BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE BÉRARD
GÉRARD BESSON

Remarque sur un article de Marcel Berger : « Sur une inégalité pour la première valeur propre du laplacien »

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 333-336
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__333_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 333-336.

REMARQUE SUR UN ARTICLE DE MARCEL BERGER : SUR UNE INÉGALITÉ POUR LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE DU LAPLACIEN (*)

PAR

PIERRE BÉRARD et GÉRARD BESSON

RÉSUMÉ. — Pour toute variété riemannienne compacte, homogène ou globalement harmonique, nous montrons que la première valeur propre non nulle du laplacien est plus petite que la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet dans les boules de rayon Inj $(M)/2$. L'égalité caractérise les sphères à courbure constante.

ABSTRACT. — We show that for a compact Riemannian manifold which is homogeneous or globally harmonic, the first non zero eigenvalue of the Laplacien is smaller than or equal to the first eigenvalue of the Laplacian for the Dirichlet problem in balls with radius Inj $(M)/2$. Equality characterizes the spheres of constant curvature.

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. On désigne par $\lambda_1(g)$ la première valeur propre non nulle de Δ, le laplacien de M. Posons $2L=\operatorname{Inj}(M)$ (où $\operatorname{Inj}(M)$ désigne le rayon d'injectivité de M). On désigne par $\lambda_1(x, r, g)$ la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet dans la boule $B(x, r)$ avec $r<\operatorname{Inj}(M)$. On pose aussi

$$\lambda_1(r, g)=\inf\{\lambda_1(x, r, g);\ x \text{ dans } M\}.$$

En particulier, on pose

$$\tilde{\lambda}_1(g)=\lambda_1(L, g).$$

Dans [BR] M. BERGER pose la question de savoir si l'on a toujours l'inégalité

$$\lambda_1(g)\leqslant\tilde{\lambda}_1(g).$$

(*) Texte reçu le 2 juillet 1979.

P. BÉRARD et G. BESSON, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212, U.E.R. de Mathématiques, Université Paris-VII, 75221 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/333/$ 5.00

Il démontre que cela est vrai si M admet une isométrie involutive sans point fixe. Nous montrons ici :

PROPOSITION. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte. Supposons que M vérifie l'une des propriétés suivantes :*

(i) (M, g) *est une variété riemannienne homogène;*

(ii) (M, g) *est localement harmonique jusqu'en* L (*en particulier cela est vérifié si M est globalement harmonique*).

Alors, on a l'inégalité $\lambda_1(g) \leqslant \lambda_1(g)$, *et l'égalité a lieu si et seulement si la variété M est la sphère munie d'une métrique proportionnelle à la métrique canonique.*

Remarque. — Pour les notions de variété harmonique nous renvoyons au chapitre 6 de [BE].

Preuve de la proposition :

1$^{\text{er}}$ *pas :* Soient B_1, B_2 deux boules disjointes de M et soient $\lambda(B_1)$, resp. $\lambda(B_2)$, les premières valeurs propres du problème de Dirichlet pour B_1, resp. B_2. On désigne par ψ_1, resp. ψ_2, les fonctions propres normalisées associées. Soient $\tilde{\psi}_1$, resp. $\tilde{\psi}_2$, les extensions triviales (i. e. par 0) de ψ_1, resp. ψ_2, à M. On désigne par α_1, α_2 deux nombres tels que

$$\alpha_1 \int_M \tilde{\psi}_1 + \alpha_2 \int_M \tilde{\psi}_2 = 0$$

(on peut les choisir tels que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ car les intégrales de $\tilde{\psi}_1$ et $\tilde{\psi}_2$ ne sont pas nulles). Posons

$$\psi = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2.$$

Par hypothèse ψ est C^1 par morceaux et on a

$$|d\psi|^2 = \alpha_1^2 \lambda(B_1) + \alpha_2^2 \lambda(B_2).$$

Par le principe du minimum on en déduit que

$$(1) \qquad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\lambda_1(g) \leqslant \alpha_1^2 \lambda(B_1) + \alpha_2^2 \lambda(B_2).$$

2$^{\text{e}}$ *pas :* Soient x_1, x_2 deux points de M et posons $B_i = B(x_i, \mathrm{L})$. Alors on a:

LEMME. — *Sous l'une ou l'autre des hypothèses* (i) *ou* (ii) *de la proposition ci-dessus, on a*

$$\lambda_1(g) = \lambda(B_1) = \lambda(B_2).$$

Preuve. — Dans le cas (i), il existe une isométrie $f: M \to M$ telle que $f(x_1)=x_2$ et donc $f(B_1)=B_2$ d'où $\lambda(B_1)=\lambda(B_2)$. Comme ceci vaut pour tous les points de M on a l'assertion du lemme.

Dans le cas de (ii), il résulte de [BD] que les boules $B(x, L)$ ont toutes la même première valeur propre pour le problème de Dirichlet, d'où le lemme.

3^{e} *pas :* Soit x_1 un point quelconque de M et soit x_2 un point du cut locus de x_1, Cut (x_1). Posons $B_i=B(x_i, \mathrm{L})$. D'après le lemme précédent et l'inégalité (1) on a

$$\lambda_1(g) \leqslant \lambda_1^{\cdot}(g). \tag{2}$$

4^{e} *pas :* Supposons maintenant que $\lambda_1(\mathrm{g})=\lambda_1^{\cdot}(g)$, et que M vérifie l'une des hypothèses de la proposition. Soient x_1 dans M et x_2 dans Cut (x_1). D'après le premier pas, on peut construire une fonction ψ C^1 par morceaux telle que $|d\psi|^2=\lambda_1^{\cdot}(g)|\psi|^2$. A cause de l'égalité dans (2), on en déduit que ψ est une fonction propre de M associée à $\lambda_1(g)$. Étant donné un autre point x_2' dans Cut (x_1), on peut construire une fonction ψ' qui est aussi fonction propre associée à $\lambda_1(g)$. Par construction (*cf.* 1er pas) ces deux fonctions coïncident dans la boule B_1 donc elles sont égales identiquement (*voir* par exemple [AN]). En particulier cela implique que $B(x_2, L)=B(x_2', L)$ (sinon, soit y un point de $B(x_2, L)$ qui n'est pas dans $B(x_2', L)$; alors, par construction, on aurait $\psi(y)\neq 0$ et $\psi'(y)=0$, une contradiction). Enfin, comme $2L=\mathrm{Inj}(M)$, cela impose que $x_2=x_2'$.

Nous venons de démontrer le :

Lemme. — *Si M vérifie* (i) *ou* (ii) *et si $\lambda_1(g)=\lambda_1^{\cdot}(g)$, alors, pour tout point x de M* Cut(x) *est réduit à un seul point.*

Si nous appliquons ce lemme et la proposition 5.44 de [BE] nous en déduisons que la variété (M, g) est une variété de Blaschke du type de la sphère (i.e. le cut locus de chaque point est réduit à un seul point). L'appendice D de [BE] montre alors que (M, g) est nécessairement homothétique à la sphère canonique. Ceci termine la démonstration de la proposition.

Remarque. — On peut étendre le pas n° 4 de la démonstration ci-dessus au cas traité par M. Berger : si M admet uns isométrie involutive d'ordre 2, sans points fixes, et si $\lambda_1(g)=\lambda_1^{\cdot}(g)$ alors, M est homothétique à la sphère canonique.

BIBLIOGRAPHIE

[AN] ARONSAJN (N.). — A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, *J. Math. Pures et Appl.*, 36, 1957, p. 235-249.

[BD] BÉRARD (P). — *Remarques sur les variétés harmoniques*, Preprint.

[BE] BESSE (A). — Manifolds all of whose Geodesics are Closed, Springer-Verlag (*Ergebnisse der Mathematik*, n° 93), Berlin, 1978.

[BR] BERGER (M.). — Une inégalité universelle pour la première valeur propre du laplacien, *Bull. Soc. Math. France*, 107, 1979, p. 3-9.