornée, et la catégorie des complexes de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur X, bornés à gauche, à cohomologie *$\mathbb{C}$-analytiquement constructible*, d'amplitude bornée (*cf.* MEBKHOUT [33]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI (A.) et BANICA (C.). — Relative duality on complex spaces I, *Revue roumaine de Mathématiques pures et appliquées*, t. XX, n° 9, 1975, p. 981-1041.

[2] BARTH (W.). — *Lokale cohomologie bei Isolierten Singularitaten Analytischer Mengen. Habilitationschrift*, Munster, 1970.

([8]) Le fait que O_X est fuchsien au sens de RAMIS [8] a été conjecturé et partiellement établi par MEBKHOUT en 1977 [32]. La première démonstration *complète* de ce résultat est, à ma connaissance, celle que j'ai donné dans [9] en *janvier* 1978. Elle a été *reprise* sous une forme voisine dans [33].

[3] HAMM (H.). — *Die topologie isolierter Singularitaten von vollständigen Durchnitten Komplexer Hyperflächen*, Doctorat, Bonn, 1969.

[4] KASHIWARA (M.). — *On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I*, Publ. R.I.M.S., Kyoto, University, n° 10, 1975, p. 563-579.

[5] KASHIWARA (M.). — *On the holonomic systems of linear differential equations II*, preprint, 1977.

[6] LE DUNG TRANG. — Un théorème du type de Lefschtz, *Séminaire F. Norguet, Fonctions de plusieurs variables complexes* 1970-1973, *Lecture Notes*, n° 409, p. 242-277.

[7] OGUS (A.). — Local cohomological dimension of algebraic varieties, *Ann. Math.*, vol. 98, n° 2, 1973, p. 327-365.

[8] RAMIS (J. P.). — Variations sur le thème « GAGA ». *Séminaire Lelonc P.-Skoda H.*, *Lecture Notes*, n° 694 (Springer-Verlag, 1978).

[9] RAMIS (J. P.). — *Appendice II à* [8], preprint I.R.M.A. Strasbourg, janvier 1978 (*cf.* [8]).

[10] RAMIS (J. P.). — Théorèmes de séparation et de finitude pour les espaces p-convexes, q-concaves et (p, q)-convexes-concaves, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, t. XXVII, p. 933-997.

[11] RAMIS (J. P.). — Dévissage Gevrey, *Astérisque* (Soc. Math. de France), t. 59-60, 1978, p. 173-204.

[12] HOUZEL (C.) et SCHAPIRA (P.). — *Théorèmes d'images directes pour les D_X-modules* (à paraître).

[13] RAMIS (J. P.), RUGET (G.) et VERDIER (J. L.). — Dualité relative en géométrie analytique complexe, *Inv. Math.*, t. 13, 1971, p. 261-283.

[14] SATO (M.), KASHIWARA (M.) et KAWAI (T.). — Hyperfunctions and pseudo differential equations, *Lecture Notes*, n° 287, 1973, p. 265-529.

[15] BOUTET DE MONVEL (L.), MALGRANGE (B.) et LEJEUNE (M.). — *Séminaire* 1975-1976, Grenoble 1976-1977.

[16] KAUP (L.). — Poincaré dualität für Räume mit Normalisierung, *Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa*, vol. XXVI, fasc. I, 1972.

[17] KAUP (L.). — Zur Homologie projektiv algebraischer varietäten, *Ann. della Sc. Norm. Sup. di Pisa*, vol. XXVI, fasc. II, 1972.

[18] KAUP (L.). — Exakte Sequenzen für globale und lokale Poincaré, Homomorphismen, Nordic Summer School/NAVF, *Symposium in Mathematik*, Oslo, August 5-25, 1976.

[19] MEBKHOUT (Z.). — Théorème de dualité pour les D_X-modules cohérents *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 285, série A, 1977, p. 785-786.

[20] BJÖRK (J. E.). — *Rings of differential operators*, Notrth Holland Mathematical Library, vol. 21, 1979.

[21] DELIGNE (P.). — Équations différentielles à points singuliers réguliers, *Lecture Notes*, n° 163 (Springer-Verlag 1970).

[22] GÉRARD (R.) et LEVELT (A. H. M.). — Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires, *Ann. Inst. Fourier*, t. XXIII, fasc. I, 1973.

[23] GÉRARD (R.) et LEVELT (A. H. M.). — Sur les connexions a singularités régulières dans le cas de plusieurs variables, *Funkcialaj Ekvacioj*, vol. 19, n° 2, octobre 1976.

[24] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). — E.G.A. 1, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 4, 1970.

[25] KASHIWARA (M.). — Systèmes d'équations micro-différentielles, cours à l'Université Paris-Nord, 1976-1977. (Notes de M^me^ Monteiro-Fernandez T.)

[26] KASHIWARA (M.) et OSHIMA (T.). — Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems, *Ann. of Math.*, t. 106, 1977, p. 145-200.

[27] KASHIWARA (M.) et KAWAI (T.). — *On holonomic systems with regular singularities*, preprint, 1978.

[28] KASHIWARA (M.) et KAWAI (T.). — *On holonomic systems of micro-differential equations III. Systems with regular singularities*, Publ. R.I.M.S., Kyoto University, June 1979.

[29] MALGRANGE (B.). — Remarques sur les points singuliers des équations différentielles, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 273, 1971, p. 1136-1137.

[30] MALGRANGE (B.). — Sur les points singuliers des équations différentielles, *L'Enseignement mathématique*, t. XX, 1-2, 1974, p. 146-176.

[31] MALGRANGE (B.). — Le polynome de Bernstein d'une singularité isolée, *Lecture Notes*, n° 459 (Springer-Verlag, 1976), p. 98-119.

[32] MEBKHOUT (Z.). — *Local cohomology of analytic spaces*, R.I.M.S., Kyoto University, t. 12, 1977, p. 247-256.

[33] MEBKHOUT (Z.). — Cohomologie locale des espaces analytiques complexes, *Thèse*, Université Paris-VII, février 1979.

[34] PHAM (F.). — *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*, Cours de D.E.A., 1977/1978, Université de Nice.

[35] RAMIS (J. P.). — Une remarque sur les complexes différentiels de fibrés holomorphes, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. , 19 , p. - .

[36] VAN DEN ESSEN (A.). — Fuchsian Modules, *Thesis*, 1979, Nijmegen (Holland).