BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE BOREL

Un problème d'équirépartition modulo 1 lié aux partitions

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 229-250
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__229_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 229-250.

UN PROBLÈME D'ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 LIÉ AUX PARTITIONS (*)

PAR

JEAN-PIERRE BOREL

RÉSUMÉ. — Soit $Y=(y_k)$ une suite croissant vers $+\infty$ de nombres réels positifs, et $X=(x_n)$ la suite croissante des combinaisons linéaires $\sum n_k y_k$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Nous montrons que l'ensemble $\mathrm{Spec}(Y)$ des nombres réels positifs α tels que la suite (αx_n) n'est pas équirépartie modulo 1 est d'une des formes : $\emptyset$, $y_1^{-1}\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si la suite Y vérifie certaines conditions, portant notamment sur la croissance de y_k en fonction de k, $\mathrm{Spec}(Y)$ est d'une des deux formes : $\emptyset$ ou $y_1^{-1}\mathbb{Q}_+^*$, un critère très simple permettant de décider laquelle.

ABSTRACT. — Let $Y=(y_k)$ be an infinitely increasing sequence of positive real numbers, let $X=(x_n)$ be the increasing sequence of all numbers $\sum n_k y_k$, with positive integer coefficients. We study the set $\mathrm{Spec}(Y)$ of all positive real numbers α such that the sequence (αx_n) is not uniformly distributed mod. 1. We show that $\mathrm{Spec}(Y)$ is equal to $\mathbb{R}_+^*$, $y_1^{-1}\mathbb{Q}_+^*$, or $\emptyset$, and if Y satisfies some conditions, essentially growth conditions, $\mathrm{Spec}(Y)$ is or equal to $y_1^{-1}\mathbb{Q}_+^*$, or empty. In this late case, a very simple criterion can be used to decide if $\mathrm{Spec}(Y)$ is equal to $y_1^{-1}\mathbb{Q}_+^*$ or is empty.

0. Introduction

Nous considérons uniquement des suites de nombres réels positifs ou nuls, croissantes au sens large. Nous désignerons par $X=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Z=(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de telles suites infinies, croissantes vers $+\infty$ avec n, et par Y :

– soit une suite finie $Y=(y_k)_{1\leqslant k\leqslant K}$ avec $y_1>0$;

– soit une suite infinie $Y=(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ avec $y_1>0$ et $\lim_{k\to\infty} y_k=+\infty$.

Nous noterons : $X+Z$ la suite (croissante) des x_n+z_m, (n, m) décrivant $\mathbb{N}^2$. $\langle Y\rangle$ la suite (croissante) des combinaisons linéaires finies $\sum n_k y_k$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et, par abus

$$\langle y_1, y_2, \ldots, y_K\rangle=\langle (y_k)_{1\leqslant k\leqslant K}\rangle.$$

(*) Texte reçu le 26 mars 1979.

J.-P. BOREL, Département de Mathématiques, U.E.R. des Sciences de Limoges, 123, rue Albert-Thomas, 87060 Limoges, Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/229/$ 5.00

Enfin, nous poserons :

– si x et t sont deux nombres réels

$$A_X(x, t)=\sum_{x_n<x} e^{2\pi i t x_n};$$

– $A_X(x)=A_X(x, 0)$ « *fonction de répartition* » de la suite X;

– $B(X)=\{\alpha\in\mathbb{R}_+^*/(\alpha x_n)$ est équirépartie modulo 1$\}$ « *ensemble normal* » associé à la suite X;

– $\mathrm{Spec}(Y)=\mathbb{R}_+^*-B(\langle Y\rangle)$ « *spectre* » de la suite Y.

Nous montrons dans [2] que, dans certaines conditions, l'addition des suites augmente les ensembles normaux associés; cela signifie que, si l'on ajoute à une suite Y des éléments supplémentaires, l'ensemble $\mathrm{Spec}(Y)$ ne peut que diminuer. Cette diminution se faisant par « gros morceaux », il y a seulement trois types de suites Y, définis par :

type 1 : $\mathrm{Spec}(Y)=\mathbb{R}_+^*$;

type 2 : $\mathrm{Spec}(Y)=y_1^{-1}\mathbb{Q}_+^*$;

type 3 : $\mathrm{Spec}(Y)=\emptyset$.

La détermination du type d'une suite Y se fait en étudiant la fonction de répartition A_X (choix entre le type 1 et les types 2 et 3), tandis que le choix entre les types 2 et 3 se fait essentiellement en fonction de l'existence d'un indice k tel que $y_1^{-1}y_k$ est irrationnel.

Quelques exemples simples :

– si $y_k=\mathrm{Log}\,p_k$, où p_k est le k-ième nombre premier, Y est du type 1. En effet, la suite Y associée est la suite $(\mathrm{Log}\,n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et il est bien connu que $(\alpha\,\mathrm{Log}\,n)$ n'est jamais équirépartie modulo 1 (*voir* par exemple [9], p. 43-44);

– si Y est une suite finie $(y_1, y_2, \ldots, y_K)$, on peut montrer facilement (c'est par exemple une conséquence immédiate de [10]) :

$$\mathrm{Spec}(Y)=\{\alpha\in\mathbb{R}_+^*/\forall k\in\{1, 2, \ldots, K\}, \alpha y_k\in\mathbb{Q}\},$$

c'est-à-dire que Y est du type 3 s'il existe k tel que $y_1^{-1}y_k$ est irrationnel, du type 2 sinon.

Si Y n'est pas du type 1, il est facile de déterminer si elle est du type 2 ou 3. Il est par contre plus compliqué de voir si une suite Y donnée est du type 1 ou non. Ce problème est un problème de partition. Nous le résoudrons, partiellement, soit en utilisant des méthodes classiques dans la théorie des partitions, soit en trouvant un élément de $B(\langle Y\rangle)$ (alors Y n'est pas du type 1). La réponse obtenue dépend alors de deux sortes de conditions :

– conditions de croissance de y_k en fonction de k;

– conditions de répartition modulo 1 de la suite Y (par exemple $B(Y)\neq\emptyset$).

1. Étude du spectre d'une suite

Nous rappelons ici brièvement un certain nombre de résultats, dont la démonstration se trouve dans [2].

1.1. Critère de Weyl pour des suites avec répétition

Il est commode d'utiliser, dans le cas de suites avec répétition (i. e. $x_{n+1}=x_n$ pour certains indices n), une variante du critère de Weyl (*cf.* [6], p. 7), qui consiste à ne regarder que les sommes de Weyl $\sum_{n=0}^{N} e^{2\pi i x_n}$ pour les N tels que $x_{N+1}\neq x_N$.

Théorème 1 :

$$\alpha\in B(X) \Leftrightarrow \forall q\in\mathbf{N}^*,$$
$$\lim_{x\to+\infty} A_X(x)^{-1}A_X(x, q\alpha)=0.$$

1.2. Fonctions a croissance régulière

Nous dirons qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, qui croît avec x vers $+\infty$, est à *croissance régulière* si la fonction qui à x associe $f(\operatorname{Log} x)$ est à oscillations lentes (« slowly oscillating functions », *voir* [7]). C'est-à-dire que f est à croissance régulière (noté $f\in\mathscr{R}$) si elle vérifie les conditions équivalentes

$$\exists y>0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x-y)}{f(x)}=1,$$
$$\forall y>0, \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x-y)}{f(x)}=1.$$

Les propriétés suivantes sont immédiates :

(P.1) si f et g sont équivalentes (i.e. $\lim_{x\to+\infty}(f(x)/g(x))=1$) : $f\in\mathscr{R} \Leftrightarrow g\in\mathscr{R}$;

(P.2) si $f\in\mathscr{R}$, et $\alpha\in\mathbf{R}_+^*$, la fonction qui à x associe $f(x/\alpha)$ appartient aussi à $\mathscr{R}$;

(P.3) si $f\in\mathscr{R}$: $\forall a>1, \exists C_a>0$ tel que $\forall x>0, f(x)<C_a a^x$;

(P.4) si f'' est définie et a un signe constant au voisinage de $+\infty$: ce signe est $-$. Alors $f\in\mathscr{R}$; ce signe est $+$. Alors :

$$f\in\mathscr{R} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=0.$$

1.3. Ensemble normal associé a la somme de deux suites

La recherche de l'ensemble normal $B(X)$ n'a d'intérêt que si la fonction A_X est à croissance régulière. En effet :

Proposition 1. — *Si A_X n'est pas à croissance régulière, l'ensemble normal $B(X)$ est vide.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 1.3 de [6] et de la propriété (P.3).

D'autre part, pour tout couple (x, t) de nombres réels et toutes suites X et Z, on a

$$A_{X+Z}(x, t)=\sum_{z_n\leq x} A_X(x-z_n, t)\, e^{2\pi i t z_n}. \tag{1}$$

Ce résultat entraîne en particulier :

Proposition 2. — *Si A_X et A_Z sont à croissance régulière, il en est de même pour A_{X+Z}.*

Proposition 3. — *Supposons A_{X+Z} à croissance régulière. Alors :*

$$B'(X)\cup B'(Z)\subset B'(X+Z)$$

($B'(X)$ étant l'ensemble des nombres réels positifs α tels que

$$\lim_{x\to+\infty} A_X(x)^{-1} A_X(x, \alpha)=0).$$

On a donc $B(X)=\bigcap_{q\in\mathbb{N}^*}(1/q)\, B'(X)$ et, en particulier :

Proposition 3'. — *Supposons A_{X+Z} à croissance régulière. Alors :*

$$B(X)\cup B(Z)\subset B(X+Z).$$

Il existe des cas où cette dernière inclusion est stricte (prendre par exemple $X=\langle 1/2\rangle$ et Z une suite telle que $B(Z)\cap\mathbb{N}^*=2\,\mathbb{N}^*$, l'existence d'une telle suite Z provient de la caractérisation des ensembles normaux obtenue dans [8]).

1.4. SPECTRE D'UNE SUITE

Nous définirons le dénominateur $d=\text{den}(Y)$ de la suite Y par

$$d=\sup_{y\in Y}\text{den}\left(\frac{y}{y_1}\right)$$

où

$$\text{den}(x)=\begin{cases}+\infty & \text{si } x\in\mathbf{Q},\\ \inf_{x=p/q}|q| & \text{si } x\in\mathbf{Q},\end{cases}$$

Nous avons alors montré dans [2] :

THÉORÈME 2. — *Soit Y une suite croissante de nombres réels positifs. Trois cas sont alors possibles :*

(i) $A_{\langle Y\rangle}\notin\mathscr{R}$. *Alors* $\text{Spec}(Y)=\mathbf{R}_+^*$;

(ii) $A_{\langle Y\rangle}\in\mathscr{R}$ *et* $d<+\infty$. *Alors* $\text{Spec}(Y)=y_1^{-1}\mathbf{Q}_+^*$;

(iii) $A_{\langle Y\rangle}\in\mathscr{R}$ *et* $d=+\infty$. *Alors* $\text{Spec}(Y)=\emptyset$.

Y étant une suite donnée, déterminer son spectre revient donc à résoudre deux problèmes :

— la fonction $A_{\langle Y\rangle}$ est-elle à croissance régulière?

— le dénominateur d de la suite Y est-il fini ou infini?

Ce dernier problème est simple, trois cas seulement étant possibles :

cas 1 : $\exists k,\ y_k/y_1\notin\mathbf{Q}$ alors $d=+\infty$;

cas 2 : $Y\subset y_1\mathbf{Q}$ et $\overline{\lim}\ \text{den}(y_k/y_1)=+\infty$ alors $d=+\infty$;

cas 3 : $\exists n\in\mathbf{N}^*,\ nY\subset y_1\mathbf{Z}$ alors $d<+\infty$;

(le cas 2 est évidemment impossible si Y est finie).

Nous allons maintenant étudier le premier problème.

2. Démonstration directe de $A_{\langle Y\rangle}\in\mathscr{R}$

2.1. CAS D'UNE SUITE Y FINIE

La proposition suivante sera souvent utile par la suite :

PROPOSITION 4. — *Soit $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_K)$ une suite finie. Alors pour tout $x\geqslant 0$:*

$$\sum_{i=0}^{K}\tilde{S}_{K-i}(y_1, y_2, \ldots, y_K)\frac{x^i}{i!}\leqslant\left(\prod_{k=1}^{K}y_k\right)A_{\langle Y\rangle}(x)\leqslant\sum_{i=0}^{K}S_{K-i}(y_1, y_2, \ldots, y_K)\frac{x^i}{i!},$$

si l'on pose :

$$\left\{\begin{array}{c} S_n(y_1, y_2, \ldots, y_K) = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leqslant K} y_{k_1} \times y_{k_2} \times \ldots \times y_{k_n}, \\ 1 \leqslant n \leqslant K, \\ S_0(y_1, y_2, \ldots, y_K) = 1, \\ \tilde{S}_n(y_1, y_2, \ldots, y_K) = S_n(0, y_2/2, y_3/2, \ldots, y_K/2), \\ 0 \leqslant n \leqslant K. \end{array}\right.$$

Cet encadrement se démontre par récurrence sur K :

– si $K=1$, $A_{\langle Y \rangle}(x) = [x/y_1]+1$, d'où :

$$x \leqslant y_1 A_{\langle Y \rangle}(x) \leqslant x + y_1 ;$$

– si Y' est la suite finie $(y_1, y_2, \ldots, y_{K-1})$, avec $K>1$, la relation (1) entraîne :

$$A_{\langle Y \rangle}(x) = \sum_{n=0}^{[x/yK]} A_{\langle Y' \rangle}(x - n y_K).$$

Le calcul d'un encadrement de $A_{\langle Y \rangle}(x)$ se fait facilement, en utilisant :

– les relations :

$$S_n(y_1, y_2, \ldots, y_K) = y_K S_{n-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{K-1}) + S_n(y_1, y_2, \ldots, y_{K-1}),$$
$$1 \leqslant n \leqslant K-1,$$
$$S_K(y_1, y_2, \ldots, y_K) = y_K S_{K-1}(y_1, y_2, \ldots, y_{K-1})$$
$$S_0(y_1, y_2, \ldots, y_K) = S_0(y_1, y_2, \ldots, y_{K-1})$$

et les relations sur les $\tilde{S}$ qui s'en déduisent,

– la forme de la formule d'Euler-Mac Laurin (*voir* par exemple [3], p. 303) : si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, f' et f'' étant positives sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $a>0$:

$$\int_0^a f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(a)+f(0)) \leqslant \sum_{n=0}^{[a]} f(a-n) \leqslant \int_0^a f(t)\,dt + f(a)$$

(le coefficient $1/2$ dans cette formule est celui que l'on retrouve dans la définition de $\tilde{S}$ à partir de S).

En particulier, la proposition 4 donne l'équivalent

$$A_{\langle y_1, y_2, \ldots, y_K \rangle}(x) \sim \left(K! \prod_{k=1}^{K} y_k\right)^{-1} x^K$$

et, avec les propriétés (P.1) et (P.4), toutes les suites Y finies sont telles que $A_{\langle Y \rangle} \in \mathcal{R}$. Nous supposerons donc dans tout ce qui suit que Y est une suite infinie, et nous noterons $X = \langle Y \rangle$.

2.2. La fonction A_X a été étudiée, dans le cadre de la théorie des partitions, pour certaines suites Y. Si Y est la suite des entiers strictement positifs, $A_X(x) - A_X(x-1)$ est le nombre de partitions $p([x])$ de l'entier $[x]$. L'équivalent bien connu

$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\sqrt{3}\,n}$$

obtenu par Hardy et Ramanujan dans [4] entraîne en particulier $A_X \in \mathcal{R}$ dans ce cas. Plus généralement, l'équivalent de $A_X(x) - A_X(x - y_1)$ obtenu pour certaines suites Y par Ingham (*voir* [5], théorème 2) entraîne immédiatement :

THÉORÈME 3. — *Soit Y une suite telle que $A_Y(x) = Bx^\beta + R(x)$ $(B > 0,\ \beta > 0)$ R vérifiant :*

$$\int_0^x \frac{R(u)}{u}\, du = b \operatorname{Log} x + c + o(1) \qquad (b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

Alors $A_X \in \mathcal{R}$.

2.3. Il n'y a en fait pas besoin d'un résultat aussi précis qu'un équivalent de $A_X(x) - A_X(x - y_1)$. Bateman et Erdös ont montré dans [1] que $A_X \in \mathcal{R}$ dès que Y est une suite strictement croissante de nombres entiers. En faisant un raisonnement analogue, nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit Y une suite telle que* $\inf_{k \in \mathbb{N}^*} (y_{k+1} - y_k) = \lambda > 0$. *Alors $A_X \in \mathcal{R}$.*

Nous allons en fait montrer

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A_X(x) - A_X(x-\lambda)}{A_X(x)} = 0$$

ce qui entraîne le résultat annoncé.

Nous noterons $\Delta A_X^{(q)}(x)$ le cardinal de l'ensemble $E_q(x)$ $(q \geqslant 1)$ des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{N}^*$ de la forme

$$\sum_{j=1}^{q} n_j y_{k_j}, \qquad 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_q,$$

appartenant à l'intervalle $]x-\lambda, x]$.

Posons de plus

$$\Delta A_X(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \Delta A_X^{(q)}(x) = A_X(x) - A_X(x-\lambda).$$

A chaque combinaison linéaire appartenant à $E_q(x)$, on peut associer q combinaisons linéaires, éléments de la suite X :

$$\sum_{j=1}^{q} m_j y_{k_j}$$

avec

$$m_j = \begin{cases} n_j & \text{si } j \neq i \\ n_j - 1 & \text{si } j = i \end{cases} \qquad (1 \leqslant i \leqslant q).$$

Lorsque q décrit $\mathbb{N}^*$ et la combinaison linéaire $\sum n_j y_{k_j}$ décrit $E_q(x)$, toutes les combinaisons linéaires obtenues de cette manière sont des éléments de la suite X, inférieurs à x, et distincts deux à deux. Cela entraîne :

$$A_X(x) \geqslant \sum_{q=1}^{\infty} q\, \Delta A_X^{(q)}(x).$$

Soit $Q > 0$ donné quelconque. Alors, pour tout $x > 0$:

$$A_X(x) \geqslant Q\, \Delta A_X(x) - Q \sum_{q=1}^{Q} \Delta A_X^{(q)}(x).$$

LEMME :

$$A_X^{(q)}(x) \leqslant (q+1) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2q}.$$

En effet, les entiers $m_k = [y_k/\lambda]$ sont tous distincts. Le nombre $P_q(n)$ d'écritures de l'entier n sous la forme

$$n = \sum_{j=1}^{q} n_j m_{k_j} \quad \text{avec} \quad n_j \in \mathbb{N}^*$$

est donc majoré par n^{2q-1} (c'est exactement l'inégalité (8) obtenue dans la démonstration du théorème 4 de [1]).

D'autre part, $\Delta A_X^{(q)}(x)$ est majoré par le nombre de solutions de

$$\frac{x}{\lambda} - 1 - q < \sum_{j=1}^{q} n_j m_{k_j} \leqslant \frac{x}{\lambda}$$

et, comme il y a au plus $q+1$ entiers dans l'intervalle$]$ $(x/\lambda) - 1 - q, (x/\lambda)]$. On obtient la majoration de $\Delta A_X^{(q)}(x)$ annoncée. ■

$A_X(x)$ est minoré par $A_{X'}(x)$, où X' est la suite

$$X' = \langle y_1, y_2, \ldots, y_{2Q+1} \rangle$$

ce qui donne, en utilisant la proposition 4 :

$$\lim_{x \to +\infty} A_X(x)^{-1} x^{2Q} = 0.$$

En combinant ce résultat avec le lemme et la minoration de $A_X(x)$ déjà obtenue, nous obtenons donc

$$\overline{\lim}_{x \to +\infty} A_X(x)^{-1} \Delta A_X(x) \leqslant \frac{1}{Q}$$

et ceci pour tout $Q > 0$. D'où le théorème. ■

Remarque. — Les suites Y pour lesquelles le théorème 4 s'applique sont celles qui vérifient la propriété : il existe $\lambda > 0$ tel que $y_k - \lambda k$ est une fonction croissante de k.

D'autre part, l'ensemble $\mathbb{R}_+^* - B(Y)$ a, lorsque Y est une telle suite, une mesure de Lebesgue nulle (*voir* [9], p. 72, corollaire 3.2). Ces deux propriétés sont à rapprocher de la condition (C.2) du théorème 7.

Les théorèmes 3 et 4 ne permettent pas d'obtenir des majorations des sommes de Weyl liées à la suite αX, lorsque $\alpha \in B(X)$, et ne donnent donc pas de renseignements sur la discrépance d'une telle suite. Nous allons maintenant essayer d'obtenir des majorations de ces sommes, ce qui permettra de trouver des éléments α de $B(X)$ pour certaines suites Y. Cela entraîne, avec le théorème 2, $A_X \in \mathscr{R}$ pour ces suites Y.

3. Majoration de sommes d'exponentielles liées à un réseau de $\mathbb{R}^p$

3.1. Quelques notations et définitions

3.1.1. Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans l'espace $\mathbb{R}^p$, muni de la base canonique (b_j), de points générique $x = \sum x_j b_j$ (lorsque cela n'est pas précisé, l'indice j décrit 1, 2, ..., p). $\mathbb{R}^p$ est muni de la mesure de Lebesgue m, et d'une distance $d(x, y) = \|x - y\|$.

Nous considérons un réseau $R = \bigoplus_j z_j \mathbb{Z} b_j$, avec $0 < z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_p$, fixé dans ce qui suit. Nous poserons :

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^p / \forall j,\ 0 \leqslant x_j < z_j \},$$

$$d = \sup_{x \in M} \|x\|.$$

3.1.2. Dans ce chapitre, un nombre réel α est fixé, tel que

$$\forall j, \quad \alpha z_j \notin \mathbb{Z}.$$

Si V est une partie bornée de $\mathbb{R}^p$, nous poserons

$$S(\alpha, V) = \sum_{x \in R \cap V} e^{2\pi i \alpha \Sigma x_j} \quad \text{et} \quad S(V) = \sum_{x \in R \cap V} 1.$$

Nous cherchons à comparer $S(\alpha, V)$ et $S(V)$ pour certaines parties V de $\mathbb{R}^p$. Nous utiliserons le résultat obtenu à T, « triangle » de $\mathbb{R}^p$, définie par

$$T = \{ x \in \mathbb{R}^p / \forall j, \ x_j \geqslant 0 \text{ et } \sum x_j \leqslant 1 \},$$

ce qui fait que, pour tout nombre $\lambda > 0$:

$$S(\alpha, \lambda T) = A_{\langle z_1, z_2, \ldots, z_p \rangle}(\lambda, \alpha).$$

3.1.3. Nous appellerons « rectangle » de $\mathbb{R}^p$ toute partie P de la forme :

$$\exists r \in \mathbb{R}^p, \quad \exists s \in \mathbb{R}^p, \quad x \in P \Leftrightarrow \forall j, \quad r_j \prec x_j \prec s_j,$$

où les $\prec$ signifient soit $<$, soit $\leqslant$, indépendamment les uns des autres.

Enfin, si V est une partie de $\mathbb{R}^p$ et ε un nombre réel positif, nous poserons :

$$V^* = V + M = \{ x + x', \ x \in V \text{ et } x' \in M \},$$
$$x^* = \{ x \}^*,$$
$$V^\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^p / d(x, V) \leqslant \varepsilon \},$$
$${}^\varepsilon V = \{ x \in \mathbb{R}^p / d(x, \complement V) \geqslant \varepsilon \}$$

3.2. UNE MAJORATION DE $S(\alpha, V)$

Soit $d_0 = \sup \|x\|$, borne supérieure prise sur le rectangle P_0 :

$$x \in P_0 \Leftrightarrow \forall j, \quad 0 \leqslant x_j < 1$$

THÉORÈME 5. — *Soit V une partie quarrable de $\mathbb{R}^p$* de mesure $m(V) > 0$, *et $\eta > 0$. Alors il existe un entier $N \leqslant \eta^{-p} m(V)$ tel que :*

$$|S(\alpha, V)| \leqslant 2^p N \prod_j |1 - e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} + \frac{m(V^d) - m({}^{d+\eta d_0} V)}{\prod_j z_j}.$$

En particulier

$$\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda V)^{-1} S(\alpha, \lambda V) = 0$$

(une partie de $\mathbb{R}^p$ est quarrable si l'on peut définir son aire en l'approchant intérieurement et extérieurement par des réunions finies de rectangles ou, ce qui revient au même, si elle est m-mesurable et sa frontière est de mesure nulle).

Soit C un cône de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire une partie telle que

$$x \in C \Rightarrow \forall \lambda > 0, \quad \lambda x \in C.$$

On peut alors appliquer le théorème 5 à $T_C = \{ x \in C / \| x \| \leqslant 1 \}$. Si Σ_C est la suite des $|x| = \sum x_j$, décrivant $C \cap R$, ordonnée à $\| x \|$ croissant, on obtient alors :

$$\{ \beta > 0 / \forall j, \ \beta z_j \in \mathbb{Q} \} \subset B(\Sigma_C)$$

3.3. Une majoration de $S(\alpha, \lambda T)$

Nous ne montrerons pas ici le théorème 5. Sa démonstration est analogue à celle du résultat suivant, qui nous servira ensuite.

Proposition 5. — *(a) Pour tout $\eta > 0$, il existe un nombre $N \leqslant \lambda^p / \eta^p p!$ tel que pour tout $\lambda > 0$:*

$$|S(\alpha, \lambda T)| \leqslant 2^p N \prod_j | 1 - e^{2\pi i \alpha z_j} |^{-1} + \frac{\lambda^p}{p! \prod_j z_j} \left[\left(1 + \frac{p z_p}{\lambda} \right)^p - \left(1 - \frac{p \eta}{\lambda} \right)^p \right];$$

(b) pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\lambda > 0$, on a

$$|S(\alpha, \lambda T)| \leqslant D_\varepsilon + \varepsilon S(\lambda T)$$

avec

$$D_\varepsilon = \varepsilon^{-p} \frac{(4 p^2 e)^p}{p!} \prod_j | 1 - e^{2\pi i \alpha z_j} |^{-1} + \frac{1}{p!} (11 p^2 \varepsilon^{-1} z_p)^p (\textstyle\prod_j z_j)^{-1}.$$

Lemme. — *Soit P un rectangle de $\mathbb{R}^p$. Alors :*

$$|S(\alpha, P)| \leqslant 2^p \prod_j | 1 - e^{2\pi i \alpha z_j} |^{-1}.$$

En effet, $a_j \prec n_j z_j \prec b_j$ est vérifié lorsque n_j varie entre deux valeurs k_j et m_j. D'où

$$S(\alpha, P) = \sum_{\forall j, \, k_j \leqslant n_j \leqslant m_j} \exp(2 \pi i \alpha \textstyle\sum n_j z_j)$$
$$= \prod_j \exp(2 \pi i \alpha k_j z_j) \sum_{q=0}^{m_j - k_j} \exp(2 \pi i \alpha q z_j),$$

d'où la majoration. ■

T est réunion disjointe des parties U et V de $\mathbb{R}^p$, où U est la réunion (disjointe) des rectangles P inclus dans T de la forme

$$\exists n \in \mathbb{Z}^p, \quad x \in P \iff \forall j, \eta n_j \leqslant x_j < \eta(n_j+1).$$

Si U est réunion disjointe de N rectangles, le lemme entraîne

$$|S(\alpha, U)| \leqslant 2^p \prod_j |1-e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} N.$$

Tous les rectangles utilisés dans la construction de U étant de mesure η^p, on peut choisir $N \leqslant \eta^{-p} m(\lambda T) = \eta^{-p} \lambda^p / p!$

D'autre part, V^* contient tous les rectangles x^* lorsque x décrit $R \cap V$. Il y a $S(V)$ tels rectangles, disjoints et de mesure $m(M)$. Donc :

$$|S(\alpha, V)| \leqslant S(V) \leqslant \frac{m(V^*)}{m(M)}.$$

Or : l'ensemble V est contenu

$$\begin{cases} \text{dans } \lambda T, \\ \text{dans le complémentaire de } \lambda' T, \text{ avec } \lambda' = \lambda - p\eta; \end{cases}$$

l'ensemble V^* est contenu

$$\begin{cases} \text{dans } \lambda'' T, \text{ avec } \lambda'' = \lambda + p z_p, \\ \text{dans le complémentaire de } \lambda' T \end{cases}$$

(on aurait en fait pu prendre $\lambda'' = \lambda + \sum z_j$).

Donc :

$$\begin{aligned} |S(\alpha, \lambda T)| \leqslant 2^p N \prod_j |1-e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} \\ &+ (\textstyle\prod_j z_j)^{-1} (m(\lambda'' T) - m(\lambda' T)) \\ &\leqslant 2^p N \textstyle\prod_j |1-e^{2\pi i \alpha z_j}|^{-1} + (\prod_j z_j)^{-1} p!^{-1} (\lambda''^p - \lambda'^p) \end{aligned}$$

ce qui donne exactement la partie (a). La majoration de $S(\alpha, V)$ du théorème 5 s'obtient de la même manière.

Lorsque x décrit $\lambda T \cap R$, la réunion des rectangles x^* contient $\lambda''' T$, avec $\lambda''' = \lambda - p z_p$. Donc

$$(\textstyle\prod_j z_j)\, S(\lambda T) \geqslant \dfrac{\lambda^p}{p!} \left(1 - \dfrac{p z_p}{\lambda}\right)^p.$$

Posons $\eta=\lambda\mu$, et cherchons à quelles conditions sur λ et μ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\left(1+\frac{pz_p}{\lambda}\right)^p-(1-p\mu)^p\leqslant\varepsilon\left(1-\frac{pz_p}{\lambda}\right)^p.$$

LEMME. — *L'inégalité* $(1+a)^p-(1-b)^p\leqslant\varepsilon\,(1-a)^p$ *est satisfaite dès que*

$$0\leqslant a\leqslant\frac{\varepsilon}{2e(e-1)p}\qquad\text{et}\qquad 0\leqslant b\leqslant\frac{\varepsilon}{2ep}.$$

Si $p\geqslant 2$ et $0\leqslant a\leqslant 1/p$, il suffit de résoudre

$$(1+a)^p-(1-b)^p\leqslant\varepsilon/e.$$

Or :

$$(1+a)^p-(1-b)^p\leqslant ap\left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^p-1\right)+pb\leqslant ap(e-1)+pb,$$

lorsque $0\leqslant a\leqslant 1/p$ et $0\leqslant b\leqslant 1$. Lorsque $p=1$, la vérification est immédiate. ∎

Choisissons $\mu=\varepsilon/2ep^2$. Alors on obtient :
si $\lambda\geqslant 2e(e-1)p^2z_p\varepsilon^{-1}$:

$$|S(\alpha,\lambda T)|\leqslant\frac{(4ep^2)^p}{p!\,\varepsilon^p}\prod_j|1-e^{2\pi i\alpha z_j}|^{-1}+\varepsilon.S(\lambda T);$$

si $\lambda\leqslant 2e(e-1)p^2z_p\varepsilon^{-1}$:

$$|S(\alpha,\lambda T)|\leqslant S(\lambda T)\leqslant\frac{m(\lambda'' T)}{m(M)}\leqslant\frac{(2e(e-1)p^2z_p\varepsilon^{-1}+pz_p)^p}{p!\prod_j z_j},$$

ce qui termine la démonstration. ∎

4. Recherche d'éléments α appartenant à $B(\langle Y\rangle)$

4.1. MÉTHODE UTILISÉE

Nous cherchons à majorer certaines sommes $A_X(x,t)$, où Y est une suite infinie et $X=\langle Y\rangle$. Nous utiliserons le principe suivant : soit x donné, k défini par $y_k\leqslant x<y_{k+1}$, $\tilde X=\langle\tilde Y\rangle$ où $\tilde Y$ est la suite finie $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant k}$. Nous supposerons donnés une partie H de $\{1,2,\ldots,k\}$, $H=\{h_1,h_2,\ldots,h_p\}$ où h_j croît avec j, et un nombre réel positif t tel que $ty_{h_j}\notin\mathbb{Z}$, $1\leqslant j\leqslant p$. Nous noterons :

$$\tilde Y_H \text{ la suite des } y_k,\ k \text{ décrivant } \{1,2,\ldots,k\}-H,$$

$$Z=(z_j)_{1\leqslant j\leqslant p}\qquad\text{avec}\qquad z_j=y_{h_j}.$$

Donc $A_{\langle Z\rangle}(\lambda, t)=S(t, \lambda T)$ est majoré en module par $D_\varepsilon+\varepsilon A_{\langle Z\rangle}(\lambda)$, D_ε étant donné par la proposition 5. D'autre part, $\tilde{X}=\langle \tilde{Y}_H\rangle+\langle Z\rangle$. D'où :

$$A_X(x, t)=A_{\tilde{X}}(x, t)=\sum_{x_n\in\langle \tilde{Y}_H\rangle, x_n\leqslant x} e^{2\pi i t x_n} A_{\langle Z\rangle}(x-x_n, t),$$

$$\begin{aligned}|A_X(x, t)| &\leqslant \sum_{x_n\in\langle \tilde{Y}_H\rangle, x_n\leqslant x} |A_{\langle Z\rangle}(x-x_n, t)| \\ &\leqslant \sum_{x_n\in\langle \tilde{Y}_H\rangle, x_n\leqslant x} (A_{\langle Z\rangle}(x-x_n).\varepsilon+D_\varepsilon) \\ &\leqslant \varepsilon . A_X(x)+D_\varepsilon A_{\langle \tilde{Y}_H\rangle}(x),\end{aligned}$$

cette majoration étant vraie pour tout $x>0$ et $\varepsilon>0$, avec :

$$D_\varepsilon=\varepsilon^{-p}\frac{(4ep^2)^p}{p!}\prod_j|1-e^{2\pi i t z_j}|^{-1}+\frac{1}{p!}(11\varepsilon^{-1}p^2 z_p)^p(\prod_j z_j)^{-1}.$$

4.2. *Majoration de* $A_{\langle \tilde{Y}_H\rangle}(x)/A_{\langle \tilde{Y}\rangle}(x)$.

PROPOSITION 6. — *Soit* $\tilde{Y}=(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, *et* $H=\{h_1, h_2, \ldots, h_p\}$ *une partie de* $\{1, 2, \ldots, k\}$, h_j *croissant avec* j. *Alors pour tout* $x>0$:

$$A_{\langle \tilde{Y}_H\rangle}(x)\leqslant \prod_{h\in H} y_h \psi(k, p)x^{-p}A_{\langle \tilde{Y}\rangle}(x)$$

avec

$$\psi(k, p)=\begin{cases}\dfrac{(2p)!}{p!}\,\dfrac{k}{2p-1}2^{k-2p} & si\quad 2p\leqslant k+1,\\[2mm] \dfrac{k!}{(k-p)!} & si\quad 2p\geqslant k+1.\end{cases}$$

Posons $\tilde{Y}_H=(v_1, v_2, \ldots, v_{k-p})$, v_j croissant avec j. Alors la proposition 4 entraîne

$$\begin{aligned}\frac{A_{\langle \tilde{Y}_H\rangle}(x)}{A_{\langle \tilde{Y}\rangle}(x)} &\leqslant \Big(\prod_{h\in H} y_h\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-p} S_{k-p-i}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-p})\frac{x^i}{i!}\Big) \\ &\quad\times\Big(\sum_{j=0}^{k}\tilde{S}_{k-j}(y_1, y_2, \ldots, y_k)\frac{x^j}{j!}\Big)^{-1} \\ &\leqslant \Big(\prod_{h\in H} y_h\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k-p} S_{k-p-i}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-p})\frac{x^i}{i!}\Big) \\ &\quad\times\Big(\sum_{i=0}^{k-p}\tilde{S}_{k-p-i}(y_1, y_2, \ldots, y_k)\frac{x^{i+p}}{(i+p)!}\Big)^{-1} \\ &\leqslant \Big(\prod_{h\in H} y_h\Big)x^{-p}\sup_{0\leqslant i\leqslant k-p}\frac{S_{k-p-i}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-p})}{\tilde{S}_{k-p-i}(y_1, y_2, \ldots, y_k)}\,\frac{(i+p)!}{i!}.\end{aligned}$$

Soient $0 \leqslant i \leqslant k-p$ et $j=i+p$. Alors :

$$\begin{aligned} S_{k-p-i}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-p}) &\leqslant S_{k-j}(y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ &\leqslant y_1 S_{k-j-1}(y_2, y_3, \ldots, y_k) + S_{k-j}(y_2, y_3, \ldots, y_k) \\ &\leqslant \left(\frac{k-j}{j}+1\right) S_{k-j}(y_2, y_3, \ldots, y_k), \end{aligned}$$

car un terme de $y_1 S_{k-j-1}(y_2, y_3, \ldots, y_k)$ est de la forme $y_1 y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} \ldots y_{\lambda_{k-j-1}}$, donc est «en dessous » de $(k-1)-(k-j-1)$ termes $y_n y_{\lambda_1} y_{\lambda_2} \ldots y_{\lambda_{k-j-1}}$ de $S_{k-j}(y_2, y_3, \ldots, y_k)$, tandis qu'un terme de $S_{k-j}(y_2, y_3, \ldots, y_k)$ est « en dessus » de $k-j$ termes de $y_1 S_{k-j-1}(y_2, y_3, \ldots, y_k)$, d'où :

$$j y_1 S_{k-j-1}(y_2, y_3, \ldots, y_k) \leqslant (k-j) S_{k-j}(y_2, y_3, \ldots, y_k).$$

Nous obtenons donc

$$S_{k-p-i}(v_1, v_2, \ldots, v_{k-p}) \leqslant \frac{k}{j} 2^{k-j} \tilde{S}_{k-j}(y_1, y_2, \ldots, y_k)$$

et

$$A_{\langle Y_H \rangle}(x) \leqslant \left(\prod\nolimits_{h \in H} y_h\right) x^{-p} A_{\langle Y \rangle}(x) \sup\nolimits_{0 \leqslant i \leqslant k-p} \frac{j!}{i!} \frac{k}{j} 2^{k-j}.$$

Or $(j!/i!)(k/j) 2^{k-j}$ est une fonction qui croît avec j si $j \leqslant 2p-1$, décroît après. Son maximum lorsque i varie entre 0 et $k-p$ est donc $\psi(k, p)$. ■

Remarque. — Cette majoration est très grossière si p n'est pas petit devant k. En effet, au cours de la démonstration, la somme suivante a été minorée par 0 :

$$\sum\nolimits_{j=0}^{p-1} \tilde{S}_{k-j}(y_1, y_2, \ldots, y_k) \frac{x^j}{j!}.$$

Or ce terme n'est petit par rapport aux autres que si p est petit par rapport à k. Cela explique pourquoi, dans la suite, nous n'obtiendrons de résultat qu'en choisissant p assez petit.

4.3. MAJORATION DE $A_X(x, t)/A_X(x)$.

THÉORÈME 6. — *Soit $Y=(y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, ε un nombre positif, x un élément de $]y_k, y_{k+1}]$ et $H=\{h_1, h_2, \ldots, h_p\}$ une partie de $\{1, 2, \ldots, k\}$ rangée de manière croissante. Soit $t>0$ tel que $t y_h \notin \mathbb{N}$ pour tout $h \in H$. Alors :*

$$A_X(x)^{-1} |A_X(x, t)| \leqslant \varepsilon + C^{-1} \psi(k, p)(1+\varphi_H(t))(30 p \varepsilon^{-1} y_{h_p}/y_k)^p$$

avec

$$\varphi_H(t)=\prod_{h\in H}\left|1-e^{2\pi i t y_h}\right|^{-1} \qquad et \qquad C=\inf_{p\in\mathbb{N}^*} p!\left(\frac{e}{p}\right)^p.$$

En effet, avec ces hypothèses, la proposition 6 entraîne

$$A_X(x)^{-1}\left|A_X(x,t)\right| < \varepsilon + \left(\varepsilon^{-p}\frac{(4ep^2)^p}{p!}\varphi_H(t)+\frac{(11\varepsilon^{-1}p^2z_p)^p}{p!\prod_{h\in H}y_h}\right) \times A_{\langle Y\rangle}(x)^{-1}A_{\langle Y_H\rangle}(x)$$

et

$$A_{\langle Y\rangle}(x)^{-1}\left|A_{\langle Y_H\rangle}(x)\right| \leqslant \left(\prod_{h\in H}y_h\right)\psi(k,p)\,y_k^{-p}.$$

Donc

$$A_X(x)^{-1}\left|A_X(x,t)\right| \leqslant \varepsilon + C^{-1}\psi(k,p)\,y_k^{-p}\varepsilon^{-p}\left((4ep^2)^p\varphi_H(t)\prod_{h\in H}y_h+(11epy_{h_p})^p\right).$$

Cela donne la majoration annoncée. ■

Cette majoration est d'autant meilleure que :

– p est petit devant k (remarque faite à propos de la proposition 6);

– y_k croît vite avec k. En effet, plus y_k croît lentement avec k, plus l'encadrement de la proposition 4 est imprécis.

La recherche d'éléments $\alpha\in B(X)$ se fonde sur le théorème 6 : il s'agit de choisir, en fonction de k, p et un ensemble H associés à $t=q\alpha$, tels que

$$\lim_{k\to+\infty} p y_{h_p} y_k^{-1}\left(\varphi_H(q\alpha)\psi(k,p)\right)^{1/p}=0, \tag{2}$$

p et H étant en général dépendants de q. En effet, la relation (2) entraîne avec le théorème 6 :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \overline{\lim}_{x\to+\infty} A_X(x)^{-1}\left|A_X(x,q\alpha)\right| \leqslant \varepsilon$$

et ce résultat étant vrai pour tout $q\in\mathbb{N}^*$, le théorème 1 entraîne $\alpha\in B(X)$.

4.4. Éléments de $B(X)$

Nous allons donner deux exemples d'application du théorème 6.

Proposition 7. — *Soit $p\in\mathbb{N}^*$, et supposons que :* $\lim_{k\to+\infty} k\,2^k y_k^{-p}=0$. *Alors $\alpha\notin B(X)$ dès que l'équation en h : $\alpha y_h\notin\mathbb{Q}$ a au moins p solutions dans $\mathbb{N}^*$.*

Soit $\alpha>0$ donné, et $h_1<h_2<\ldots<h_p$ *p solutions de* $\alpha y_h \notin \mathbb{Q}$. Soit $q\in\mathbb{N}^*$ quelconque. Nous appliquons alors le théorème 6 avec $t=q\alpha$, $k=\sup(h_p, 2p)$ et $H=\{h_1, h_2, \ldots, h_p\}$, ce qui donne

$$A_X(x)^{-1}\,|A_X(x, q\alpha)|\leqslant\varepsilon+\Delta\varepsilon^{-p}k\,2^k y_k^{-p},$$

où Δ est la constante (par rapport à ε et x) :

$$\Delta=\frac{1}{C}\,\frac{(2p)!}{p!}\,\frac{2^{-2p}}{2p-1}(1+\varphi_H(q\alpha))(30\,p y_{h_p})^p.$$

L'hypothèse faite sur Y entraîne donc la relation (2) pour tout $q\in\mathbb{N}^*$. ■

PROPOSITION 8. — *S'il existe une constante* $\lambda\in]0, 1[$ *et une application* $k\mapsto\rho=\rho(k)$ *de* $\mathbb{N}^*$ *dans* $]0, 1[$, *vérifiant* $\lim_{k\to+\infty}k\rho^2=+\infty$, *telles que* Y *vérifie :*

$$\text{(C)}\qquad \lim_{k\to+\infty}k^2\frac{y_{[k\rho]}}{y_k}C(\rho(1-\lambda))=0$$

avec

$$C(\mu)=\begin{cases}\mu(1-\mu)^{1-1/\mu} & si\quad \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1,\\[2mm] \mu^2\,2^{1/\mu} & si\quad 0<\mu\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

la condition

$$\text{(E)}\qquad \lim_{k\to+\infty}\frac{D_{[k\rho]}(\alpha Y)}{\rho}=0$$

où $D_k(\alpha Y)$ *est la discrépance de la suite* $(\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_k)$, *entraîne* $\alpha\in B(X)$.

Soient $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $q\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}^*$ donnés. Nous choisissons alors H ensemble des entiers h qui vérifient simultanément

$$1\leqslant h\leqslant[k\rho],$$

$$\|q\alpha y_h\|\leqslant\frac{\lambda}{2}\qquad(\text{ici } \|x\|=\inf_{n\in\mathbb{Z}}|x-n|),$$

p est donc le nombre d'entiers compris entre 1 et $[k\rho]$ tels que la partie fractionnaire $\{\alpha y_h\}$ appartienne à une réunion de q intervalles disjoints de $[0, 1]$, de longueur commune $(1-\lambda)/q$. Donc

$$\text{(3)}\qquad |p-(1-\lambda)[k\rho]|\leqslant q\,D_{[k\rho]}(\alpha Y)[k\rho].$$

Pour pouvoir utiliser (2), il nous reste à évaluer $\varphi_H(q\alpha)^{1/p}$ et $\psi(k, p)^{1/p}$.

LEMME. — *Pour tout $t \in B(Y)$ et $\lambda \in]0, 1[$, on a*

$$\lim_{m \to +\infty} m^{-1} \operatorname{Log} \left| \prod_{1 \leq j \leq m, \|ty_j\| \leq \lambda/2} (1 - e^{2i t y_j})^{-1} \right| = - \int_{\lambda}^{1} \operatorname{Log}\left(2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)\right) d\theta.$$

Nous poserons

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \operatorname{Log}\left(2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)\right) d\theta = \int_{\lambda/2}^{1-\lambda/2} \operatorname{Log}(2 \sin(\pi \theta))\, d\theta,$$

$$\varphi_{\lambda, m}(t) = \prod_{1 \leq j \leq m, \|ty_j\| \leq \lambda/2} (1 - e^{2\pi i t y_j})^{-1}.$$

Soit χ_λ la fonction caractéristique de l'intervalle $[(\lambda/2), 1-(\lambda/2)]$. Alors :

$$-\operatorname{Log} |\varphi_{\lambda, m}(t)| = \sum_{j=1}^{m} X(\{ty_j\}) \operatorname{Log} |1 - e^{2\pi i t y_j}| = \sum_{j=1}^{m} X_\lambda(\{ty_j\}) \operatorname{Log}(2 \sin(\pi \{ty_j\})).$$

Or si f est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$, $1/m \sum_{j=1}^{m} f(\{ty_j\})$ tend vers $\int_0^1 f(\theta)\, d\theta$ dès que la suite $(ty_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ est équirépartie modulo 1. D'où le lemme. ■

L'hypothèse (E) entraîne l'équirépartition modulo 1 de la suite (αy_k), donc $(1/[k\rho]) \operatorname{Log} \varphi_H(q\alpha)$ tend vers $I(\lambda)$ et, comme $[k\rho]/p$ est majoré (en utilisant (3) et (E)), $\varphi_H(q\alpha)^{1/p}$ est majoré par une constante C'.

LEMME. — *Supposons que p et k tendent vers $+\infty$, avec $p = p(k) \leq k$, et :*

$$\overline{\lim}_{k \to +\infty} \frac{p}{k} < 1 \qquad et \qquad \lim_{k \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} k}{p} = 0$$

et soit $\mu = \mu(k)$ une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $]0, 1[$ telle que $p/k \sim \mu$. Alors :

$$\psi(k, p)^{1/p} \leq C'' \frac{k}{e} \frac{C(\mu)}{\mu} 2^{|k/p - 1/\mu|}.$$

En effet, pour les k tels que $2p - 1 \geq k$, on a

$$\psi(k, p)^{1/p} = \left(\frac{p!}{(k-p)!}\right)^{1/p} = O\left(\left(\frac{k^k}{(k-p)^{k-p}} e^{-p} \left(\frac{k}{k-p}\right)^{1/2}\right)^{1/p}\right),$$

le terme sous le O étant équivalent à $\psi(k, p)^{1/p}$, puisque p et $k-p$ tendent vers $+\infty$ avec k. Or :

$$\overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{p}{k}<1 \quad \text{entraîne} \quad \lim\left(\frac{1}{1-p/k}\right)^{1/2p}=1,$$

$$\left(\frac{k^k}{(k-p)^{k-p}}\right)^{1/p}=k\left(1-\frac{p}{k}\right)^{1-k/p}\sim k(1-\mu)^{1-1/\mu}$$

puisque $p/k\mu$ tend vers 1.

Le calcul est analogue pour les k tels que $2p-1\leqslant k$:

$$\psi(k, p)^{1/p}=\left(\frac{(2p)!}{p!}\,\frac{k}{2p-1}\,2^{k-2p}\right)^{1/p}$$
$$=O\left(\left(\frac{(2p)^{2p}}{p^p}e^{-p}\sqrt{2}\,\frac{k}{2p}\,2^{k-2p}\right)^{1/p}\right)=O\left(\frac{p}{e}2^{k/p}\left(\frac{k}{p}\right)^{1/p}\right)$$

et

$$\frac{1}{p}\operatorname{Log}\frac{k}{p}=\frac{\operatorname{Log}k}{p}-\frac{\operatorname{Log}p}{p}$$

tend vers zéro. ■

En utilisant (3) :

$$\left|\frac{k}{p}-\frac{1}{\rho(1-\lambda)}\right|\leqslant\frac{1+q+qk\rho\,D_{[k\rho]}(\alpha Y)}{p\rho(1-\lambda)}=O\left(\frac{1}{k\rho^2}+\frac{D_{[k\rho]}(\alpha Y)}{\rho}\right).$$

Donc $k/p-1/\rho(1-\lambda)$ tend vers zéro d'après (E) et l'hypothèse $\lim k\rho^2=+\infty$, et *a fortiori* $p/k\rho(1-\lambda)$ tend vers 1. Les deux lemmes entraînent donc, en choisissant $\mu=\rho(1-\lambda)$ dans le second

$$py_{h_p}y_k^{-1}(\varphi_H(q)\psi(k, p))^{1/p}\leqslant C'''k^2\frac{y_{[k\rho]}}{y_k}C(\rho(1-\lambda)),$$

avec

$$C'''=C'C''e^{-1}\sup_k\frac{1}{\rho(1-\lambda)k}2^{\sup_k|(k/p)-1/\rho(1-\lambda)|}.$$

La proposition 8 se déduit immédiatement de la dernière majoration. ■

5. Exemples de suites Y telles que $A_{\langle Y\rangle}\in\mathscr{R}$.

5.1. Le théorème 2 a pour conséquence

$$A_{\langle Y\rangle}\in\mathscr{R} \iff B(\langle Y\rangle)\neq\emptyset.$$

Les propositions 7 et 8 entraînent donc :

THÉORÈME 7. — *Chacune des conditions suivantes est suffisante pour que* $A_X \in \mathscr{R}$:

(C.1) $\lim_{k \to +\infty} k^{-1} \operatorname{Log} y_k > 0$;

(C.2) $B(Y)$ *non vide et il existe* $c>0$, $C \in \mathbb{R}$ *et une fonction* f *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall x>0, \quad f(x e^{-2/c}) \leqslant f(x) + C,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{Log} y_k = c \operatorname{Log}^2 k + f(k);$$

(C.3) *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $D_n(\alpha Y) = o(\operatorname{Log}^{-1} n)$ *et il existe* $c>0$, $C \in \mathbb{R}$ *et une fonction* f *de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$\forall x>0, \quad f\left(\frac{x}{c \operatorname{Log} x}\right) \leqslant f(x) + C,$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{Log} y_k = (c+1)\frac{\operatorname{Log}^2 k}{\operatorname{Log}\operatorname{Log} k} + f(x).$$

Supposons (C.1) vérifiée. Alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lim_{k \to +\infty} k 2^k y_k^{-p} = 0$, et $B(X)$ n'est pas vide (il contient d'après la proposition 7 tous les α tels que $\alpha y_k \notin \mathbb{Q}$ pour tout k).

Si Y vérifie (C.2), appliquons la proposition 8 avec $\rho = e^{-2/c}$. Alors si $\alpha \in B(Y)$, on a

$$\frac{y_{[k\rho]}}{y_k} \leqslant \exp(c \operatorname{Log}^2(k e^{-2/c}) - c \operatorname{Log}^2 k + C) = e^C k^{-4} e^{4/c}.$$

La condition (C) est donc vérifiée, et $\alpha \in B(X)$.

La démonstration est analogue lorsque Y vérifie (C.3), en prenant $\rho = (c \operatorname{Log} k)^{-1}$ et $\lambda = 1/2$. ■

5.2. LIEN AVEC LES RÉSULTATS DU CHAPITRE 2

Nous avons montré au chapitre 2 que la condition suivante était suffisante pour que $A_X \in \mathscr{R}$:

(C.4) $$\inf_{k \in \mathbb{N}^*} (y_{k+1} - y_k) > 0.$$

Les conditions (C.1), (C.2) ou (C.3) peuvent être vérifiées sans que (C.4) le soit. Regardons par exemple la condition (C.2). Le moyen le plus simple pour obtenir des suites Y vérifiant (C.2) est de choisir la fonction f croissante. Dans ce cas, la suite Y vérifie aussi (C.4).

On peut cependant construire des suites Y vérifiant (C.2) telles qu'il existe une infinité d'indices k_i tels que

$$y_{k_i} = y_{k_i+1} = \ldots = y_{k_i+h_i},$$

avec $h_i \sim 2\,C\,k_i/c\,\mathrm{Log}\,k_i$, où c et $C>0$ sont les constantes associées à Y.

Le nombre h_i peut être pris bien plus grand pour des suites Y qui vérifient (C.1), puisque si $a = \underline{\lim}_{k\to+\infty}\, k^{-1}\,\mathrm{Log}\,y_k$, on peut avoir

$$h_i = a^{-1}\,\mathrm{Log}\,y_{k_i} - k_i,$$

donc peut être bien plus grand que k_i.

6. Problèmes ouverts

Si $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\, y_k/\mathrm{Log}\,k = a < +\infty$, alors $A_Y(x)$ est minoré par $[e^{x/a}]$, donc il en est de même pour $A_X(x)$ et $A_X \notin \mathcal{R}$ d'après (P.3). Je n'ai aucun renseignement sur A_X lorsque y_k croît plus vite qu'un logarithme et moins vite qu'une fonction puissance. A partir de cet ordre de croissance, $A_X \in \mathcal{R}$ pour certaines suites Y (théorème 3, conditions (C.4), puis (C.3) et (C.2) lorsque la croissance de y_k devient plus rapide). Ce n'est que lorsque y_k a une croissance au moins exponentielle (condition (C.1)) que $A_X \in \mathcal{R}$ automatiquement.

Je ne sais pas si l'une des implications suivantes est vraie (la première entraîne la seconde) : si Y est une suite infinie

$$A_Y \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; A_X \in \mathcal{R},$$
$$B(Y) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; A_X \in \mathcal{R}.$$

Une réponse à ces questions permettrait de mieux décrire ce qui se passe lorsque y_k a une croissance intermédiaire entre un logarithme et une exponentielle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATEMAN (P. T.) and ERDOS (P.). — Monotonicity of partition functions, *Mathematika*, 3, 1956, p. 1-14.

[2] BOREL (J.-P.). — Équirépartition modulo 1 de la suite (αx_n) où x_n décrit un semi-groupe additif de nombres réels, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 1978-1979, exposé 7.

[3] DIEUDONNÉ (J.). — *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris 1968.

[4] HARDY (G. H.) and RAMANUJAN (S.). — Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.*, t. 17, 1918, p. 75-115.

[5] INGHAM (A. E.). — A Tauberian theorem for partitions, *Annals of Math.*, t. 42, 1941, p. 1075-1090.

[6] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). — *Uniform distribution of sequences*, John Wiley & Sons, 1974.

[7] PARAMESWARAN (S.). — Partition functions whose logarithms are slowly oscillating, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 100, 1961, p. 217-240.

[8] RAUZY (G.). — Caractérisation des ensembles normaux, *Bull. S.M.F.*, t. 98, 1970, p. 401-414.

[9] RAUZY (G.). — *Propriétés statistiques de suites numériques*, P.U.F., Paris, 1976.

[10] VAALER (J.). — A Tauberian theorem related to Weyl's criterion, *J. of Number Theory*, t. 9, 1977, p. 71-78.

Le théorème 4 a été amélioré depuis, *voir* BOREL (J. P.), Équirépartition modulo 1 de semi-groupes additifs de nombres réels, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* (*Théorie des nombres*) 20e année, 1978/1979.