BULLETIN DE LA S. M. F.

COLETTE MŒGLIN

Idéaux bilatères des algèbres enveloppantes

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 143-186
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__143_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 143-186.

IDÉAUX BILATÈRES DES ALGÈBRES ENVELOPPANTES

PAR

C. MOEGLIN (*)

ABSTRACT. — Let g be a finite dimensional complex Lie algebra and let $U(\mathfrak{g})$ denote the enveloping algebra of g. We prove that any non zero twosided ideal of $U(\mathfrak{g})$ contains a non zero semi-invariant element. Moreover, suppose that the radical of g is nilpotent, note $Z(\mathfrak{g})$ the center of $U(\mathfrak{g})$ and consider the map M from $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ into $\operatorname{Specm} Z(\mathfrak{g})$ given by the intersection. Then, outside a closed set of $\operatorname{Specm} Z(\mathfrak{g})$, the fibers of M has finite cardinality (generally one), and contain an ideal induced of Duflo.

RÉSUMÉ. — Soient g une algèbre de Lie complexe de dimension finie, et $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de g. On montre que tout idéal bilatère non nul de $U(\mathfrak{g})$ contient un semi-invariant non nul. En outre, supposons que le radical de g est nilpotent; on note $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$ et on considère l'application M de $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ dans $\operatorname{Specm} Z(\mathfrak{g})$, définie par l'intersection avec $Z(\mathfrak{g})$; alors, dans un ouvert de $\operatorname{Specm} Z(\mathfrak{g})$, les fibres de M ont un cardinal fini (génériquement un), et contiennent un idéal induit de Duflo.

Introduction

Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique 0, non dénombrable. Soient g une algèbre de Lie de dimension finie sur k, $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$ et $E(\mathfrak{g})$ l'ensemble des semi-invariants de $U(\mathfrak{g})$ ($e \in E(\mathfrak{g})$ si e est vecteur propre pour la représentation adjointe de g dans $U(\mathfrak{g})$). On démontre dans ce mémoire que tout idéal bilatère non nul de $U(\mathfrak{g})$ a une intersection non nulle avec $E(\mathfrak{g})$. (L'algèbre localisée $U(\mathfrak{g})_{E(\mathfrak{g})-\{0\}}$ fournit donc un exemple intéressant d'algèbre simple nœthérienne.) L'analogue de ce résultat pour l'algèbre symétrique de g avait été démontré en [5]. Si on suppose de plus que le radical de g est nilpotent, on a aussi les résultats suivants :

— il existe un élément $z \in Z(\mathfrak{g}) - \{0\}$, tel qu'un idéal maximal m de $Z(\mathfrak{g})$ ne contenant pas z n'est inclus que dans un nombre fini d'idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$; de plus la racine de l'idéal $m\,U(\mathfrak{g})$ est un idéal primitif induit de Duflo;

(*) Texte reçu le 26 février 1979, révisé le 26 juillet 1979.

Colette MOEGLIN, Laboratoire de mathématiques fondamentales, Aile 45-46, 3ᵉ étage, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/143/$ 5.00
© Gauthier-Villars

— il existe une suite $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $Z(\mathfrak{g})-\{0\}$ telle qu'un idéal primitif a de $U(\mathfrak{g})$ ne contenant aucun z_i vérifie : a est maximal; a est engendré par $a\cap Z(\mathfrak{g})$; a est un idéal induit de Duflo et en particulier a est complètement premier;

— l'application de Spec $U(\mathfrak{g})_z$ dans Spec $Z(\mathfrak{g})_z$ qui à j associe $\hat{j}=j\cap Z(\mathfrak{g})_z$ est surjective; sa fibre en $\hat{j}$ possède un unique élément minimal qui est un idéal complètement premier; de plus si j ne contient aucun des z_i, l'algèbre $(U(\mathfrak{g})_z/j)_{Z(\mathfrak{g})_z/j}$ est simple, $\hat{j}\,U(\mathfrak{g})_z$ étant l'unique élément de la fibre en $\hat{j}$.

Je remercie J. Dixmier pour sa patiente lecture du manuscrit et les conseils qu'il m'a apportés et M. Duflo pour une suggestion très utile. Pour la rédaction définitive j'ai reçu l'aide très efficace de N. Berline. Les résultats principaux de ce mémoire ont été annoncés dans [9].

Voici avec quelques détails techniques, l'organisation du mémoire; les notations principales suivent de près celles de [4] et sont reportées après l'introduction, dans notations.

Le chapitre I définit un idéal t et un morphisme φ dans la situation suivante; $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, $\mathfrak{n}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$, v un idéal $\mathfrak{g}$-invariant de $U(\mathfrak{n})=S(\mathfrak{n})$ et $\overline{\Lambda}$ une clôture algébrique de Fract $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$.

Soient μ l'application naturelle de $\mathfrak{g}$ dans $\overline{\Lambda}$ et $\mu_{\overline{\Lambda}}$ l'unique prolongement $\overline{\Lambda}$-linéaire de μ à $g\otimes_k\overline{\Lambda}$ [5]; alors $\mu_{\overline{\Lambda}}$ admet une polarisation résoluble, ce qui permet de définir l'idéal $I_{\mathfrak{g}\otimes_k\overline{\Lambda}}(\mu_{\overline{\Lambda}})$ (*cf.* notations), et t est caractérisé par la propriété : t est un idéal de $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta$ vérifiant $t\otimes_\Delta\overline{\Lambda}=I_{\mathfrak{g}\otimes_k\overline{\Lambda}}(\mu_{\overline{\Lambda}})$.

L'algèbre $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta/t$ est donc intègre et le centre de son corps de fractions est Δ; alors φ est l'homomorphisme de Γ dans Δ, tel que pour tout $z\in\Gamma$ on ait $z\otimes 1-1\otimes\varphi(z)=0$ dans Fract $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta/t$.

Le caractère générique de $I_{\mathfrak{g}\otimes_k\overline{\Lambda}}(\mu_{\overline{\Lambda}})$ se transmet à t et φ, au sens suivant; il existe une sous-$S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$-algèbre de type fini Ξ de $\overline{\Lambda}$ telle que pour tout $m\in$ Specm Ξ : le composé $\mathfrak{g}\to S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v\to\Xi\to\Xi/m=k$ définit une forme linéaire λ_m admettant une polarisation résoluble

$$I_{\mathfrak{g}}(\lambda_m)\subset((t\otimes_\Delta\overline{\Lambda})\cap(U(\mathfrak{g})\otimes_k\Xi))\otimes_\Xi\Xi/m;$$

l'inclusion est une égalité sauf pour une partie maigre de Specm Ξ; soit $z\in\Gamma$ tel que $\langle\lambda_m,\varphi(z)\rangle$ soit défini, alors $z-\varphi(z)\in I(\lambda_m)/U(\mathfrak{g})v$. Ceci montre que φ est un homomorphisme de Duflo généralisé; on en aura d'ailleurs, quand $v\in$ Specm $U(\mathfrak{n})$, une formule explicite résultant de [8].

L'intérêt de t et φ est leur comportement naturel quand on change v en un idéal contenant v et, dans le cas où $v = \bigcap_{\gamma \in \mathcal{G}} \gamma w$ avec $w \in \operatorname{Specm} U(\mathfrak{n})$, quand on passe au stabilisateur $\mathfrak{h}$ de w dans $\mathfrak{g}$. Ce dernier cas est étudié au chapitre II où l'on montre que les objets génériques associés à $(\mathfrak{g}, v)$ d'une part et $(\mathfrak{h}, w)$ d'autre part se correspondent par induction comme en [7]. Pour cela on introduit des homomorphismes de Γ dans $\Gamma(\mathfrak{h})$ et de Δ dans $\Delta(\mathfrak{h})$ compatibles avec l'induction des idéaux et la restriction à $\mathfrak{h}$ des éléments de $\mathfrak{g}^*$ annulant w.

Le chapitre III est consacré à la démonstration des résultats annoncés au début, qui se déduisent entre autre du lemme suivant : si $\mathfrak{g}$ est algébrique et si $Z(\mathfrak{g}) = E(\mathfrak{g})$, t est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g}) \bigotimes_k \Delta$; le principe général des démonstrations est d'utiliser les compatibilités établies pour faire une récurrence (*cf.* III.5).

Notations

(1) Toutes les algèbres de Lie considérées sont définies sur une k-algèbre unitaire intègre; soit $\mathfrak{k}$ une algèbre de Lie sur l'algèbre K; alors on suppose toujours que $\mathfrak{k}$ est un K-module libre de rang fini; on note $U(\mathfrak{k})$ (resp. $S(\mathfrak{k})$) l'algèbre enveloppante (resp. symétrique) de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}$ le K-module formé des applications K-linéaires de $\mathfrak{k}$ dans K. Si K est un corps algébriquement clos, λ un élément de $\mathfrak{k}^*$ admettant une polarisation résoluble, $\mathcal{O}$ l'orbite de λ pour la représentation coadjointe, on note $I_{\mathfrak{k}}(\lambda)$ ou $I_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O})$ l'idéal induit de Duflo canoniquement associé à λ ou à $\mathcal{O}$. L'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{k})$ muni de la topologie de Jacobson est noté $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{k})$. Si $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{k}$, $\eta_{\mathfrak{k}}$ est l'unique automorphisme de $U(\mathfrak{k})$ prolongeant l'injection $X \to X - 1/2 \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}} X$ de $\mathfrak{k}$ dans $U(\mathfrak{k})$. L'algèbre symétrique $S(\mathfrak{k}^*)$ complété en l'idéal d'augmentation est notée $S(\mathfrak{k}^*)\hat{}$; c'est un anneau topologique dont le dual est $S(\mathfrak{k})$ (*cf.* [8]). Soient $\mathfrak{n}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ et b un idéal de $S(\mathfrak{n})$; on note $V(b)$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^*$ annulant l'idéal $S(\mathfrak{g})\,b$ de $S(\mathfrak{g})$ et $V'(b)$ le sous-ensemble de $V(b)$ formé des éléments dont la dimension de l'orbite pour la représentation coadjointe est maximale (dans l'ensemble des dimensions des orbites des points de $V(b)$); on note aussi indice b la dimension du stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un point de $V'(b)$.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ et v un idéal $\mathfrak{g}$-invariant de $S(\mathfrak{n}) = U(\mathfrak{n})$.

On pose
$$\Gamma = (\operatorname{Fract} U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v)^{\mathfrak{g}};$$
$$\Delta = (\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,v)^{\mathfrak{g}};$$
$\bar{\Delta}$ une clôture algébrique de Δ;
$$\Lambda = \operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,v,$$
$\bar{\Lambda}$ une clôture algébrique de Λ.

(2) En plus des notations introduites ci-dessus, on utilisera les notations et conventions suivantes. Toutes les algèbres considérées sont associatives et unitaires. Soit Σ une algèbre commutative; on note 1_Σ l'élément unité de Σ, $\operatorname{Spec}\Sigma$ (resp. $\operatorname{Specm}\Sigma$) l'ensemble des idéaux premiers (resp. maximaux) de Σ. On munit $\operatorname{Spec}\Sigma$ et $\operatorname{Specm}\Sigma$ des topologies de Zariski. Si Σ est intègre, on note $\operatorname{Fract}\Sigma$ le corps des fractions de Σ. Soient Z un Σ-module, Ξ une algèbre commutative et χ un homomorphisme de Σ dans Ξ; alors $Z \bigotimes_{\Sigma,\chi} \Xi$ est le Ξ-module obtenu par extension des scalaires de Σ à Ξ; quand il n'y a pas d'ambiguité sur χ, on le note $Z \bigotimes_\Sigma \Xi$. Si un groupe $\mathscr{J}$ opère dans Σ, on note $\Sigma^{\mathscr{J}}$ l'ensemble des invariants de Σ pour l'action de $\mathscr{J}$. Soient $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie et $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{a}$; alors le groupe adjoint algébrique $\mathscr{A}$ de $\mathfrak{a}$ opère naturellement dans $S(\mathfrak{b})$ et $\mathfrak{b}^*$. Les éléments de $S(\mathfrak{a})$ sont des fonctions définies sur $\mathfrak{a}^*$; soit $a \in \operatorname{Spec} S(\mathfrak{a})$; alors $\operatorname{Fract} S(\mathfrak{a})/a$ est l'ensemble des fonctions rationnelles sur la variété des zéros de a (dans $\mathfrak{a}^*$); pour tout $s \in \operatorname{Fract} S(\mathfrak{a})$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\langle s, \lambda \rangle$ est la valeur de s en λ quand elle est définie. Soient Σ une $S(\mathfrak{a})$-algèbre de type fini commutative, $a \in \operatorname{Specm}\Sigma$ et $b \in \operatorname{Spec} S(\mathfrak{a})$ tels que $b = a \cap S(\mathfrak{a})$; on note λ_a ou λ_b l'élément de $\mathfrak{a}^*$ défini par la composition des applications

$$\mathfrak{a} \to S(\mathfrak{a}) \to \Sigma \to \Sigma/a = k.$$

Soient Ω une k-algèbre et μ une application linéaire de $\mathfrak{a}$ dans Ω; on note μ_Ω l'unique prolongement de μ, Ω-linéaire, de $\mathfrak{a} \bigotimes_k \Omega$ dans Ω.

Index des notations

Chapitre I

Idéal générique

Soient k un corps algébriquement clos, de caractéristique 0, non dénombrable, $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie, $\mathfrak{n}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ et v un idéal $\mathfrak{g}$-invariant de $S(\mathfrak{n})$. Le morphisme générique est défini en I.6 et l'idéal générique en I.7; l'algèbre Ξ (*cf.* I.4) n'a qu'un rôle d'intermédiaire technique.

I.1. Soit μ l'application naturelle de $\mathfrak{g}$ dans $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$; quelle que soit la $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$-algèbre intègre Σ, on note $\mathrm{PR}(\mu_\Sigma)$ l'ensemble des sous-algèbres résolubles $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma$, telles que :

(*a*) les Σ-modules $\mathfrak{p}$ et $(\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma)/\mathfrak{p}$ sont libres;

(*b*) la sous-algèbre $\mathfrak{p} \otimes_\Sigma \operatorname{Fract}\Sigma$ est une polarisation résoluble de $\mu_{\operatorname{Fract}\Sigma}$ dans $\mathfrak{g} \otimes_k \operatorname{Fract}\Sigma$.

Pour tout $\lambda \in (\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma)^*$, on note $B(\lambda)$ ou $B(\Sigma)$ (quand $\lambda = \mu_\Sigma$) la forme bilinéaire de $\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma$ définie par

$$B(\lambda)(X, Y) = \lambda([X, Y]) \qquad \text{où} \quad X, Y \in \mathfrak{g} \otimes_k \Sigma.$$

La sous-algèbre de $\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma$ qui est le noyau de $B(\lambda)$ est notée $(\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma)^\lambda$.

I.2. Soient Σ comme en I.1, $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma$, $\mathscr{R}$ une représentation de $\mathfrak{q}$ dans un Σ-module M, r le noyau de $\mathscr{R}$ dans $U(\mathfrak{q})$. Soit $p \in \operatorname{Spec}\Sigma$, tel que :

(*a*) les Σ/p-modules $\mathfrak{p} \otimes_\Sigma (\Sigma/p)$ et $(\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma/p)/(\mathfrak{p} \otimes_\Sigma \Sigma/p)$ sont libres;

(*b*) le Σ/p-module $M \otimes_\Sigma \Sigma/p$ est libre.

Alors $M \otimes_\Sigma \Sigma/p$ est un sous-$U(\mathfrak{p} \otimes_\Sigma \Sigma/p)$-module pour la représentation $\mathcal{R} \otimes_\Sigma \operatorname{Fract} \Sigma/p$ tensorisée par le caractère

$$1/2 \operatorname{trace} \operatorname{ad}_{(\mathfrak{g} \otimes_k \operatorname{Fract} \Sigma/p)/(\mathfrak{p} \otimes_\Sigma \operatorname{Fract} \Sigma/p)};$$

de plus

$$U(\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma/p) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_\Sigma \Sigma/p)} (M \otimes_\Sigma \Sigma/p) = \operatorname{ind}^{\sim}(M, \mathfrak{p} \uparrow \mathfrak{g} \otimes_k \Sigma/p)$$

est un sous-$U(\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma/p)$-module de

$$U(\mathfrak{g} \otimes_k \operatorname{Fract} \Sigma/p) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_\Sigma \operatorname{Fract} \Sigma/p)} (M \otimes_\Sigma \operatorname{Fract} \Sigma/p);$$

pour simplifier l'écriture, on note $\operatorname{ind}^{\sim}(\mathcal{R}(p), \mathfrak{p} \uparrow \mathfrak{g})$ la représentation correspondante de $\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma/p$ et $\operatorname{ind}^{\sim}(r(p), \mathfrak{p} \uparrow \mathfrak{g})$ son noyau dans $U(\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma/p)$; dans le cas où $\Sigma = k$, ces notations coïncident avec celles de ([4], 5.2.2 et 5.2.6).

I.3. LEMME. — (i) *soit Σ une $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$-algèbre intègre; quel que soit $\lambda \in (\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma)^*$ tel que $(\lambda - \mu_\Sigma)(\mathfrak{n}) = 0$, on a*

$$\dim_{\operatorname{Fract} \Sigma} (\mathfrak{g} \otimes_k \operatorname{Fract} \Sigma)^{\lambda \operatorname{Fract} \Sigma} \geqslant \operatorname{indice} v;$$

(ii) *pour la forme linéaire μ_Λ, on a*

$$\dim_\Lambda (\mathfrak{g} \otimes_k \Lambda)^{\mu_\Lambda} = \operatorname{indice} v;$$

(iii) *la restriction de $I_\mathfrak{g}$ à $V'(v)$ est partout définie et continue; on a*

$$U(\mathfrak{g})v = \bigcap\nolimits_{\lambda \in V'(v)} I_\mathfrak{g}(\lambda).$$

(i) Soit Σ' la sous-algèbre de Σ engendrée par 1_Σ et $\mathfrak{g} \otimes_k 1_\Sigma$. Alors Σ' est une sous $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$-algèbre, intègre, de type fini; soit λ' la restriction de λ à $\mathfrak{g} \otimes_k \Sigma'$; on a : rang $B(\lambda') =$ rang $B(\lambda)$. Soit $m' \in \operatorname{Specm} \Sigma'$; on a $\Sigma'/m' = k$ et $\lambda'_{m'} \in V(v)$; pour presque tout $m' \in \operatorname{Specm} \Sigma'$, on a rang $B(\lambda'_{m'}) =$ rang $B(\lambda')$ ([5], 1.4); on en déduit (i) car rang $B(\lambda') = \dim \mathfrak{g} - \dim(\mathfrak{g} \otimes_k \operatorname{Fract} \Sigma)^\lambda$.

(ii) On reprend la démonstration de (i) avec $\Sigma = S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$ et $\lambda = \mu_\Sigma$. Comme l'ensemble des éléments $m \in \operatorname{Specm} \Sigma$ tels que $\lambda_m \in V'(v)$ est un ouvert dense de $\operatorname{Specm} \Sigma$, il existe m tel que

$$\dim \mathfrak{g} - \operatorname{indice} v = \operatorname{rang} B(\lambda_m) = \operatorname{rang} B(\mu_\Sigma) = \operatorname{rang} B(\mu_\Lambda).$$

(iii) Soit n un idéal maximal de $S(\mathfrak{n})$ contenant v; alors d'après ([4], 1.12.14) tout élément λ de $V'(n)$ admet une polarisation résoluble $\mathfrak{p}$; on a

$$I(\lambda) = \operatorname{Ker} \operatorname{ind}^{\sim}(\lambda, \mathfrak{p} \uparrow \mathfrak{g}),$$

d'après ([4], 10.3.3); et comme $V'(v) \subset \bigcup_{n \in \operatorname{Specm} S(\mathfrak{n})/v} V'(n)$, l'application $I_{\mathfrak{g}}$ est définie dans $V'(v)$; la continuité se démontre comme en ([4], 10.3.5) en remplaçant d par $1/2(\dim \mathfrak{g} + \operatorname{indice} v)$. On peut supposer, de plus, que $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{n}$, d'après [4], 10.3.1; ce qui montre immédiatement que $I(\lambda)$ contient $U(\mathfrak{g})v$. D'après [4], 10.3.8, $U(\mathfrak{g})n = \bigcap_{\lambda \in V'(n)} I(\lambda)$ et donc

$$U(\mathfrak{g})v \supset \bigcap_{n \in \operatorname{Specm} S(\mathfrak{n})/v} U(\mathfrak{g})n \supset \bigcap_{\lambda \in V'(v)} I(\lambda) \supset U(\mathfrak{g})v;$$

d'où (iii).

I.4. Lemme. — (i) *Il existe un élément* x *de* $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v - \{0\}$, *une sous-*$S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$*-algèbre* Ξ *de* $\overline{\Lambda}$ *contenant* x^{-1} *et deux* Ξ*-modules libres* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$, *vérifiant :*

(*a*) *le* $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v)_x$*-module* Ξ *est de type fini;*

(*b*) *le corps* Fract Ξ *est une extension galoisienne de degré fini de* Λ *et* Ξ *est stable par l'action du groupe de Galois de* Fract Ξ *sur* Λ;

(*c*) *on a* $\mathfrak{g} \bigotimes_k \Xi = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{p}$ *contient* $\mathfrak{n} \bigotimes_k \Xi$;

(*d*) *pour toute* Ξ*-algèbre intègre* Σ', *on a*

$$\dim_{\operatorname{Fract}\Sigma'} (\mathfrak{g} \bigotimes_k \operatorname{Fract}\Sigma')^{\operatorname{Fract}\Sigma'} = \operatorname{indice} v,$$
$$\mathfrak{p} \bigotimes_{\Xi} \Sigma' \in \operatorname{PR}(\mu_{\Sigma'}).$$

(ii) *Soit* Ξ' *un sous-*Ξ*-module de* $\overline{\Lambda}$ *tel qu'il existe* $y \in S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v - \{0\}$, *vérifiant* $y^{-1} \in \Xi'$, *et* Ξ' *est un* Ξ_y*-module de type fini. Soit* Ξ'' *la fermeture intégrale de* $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$ *dans* Fract Ξ'. *Alors si les conditions de* (i) *sont vérifiées pour* x, Ξ, $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$, *elles le sont aussi pour* xy, Ξ'', $\mathfrak{p} \bigotimes_{\Xi} \Xi''$, $\mathfrak{q} \bigotimes_{\Xi} \Xi''$.

(i) D'après le lemme I.3 (ii) et ([4], 1.12.14 et 10.3.1), $\mu_{\overline{\Lambda}}$ admèt une polarisation résoluble contenant $\mathfrak{n}$. Soit $\Omega \subset \overline{\Lambda}$ une extension galoisienne de degré fini de Λ, telle que $\operatorname{PR}(\mu_\Omega) \neq \emptyset$ et Σ la fermeture intégrale de $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$ dans Ω. Choisissons $\mathfrak{p}_1 \in \operatorname{PR}(\mu_\Omega)$ avec $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{q}_1$ un supplémentaire de $\mathfrak{p}_1$ dans $\mathfrak{g} \bigotimes_k \Omega$; alors il existe $x_1 \in \Sigma - \{0\}$ tel que $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{q}_1$ soient de la forme $\mathfrak{p}' \bigotimes_{\Sigma_{x_1}} \Omega$ et $\mathfrak{q}' \bigotimes_{\Sigma_{x_1}} \Omega$, où $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{q}'$ sont des sous-Σ_{x_1}-modules libres supplémentaires dans $\mathfrak{g} \bigotimes_k \Sigma_{x_1}$; soit x' le produit des transformés de x_1 par le groupe de Galois de Ω sur Λ; alors $x' = x'_1 x'^{-1}_2$ avec x'_1 et $x'_2 \in S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v - \{0\}$ et $\Sigma_{x_1} \subset \Sigma_{x'_1}$. Utilisons le raisonnement de ([5], 1.4) : soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$, M la matrice de $B(\Sigma_{x'_1})$ relativement à la base $(e_1 \otimes 1, \ldots, e_n \otimes 1)$ de $\mathfrak{g} \bigotimes_k \Sigma_{x'_1}$, δ un mineur non nul extrait de M.

Posons $x=x'_1\delta$ et $\Xi=\Sigma_x$. Soit Σ' une Ξ-algèbre intègre; on a rang $B(\Sigma')=\dim \mathfrak{g}-\text{indice}\, v$, d'une part et d'autre part, on a

$$\mathfrak{g}\otimes_k \operatorname{Fract}\Sigma'=\mathfrak{p}'\otimes_{\Sigma_{x_1}}\operatorname{Fract}\Sigma'\oplus\mathfrak{q}'\otimes_{\Sigma_{x_1}}\operatorname{Fract}\Sigma'.$$

Donc

$$\dim_{\operatorname{Fract}\Sigma'}(\mathfrak{g}\otimes_k\operatorname{Fract}\Sigma')^{\mu_{\operatorname{Fract}\Sigma'}}=\text{indice}\, v,$$

et

$$\mathfrak{p}\otimes_{\Sigma_{x_1}}\operatorname{Fract}\Sigma'\in \operatorname{PR}(\mu_{\operatorname{Fract}\Sigma'}).$$

Alors x, Ξ, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}'\otimes_{\Sigma_{x_1}}\Xi$ et $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\otimes_{\Sigma_{x_1}}\Xi$ répondent aux conditions du lemme (i).

(ii) Comme Ξ'' est la fermeture intégrale de $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v)_{xy}$ dans Fract Ξ', et comme $(S(\mathfrak{g})/(\mathfrak{g})v)_{xy}$ est une k-algèbre de type fini, (ii) est clair.

I.5. Soient x, Ξ, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ satisfaisant aux conditions du lemme I.4 et $\rho=\operatorname{ind}^{\sim}(\mu_\Xi,\mathfrak{p}\uparrow\mathfrak{g})$. Pour tout idéal premier q de Ξ, posons :

$$\rho(q)=\operatorname{ind}^{\sim}(\mu_{\Xi/q},\mathfrak{p}\otimes_\Xi \Xi/q\uparrow\mathfrak{g})\quad (cf.\ \text{I.2}),$$

ainsi avec nos conventions, $\rho=\operatorname{ind}^{\sim}(\mu_\Xi,\mathfrak{p}\uparrow\mathfrak{g}\otimes_k\Xi)$ (en notations classiques).

LEMME. — (i) *soient q_1 et q_2 deux idéaux premiers de Ξ tels que $q_1\subset q_2$ et $\alpha:\Xi/q_1\to\Xi/q_2$ l'homomorphisme canonique. Alors l'homomorphisme*

$$\bar{\alpha}:\quad U(\mathfrak{g}\otimes_k\Xi/q_1)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_\Xi\Xi/q_1)}\Xi/q_1\to U(\mathfrak{g}\otimes_k\Xi/q_2)\otimes_{U(\mathfrak{p}\otimes_\Xi\Xi/q_2)}\Xi/q_2,$$

déduit de α entrelace les représentations $\rho(q_1)$ et $\rho(q_2)\circ(\operatorname{Id}\otimes_k\alpha)$ de $U(\mathfrak{g}\otimes_k\Xi/q_1)$. On a :

$$\operatorname{Ker}\rho(q_1)\otimes_{\Xi/q_1}\Xi/q_2\subset\operatorname{Ker}\rho(q_2);$$

(ii) *il existe une partie multiplicative dénombrable $\mathcal{S}$ de $\Xi-\{0\}$, telle que pour tout idéal premier de Ξ ne rencontrant pas $\mathcal{S}$, on a (en notant $\overline{\mathcal{S}}$ l'image de $\mathcal{S}$ dans Ξ/q) :*

$$\operatorname{Ker}\rho\otimes_\Xi(\Xi/q)_{\overline{\mathcal{S}}}=\operatorname{Ker}\rho(q)\otimes_{\Xi/q}(\Xi/q)_{\overline{\mathcal{S}}};$$

(iii) *pour tout $m\in\operatorname{Specm}\Xi$, on a*

$$\mathit{Ker}\,\rho(m)=I(\lambda_m);$$

(iv) *pour tout* $q \in \operatorname{Spec} \Xi$, *on a*

$$Ker\, \rho(q) \cap U(\mathfrak{g}) = \cap_{m \supset q;\, m \in \operatorname{Specm} \Xi} I(\lambda_m);$$

(v) *on a*

$$\operatorname{Ker} \rho \cap U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})\, v;$$

(vi) *l'idéal* Ker ρ (q) *est complètement premier;*

(i) Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathfrak{g}$. Pour $i=1$ ou 2, les éléments

$$\varepsilon_i^{\nu_1, \ldots, \nu_r} = (e_1^{\nu_1} \ldots e_r^{\nu_r} \otimes_\Xi 1_{\Xi/q_i}) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_\Xi \Xi/q_i)} 1_{\Xi/q_i},$$

où $(\nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{N}^r$, forment une base du Ξ/q_i-module

$$U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi/q_i) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_\Xi \Xi/q_i)} \Xi/q_i.$$

Cela prouve que $\bar{\alpha}$ est surjective.

Soit $X \in U(\mathfrak{g}) \otimes_k 1_\Xi$; on a

$$\begin{aligned}\rho(q_2)(X \otimes_\Xi 1_{\Xi/q_2})\bar{\alpha}(\varepsilon_1^{\nu_1 \ldots \nu_r}) \\ = (X e_1^{\nu_1} \ldots e_r^{\nu_r} \otimes_\Xi 1_{\Xi/q_1}) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_\Xi \Xi/q_1)} 1_{\Xi/q_1} \otimes_{\Xi/q_1} 1_{\Xi/q_2} \\ = \bar{\alpha}(\rho(q_1)(X \otimes_\Xi 1_{\Xi/q_1})\varepsilon_1^{\nu_1 \ldots \nu_r}).\end{aligned}$$

Par linéarité, on en déduit que pour tout $Y \in U(\mathfrak{g}) \otimes_k \Xi/q_1$, on a

$$\rho(q_2)(Y \otimes_{\Xi/q_1} 1_{\Xi/q_2})\bar{\alpha}\,\varepsilon_1^{\nu_1 \ldots \nu_r} = \bar{\alpha}(\rho(q_1)(Y \varepsilon_1^{\nu_1 \ldots \nu_r}));$$

de plus, d'après la surjectivité de $\bar{\alpha}$:

$$\operatorname{Ker} \rho(q_1) \otimes_{\Xi/q_1} \Xi/q_2 \subset \operatorname{Ker} \rho(q_2).$$

(ii) (Suivant une suggestion de R. Rentschler). Pour tout $q \in \operatorname{Spec} \Xi$, on considère $\rho(q)$ comme une application de $U(\mathfrak{g}) \otimes_k \Xi/q$ dans $\operatorname{End}_{\Xi/q} S(\mathfrak{q})$ ([3], 2.2). Soit $\mathscr{D}^\wedge$ (resp. $\mathscr{D}$) l'algèbre des opérateurs différentiels d'ordre infini (resp. d'ordre fini) à coefficient polynomiaux sur $\mathfrak{q}$ comme en [3], 13 (*cf.* I.4, (i)). Soit $l \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{D}_l \subset \mathscr{D} \otimes_k \Xi$ le sous Ξ-module ensemble des opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant l$.

Soit $l \in \mathbb{N}$; on note S_l l'ensemble des éléments de $S(\mathfrak{q})$ de degré $\leqslant l$ et r_l l'homorphisme de Ξ-module de $\mathscr{D}^\wedge$ dans $\mathscr{D}_l$, défini par : soit $D \in \mathscr{D}^\wedge$, alors $r_l(D)$ est l'unique élément de $\mathscr{D}_l$, tel que $D - r_l(D)$ restreint à S_l soit nul. Avec I.4, ([3], 2.2) montre l'inclusion $\rho(U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi)/\operatorname{Ker} \rho) \subset \mathscr{D}^\wedge$; on pose $\rho_l = r_l\, \rho$

et on considère ρ_l comme homomorphisme de Ξ-modules de $U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi)/\mathrm{Ker}\,\rho$ dans $\mathscr{D}_l = \mathrm{Hom}_\Xi(S_l, S(\mathfrak{q}))$; on note Y_l le noyau de ρ_l.

Soit $s \in \mathbb{N}$; on note U^s l'ensemble des éléments de $U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi)$ de filtration $\leqslant s$. On pose $Y_l^s = Y_l \cap (U^s + \mathrm{Ker}\,\rho/\mathrm{Ker}\,\rho)$. Montrons que l'on a

$$(\star) \qquad \bigcap\nolimits_{l \in \mathbb{N}} (Y_l^s \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi) = 0,$$

soit $u \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} Y_s^l \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi$; il est clair que $(\rho \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi)(u)(S^l \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$; d'où $(\rho \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi)(u) = 0$. L'assertion résulte alors de l'égalité $\mathrm{Ker}(\rho \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi) = (\mathrm{Ker}\,\rho) \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi$ entre sous-Fract Ξ-espaces vectoriels de $U(\mathfrak{g} \otimes_k \mathrm{Fract}\,\Xi)$ (*cf.* I.4 et la définition de ρ en I.5).

On remarque que si $l \leqslant l'$, on a $Y_l^s \supset Y_{l'}^s$; en outre, comme $Y_l^s \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi$ est un quotient de $U^s \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi$, on a $\dim_{\mathrm{Fract}\,\Xi} Y_l^s < \infty$. Avec $(\star)^-$, cela montre qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $Y_l^s \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\,\Xi = 0$. De plus U^s est un Ξ-module libre; donc Y_l^s, qui en est un quotient, est un Ξ-module de type fini. D'où :

$(\star\star)$ *soit* $s \in \mathbb{N}$; *il existe* $l \in \mathbb{N}$ *et* $x'_s \in \Xi\{0\}$ *tels que* $Y_l^s \otimes_\Xi \Xi_{x'_s} = 0$.

Soit $s \in \mathbb{N}$, on choisit $l \in \mathbb{N}$, $x'_s \in \Xi$ vérifiant la propriété $(\star\star)$ et $d \in \mathbb{N}$ tel que $\rho_l U^s \subset \mathrm{Hom}_\Xi(\mathrm{S}_l, \mathrm{S}_d) \overset{\text{déf}}{=} H$. Comme $\mathfrak{q}$ est un Ξ-module libre (*cf.* I.4), H est un Ξ-module libre. On pose $H' = H/\rho_l U^s$; comme H' est un Ξ-module de type fini, on choisit $x''_s \in \Xi - \{0\}$ tel que $H'_{x''_s}$ soit un $\Xi_{x''_s}$-module libre. Alors on pose $x_s = x'_s x''_s$ et

$$0 \to ((U^s + \mathrm{Ker}\,\rho)/\mathrm{Ker}\,\rho) \otimes_\Xi \Xi_{x_s} \xrightarrow{\rho_l \otimes_\Xi \Xi_{x_s}} H_{x_s} \to H'_{x_s} \to 0$$

est une suite exacte de Ξ_{x_s}*-modules libres.*

Soit $q \in \mathrm{Spec}\,\Xi$ tel que $x_s \notin q$; on note $\bar{x}_s$ l'image de x_s dans Ξ_q. Après tensorisation

$$0 \to ((U^s + \mathrm{Ker}\,\rho)/\mathrm{Ker}\,\rho) \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s} \xrightarrow{\rho_l \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s}} H_{x_s} \otimes_\Xi (\Xi/q) \to H'_{x_s} \otimes_\Xi (\Xi/q) \to 0$$

est une suite exacte de $(\Xi/q)_{\bar{x}/s}$-modules libres et non nuls.

On en déduit, *a fortiori*, la suite exacte suivante :

$$0 \to (U^s \otimes_k \Xi + \mathrm{Ker}\,\rho/\mathrm{Ker}\,\rho) \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s} \xrightarrow{\rho \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s}} \mathrm{End}_{(\Xi/q)_{\bar{x}_s}} S(\mathfrak{p}) \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s}.$$

D'après (i), il existe une surjection α^s de

$$((U^s \otimes_k \Xi + \operatorname{Ker} \rho)/\operatorname{Ker} \rho) \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s}$$

sur $(U^s \otimes_k (\Xi/q)_{\bar{x}_s} + \operatorname{Ker} \rho(q)_{\bar{x}_s})/\operatorname{Ker} \rho(q)_{\bar{x}_s}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} 0 - (U^s \otimes_k \Xi + \operatorname{Ker} \rho/\operatorname{Ker} \rho) \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s} & \xrightarrow{\rho \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s}} & \operatorname{End}_{(\Xi/q)_{\bar{x}_s}} S(q) \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\bar{x}_s} \\ \downarrow \alpha^s & & \nearrow \\ (U^s \otimes_k \Xi/q + \operatorname{Ker} \rho(q)/\operatorname{Ker} \rho(q))_{\bar{x}_s} & & \rho(q) \otimes_{\Xi/q} (\Xi/q)_{\bar{x}_s} \end{array}$$

En faisant varier s et en notant $\mathscr{S}$ la partie multiplicative engendrée par $(x_s)_{s \in \mathbb{N}}$, on en déduit, pour tout $q \in \operatorname{Spec} \Xi$ ne rencontrant pas $\mathscr{S}$, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} 0 - (U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi)/\operatorname{Ker} \rho) \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\mathscr{S}} & \xrightarrow{\rho \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\overline{\mathscr{S}}}} & \operatorname{End}_{(\Xi/q)_{\overline{\mathscr{S}}}} S(q) \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\overline{\mathscr{S}}} \\ \downarrow & & \nearrow \\ (U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi/q)/\operatorname{Ker} \rho(q)) \otimes_{\Xi/q} (\Xi/q)_{\overline{\mathscr{S}}} & & \rho(q) \otimes_{\Xi/q} (\Xi/q)_{\overline{\mathscr{S}}} \end{array}$$

On a donc

$$\operatorname{Ker} \rho \otimes_\Xi (\Xi/q)_{\overline{\mathscr{S}}} = \operatorname{Ker} \rho(q) \otimes_{\Xi/q} (\Xi/q)_{\overline{\mathscr{S}}}.$$

(iii) Soit $m \in \operatorname{Specm} \Xi$; alors, comme Ξ est une k-algèbre de type fini, on a $\Xi/m = k$; de plus $\lambda_m \in V^\circ(v)$ et $\mathfrak{p} \otimes_\Xi \Xi/m \in PR$ (λ_m) (I.4, (i)), d'où $\operatorname{Ker} \rho\ (m) = I(\lambda_m)$.

(iv) L'inclusion $\operatorname{Ker} \rho(q) \cap U(\mathfrak{g}) \subset \bigcap_{m \supset q} I(\lambda_m)$ résulte de (iii) grâce à (i) (car clairement $\operatorname{Ker} \rho\ (q) \cap U\ (\mathfrak{g}) \subset \operatorname{Ker} \rho\ (q) \otimes_{\Xi/q} \Xi/m$). Soient $u \in U\ (\mathfrak{g})$ et u', $u'' \in U\ (\mathfrak{g} \otimes_k \Xi/q) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_\Xi \Xi/q)} (\Xi/q)$, tels que $\rho(q)\ (u)\ u' = u'' \neq 0$; il existe $m \in \operatorname{Specm} \Xi/q$ tel que $u'' \otimes_{\Xi/q} \Xi/m \neq 0$; d'après (i), $u \notin I(\lambda_m)$, d'où l'égalité

$$\operatorname{Ker} \rho(q) \cap U(\mathfrak{g}) = \bigcap_{m \in \operatorname{Specm} \Xi/q} I(\lambda_m).$$

(v) D'après (iv), on a

$$\operatorname{Ker} \rho \cap U(\mathfrak{g}) = \bigcap_{m \in \operatorname{Specm} \Xi} I(\lambda_m).$$

Alors (v) résulte de la continuité de I et du lemme I.3, (iii) qui impliquent que

$$\bigcap_{m \in \operatorname{Specm} \Xi} I(\lambda_m) = \bigcap_{\lambda \in V'(v)} I(\lambda) = U(\mathfrak{g})\,\mathrm{v}.$$

(vi) L'égalité

$$\operatorname{Ker} \rho(q) = U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi/q) \cap \operatorname{Ker} \operatorname{ind}^{\sim} (\mu_{\operatorname{Fract} \Xi/q}, \mathfrak{p} \otimes_\Xi \operatorname{Fract} \Xi/q \uparrow \mathfrak{g})$$

résulte de la suite exacte

$$0 \to (U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi/q) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_\Xi \Xi/q)} \Xi/q \to U(\mathfrak{g} \otimes_k \mathrm{Fract}\, \Xi/q) \otimes_{U(\mathfrak{p} \otimes_\Xi \mathrm{Fract}\, \Xi/q)} \mathrm{Fract}\, \Xi/q.$$

Alors (vi) est une conséquence de ([3], 1.4).

1.6. Pour tout $q \in \mathrm{Specm}\, \Xi$, on identifie $p = S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g}) v \cap q$ à un idéal de $S(\mathfrak{g})$. On note $\mathcal{G}(q)$ le sous-groupe de $\mathcal{G}$ laissant p stable, $i(q)$ l'intersection de $\mathrm{Ker}\, \rho(q)$ avec $U(\mathfrak{g})$, $\Gamma(q)$ le cœur de $i(q)$ (c'est-à-dire le centre de $\mathrm{Fract}\, U(\mathfrak{g})/i(q)$) et $\Delta(q) = (\mathrm{Fract}\, S(\mathfrak{g})/p)^{\mathcal{G}(q)}$. Soit $\overline{\Lambda}(q)$ une clôture algébrique de Ξ/q (donc aussi de $S(\mathfrak{g})/P$).

LEMME. — *Soit $q \in \mathrm{Spec}\, \Xi$; pour tout $z \in \Gamma(q)$ soit $\varphi(q) z$ l'image canonique de z dans*

$$\mathit{Fract}\, (U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi/q)/\mathit{Ker}\, \rho(q)) \subset \mathit{Fract}\, (U(\mathfrak{g} \otimes_k \overline{\Lambda}(q)/I_{\mathfrak{g} \otimes_k \overline{\Lambda}(q)}(\mu_{\overline{\Lambda}(q)}).$$

On a $\varphi(q) z \in \Gamma(q)$ et $\varphi(q)$ est un homomorphisme de $\Gamma(q)$ dans $\Delta(q)$. Soit $\lambda \in V'(\Xi/q)$ on a (en particulier si $q = 0$: soit $\lambda \in V'(v)$)

$$z - \langle \varphi(q) z, \lambda \rangle \in I(\lambda)/i(q)$$

où $z \in (U(\mathfrak{g})/i(q))^{\mathcal{G}}$ (en particulier si $q = 0, z - \langle \varphi(q) z, \lambda \rangle \in I(\lambda)/U(\mathfrak{g}) v$).

Soient $z \in \Gamma(q) - \{0\}$ et $\overline{\Lambda}(q)$ une clôture algébrique de $\mathrm{Fract}\, \Xi/q$. On a

$$\mathrm{Ker}\, \rho(q) \otimes_{\Xi/q} \overline{\Lambda}(q) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{ind}^{\sim}(\mu_{\overline{\Lambda}(q)}, \mathfrak{p} \otimes_\Xi \overline{\Lambda}(q) \uparrow \mathfrak{g}).$$

Donc $U(\mathfrak{g} \otimes_k \overline{\Lambda}(\bar{q}))/\mathrm{Ker}\, \rho(q) \otimes_{\Xi/q} \overline{\Lambda}(q)$ est une $\overline{\Lambda}(q)$- algèbre primitive ([4], 10.3.3) contenant $U(\mathfrak{g} \otimes_k \Xi/q)/\mathrm{Ker}\, \rho(q)$.

D'après ([4], 4.1.6) on a $\varphi(q)(z) \in \overline{\Lambda}(q)$. *Montrons d'abord que $\varphi(q)(z) \in S(\mathfrak{g})/p$ puis que $\varphi(q)(z) \in \Delta(q)$.*

Soit $u \in U(\mathfrak{g})/i(q)$ tel que $uz \in U(\mathfrak{g})/i(q) - \{0\}$; on choisit dans $U(\mathfrak{g})$ des antécédents $\tilde{u}$ et $\widetilde{uz}$ à u et uz. *Par définition on a*

$$(\star) \qquad \widetilde{uz} \otimes 1_{\Xi/q} - \tilde{u} \otimes \varphi(q) z \in \mathit{Ker}\, \rho(q).$$

Soit $\gamma \in \mathrm{Gal}(\overline{\Lambda}(q)/S(\mathfrak{g})/p)$ et supposons que $\varphi(q) z \neq \gamma . \varphi(q) z$; alors il existe une Ξ/q-algèbre de type fini, notée Ξ', telle que $\varphi(q) z$, $\gamma . \varphi(q) z$ et $\varphi(q) z - \gamma . \varphi(q) z$ soient des éléments inversibles de Ξ'.

Soit $m \in \operatorname{Specm} \Xi'$, on a, d'après I.5, (ii) et (iii),

$$\operatorname{Ker} \rho(q) \otimes_{\Xi/q} \Xi' \otimes_{\Xi'} \Xi'/m \subset I(\lambda_m);$$

on en déduit, avec ($\star$), que l'on a

$$\widetilde{uz} - \tilde{u}(\varphi(q)\, z \otimes_{\Xi'} 1_{\Xi'/m}) \in I(\lambda_m)$$

et

$$\widetilde{uz} - \tilde{u}(\varphi(q)\, z \otimes_{\Xi'} 1_{\Xi'/\gamma.m}) \in I(\lambda_{\gamma.m}).$$

Or

$$\varphi(q)\, z \otimes_{\Xi'} 1_{\Xi'/\gamma.m} = \gamma.\varphi(q)\, z \otimes_{\Xi'} 1_{\Xi'/m}$$

et

$$\lambda_m = \lambda_{m \cap S(\mathfrak{g})/p} = \lambda_{\gamma m}.$$

D'où :

(1) $$\tilde{u}((\varphi(q)\, z - \gamma.\varphi(q)\, z) \otimes_{\Xi'} \Xi'/m) \in I(\lambda_m).$$

On remarque que, puisque $\Xi' \subset \overline{\Lambda}(q)$ est une $S(\mathfrak{g})/p$-algèbre de type fini, l'application $m \in \operatorname{Specm} \Xi' \to m \cap (S(\mathfrak{g})/p) \in \operatorname{Specm} S(\mathfrak{g})/p$ est d'image dense.

(1) entraîne que $\tilde{u} \in I(\lambda_m)$ et donc que

$$\tilde{u} \in \cap_{m \in \operatorname{Specm} \Xi'} I(\lambda_m) = i(q),$$

d'après I.5, (iv) et la continuité de I; d'où une contradiction. Donc $\varphi(q)\, z \in \mathit{Fract}\, S(\mathfrak{g})/p$.

Supposons qu'il existe $\gamma \in \mathscr{G}(q)$ tel que $\gamma\varphi(q)(z) \neq \varphi(q)(z)$. Soit $y \in S(\mathfrak{g})/P - \{0\}$ tel que $\varphi(q) z$, $\gamma\varphi(q) z$ et $\varphi(q)\, z - \gamma\varphi(q) z$ soient des éléments inversibles de $(S(\mathfrak{g})/p)_y$. D'après les propriétés de Ξ (I.4, (i)) il existe un ouvert non vide V de $\operatorname{Specm}(S(\mathfrak{g})/p)_y$ tel que si $m \in \overline{V}$, il existe n, $n' \in \operatorname{Specm}(\Xi/q)_y$ vérifiant : $n \cap (S(\mathfrak{g})/p)_y = m$ et $n' \cap (S(\mathfrak{g})/p)_y = \gamma m$; alors on pose $\Xi' = (\Xi/q)_y$ et on a, grâce à I.5, (ii), (iii) et à ($\star$) :

$$\widetilde{uz} - \tilde{u}(\varphi(q)\, z \otimes_{\Xi'} \Xi'/n) \in I(\lambda_m)$$

et

$$\widetilde{uz} - \tilde{u}(\varphi(q) z \otimes_{\Xi'} \Xi'/n') \in I(\lambda_{\gamma m}).$$

Or :

$$\varphi(q) z \otimes_{\Xi'} \Xi'/n' = \gamma\varphi(q) z \otimes_{\Xi'} \Xi'/n$$

et

$$I(\lambda_m) = \gamma.I(\lambda_m) = I(\lambda_{\gamma m}).$$

Cela entraîne que :

$$\tilde{u}((\varphi(q) z - \gamma\varphi(q) z) \otimes_{\Xi'} \Xi'/n) \in I(\lambda_m),$$

$$\tilde{u} \in I(\lambda_m),$$

$$\tilde{u} \in \cap_{m \in \overline{V}} I(\lambda_m) = i(q),$$

d'où une contradiction. *Donc* $\varphi(q) z \in \Delta(q)$.

Soient $z, z' \in \Gamma(q)-\{0\}$ et $u \in U(\mathfrak{g})/i(q)$, tels que uz, uz' et uzz' soient des éléments de $U(\mathfrak{g})/i(q)-\{0\}$; on choisit des représentants $\tilde{u}$, $\widetilde{uz}$, $\widetilde{uz'}$ de u, $\widetilde{uz}$, uz' dans $U(\mathfrak{g})$; alors on a (*cf.* ($\star$)) :

$$(\widetilde{uz}+\widetilde{uz'}) \otimes_k 1_{\Xi/q} - u \otimes_k \varphi(q)(z+z') \in \operatorname{Ker} \rho(q);$$
$$\widetilde{uz} \otimes_k 1_{\Xi/q} - \tilde{u} \otimes_k \varphi(q)(z) \in \operatorname{Ker} \rho(q);$$
$$\widetilde{uz'} \otimes_k 1_{\Xi/q} - \tilde{u} \otimes_k \varphi(q)(z') \in \operatorname{Ker} \rho(q).$$

D'où

$$\tilde{u} \otimes_k (\varphi(q)(z+z') - \varphi(q)(z) - \varphi(q)(z')) \in \operatorname{Ker} \rho(q);$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{u} \otimes_k 1 \in \operatorname{Ker} \rho(q) \cap U(\mathfrak{g}) = i(q)$$

si

$$\varphi(q)(z+z') - \varphi(q)(z) - \varphi(q)(z') \neq 0.$$

comme $\tilde{u} \notin i(q)$, on a

$$\varphi(q)(z+z') = \varphi(q)\, z + \varphi(q)\, z'.$$

On vérifie de même la multiplicativité de $\varphi(q)$, ce qui termine la démonstration de $\varphi(q)$ *est un homomorphisme d'algèbres de* $\Gamma(q)$ *dans* $\Delta(q)$.

Soit $z \in (U(\mathfrak{g})/i(q))^{\mathfrak{q}}$ par définition de $\varphi(q)$, on a

$$(\star\star) \qquad z \otimes_k 1_{\Xi/q} - 1 \otimes \varphi(q)(z) \in \operatorname{Ker} \rho(q)/i(q).$$

Soient $\lambda \in V'(\Xi/q)$ et $m \in \operatorname{Specm} \Xi/q$ tel que $\langle (m \cap S(\mathfrak{g})/p), \lambda \rangle = 0$. D'après 1.5, (ii), (iii) et ($\star\star$), on a $z - \varphi(q)(z) \otimes_{\Xi/q} \Xi/m \in I(\lambda_m)$. Or $\varphi(q)(z) \otimes_{\Xi/q} \Xi/m = \langle \varphi(q)(z), \lambda \rangle$, par définition de m et $I(\lambda_m) = I(\lambda)$. D'où ce qui termine I.6 $z - \langle \varphi(q)(z), \lambda \rangle \in I(\lambda)/i(q)$.

1.7. On s'inspire de [2], 3.5. Pour tout $q \in \operatorname{Spec} \Xi$, on définit l'idéal $t(q)$ de $U(\mathfrak{g}) \otimes_k \Delta(q)$ par la suite exacte

$$0 \to t(q) \to U(\mathfrak{g}) \otimes_k \Delta(q) \to (\operatorname{Fract} U(\mathfrak{g})/i(q)) \otimes_{\Gamma(q),\, \varphi(q)} \Delta(q).$$

On écrit t, φ au lieu de $t(0)$, $\varphi(0)$; on pose, comme en I.6, $p = q \cap S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$ et on identifie p à un idéal de $S(\mathfrak{g})$ contenant $S(\mathfrak{g})v$.

Proposition. — (i) *Ker* $\rho(q) \otimes_{\Xi/q}$ *Fract* $\Xi/q = t(q) \otimes_{\Delta(q)}$ *Fract* Ξ/q;

(ii) *soit* $z \in \Gamma(q)$; *l'image canonique de* z *dans Fract* $(U(\mathfrak{g}) \otimes_k \Delta(q)/t(q))$ *est* $\varphi(q) z$.

(i) Notons $U = U(\mathfrak{g})/i(q) - \{0\}$, P (resp. P') l'ensemble des idéaux premiers de $U(\mathfrak{g}) \otimes_k$ Fract Ξ/q d'intersection $i(q)$ avec $U(\mathfrak{g})$ (resp. de

(Fract $U(\mathfrak{g})/i(q)) \otimes_k (\text{Fract}\, \Xi/q)$). Dans $U(\mathfrak{g})/i(q) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q$ on identifie $U \otimes_k 1_{\text{Fract}\,\Xi/q}$ à U. L'idéal $i(q)$ étant complètement premier, d'après ([4], 3.6.12, (iv)) :

$$(U(\mathfrak{g})/i(q) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q)_U = (\text{Fract}\, U(\mathfrak{g})/i(q)) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q.$$

On s'inspire de [2], 3.5.

(*a*) *L'application* $\varkappa$ *qui à tout* $j \in P$ *associe l'idéal* $(j/i(q) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q)_U$ *de* (Fract $U(\mathfrak{g})/i(q)) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q$, *définit une bijection de* P *sur* P'.

Soit $j \in P$; alors $(j/i(q) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q) \cap U = \emptyset$ et donc d'après [4], 3.6.17, $\varkappa(j) \in P'$. Soit $j' \in P'$ et $\varkappa'(j')$ l'idéal de $U(\mathfrak{g}) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q$ défini par la suite exacte :

$$0 \to \varkappa'(j') \to U(\mathfrak{g}) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q \to (\text{Fract}\, U(\mathfrak{g})/i(q) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q)/j'.$$

Il est clair que $\varkappa'(j') \in P$ et que $\varkappa$ et $\varkappa'$ sont inverses l'une de l'autre.

(*b*) *Tout idéal de* Fract $U(\mathfrak{g})/i(q)$ *est engendré par son intersection avec* $\Gamma(q) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q$.

Cela résulte des deux assertions suivantes :

$$(\text{Fract}\, U(\mathfrak{g})/i(q)) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q$$
$$= (\text{Fract}\, U(\mathfrak{g})/i(q)) \otimes_{\Gamma(q)} (\Gamma(q) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q);$$

Fract $U(\mathfrak{g})/i(q)$ est un corps de centre $\Gamma(q)$.

On note α l'application naturelle de $U(\mathfrak{g}) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q$ dans (Fract $U(\mathfrak{g})/i(q)) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q$; d'après la définition de $t(q)$ il existe un idéal m tel que $t(q) \otimes_{\Delta(q)} \text{Fract}\, \Xi/q = \alpha^{-1} m$; comme l'idéal $\text{Ker}\, \rho(q) \otimes_{\Xi/q}$ Fract Ξ/q appartient à P, on le note j, conformément à (*a*) et j', son image par $\varkappa$, vérifie $j = \alpha^{-1} j'$. Il suffit donc de montrer que $m = j'$. Soit $z \in \Gamma(q)$; l'élément $z \otimes_k 1_{\text{Fract}\,\Xi/q} - 1 \otimes_k \varphi(q) z$ appartient à j' d'après I.6 et à m d'après la définition de $t(q)$; comme les éléments $z \otimes_k 1_{\text{Fract}\,\Xi/q} - 1 \otimes_k \varphi(q) z$ engendrent un idéal maximal de $\Gamma(q) \otimes_k \text{Fract}\, \Xi/q$, l'égalité de m et j' résulte alors de (*b*).

(ii) est une conséquence de I.6 et de (i).

1.8. On garde les notations de 1.7. De manière analogue à 1.5, nous allons montrer comment, pour presque tout idéal premier q de Ξ, $t(q)$ s'obtient à partir de t. Ceci entraînera alors une relation entre φ, $\varphi(q)$ et les applications de passage au quotient τ de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v$ sur $U(\mathfrak{g})/i(q)$ et τ' de $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$ localisé en p sur Fract $S(\mathfrak{g})/p$.

LEMME. — *On note* $\Delta'(q)=(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v)_p\cap\Delta$ *et* $t'(q)=t\cap U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta'(q)$. *Il existe une partie multiplicative dénombrable* $\mathscr{T}$ *de* $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v-\{0\}$, *telle que pour tout* $q\in \mathrm{Spec}\,\Xi$ *ne rencontrant pas* $\mathscr{T}$, *on ait* :

1° $t=t'(q)\otimes_{\Delta'(q)}\Delta$ *et* $\mathrm{Ker}\,\rho\otimes_\Xi\Xi_q=t'(q)\otimes_{\Delta'(q)}\Xi_q$;

2° $t(q)=t'(q)\otimes_{\Delta'(q)}\Delta(q)$;

3° *Pour tout* $z\in(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)$ *tel que* $\varphi(z)\in\Delta'(q)$, *on a*

$$\varphi(q)\tau(z)=\tau'\varphi(z).$$

Soient F un ensemble fini de générateurs de l'idéal t dans la Δ-algèbre noethérienne $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta$. Il existe $x\in S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v-\{0\}$, tel que, pour tout $u\in F$, on ait $u\in U(\mathfrak{g})\otimes_k(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v)_x$. D'après 1.7, (i), appliqué à $q=0$, F est aussi un ensemble de générateurs, dans $U(\mathfrak{g})\otimes_k\mathrm{Fract}\,\Xi$ de l'idéal $\mathrm{Ker}\,\rho\otimes_\Xi\mathrm{Fract}\,\Xi$. D'autre part, comme Ξ est une k-algèbre de type fini, $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Xi$ est une algèbre noethérienne; soit G un ensemble fini de générateurs de l'idéal $\mathrm{Ker}\,\rho$. Il existe donc $y\in\Xi-\{0\}$, tel que tout élément de G appartienne à l'idéal de $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Xi_y$ engendré par F. Ceci montre que si $q\in\mathrm{Spec}\,\Xi$ ne contient pas xy, les égalités 1 du lemme sont vérifiées. Soit $\mathscr{S}$ une partie multiplicative dénombrable de $\Xi-\{0\}$ vérifiant les conditions de I.5 et contenant xy. Alors si $q\in\mathrm{Spec}\,\Xi$ ne coupe pas $\mathscr{S}$, d'après I.5, puis I.7, (i) :

$$\mathrm{Ker}\,\rho\otimes_\Xi\Xi_q\otimes_{\Xi_q}\mathrm{Fract}\,\Xi/q$$
$$=\mathrm{Ker}\,\rho(q)\otimes_{\Xi/q}\mathrm{Fract}\,\Xi/q=t(q)\otimes_{\Delta(q)}\mathrm{Fract}\,\Xi/q.$$

En utilisant 1, on obtient :

$$t'(q)\otimes_{\Delta'(q)}\Xi_q\otimes_{\Xi_q}(\mathrm{Fract}\,\Xi/q)=t(q)\otimes_{\Delta(q)}\mathrm{Fract}\,\Xi/q;$$
$$t'(q)\otimes_{\Delta'(q)}\Delta(q)\otimes_{\Delta(q)}\mathrm{Fract}\,\Xi/q=t(q)\otimes_{\Delta(q)}\mathrm{Fract}\,\Xi/q.$$

En prenant l'intersection des deux membres de cette égalité avec $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta(q)$, on obtient 2.

Soit $z\in(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathfrak{g}}$, tel que $\varphi(z)\in\Delta'(q)$; alors :

$$z\otimes_k 1-1\otimes_k\varphi(z)\in(U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta'(q)\cap t(q))/U(\mathfrak{g})v\otimes_k\Delta'(q)$$
$$=t'(q)/U(\mathfrak{g})v\otimes_k\Delta'(q).$$

D'où en utilisant 2 :

$$z\otimes_k 1-1\otimes_k\tau'\varphi(z)\in t'(q)\otimes_{\Delta'(q)}\Delta(q)/U(\mathfrak{g})v\otimes_k\Delta(q)$$
$$=t(q)/U(\mathfrak{g})v\otimes_k\Delta(q);$$

En appliquant τ, on obtient :

$$(\star) \qquad \tau(z) \otimes_k 1 - 1 \otimes_k \tau' \varphi(z) \in t(q)/i(q) \otimes_k \Delta(q).$$

Il est clair que $\tau(z) \in U(\mathfrak{g})/i(q)^{\mathfrak{g}}$ et donc, par définition de $t(q)$, on a

$$(\star\star) \qquad \tau(z) \otimes_k 1 - 1 \otimes_k \varphi(q)\,\tau(z) \in t(q)/i(q) \otimes_k \Delta(q).$$

La comparaison de $(\star)$ et $(\star\star)$ démontre 3.

On note $\mathcal{T}$ la partie multiplicative dénombrable de $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,v - \{0\}$ engendrée par les éléments de la forme $\prod_{\gamma \in \mathrm{Gal\,Fract}\,\Xi/\Delta} \gamma . S$ où $s \in \mathcal{S}$; alors $\mathcal{T}$ vérifie les conditions du lemme.

I.9. Lemme. — Si $\mathfrak{n} = v = 0$, *la restriction de* φ *à* $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ *est l'homomorphisme de Duflo de* $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ *sur* $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. *Si de plus les semi-invariants de* $U(\mathfrak{g})$ *sont invariants, l'idéal* t' *de* $U(\mathfrak{g}) \otimes_k \mathrm{Fract}\, S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ *engendré par les éléments* $z \otimes_k 1 - 1 \otimes_k \varphi(z)$ *où* $z \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ *est l'idéal* t.

Ici $\Gamma = (\mathrm{Fract}\, U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $\Delta = (\mathrm{Fract}\, S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. D'après I.5, (i) et (iii), comme $z \otimes_k 1 - 1 \otimes_k \varphi(z) \in \mathrm{Ker}\,\rho$, on a $z - \langle \varphi(z), \lambda_m \rangle \in I(\lambda_m)$, pour tout $m \in \mathrm{Spec}\,\Xi$. On applique alors [4], 10.4.2 pour en conclure que φ est l'homomorphisme de Duflo. Soit $s \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$; par définition de t et t'

$$\varphi^{-1}(s) \otimes_k 1 - 1 \otimes_k s \in t \cap t';$$
$$U(\mathfrak{g}) \otimes_k \mathrm{Fract}\, S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = U(\mathfrak{g}) + t'.$$

Donc t est engendré par t' et $t \cap U(\mathfrak{g})$. Comme $t \cap U(\mathfrak{g}) = 0$ d'après I.5, (v), le lemme est démontré.

I.10. Lemme. — *On suppose que* $v \in \mathrm{Specm}\, S(\mathfrak{n})$. *On note* $\beta_{\mathfrak{g}}$ *la symétrisation de* $S(\mathfrak{g})$ *sur* $U(\mathfrak{g})$ *et* j *l'élément de* $S(\mathfrak{g}^*)^{\wedge}$ *de terme constant* 1 *dont le carré est égal au déterminant de* $(\mathrm{sh}\,1/2\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}})/(1/2\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{n}})$.

La multiplication par j^{-1} *définit par dualité un endomorphisme de* $S(\mathfrak{g})$ *noté* δ. *Soient* $u \in (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathfrak{g}}$ *et* u' *un élément de* $U(\mathfrak{g})$ *d'image* u *dans* $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v$; *alors* $\varphi(u)$ *est l'image de* $\delta\beta_{\mathfrak{g}}^{-1}(u')$.

Ce lemme est une petite généralisation du théorème 2 de [8] et je remercie M. Duflo qui a considérablement simplifié ma démonstration initiale.

Notons $v' = v \cap \mathfrak{g}$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}/v'$, $w = v/S(\mathfrak{n})v'$, $\beta_{\mathfrak{f}}$ la symétrisation de $\mathfrak{f}$; on considère j comme un élément de $S(\mathfrak{f}^*)^{\wedge}$ et on note encore δ l'endomorphisme de $S(\mathfrak{f})$ dual de la multiplication par j^{-1}. *Montrons qu'on peut remplacer dans l'énoncé du lemme* $\mathfrak{g}$ *par* $\mathfrak{f}$ *et* v *par* w, *en définissant* φ *de* $(U(\mathfrak{f})/U(\mathfrak{f})w)^{\mathfrak{f}} = (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w)^{\mathfrak{g}}$ *dans* $(S(\mathfrak{f})/S(\mathfrak{f})w)^{\mathfrak{f}} = (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w)^{\mathfrak{g}}$ *grâce à ces égalités* (on remarque que cette définition coïncide avec celle du morphisme générique lié au couple $(\mathfrak{f}, w)$ (*cf.* I.6).

Comme v' est un idéal de $\mathfrak{g}$, on a $\beta_{\mathfrak{g}}\, S(\mathfrak{g})\, v' = U(\mathfrak{g})\, v'$; d'autre part les éléments de v' agissant par translation dans $S(\mathfrak{g}^*)^{\wedge}$, laissent invariant j; d'où $\delta S(\mathfrak{g}) v' = S(\mathfrak{g}) v'$. Donc l'isomorphisme linéaire $\delta\beta_{\mathfrak{g}}^{-1}$ de $U(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{g})$ définit, après passage au quotient par $U(\mathfrak{g}) v'$ et $S(\mathfrak{g}) v'$, un isomorphisme linéaire de $U(\mathfrak{f})$ sur $S(\mathfrak{f})$ qui coïncide avec $\delta\beta_{\mathfrak{f}}^{-1}$; d'où l'assertion.

Remarquons maintenant que si $w=0$, d'après I.9, le lemme est le théorème 2 de [8]. On suppose donc que $\mathfrak{n}/v'$ est de dimension 1 et on note z l'élément du centre de $\mathfrak{f}$ tel que $z-1 \in w$.

(*a*) *L'application naturelle de* $S(\mathfrak{f})^{\mathfrak{f}}$ *dans* $(S(\mathfrak{f})/S(\mathfrak{f})\, w)^{\mathfrak{f}}$ *est surjective :* on considère $S(\mathfrak{f})_z$ comme l'algèbre des fonctions régulières sur l'ouvert affine de $\mathfrak{f}^*$ où z ne s'annule pas. Soit $s \in S(\mathfrak{f})/S(\mathfrak{f})\, w$; on définit $s' \in S(\mathfrak{f})_z$ par $s'(\lambda) = s(\lambda/\lambda(z))$. Il est clair que, quand $s \in (S(\mathfrak{f})/S(\mathfrak{f})\, w)^{\mathfrak{f}}$, $s' \in S(\mathfrak{f})_z^{\mathfrak{f}}$ et qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $z^n s' \in S(\mathfrak{f})^{\mathfrak{f}}$; comme $z-1 \in w$, l'image de $z^n s'$ dans $S(\mathfrak{f})/S(\mathfrak{f})\, w$ est s, ce qui démontre (*a*).

(*b*) *Le diagramme suivant est commutatif; ses lignes horizontales sont des isomorphismes*

$$\begin{array}{ccc} U(\mathfrak{f})^{\mathfrak{f}} & \xrightarrow{\delta\beta_{\mathfrak{f}}^{-1}} & S(\mathfrak{f})^{\mathfrak{f}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U(\mathfrak{f})/u(\mathfrak{f})\, w)^{\mathfrak{f}} & \xrightarrow{\varphi} & (S(\mathfrak{f})/S(\mathfrak{f})\, w)^{\mathfrak{f}} \end{array}$$

Cela résulte de la comparaison du théorème 2 de [8] et de I.6 avec $\mathfrak{f}$, w et $q=0$.

De (*a*) et (*b*) on déduit que l'application naturelle de $U(\mathfrak{f})^{\mathfrak{f}}$ sur $(U(\mathfrak{f})/U(\mathfrak{f})\, w)^{\mathfrak{f}}$ est surjective et grâce à (*b*) le lemme devient une conséquence de l'égalité

$$U(\mathfrak{f})\, w = \beta_{\mathfrak{f}}\, \delta S(\mathfrak{f})\, w$$

que nous allons établir : comme z est dans le centre de $\mathfrak{f}$ et comme w est engendré par $z-1$, on a $U(\mathfrak{f})\, w = \beta_{\mathfrak{f}}\, S(\mathfrak{f})\, w$. Comme la translation, que définit z dans $S(\mathfrak{f}^*)^{\wedge}$, laisse j invariant, on a aussi $\delta S(\mathfrak{f})\, w = S(\mathfrak{f})\, w$.

D'où l'assertion.

Chapitre II

Passage au stabilisateur

II.1. Dans ce chapitre, on suppose que $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique $\mathscr{G}$. On conserve les notations $\mathfrak{n}, v, \Delta, \Gamma, \Lambda, \Xi, \rho, t, \varphi, V(?), V'(?), \mathscr{T}$ du chapitre I (*cf.* index). On suppose de plus qu'il existe $n \in \operatorname{Specm} S(\mathfrak{n})$, tel que $\bigcap_{\gamma \in \mathscr{G}} \gamma . n = 0$.

LEMME. — *Il existe* $w \in \operatorname{Specm} S(\mathfrak{n})$ *et* $q \in \operatorname{Spec} \Xi$, *tels que :*
q ne rencontre pas $\mathscr{T}$;

$$q \cap S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v = S(\mathfrak{g})w/S(\mathfrak{g})v;$$

$$\bigcap_{\gamma \in \mathscr{G}} \gamma . w = v.$$

Comme k est non dénombrable, il existe $w \in \operatorname{Specm} S(\mathfrak{n})$ vérifiant : $w \supset v$; $S(\mathfrak{g})\, w/S(\mathfrak{g})\, v \cap \mathscr{T} = \emptyset$; $\bigcap_{\gamma \in \mathscr{G}} \gamma . w = v$. Soit $x \in S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, v - \{0\}$, tel que Ξ soit une extension entière de $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, v)_x$; alors on impose à w la condition supplémentaire de ne pas contenir x et on choisit $q \in \operatorname{Spec} \Xi$, tel que

$$q \cap (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, v)_x = (S(\mathfrak{g})\, w/S(\mathfrak{g})\, v)_x;$$

comme $q \cap (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v)$ et $S(\mathfrak{g})w/S(\mathfrak{g})\, v$ sont deux idéaux premiers de $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$, égaux après localisation par x, ils sont égaux. Les idéaux q et w répondent donc aux conditions du lemme.

On fixe q et w jusqu'à la fin de ce chapitre.

II.2. On pose $\mathfrak{h} = \operatorname{stab}_{\mathfrak{g}} w$; alors $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe algébrique $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{G}$ stabilisant l'idéal w; on note $\mathscr{H}$ la composante connexe de $\mathscr{H}'$. On pose

$$\Gamma(\mathfrak{h}) = (\operatorname{Fract} U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w)^{\mathscr{H}},$$

$$\Delta(\mathfrak{h}) = (\operatorname{Fract} S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})\, w)^{\mathscr{H}},$$

$$\Lambda(\mathfrak{h}) = \operatorname{Fract} S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})\, w$$

et $\overline{\Lambda}(\mathfrak{h})$ une clôture algébrique de $\Lambda(\mathfrak{h})$. Soit ν l'application naturelle de $\mathfrak{h} \otimes_k \overline{\Lambda}(\mathfrak{h})$ dans $\overline{\Lambda}(\mathfrak{h})$; en appliquant le lemme I.4 à ν; on en déduit que ν admet une polarisation résoluble; on note $I(\nu)$ l'idéal de $U(\mathfrak{h}) \otimes_k \overline{\Lambda}(\mathfrak{h})$ associé canoniquement à ν, et, pour tout $z \in \Gamma(\mathfrak{h})$, $\psi(z)$ l'image canonique de z dans Fract $(U(\mathfrak{h}) \otimes_k \overline{\Lambda}(\mathfrak{h})/I(\nu))$. Le lemme I.6 montre que ψ est un homomorphisme de $\Gamma(\mathfrak{h})$ dans $\Delta(\mathfrak{h})$; on définit alors l'idéal $t(\mathfrak{h})$ de $U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Delta(\mathfrak{h})$ (de manière analogue à t *cf.* I.7) par la suite exacte

$$0 \to t(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}) \to (\operatorname{Fract} U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w) \otimes_{\Gamma(\mathfrak{h}), \psi} \Delta(\mathfrak{h}).$$

Les sous-variétés de $\mathfrak{h}^*$ analogues aux sous-variétés $V(?)$ et $V'(?)$ de $\mathfrak{g}^*$ sont notées $W(?)$ et $W'(?)$; soit res l'application de restriction de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{h}^*$; on pose $\eta = 1/2 \operatorname{trad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$; on a

$$\eta\, U(\mathfrak{h})\, w = U(\mathfrak{h})\, w \qquad \text{et} \qquad \eta\, U(\mathfrak{h})\, v = U(\mathfrak{h})\, v;$$

on notera encore η les automorphismes de $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w$ et $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, v$ obtenus après passage aux quotients.

II.3. LEMME. — (i) *on a* $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w)^{\mathfrak{n}} = U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})w$. *L'application naturelle de* $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v$ *sur* $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w$ *restreinte à* $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathscr{g}}$ *est injective; elle induit un homomorphisme d'algèbre* π^0 *de* $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathscr{g}}$ *dans* $(U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})w)^{\mathscr{H}'}$;

(ii) *on a* $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w)^{\mathfrak{n}} = S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})w$. *Considérons la restriction* res : $V(w) \to W(w)$. *Son comorphisme induit un isomorphisme* π'^0 *de* (Fract $S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})w)^{\mathscr{H}'}$ *sur* (Fract $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w)^{\mathscr{H}'}$.

Comme l'image de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap w$ est centrale, on a

$$(\star) \qquad U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})w \subset (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w)^{\mathfrak{n}}$$

et

$$S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})w \subset (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w)^{\mathfrak{n}}.$$

(i) On considère $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w$ comme un $U(\mathfrak{g})$-module à gauche V; alors $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})w$ est, par restriction, un $U(\mathfrak{n})$-module multiple du $U(\mathfrak{n})$-module absolument simple $U(\mathfrak{n})/w$ ([4], 5.1.13); de plus $\mathfrak{h}$ est le stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ de $U(\mathfrak{n})/w$; on applique alors ([4], 5.3.5); en adoptant les notations de ce lemme, soit $t \in V_p^{\mathfrak{n}} - V_{p-1}$ (où $V_{-1}=0$); si $P > 0$, il existe $z \in U(\mathfrak{n})$, tel que $zt \in V_{p-1} - \{0\}$; or $zt = tz$ dans $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})/w$; donc $tz \in V_{p-1} - \{0\}$ et $z \notin w$; d'où $t \in V_{p-1}$ ce qui contredit $P > 0$. *Ainsi*

$$U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})w = V_0 \supset V^{\mathfrak{n}} = (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w)^{\mathfrak{n}}$$

et l'égalité résulte de $(\star)$.

Notons $u \mapsto \bar{u}$ l'application naturelle de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v$ sur $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w$; soit $u \in (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathscr{g}}$; comme $\bigcap_{\gamma \in \mathscr{g}} \gamma . U(\mathfrak{g})w = U(\mathfrak{g})v$, on a $\bar{u} \neq 0$ si $u \neq 0$; d'après ce qu'on vient de montrer, $\bar{u} \in (U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})w)^{\mathscr{H}}$. Soient u_1, $u_2 \in (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathscr{g}}$; alors $\bar{u}_1 \bar{u}_2 = \overline{u_1 u_2}$: en effet il existe $u'_1, u'_2 \in U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})v$ et $u''_1, u''_2 \in U(\mathfrak{g})w/U(\mathfrak{g})v$ tels que :

$$u_1 = u'_1 + u''_1 \qquad \text{et} \qquad u_2 = u'_2 + u''_2;$$

alors

$$u_1 u_2 = u'_1 u'_2 + (u'_1 + u''_1) u''_2 + u''_1 u''_2$$

et

$$(u'_1 + u''_1) u''_2 + u''_1 u''_2 \in U(\mathfrak{g})w/U(\mathfrak{g})v,$$

car w/v est un idéal $\mathfrak{h}$-invariant de $U(\mathfrak{n})/v$. Ceci termine la démonstration de (i).

(ii) Soit $\lambda \in V(w)$; alors $\mathfrak{n}.\lambda \in \mathfrak{h}^{\perp}$ et $B(\lambda)$ induit une dualité non dégénérée, entre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et un quotient de $\mathfrak{n}$; d'où $\mathfrak{n}.\lambda = \mathfrak{h}^{\perp}$, on en déduit que

$(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, w)^{\mathfrak{n}} \subset S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})\, w$

et l'égalité résulte de ($\star$). Il est clair que

$$(\text{Fract } S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, w)^{\mathscr{H}'} \subset (\text{Fract } S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, w)^{\mathfrak{n}} = \text{Fract } (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, w)^{\mathfrak{n}},$$

car $\mathfrak{n}$ est nilpotent.

Donc :

$$(\text{Fract } S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, w)^{\mathscr{H}'} \subset (\text{Fract } S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})\, w)^{\mathscr{H}'}.$$

D'autre part le comorphisme de res induit l'inclusion

$$(\text{Fract } S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})\, w)^{\mathscr{H}'} \subset (\text{Fract } S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, w)^{\mathscr{H}'},$$

d'où l'égalité, qui termine la démonstration de (ii).

II.4. LEMME. — (i) *le composé de l'application* π^0 (lemme II.3, (i) *avec* η^{-1} *se prolonge en un homomorphisme de* Fract $((U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\, v)^{\mathscr{G}})$ *dans*

$$\text{Fract } ((U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w)^{\mathscr{H}'}).$$

On le note π;

(ii) *les* $\mathscr{H}'$*-orbites de* $V(w)$ *sont en bijection naturelle avec les* $\mathscr{G}$*-orbites de* $V(v)$ *contenues dans* $\mathscr{G}.V(w)$; *cette bijection définit un isomorphisme* π'^1 *de* (Fract $S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})\, w)^{\mathscr{H}'}$ *sur* (Fract $S((\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, v)^{\mathscr{G}} = \Delta$. *Alors* $(\pi'^1 \circ \pi'^0)^{-1}$ *est un isomorphisme de* Δ *sur* (Fract $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, w)^{\mathscr{H}'}$. *On le note* π'.

(i) Soient $z \in \text{Fract}\,(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\, v)^{\mathscr{G}} - \{0\}$ et $u_1, u_2 \in (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\, v)^{\mathscr{G}} - \{0\}$, tels que $z = u_1 u_2^{-1}$; on pose $\pi^0(z) = \pi^0(u_1)\, \pi^0(u_2)^{-1}$; vérifions que $\pi^0(z)$ est indépendant du choix de u_1 et u_2 : soient $u'_1, u'_2 \in (U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\, v)^{\mathscr{G}} - \{0\}$ tels que $z = u'_1 u'^{-1}_2$; alors $u_1 u'_2 = u'_1 u_2$; d'après II.3, (i), on a

$$\pi^0(u_1 u'_2) = \pi^0(u_1)\, \pi^0(u'_2)\, \pi^0(u'_1)\, \pi^0(u_2),$$

d'où :

$$\pi^0(u_1)\, \pi^0(u'_1)^{-1} = \pi^0(u_2)\, \pi^0(u'_2)$$

dans Fract $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w$. L'assertion (i) résulte alors de ce que η est un automorphisme $\mathscr{H}'$-invariant de $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w$; (les éléments de $\mathscr{H}'$ induisent des automorphismes de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$).

(ii) Le sous-ensemble $\mathscr{G}.V(w)$ est un ouvert non vide de $V(v)$ car $\cap_{\gamma \in \mathscr{G}}\, \gamma . w = v$. Le lemme (ii) résulte alors de II.3, (ii).

II.5. LEMME. — *On a*

$$\text{ind}^{\sim}(t(\mathfrak{h}), \mathfrak{h} \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}) \uparrow \mathfrak{g}) = t \otimes_{\Delta, \pi'} \Delta(\mathfrak{h}).$$

Les restrictions de $\mu_{S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w}$ et de ν à $\mathfrak{h}$ sont égales.

On note Ω une clôture algébrique de Fract $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w$ contenant $\bar{\Lambda}(\mathfrak{h})$; comme $\mathfrak{h}\otimes_k\Omega$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}\otimes_k\Omega$ orthogonale de $\mathfrak{n}\otimes_k\Omega$ pour la forme bilinéaire $B(\Omega)$, on a, d'après ([4], 10.2.1) :

$$\operatorname{Ker}\rho(q)\otimes_{\Xi/q}\Omega=\operatorname{ind}^{\sim}(I(\nu)\otimes_{\bar{\Lambda}(\mathfrak{h})}\Omega,\ \mathfrak{h}\otimes_k\Omega\uparrow\mathfrak{g}).$$

D'après le lemme I.7, (i) appliqué d'une part à $\mathfrak{g}$ et q et d'autre part à $\mathfrak{h}$ et $q=0$, on en déduit

$$t(q)\otimes_{\Delta(q)}\Omega=\operatorname{ind}^{\sim}(t(\mathfrak{h})\otimes_{\Delta(\mathfrak{h})}\Omega,\ \mathfrak{h}\otimes_k\Omega\uparrow\mathfrak{g}).$$

c'est-à-dire :

$$(t(q)\otimes_{\Delta(q)}\Delta(\mathfrak{h}))\otimes_{\Delta(\mathfrak{h})}\Omega=(\operatorname{ind}^{\sim}(t(\mathfrak{h}),\ \mathfrak{h}\otimes_k\Delta(\mathfrak{h})\uparrow\mathfrak{g}))\otimes_{\Delta(\mathfrak{h})}\Omega;$$

D'où après intersection avec $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta(\mathfrak{h})$:

$$(\star)\qquad \operatorname{ind}^{\sim}(t(\mathfrak{h}),\ \mathfrak{h}\otimes_k\Delta(\mathfrak{h})\uparrow\mathfrak{g})=t(q)\otimes_{\Delta(q)}\Delta(\mathfrak{h}).$$

Les conditions du lemme I.8 sont satisfaites par q grâce aux choix faits en II.1. On adopte les notations de ce lemme; ici $\Delta'(q)=\Delta(\mathfrak{h})^{\mathscr{K}'}$. Le composé de $\Delta'(q)\rightarrow\Delta\xrightarrow{\pi'}\Delta(q)$ est l'application τ' restreinte à $\Delta'(q)$. Ceci montre que

$$t'(q)\otimes_{\Delta'(q)}\Delta(q)\otimes_{\Delta(q)}\Delta(\mathfrak{h})=t'(q)\otimes_{\Delta'(q)}\Delta\otimes_{\Delta,\pi'}\Delta(\mathfrak{h}).$$

En utilisant I.8.2 et 1, on en déduit que

$$t(q)\otimes_{\Delta(q)}\Delta(\mathfrak{h})=t\otimes_{\Delta,\pi'}\Delta(\mathfrak{h}).$$

Le lemme résulte alors de $(\star)$.

II.6. On note Φ l'algèbre $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathscr{G}}$, Ψ l'algèbre $(U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})w)^{\mathscr{K}}$ et Θ une clôture algébrique de $\Delta(\mathfrak{h})$. Grâce à π', on identifie Δ à un sous-corps de $\Delta(\mathfrak{h})$. Lorsque Δ est une extension algébrique de degré fini de φ (Fract Φ), Θ est alors une clôture algébrique de Fract Φ car le groupe $\mathscr{K}'/\mathscr{K}$ est fini (c'est le cas si $v=0$ et si les semi-invariants sont invariants).

II.7. Lemme. — (i) *la restriction de* $\pi'\circ\varphi$ *à* Φ *est égale à* $\psi\circ\pi$; (ii) *soit* $\lambda\in V(w)$ *et* λ' *la restriction de* λ *à* $\mathfrak{h}$; *alors :*

(*a*) $\lambda\in V'(w)\Leftrightarrow\lambda'\in W'(w)$. En outre $\dim\mathscr{H}.\lambda'+2\dim\mathfrak{h}^{\perp}=\dim\mathscr{G}.\lambda$;

(*b*) *on suppose que* $\lambda\in V'(w)$. *Soit* $z\in\Phi$, *alors :*

$$\operatorname{ind}^{\sim}(I_{\mathfrak{h}}(\lambda'),\ \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})=I_{\mathfrak{g}}(\lambda)$$

et

$$\pi(z)-\langle\pi'\varphi(z),\lambda'\rangle\in I_{\mathfrak{h}}(\lambda')/U(\mathfrak{h})w.$$

(i) Soit $z \in \Phi$; d'après I.7, (ii) (où on fait $q=0$), on a, après application de π' :

$$z \otimes_k 1_{\Delta(\mathfrak{h})} - 1 \otimes_k \pi' \varphi(z) \in t \otimes_{\Delta, \pi'} \Delta(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{g}) v \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}).$$

D'après le lemme II.5, on a

$$t \otimes_\Delta \Delta(\mathfrak{h}) = \operatorname{ind}^\sim (t(\mathfrak{h}), \mathfrak{h} \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}) \uparrow \mathfrak{g});$$

par suite

$$z \otimes_k 1_{\Delta(\mathfrak{h})} - 1 \otimes_k \pi' \varphi(z) \in (U(\mathfrak{g}) \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}))\ \eta\ t(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{g})\, v \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}).$$

En passant au quotient par $U(\mathfrak{g})\, w \otimes_k \Delta(\mathfrak{h})$, on obtient, en notant l'application de passage au quotient

$$\bar{z} \otimes_k 1_{\Delta(\mathfrak{h})} - 1 \otimes_k \pi' \varphi(z) \in (U(\mathfrak{g}) \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}))\ \eta\ t(\mathfrak{h})/(U(\mathfrak{g})\, w \otimes_k \Delta(\mathfrak{h})).$$

D'après le lemme II.4, (i), on obtient donc :

$$\pi(z) \otimes_k 1_{\Delta(\mathfrak{h})} - 1 \otimes_k \pi' \varphi(z) \in t(\mathfrak{h})/(U(\mathfrak{h})\, w \otimes_k \Delta(\mathfrak{h})),$$

on s'est servi du fait que $U(\mathfrak{g}) \otimes_k \Delta(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{g})\, w \otimes_k \Delta(\mathfrak{h})$ est un

$$U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Delta(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w \otimes_k \Delta(\mathfrak{h})\text{-module}$$

libre à droite admettant une base contenant l'unité.

Comme d'après I.7, appliqué en remplaçant $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{h}$, on a aussi

$$\pi(z) \otimes_k 1_{\Delta(\mathfrak{h})} - 1 \otimes_k \psi\pi(z) \in t(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}),$$

on en déduit

$$\pi' \varphi(z) = \psi\pi(z).$$

(ii) Soit $\lambda \in V(w)$; comme $\mathfrak{h}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{n}$ pour $B(\lambda)$, on a

$$\mathfrak{n}.\lambda = \mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}^* \qquad \text{et} \qquad \dim \mathfrak{g}.(\lambda \mid \mathfrak{n}) = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

On pose $\lambda' = \lambda \mid \mathfrak{h}$ et on obtient donc que

$$\dim \mathfrak{g}.(\lambda \mid \mathfrak{n}) + \dim \mathfrak{h}^\perp + \dim \mathfrak{h}.\lambda' \leqslant \dim \mathfrak{g}.\lambda.$$

Il est clair que $\dim \mathfrak{g}.\lambda \leqslant \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}.\lambda$. Comme $\mathfrak{h}.\lambda \supset \mathfrak{n}.\lambda = \mathfrak{h}^\perp$, on a $\mathfrak{h}.\lambda = \mathfrak{h}.(\lambda' + \mathfrak{h}^\perp)$. D'où :

$$\dim \mathfrak{g}.\lambda \leqslant \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}.\lambda' + \dim \mathfrak{h}^\perp.$$

Avec ce qui précède on en déduit l'égalité $\dim \mathfrak{g}.\lambda = 2 \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}.\lambda'$, c'est-à-dire ($a$).

(*b*) est une conséquence de (*a*) et de (i) en tenant compte de I.7 où on remplace $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{h}$.

II.8. LEMME. — *On suppose que Δ est une extension algébrique de degré fini de φ (Fract Φ). Le corps $\Delta(\mathfrak{h})$ est une extension algébrique de degré fini du corps ψ (Fract Ψ) et du corps $(\pi'\varphi)$ (Fract Φ).*

Considérons la suite d'homomorphismes

$$\text{Fract } \Phi \xrightarrow{\pi} \text{Fract } \Psi \hookrightarrow \Gamma(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\psi} \Delta(\mathfrak{h}).$$

Le composé est $\pi'\varphi$ d'après le lemme II.7, (i). D'après II.4, (ii), π' est un isomorphisme de Δ sur $\Delta(\mathfrak{h})^{\mathscr{H}'}$.

Le lemme résulte alors de ce que $\mathscr{H}'/\mathscr{H}$ est fini.

II.9. LEMME. — *On note t' le noyau de l'application :*

$$U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta \to (\text{Fract } U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w) \otimes_{\Phi, \pi'\varphi} \Theta,$$

où Fract $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w$ *est une Ψ-algèbre grâce à π. Soit b un idéal premier de $U(\mathfrak{g} \otimes_k \Theta)$ tel que*

$$b \cap U(\mathfrak{n} \otimes_k \Theta) = v \otimes_k \Theta.$$

(i) *Il existe $c \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{h} \otimes_k \Theta)$, tel que*

$$b = \operatorname{ind}^{\sim}(c, \mathfrak{h} \otimes_k \Theta \uparrow \mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad c \cap U(\mathfrak{n} \otimes_k \Theta) = w \otimes_k \Theta.$$

(ii) *La suite : $0 \to t' \to U(\mathfrak{h} \otimes_k \Theta) \to U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w \otimes_{\Phi, \pi'\varphi} \Theta$ est exacte, où $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w$ est une Φ-algèbre grâce à π.*

(iii) *On suppose que $b \supset t$; soit c vérifiant* (i). *Alors, on a*

$$\eta\, t' \subset (U(\mathfrak{g})\, w \otimes_k \Theta + t \otimes_\Delta \Theta) \cap U(\mathfrak{h} \otimes_k \Theta) \subset \eta\, c.$$

(i) On pose $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k \Theta$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \otimes_k \Theta$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n} \otimes_k \Theta$. Soit $\hat{v}$ un idéal de $U(\mathfrak{n}')$ tel que :

— $\forall\, p \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g}')$ tel que $p \cap U(\mathfrak{n}') \supsetneq v \otimes_k \Theta$ on a $p \cap U(\mathfrak{n}') \supset \hat{v}$;

— $\hat{v} \supset v$ et $\hat{v} \neq v$.

Il en existe d'après [6], lemme 8, car

$$(\text{Fract } U(\mathfrak{n}')/v \otimes_k \Theta)^{\mathscr{G}} = (\text{Fract } S(\mathfrak{n}')/v \otimes_k \Theta)^{\mathscr{G}} = \Theta \quad \text{(II.1)}$$

On a

$$b = (\cap_{i \in I_1} i) \cap (\cap_{i \in I_2} i)$$

où

$$i \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g}') \quad \text{pour} \quad i \in I_1 \cup I_2,$$

$$i \cap U(\mathfrak{n}') = v \bigotimes_k \Theta \quad \text{si} \quad i \in I_1,$$

et

$$i \cap U(\mathfrak{n}') \supset \hat{v} \quad \text{si} \quad i \in I_2.$$

Posons

$$b_1 = \cap_{i \in I_1} i \quad \text{et} \quad b_2 = \cap_{i \in I_2} i;$$

alors $b = b_1 \cap b_2$ et comme b est un idéal premier, on a $b = b_1$ ou $b = b_2$; or $b = b_2$ entraînerait que $b \supset U(\mathfrak{n}')\hat{v}$, ce qui est impossible; donc $b = b_1$.

D'après [7], théorème A, pour tout $i \in I_1$, il existe $c_i \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{h}')$ tel que

$$c_i \cap U(\mathfrak{n}') = w \bigotimes_k \Theta \quad \text{et} \quad \operatorname{ind}^{\sim}(c_i, \mathfrak{h}' \uparrow \mathfrak{g}) = i.$$

Donc $b = \operatorname{ind}^{\sim}(\cap_{i \in I_1} c_i, \mathfrak{h}' \uparrow \mathfrak{g})$ d'après [7], lemme 3.3. D'après [7] lemme 3.2, il existe un idéal premier c de $U(\mathfrak{h}')$ tel que

$$c \supset \cap_{i \in I_1} c_i \supset w \bigotimes_k \Theta \quad \text{et} \quad b = \operatorname{ind}^{\sim}(c, \mathfrak{h}' \uparrow \mathfrak{g});$$

comme $w \bigotimes_k \Theta$ est un idéal maximal de $U(\mathfrak{n}')$, on a en outre $c \cap U(\mathfrak{n}') = w \bigotimes_k \Theta$.

(ii) Comme Θ est un Φ-module plat, l'application canonique de

$$U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w \bigotimes_\Phi \Theta$$

dans $(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w) \bigotimes_\Phi \Theta$ est une injection; d'où (ii).

(iii) D'après la définition de l'induction tordue, on a

$$t \bigotimes_\Delta \Theta \subset (U(\mathfrak{g})\, w \bigotimes_k \Theta) + b \subset (U(\mathfrak{g}) \bigotimes_k \Theta)\, \eta\, c.$$

Comme $U(\mathfrak{g}) \bigotimes_k \Theta$ est un $U(\mathfrak{h}) \bigotimes_k \Theta$-module libre à droite admettant une base contenant l'unité, on en déduit

$$((U(\mathfrak{g})\, w \bigotimes_k \Theta) + (t \bigotimes_\Delta \Theta)) \cap (U(\mathfrak{h}) \bigotimes_k \Theta) \subset \eta\, c.$$

On note $^{-}$ les applications de passage au quotient de $U(\mathfrak{g}) \bigotimes_k \Theta$ sur $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\, v \bigotimes_k \Theta$ et de $U(\mathfrak{h}) \bigotimes_k \Theta$ sur $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w \bigotimes_k \Theta$.

Soit $u \in t'$; d'après (ii), $\bar{u}$ appartient à l'idéal de $U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w \bigotimes_k \Theta$ engendré par les éléments $\pi(z) \bigotimes_k 1 - 1 \bigotimes_k \pi' \varphi(z)$ où $z \in \Phi$. Alors d'après la définition de π (II.4, (i)), il existe $u' \in U(\mathfrak{g})\, w/U(\mathfrak{g})\, v$, tel que $\bar{u} - u'$ appartienne à l'idéal de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\, v \bigotimes_k \Theta$ engendré par les éléments

$$z \bigotimes_k 1 - 1 \bigotimes_k \pi' \varphi(z);$$

et donc $\bar{u} - u' \in (t/U(\mathfrak{g})\, v \bigotimes_k \Delta) \bigotimes_\Delta \Theta$.

II.10. LEMME (hypothèses de II.8, notations de II.9). — *Soit* $\sigma \in \mathrm{Hom}(\Delta(\mathfrak{h}), \Theta)$; *on définit un idéal* t_σ *de* $U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta$ *par* $t_\sigma = t(\mathfrak{h}) \otimes_{\Delta(\mathfrak{h}), \sigma} \Theta$:

(i) *soit* $\tilde{\sigma}$ *un prolongement de* σ *en un automorphisme de* Θ; $\tilde{\sigma}$ *se prolonge naturellement en un automorphisme, encore noté* $\tilde{\sigma}$, *de* $U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta$. Alors, on a

$$t_\sigma = \tilde{\sigma}\,(t(\mathfrak{h}) \otimes_{\Gamma(\mathfrak{h})} \Theta);$$

(ii) *si* σ *est un* $\psi\pi(\Phi)$-*homomorphisme, on a* $t' \subset t_\sigma$;

(iii) *il existe un ensemble fini de* $\psi\pi(\Phi)$-*homomorphismes, noté* E, *tel que* $t' = \bigcap_{\sigma \in E} t_\sigma$. *Alors l'idéal c contient au moins un des idéaux* t_σ *où* $\sigma \in E$;

(iv) *si* $t \subset \mathrm{ind}^\sim(t_\sigma, \mathfrak{h} \otimes_k \Theta \uparrow \mathfrak{g})$, *alors* σ *est un* $\varphi(\Gamma)$-*homomorphisme et* $t = \mathrm{ind}^\sim(t_\sigma, \mathfrak{h} \otimes_k \Theta \uparrow \mathfrak{g})$.

On note $F = \mathrm{Fract}\, U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\, w$ et ξ l'application naturelle de $U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta$ dans $F \otimes_k \Theta$. On définit l'idéal P_σ de $\Gamma(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta$ par la suite exacte

$$0 \to P_\sigma \to \Gamma(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta \to \sigma\psi\,\Gamma(\mathfrak{h})\,\Theta.$$

Si σ est l'inclusion de $\Delta(\mathfrak{h})$ dans Θ, P_σ sera noté P. La suite exacte

$$0 \to t(\mathfrak{h}) \to U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Delta(\mathfrak{h}) \to F \otimes_{\Gamma(\mathfrak{h}), \psi} \Delta(\mathfrak{h})$$

reste exacte après tensorisation sur $\Delta(h)$ par Θ grâce à σ :

$$0 \to t(\mathfrak{h}) \otimes_{\Delta(\mathfrak{h}), \sigma} \Theta \to U(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta \to F \otimes_{\Gamma(\mathfrak{h}), \sigma\psi} \Theta.$$

Or un résultat classique sur les algèbres centrales simples montre que tout idéal de $F \otimes_k \Theta$ est engendré par son intersection avec $\Gamma(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta$. On en déduit que

$$t_\sigma = \xi^{-1} P_\sigma.$$

(i) Il est clair que : $P_\sigma = \tilde{\sigma} P$ et $\xi^{-1}\tilde{\sigma} P = \tilde{\sigma}\xi^{-1} P$. Comme $t_\sigma = \xi^{-1} P_\sigma$ et $t(\mathfrak{h}) = \xi^{-1} P$, on en déduit (i).

(ii) On note p' l'idéal de $\Gamma(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta$ défini par la suite exacte

$$0 \to p' \to \Gamma(\mathfrak{h}) \otimes_k \Theta \to \Gamma(\mathfrak{h}) \otimes_{\pi\Phi, \psi} \Theta.$$

Le raisonnement fait au début de la démonstration, montre aussi que $t' = \xi^{-1} p'$. D'autre part si σ est un $\psi\pi\,\Phi$-homomorphisme, $P_\sigma \supset p'$ d'où (ii).

(iii) On garde les notations de la démonstration de (ii).

D'après les lemmes II.7 et II.8, $\Delta(\mathfrak{h})$ est une extension de degré fini de $\psi\pi(\Phi)$, et on note E l'ensemble fini des $\psi\pi\,\Phi$-homomorphismes de $\Delta(\mathfrak{h})$ dans Θ. Il est clair que : $p' \subset \bigcap_{\sigma \in E} P_\sigma$.

D'autre part, soit σ' un $\pi\Phi$-homomorphisme de $\Gamma(\mathfrak{h})$ dans Θ ($\pi\Phi$ est inclus dans $\Gamma(\mathfrak{h})$ grâce à ψ). On choisit un automorphisme $\tilde{\sigma}'$ de Θ tel que sa restriction à $\psi\Gamma(\mathfrak{h})$ soit $\sigma'\psi^{-1}$; alors, pour $\sigma\in E$, $\tilde{\sigma}'\sigma$ est un $\psi\pi\Phi$-homomorphisme de $\Gamma(\mathfrak{h})$ dans Θ, et il existe donc $\sigma''\in E$ tel que $\tilde{\sigma}'\sigma=\sigma''$. Ceci montre que

$$\tilde{\sigma}'(\textstyle\bigcap_{\sigma\in E} P_\sigma)=\bigcap_{\sigma\in E} P_\sigma,$$

et donc que $\bigcap_{\sigma\in E} P_\sigma$ est engendré par son intersection avec $\Gamma(\mathfrak{h})\otimes_k$ Fract $\pi\Phi$ qui est clairement incluse dans p'. D'où :

$$\textstyle\bigcap_{\sigma\in E} P_\sigma\subset p'.$$

On a donc l'égalité et (en utilisant la démonstration de (ii)) :

$$t'=\xi^{-1}p'=\textstyle\bigcap_{\sigma\in E}\xi^{-1}P_\sigma=\bigcap_{\sigma\in E} t_\sigma.$$

La fin de (iii) résulte de ce que c est un idéal premier contenant t'.

(iv) On note $t^\sigma=\operatorname{ind}^{\sim}(t_\sigma,\ \mathfrak{h}\otimes_k\Theta\uparrow\mathfrak{g})$. Soit $z=ur^{-1}$ un élément de $\Gamma-\{0\}$, où u et r appartiennent à $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v-\{0\}$.

Si $t\subset t^\sigma$, on choisit un automorphisme $\tilde{\sigma}$ de Θ prolongeant σ et on a :

(1) $$t^\sigma\supset v;$$

(2) $$u\otimes_k 1_\Theta-r\otimes_k\varphi(z)\in t\otimes_\Delta\Theta\subset t^\sigma;$$

(3) $$u\otimes_k 1_\Theta-r\otimes_k\sigma\varphi(z)\in\tilde{\sigma}(t\otimes_\Delta\Theta)\text{ d'après (2)}$$

(on a prolongé $\tilde{\sigma}$ en un automorphisme de $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Theta$). Comme $\tilde{\sigma}$ commute avec l'induction

(4) $$\tilde{\sigma}(t\otimes_\Delta\Theta)=\operatorname{ind}^{\sim}(\tilde{\sigma}(t(\mathfrak{h})\otimes_{\Delta(\mathfrak{h})}\Theta),\ \mathfrak{h}\otimes_k\Theta\uparrow\mathfrak{g})=t^\sigma$$

(d'après II.5 puis (i)).

Si $\varphi(z)-\sigma\varphi(z)\neq 0$, on a $r\in t^\sigma$ d'après (2) et (3)+(4); or

$$t^\sigma\cap U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v=\tilde{\sigma}(t\otimes_\Delta\Theta)\cap U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v=0,$$

d'après (4) et I.7, (i). Donc $\sigma\in\operatorname{Gal}(\Theta/\varphi(\Gamma))$; (iv) résulte alors de (4), car, par définition de t, on a

$$t\otimes_\Delta\Theta=(t\cap U(\mathfrak{g})\otimes_k\varphi(\Gamma))\otimes_{\varphi(\Gamma)}\Theta.$$

II.11. Lemme. — *Soient* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, v *comme dans* II.1. *Supposons qu'il existe* $u_0\in(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v)$ *et* $s_0\in(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,v)$, *tels que*

$$V'(v)\supset V(v)_{s_0}=\{\lambda\in V(v)\,|\,\langle s_0,\lambda\rangle\neq 0\}$$

$u_0-\langle s_0,\lambda\rangle\in I_{\mathfrak{g}}(\lambda)/U(\mathfrak{g})\,v$ *pour tout* $\lambda\in V(v)_{s_0}$.

Alors pour tout idéal semi-premier $\mathfrak{g}$*-invariant* w *de* $S(\mathfrak{n})$ *contenant* v *et tel que* $S(\mathfrak{g})\,w/S(\mathfrak{g})\,v$ *contienne* s_0, *on a*

$$u_0 \in U(\mathfrak{g})\,w/U(\mathfrak{g})\,v.$$

Pour tout idéal maximal n de $S(\mathfrak{n})$ contenant v, on note $\mathfrak{h}(n)$ le stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ de n. Soient d la dimension maximale d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}(n)$, Gr (d) la grassmannienne formée des sous-espaces vectoriels de dimension d de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{n}$ et V la variété Specm $S(\mathfrak{n})/v$. Soit :

$$F' = \{(n, \mathfrak{h}) \subset V \times \mathrm{Gr}(d) \mid \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}(n)\}.$$

Alors F' est un fermé de $V \times \mathrm{Gr}(d)$ dont la projection sur V est égale à V. Pour tout $n \in V$, posons

$$v(n) = \bigcap\nolimits_{\gamma \in \mathscr{G}} \gamma . n.$$

Soient F'' le sous-ensemble de F' défini par

$$F'' = \{(n, \mathfrak{h}) \mid (n, \mathfrak{h}) \in F',\ U(\mathfrak{g})\,v(n)/U(\mathfrak{g})\,v \not\ni u_0,$$
$$S(\mathfrak{g})\,v(n)/S(\mathfrak{g})\,v \not\ni s_0,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{h}(n)\}.$$

Soit F l'adhérence de F'' dans F'; alors la projection de F sur V est encore V. Pour tout $(n, \mathfrak{h}) \in F$, notons $\pi''(\mathfrak{h}, n)$ l'application naturelle de $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,v)^{\mathfrak{g}}$ sur $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,n$ et $\hat{\pi}(\mathfrak{h}, n)$ l'application naturelle de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v$ sur $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,n$. L'application $\varphi(\mathfrak{h}, n)$ est l'analogue de φ pour $\mathfrak{h}(n)$. On note $W(n)$ (resp. $W(n)^0$) l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{h}(n)$ des éléments de $V(v(n))$ (resp. de $V(v(n))$ non nuls en s_0) et $\eta(\mathfrak{h}, n) = \eta_{\mathfrak{h}(n)}$.

Supposons que $(\mathfrak{h}, n) \in F''$: d'après II.7, (ii), on a

$$W(n)^0 \subset W'(n),\ \eta(\mathfrak{h}, n)^{-1}\, I_{\mathfrak{h}(n)}(\lambda') \supset I_{\mathfrak{g}}(\lambda) \cap U(\mathfrak{h})$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\lambda' = \lambda \mid \mathfrak{h}$. Ces inclusions et II.4 entraînent que

$$\hat{\pi}(\mathfrak{h}, n)\,u_0 \in U(\mathfrak{h})/U(\mathfrak{h})\,n - \{0\},$$
$$\pi''(\mathfrak{h}, n)\,s_0 \in S(\mathfrak{h})/S(\mathfrak{h})\,n - \{0\},$$
$$\eta(\mathfrak{h}, n)^{-1}\,\hat{\pi}(\mathfrak{h}, n)\,u_0 - \langle \pi''(\mathfrak{h}, n)\,s_0, \lambda' \rangle \in I_{\mathfrak{h}(n)}(\lambda')/U(\mathfrak{h})\,n$$

d'après II.7. Le lemme I.10, (iii), appliqué à $\mathfrak{h}$, n, $\eta(\mathfrak{h}, n)^{-1}\,\hat{\pi}(\mathfrak{h}, n)\,u_0$, $\pi''(\mathfrak{h}, n)\,s_0$, au lieu de $\mathfrak{g}$, v, u_0, $\varphi(u_0)$, indique que

$$\varphi(\mathfrak{h}, n)\,\eta(\mathfrak{h}, n)^{-1}\,\hat{\pi}(\mathfrak{h}, n)\,u_0 = \pi''(\mathfrak{h}, n)\,s_0,$$

pour tout $(\mathfrak{h}, n) \in F''$. Les deux membres de cette égalité dépendent rationnellement de $(\mathfrak{h}, n)$; elle est donc vérifiée pour tout $(\mathfrak{h}, n) \in F$. Comme $\varphi(\mathfrak{h}, n)$ est injectif d'après I.6, on a

$$\hat{\pi}(\mathfrak{h}, n)\, u_0 = 0 \iff \pi''(\mathfrak{h}, n)\, s_0 = 0.$$

Comme $s_0 \in S(\mathfrak{g})\, w/S(\mathfrak{g})\, v = \bigcap_{n \supset w} S(\mathfrak{g})\, n/S(\mathfrak{g})\, v$, on a aussi

$$u_0 \in \bigcap_{n \supset w} U(\mathfrak{g})\, n/U(\mathfrak{g})\, v = U(\mathfrak{g})\, w/U(\mathfrak{g})\, v.$$

Chapitre III

Résultats principaux

III.1. Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v$ comme dans l'introduction et Π une sous-k-algèbre de type fini de $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathfrak{g}}$. On dit que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ est un système régulier si les conditions suivantes sont vérifiées :

C1 $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique, noté $\mathcal{G}$;

C2 $u_0 \in \Pi - \{0\}$;

C3 $s_0 \in (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\, v)^{\mathcal{G}} - \{0\}$;

C4 $V'(v) \supset V(v)_{s_0} = \{\lambda \in V(v)/\langle s_0, \lambda\rangle \neq 0\}$;

C5 $u_0 - \langle s_0, \lambda \rangle \in I_{\mathfrak{g}}(\lambda)/U(\mathfrak{g})\, v$, pour tout $\lambda \in V(v)_{s_0}$;

C6 pour tout m Specm Π, il n'existe qu'un nombre fini de $\mathcal{G}$-orbites $\mathcal{O}$ incluses dans $V(v)s_0$ telles que $I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})/U(\mathfrak{g})v \supset m$.

III.2. Lemme. — *Soit* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ *un système régulier :*

(i) *soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{n}$ *et* w *un idéal premier* $\mathcal{G}$*-invariant de* $S(\mathfrak{m})$ *contenant* v *tel que* $U(\mathfrak{g})w/U(\mathfrak{g})v$ *ne contienne pas* u_0*; soit* τ (resp. τ') *l'application canonique de* $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v$ (resp. $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$) *sur* $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w$ (resp. $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w$). *Le système* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}, w, \tau(\Pi), \tau(u_0), \tau'(s_0))$ *est régulier;*

(ii) *on suppose qu'il existe* $w \in$ Specm $S(\mathfrak{n})$ *tel que* $w \supset v$ *et* $\bigcap_{\gamma \in \mathcal{G}} \gamma . w = v$*; on note* $\mathfrak{h}$ *l'algèbre* $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}\, w$, π, π' *les applications définies en* II.4. *Le système* $(\mathfrak{h}, \mathfrak{n}, w, \pi(\Pi), \pi u_0, \pi' s_0)$ *est régulier.*

(i) Les conditions (1), (2), sont claires. Supposons que $\tau'(s_0)=0$; le lemme II.11 où l'on remplace n par m s'applique à $(\mathfrak{g}, S(\mathfrak{m})v, u_0, s_0)$ et w; il montre que $U(\mathfrak{g})w/U(\mathfrak{g})v$ contient u_0, ce qui donne une contradiction d'où la condition C3. En outre, cela indique

$$\Phi \neq V(w)_{\tau'(s_0)} \subset V(v)_{s_0} \subset V'(v),$$

d'où :

(★) $$V(w)_{\tau'(s_0)} \subset V'(w);$$

c'est-à-dire la condition C4.

Comme pour tout $\lambda \in V'(w)$, on a $I_{\mathfrak{g}}(\lambda) \supset U(\mathfrak{g})\,w$, la condition C5 résulte de (★) et de C5 vérifiée par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ par passage au quotient. Soient $m' \in \operatorname{Specm} \tau(\Pi)$ et $\mathcal{O}$ une $\mathcal{G}$-orbite de $V(w)_{\tau(s_0)}$ telle que $I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})/U(\mathfrak{g})\,w \supset m'$.

Alors $I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})/U(\mathfrak{g})\,v \supset \tau^{-1}(m')$ et C6 résulte de C6 vérifiée par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$.

(ii) La condition C1 est claire, C2, C3 résultent de II.4 et (4), (5) de II.7. Notons $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}$, $V(w)$, $W(w)$ comme en II.2.

Soient $m \in \operatorname{Specm} \pi(\Pi)$ et $\mathcal{O}_1$ une $\mathcal{H}$-orbite de $W(w)_{\pi(s_0)}$ telle que $I_{\mathfrak{h}}(\mathcal{O}_1)/U(\mathfrak{h})\,w$ contienne m. Notons $\mathcal{O}$ la $\mathcal{G}$-orbite de $V(v)_{s_0}$ telle que l'ensemble des restrictions des éléments de $\mathcal{O} \cap V(w)$ à $\mathfrak{h}$ soit égal à $\mathcal{H}'.\mathcal{O}_1$. D'après II.7, $I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})/U(\mathfrak{g})\,v \supset \pi^{-1}(m)$ et la condition C6 est donc une conséquence de C6 vérifiée par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ et de ce que $\mathcal{H}'/\mathcal{H}$ est fini.

III.3. LEMME. — *Soit* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ *un système régulier :*

(i) *on a* $d^{\circ}\operatorname{tr} \operatorname{Fract} \Pi = d^{\circ}\operatorname{tr} \Delta$;

(ii) *soit* w *un idéal* $\mathfrak{g}$*-invariant de* $S(\mathfrak{n})$. *Si* $w \supsetneqq v$, *on a* $(U(\mathfrak{g})\,w/U(\mathfrak{g})\,v)^{\mathcal{G}} \neq 0$;

(iii) *soient* $\mathfrak{m}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{n}$ *et* $m \in \operatorname{Specm} \Pi$. *Il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers* w, $\mathcal{G}$*-invariants de* $S(\mathfrak{m})$ *tels qu'il existe une* $\mathcal{G}$*-orbite* $\mathcal{O}$ *incluse dans* $V(v)_{s_0}$ *vérifiant :*

$$I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})/U(\mathfrak{g})\,v \supset m,$$

$$I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}) \cap U(\mathfrak{m}) = w.$$

(i) Comme $d^0\operatorname{tr} \operatorname{Fract} \Pi$ est la dimension de la variété algébrique affine $\operatorname{Specm} \Pi$ et $d^0\operatorname{tr} \Delta$ celle du $\mathcal{G}$-quotient d'un ouvert, convenable, de $V(v)_{s_0}$, (*i*) résulte de C6.

(ii) Comme $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v$ est une k-algèbre de type fini intègre, il suffit de démontrer (ii) en supposant que $w \in \operatorname{Spec} S(\mathfrak{n})$. Distinguons alors les 2 cas suivants :

1^er^ *cas* : $V(w) \cap V(v)s_0 = \emptyset$; c'est-à-dire $s_0 \in S(\mathfrak{g})\,w/S(\mathfrak{g})\,v$.

En tenant compte des conditions C4 et C5, le lemme II.11 s'applique et montre que $U(\mathfrak{g})\,w/U(\mathfrak{g})\,v \ni u_0$.

2^e^ *cas* : $V(w) \cap V(v)_{s_0} \neq \emptyset$; c'est-à-dire $V'(w) = V'(v) \cap V(w)$.

Notons I l'application de $V(v)_{s_0}$ dans $\operatorname{Specm} \Pi$ définie par

$$\bar{I}(\lambda) = (I_{\mathfrak{g}}(\lambda)/U(\mathfrak{g})\,v) \cap \Pi.$$

D'après [4], 6.4.1, (ii) cette application est régulière; d'après les conditions C6 et C5, elle est équidimensionnelle : toute fibre est composée d'un nombre fini de $\mathscr{G}$-orbites de même dimension. En outre d'après I.3, (iii) appliqué à $\mathfrak{n}$ et w, on a

$$(\star) \qquad \bigcap\nolimits_{\lambda \in V(w)_{s_0}} I_{\mathfrak{g}}(\lambda) = U(\mathfrak{g})\, w.$$

(on identifie $U(\mathfrak{g})\,w$ à un idéal de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v$). Grâce à $(\star)$, on voit que l'image de $\overline{I} \mid V(w)_{s_0}$ est dense dans $\operatorname{Specm} \Pi/\Pi \cap U(\mathfrak{g})\,w$, et avec ce qui précède, $d^0 \operatorname{tr} (\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,w)^{\mathscr{G}} = d^0 \operatorname{tr} \operatorname{Fract} \Pi/\Pi \cap U(\mathfrak{g})\,w$.

Comme $w \supsetneq v$ et comme les $\mathscr{G}$-orbites dans $V(v)$ et $V(w)$ ont génériquement la même dimension, on a

$$d^0 \operatorname{tr} \Delta \geqslant d^0 \operatorname{tr} (\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,w)^{\mathscr{G}}.$$

Ainsi (ii) résulte de (i).

(iii) est une conséquence immédiate de C6.

III.4. LEMME ([4], 10.1, 10.2). — *Soient* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ *un système régulier tel que* $\mathfrak{n} \cap v$ *et* $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{t}$ *des sous k-espaces vectoriels supplémentaires de* $\mathfrak{g}$ *tels que :*

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}; \qquad \mathfrak{k} \supset \mathfrak{n}; \qquad [\mathfrak{k}, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t}; \qquad [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] = 0;$$

$\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ *est une algèbre de Heisenberg.*

Alors $\dim \mathfrak{n} = 1$. *On identifie* $\mathfrak{k}^*$ *à* $\mathfrak{t}^{\perp} \subset \mathfrak{g}^*$.

(1) *L'inclusion de* $\mathfrak{k}^*$ *dans* $\mathfrak{g}^*$ *induit un isomorphisme d'algèbres, noté* r', *de* $(\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,v)^{\mathscr{G}}$ *sur* $(\operatorname{Fract} S(\mathfrak{k})/S(\mathfrak{k})\,v)^{\mathfrak{k}}$.

(2) *Il existe un isomorphisme d'algèbres, noté* r, *de* $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v$ *sur* $(U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,w) \otimes_k A$, *où* A *est une algèbre de Weyl, tel que :*

(i) $(\mathfrak{k}, \mathfrak{n}, v, r\Pi, r(u_0), r'(s_0))$ *est un système régulier;*

(ii) *si* $\lambda \in V'(v) \cap \mathfrak{t}^{\perp}$, *la restriction de* λ *à* $\mathfrak{k}$ *admet une polarisation résoluble et*

$$r(I_{\mathfrak{g}}(\lambda)/U(\mathfrak{g})\,v) = (I_{\mathfrak{k}}(\lambda)/U(\mathfrak{k})\,v) \otimes_k A;$$

(iii) *r induit un isomorphisme encore noté r de* $(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v)^{\mathfrak{g}}$ *sur* $(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v)^{\mathfrak{k}}$, *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v)^{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & (\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\,v)^{\mathfrak{g}} \\
{\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r'} \\
(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v)^{\mathfrak{k}} & \xrightarrow{\ \varphi_{\mathfrak{k}}\ } & (\operatorname{Fract} S(\mathfrak{k})/S(\mathfrak{k})\,v)^{\mathfrak{k}}
\end{array}$$

(*où* $\varphi_{\mathfrak{k}}$ *est défini de manière analogue à* φ, *relativement à* $\mathfrak{k}$).

(1) On note E le groupe algébrique adjoint de $\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{n}$ et K celui de $\mathfrak{k}$. Soit $\lambda\in V(v)$; alors $\lambda\,|\,\mathfrak{n}\neq 0$ et donc $\mathfrak{t}.\lambda\,|\,\mathfrak{t}=\mathfrak{t}^*$; d'où si $\lambda\in V(v)\cap\mathfrak{t}^\perp$, on a $\mathfrak{t}.\lambda=\mathfrak{k}$. Il en résulte que si $\mathcal{O}$ est une $\mathcal{G}$-orbite contenue dans $V(v)$ et si $\mathcal{O}'=\mathcal{O}\cap\mathfrak{t}^\perp$, on a :

(a) $\mathcal{O}=E.\mathcal{O}'$;

(b) pour $\lambda\in\mathcal{O}'$, l'espace tangent à $\mathcal{O}$ en λ est $\mathfrak{g}.\lambda=\mathfrak{k}.\lambda+\mathfrak{k}^\perp$; l'espace tangent à $\mathcal{O}'$ en λ est donc $\mathfrak{k}.\lambda$.

Par suite $\mathcal{O}'$, qui est K-invariant, est formé de K-orbites ouvertes dans $\mathcal{O}'$; donc $\mathcal{O}'=K.\lambda$.

Réciproquement soit $\mathcal{O}'$ une K-orbite contenue dans $V(v)\cap\mathfrak{t}^\perp$. Alors $E.\mathcal{O}'$ est une $\mathcal{G}$-orbite et $\mathcal{O}'=E.\mathcal{O}'\cap\mathfrak{t}^\perp$; d'où (1).

Remarquons que par construction $r'\,(S\,(\mathfrak{g})/S\,(\mathfrak{g})\,v)^{\mathfrak{g}}\subset(S\,(\mathfrak{k})/S(\mathfrak{k})\,v)^{\mathfrak{k}}$.

(2) On garde les notations de la démonstration de (1) et suivant Duflo, on définit l'isomorphisme r comme en [4], 10.1.5. Comme A est centrale, on a $r(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\,v)^{\mathfrak{g}}\subset(U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v)^{\mathfrak{k}}$. Si $\lambda\in\mathcal{O}'$, $\mathfrak{k}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{n}$ pour $B(\lambda)$; donc $\mathfrak{k}$ est algébrique. Soit $\mathcal{K}$ le sous-groupe connexe de $\mathcal{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$; on note avec l'indice $\mathfrak{k}$ les sous-variétés de $\mathfrak{k}^*$. Alors (b) montre que $V_{\mathfrak{k}}'(v)\supset V_{\mathfrak{k}}(v)_{r'(s_0)}$. On en déduit quc ($\mathfrak{k}$, $\mathfrak{n}$, v, $r(\Pi)$, $r(u_0)$, $r'(s_0)$) vérifie C1, ..., C4. (On a utilisé la remarque suivant la démonstration de (1).)

Soit $\lambda\in V'\,(v)\cap\mathfrak{t}^\perp$. D'après ce qui précède et I.3, (iii), $\mathfrak{k}$ admet une polarisation résoluble. On choisit une polarisation $\mathfrak{p}$ de λ telle que $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{k}$ soit une polarisation de $\lambda\,|\,\mathfrak{k}$; on note R la représentation $\operatorname{ind}^{\sim}(\lambda\,|\,\mathfrak{k},\,\mathfrak{p}\cap\mathfrak{k}\uparrow\mathfrak{k})$ et aussi la représentation de $U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v$ qui s'en déduit; soit Q la représentation naturelle de A et $P=(R\otimes Q)\circ r$. Alors P est équivalente à $\operatorname{ind}^{\sim}(\lambda,\,\mathfrak{p}\uparrow\mathfrak{g})$ (après quotient par $U(\mathfrak{g})\,v$) ([4], 10.2.1 et 10.3.8 fin de la démonstration). Ceci implique $I_{\mathfrak{g}}(\lambda)/U(\mathfrak{g})\,v=r^{-1}\,(I_{\mathfrak{k}}(\lambda\,|\,\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v\otimes_k A)$, d'où (ii).

D'autre part comme

$$u_0-\langle s_0,\lambda\rangle\in I_{\mathfrak{g}}(\lambda)/U(\mathfrak{g})\,v \qquad\text{et}\qquad \langle s_0,\lambda\rangle=\langle r'(s_0),\lambda\,|\,\mathfrak{k}\rangle$$

on a

$$r(u_0)-\langle r'(s_0),\lambda\,|\,\mathfrak{k}\rangle\in I_{\mathfrak{k}}(\lambda\,|\,\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v\otimes_k A\cap U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v=I_{\mathfrak{k}}(\lambda\,|\,\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v.$$

D'où la condition C5.

Soit $m\in\operatorname{Specm} r\,(\Pi)$ et $\mathcal{O}'\subset V_{\mathfrak{k}}\,(v)_{r'(s_0)}$ telle que :

$m\subset I_{\mathfrak{k}}(\mathcal{O}')/U(\mathfrak{k})\,v$; alors $r^{-1}\,(m)\subset I_{\mathfrak{g}}\,(\mathcal{O})/U\,(\mathfrak{g})\,v$; C6 est donc une conséquence de C6 appliqué à $(\mathfrak{g},\mathfrak{n},v,\Pi,u_0,s_0)$. On a ainsi démontré (i) et (ii).

Comme A est centrale, le centre de (Fract $U\,(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v)\otimes_k A$ est (Fract $U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\,v)^{\mathfrak{k}}$ et comme A est simple ([10], 4.5) le centre de Fract ((Fract

$U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})v)\otimes_k A) = \mathrm{Fract}\,(U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})v\otimes_k A)$ est $(\mathrm{Fract}\ U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})v)^{\mathfrak{k}}$. Ceci montre la première partie de (iii) et la deuxième résulte des définitions de φ et $\varphi_{\mathfrak{k}}$ et de (ii).

III.5. Proposition. — (i) *soient* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ *un système régulier et* t *l'idéal de* $U(\mathfrak{g})\otimes_k \Delta$ *défini en* I.7. *L'algèbre* $U(\mathfrak{g})\otimes_k \Delta/t$ *est centrale simple;*

(ii) *si* $v=0$, $\mathfrak{g}$ *algébrique,* $Z(\mathfrak{g})=E(\mathfrak{g})$, *il existe un système régulier et donc l'idéal* t *calculé en* I.9 *est maximal.*

On pose

$$\text{hauteur } v = \dim \mathfrak{n} - d^0 \operatorname{tr} \mathrm{Fract}\, S(\mathfrak{n})/v.$$

D'après I.7, (i) (où l'on fait $q=0$) l'algèbre $U(\mathfrak{g}\otimes_k \overline{\Lambda})/(t\otimes_\Delta \overline{\Lambda})$ est primitive; comme d'après ([2], I.3.5, (c) :

$$(\mathrm{Fract}\ U(\mathfrak{g}\otimes_k \overline{\Lambda})/(t\otimes_\Delta \overline{\Lambda}))^{\mathfrak{g}} = (\mathrm{Fract}\ U(\mathfrak{g}\otimes_k \Delta)/t)^{\mathfrak{g}}\otimes_\Delta \overline{\Lambda},$$

on en déduit que $U(\mathfrak{g}\otimes_k \Delta)/t$ est centrale. En outre il est clair que l'on a l'équivalence

$$U(\mathfrak{g}\otimes_k \Delta)/t \text{ est simple} \Leftrightarrow U(\mathfrak{g}\otimes_k \Omega)/(t\otimes_\Delta \Omega) \text{ est simple,}$$

où Ω est un corps contenant Δ.

On démontre le lemme par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$ − hauteur v. Le cas où $\dim \mathfrak{g}$ = hauteur v est évident car alors $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}$ et $t=v$ est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})$. On remarque que $\mathfrak{g}/(v\cap[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}])$ est algébrique, ce qui permet de supposer $v\cap[\mathfrak{g}, \mathfrak{n}]=0$. Les 3 cas suivants sont alors exhaustifs :

1[er] *cas : il existe un idéal abélien* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{n}$ *tel que* $(\mathrm{Fract}\ S(\mathfrak{m})/S(\mathfrak{m})v)\neq k$. On démontre par l'absurde que $t\otimes_\Delta \Lambda$ est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g}\otimes_k \Lambda)$.

Soit b un idéal propre de $U(\mathfrak{g}\otimes_k \Lambda)$ contenant strictement $t\otimes_\Delta \Lambda$.

On remarque d'abord que : soient $M\subsetneq M'$ des idéaux de l'algèbre $U(\mathfrak{g}\otimes_k \Lambda)$ et soient $S\subset S'$ des sous-$S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$-algèbre de Λ, alors on a

$$(\star)\qquad (M\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k S))\otimes_S S' = M\cap(U(\mathfrak{g}\otimes_k S'));$$

en outre si S est une k-algèbre de type fini, $U(\mathfrak{g}\otimes_k S)$ est une algèbre noéthérienne (à gauche et à droite), filtrée, de gradué associé commutatif; ainsi le lemme de platitude générique (*cf.* [4], 2.6.3) s'applique à $M'\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k S)/M\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k S)$: c'est-à-dire il existe $y\in S-\{0\}$ tel que, $M'\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k S_y)/M\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k S_y)$ est un S_y-module libre, non nul.

On applique cette remarque d'une part à $M=t\bigotimes_{\Delta}\Lambda\subsetneq b=M'$ d'autre part à $M=b\subsetneq U(\mathfrak{g}\bigotimes_k \Lambda)=M'$ en prenant $S=S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$ dans les 2 cas; on en déduit qu'il existe $y\in S-\{0\}$ tel que les modules

$$(\star\star) \qquad U(\mathfrak{g}\bigotimes_k S_y)/b\cap U(\mathfrak{g}\bigotimes_k S_y)$$

et

$$(b\cap(U(\mathfrak{g}\bigotimes_k S_y))/((t\bigotimes_{\Delta}\Lambda)\cap(U(\mathfrak{g}\bigotimes_k S_y)),$$

soient libres et non nuls. On choisit alors une S_y-algèbre, notée Ξ, vérifiant les conditions de I.4.

Soient $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ comme en I, 5 et I, 8; soit w un idéal premier $\mathscr{G}$-invariant de $S(\mathfrak{m})$ contenant strictement $S(\mathfrak{m})v$ et ne contenant aucun élément de $\mathscr{S}\cup\mathscr{T}\cup\{s_0\}$. Soit $q\in\operatorname{Spec}\Xi$ tel que

$$q\cap(\mathscr{S}\cup\mathscr{T}\cup\{s_0\})=\emptyset \qquad \text{et} \qquad q\cap S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v=S(\mathfrak{g})w/S(\mathfrak{g})v.$$

D'après I.5, (iv) et I.3, (iii), on a

$$U(\mathfrak{g})w=\operatorname{Ker}\rho(q)\cap U(\mathfrak{g});$$

d'où :

$$\Gamma(q)=(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w)^{\mathscr{G}},$$

$$\Delta(q)=(\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w)^{\mathscr{G}}.$$

On note $\overline{\Lambda}'$ une clôture algébrique de Fract Ξ/q; soient μ' le prolongement $\overline{\Lambda}'$-linéaire de l'application naturelle $\mathfrak{g}\to S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w$, $I(\mu')$ l'idéal primitif déterminé par μ' (I.4, (*d*) prouve que μ' admet une polarisation résoluble $\mathfrak{p}'$) et $\varphi(q)$ l'homomorphisme de $\Gamma(q)$ dans $\Delta(q)$ déterminé au lemme I.6; d'après la définition de Ker $\rho(q)$ (I.5), on a

$$(1) \qquad \operatorname{Ker}\rho(q)\bigotimes_{\Xi/q}\overline{\Lambda}'=\operatorname{Ker}\operatorname{ind}^{\sim}(\mu',\mathfrak{p}'\bigotimes_{\Xi/q}\overline{\Lambda}'\uparrow\mathfrak{g})=I(\mu').$$

On note φ' et t' le morphisme et l'idéal génériques associés à w (au lieu de v) en I.6 *et* I.7 *(où ils sont notés φ et t). Montrons que $\varphi'=\varphi(q)$ et que $t'=t(q)$.*

Soit $z\in(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w)^{\mathscr{G}}$; alors (*cf.* I.6) $\varphi'(z)$ est l'image de z dans Fract $U(\mathfrak{g}\bigotimes_k\overline{\Lambda}')/I(\mu')$, c'est-à-dire $\varphi(q)(z)$ d'après (1) et I.6. D'où l'égalité $\varphi'=\varphi(q)$; l'égalité $t'=t(q)$ résulte alors des définitions (*cf.* I.7). Soient τ,τ' les applications naturelles de $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v$ sur $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})w$ et de $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v$ sur $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w$; d'après III.2, (i), le système $(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}, w, \tau(\pi), \tau(u_0), \tau'(s_0))$ est régulier.

On applique l'hypothèse de récurrence à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}, w, \tau(\Pi), \tau(u_0), \tau(s_0))$ qui indique que $t(q)\bigotimes_{\Delta(q)}\Lambda'$ est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g}\bigotimes_k\Lambda')$ où $\Lambda'=\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})w$.

Établissons alors une contradiction

$$S_p=(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v)_p; \qquad b_p=b\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k S_p)$$

et

$$t_p=(t\otimes_\Delta \Lambda)\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k S_p).$$

D'après (★) et (★★), on a

(2) *$U(\mathfrak{g}\otimes_k S_p)/b_p$ et b_p/t_p sont des S_p-modules libres et non nuls.*

Or, d'après I.8 dont on adopte les notations, on a

$$t'(q)\otimes_{\Delta'(q)} S_p=(t\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k \Delta'(q)))\otimes_{\Delta'(q)} S_p\subset(t\otimes_\Delta \Lambda)\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k S_p)=t_p;$$

et

$$t(q)\otimes_{\Delta(q)} \Lambda'=t'(q)\otimes_{\Delta'(q)} \Lambda'=t'(q)\otimes_{\Delta'(q)} S_p\otimes_{S_p} \Lambda'\subset t_p\otimes_{S_p} \Lambda'.$$

Avec (2), où on tensorise $\otimes_{S_p}\Lambda'$, on en déduit les inclusions suivantes :

$$t(q)\otimes_{\Delta(q)} \Lambda'\subset t_p\otimes_{S_p} \Lambda'\subsetneq b_p\otimes_{S_p} \Lambda'\subsetneq U(\mathfrak{g}\otimes_k \Lambda'),$$

qui donnent la contradiction.

2^e^ *cas : Il existe $w'\in$ Specm $S(\mathfrak{n})$ tel que $v=\bigcap_{\gamma\in\mathscr{G}}\gamma.w'$.*

Soient w, $\mathfrak{h}$ comme en II.2 et 3; on garde les notations de ce chapitre. D'après III.2, (ii), $(\mathfrak{h}, \mathfrak{n}, w, \pi(\Pi), \pi(u_0), \pi'(s_0))$ est un système régulier et d'après III.3, (i), on a

$$d^0 \operatorname{tr} \operatorname{Fract}(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v)^{\mathscr{G}}=d^0 \operatorname{tr}(\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v)^{\mathscr{G}}$$

ce qui permet d'appliquer II.

Soit b un idéal premier de $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Theta$, contenant strictement $t\otimes_\Delta\Theta$. Supposons d'abord que $b\cap U(\mathfrak{n}\otimes_k\Theta)=v\otimes_k\Theta$. Alors d'après le lemme II.10, (i) (dont nous utilisons les notations), il existe un idéal premier τ de $U(\mathfrak{h})\otimes_k\Theta$ contenant t_σ(où $\sigma\in E$) tel que :

$$b=\operatorname{ind}^{\sim}(c, \mathfrak{h}\otimes_k\Theta\uparrow\mathfrak{g}).$$

Or l'idéal t_σ, d'après II.10, (i), est comme l'idéal $t(\mathfrak{h})\otimes_{\Delta(\mathfrak{h})}\Theta$ maximal (hypothèse de récurrence). Cela entraîne que $c=t_\sigma$; d'où, d'après II.10, (iv), on a, ce qui donne une contradiction dans ce cas, $b=t\otimes_\Delta\Theta$.

Supposons maintenant que $b\cap U(\mathfrak{n})\otimes_k\Theta$ contienne strictement $v\otimes_k\Theta$. D'après ([6], 8) il existe un unique idéal semi-premier $\hat{v}$ de $U(\mathfrak{n})\otimes_k\Theta$, $\mathscr{G}$-invariant, vérifiant : $\hat{v}\supsetneq v\otimes_k\Theta$ et si $p\in\operatorname{Spec} U(\mathfrak{n})\otimes_k\Theta$ contient strictement $v\otimes_k\Theta$, alors $p\supset\hat{v}$.

Un élément du groupe de Galois de Θ/k induit (*cf.* introduction) un automorphisme de $U(\mathfrak{n}\otimes_k\Theta)$, commutant à l'action de $\mathcal{G}$, laissant stable $v\otimes_k\Theta$, donc aussi $\hat{v}$. Ceci montre l'existence de $v'\in\operatorname{Spec} S(\mathfrak{n})$, tel que $\hat{v}=v'\otimes_k\Theta$.

Alors le lemme I.V.2, (ii), indique l'existence de $u\in(U(\mathfrak{g})v'/U(\mathfrak{g})v)^{\mathfrak{g}}-\{0\}$; or l'idéal $t/U(\mathfrak{g})v\otimes_k\Theta$ contient l'élément $u\otimes_k 1_\Theta-1\otimes_k\varphi(u)$ (I.7) et b contient alors $\varphi(u)$ et n'est pas un idéal propre de $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Theta$, ce qui est absurde.

3^e *cas : On suppose que* $v\in\operatorname{Specm} S(\mathfrak{n})$, *que* $v\cap[\mathfrak{n},\mathfrak{g}]=0$ *et qu'il n'existe pas d'idéal abélien de* $\mathfrak{g}$ *contenant strictement* $\mathfrak{n}$.

Le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$ est nul, abélien ou une algèbre de Heisenberg; examinons ces cas successivement :

1° $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie semi-simple et* $\mathfrak{n}=v=0$.

Ici $\Delta=(\operatorname{Fract} S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$ et φ est l'homomorphisme de Duflo (I.9) de $\operatorname{Fract} Z(\mathfrak{g})$ sur $\operatorname{Fract}(S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}})$; l'idéal t est engendré par les éléments $z\otimes 1_\Delta-1\otimes\varphi(z)$ où $z\in Z(\mathfrak{g})$; comme pour une partie dense $\mathcal{F}$ de $\operatorname{Specm} Z(\mathfrak{g})$, l'idéal $(t\cap U(\mathfrak{g}\otimes_k Z(\mathfrak{g}))\otimes_{Z(\mathfrak{g})}(Z(\mathfrak{g})/m)$ où $m\in\mathcal{F}$ est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})$, cela montre que t est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta$.

2° $\mathfrak{g}$ *est le produit direct d'une algèbre de Lie semi-simple* $\mathfrak{k}$ *et de l'idéal abélien* $\mathfrak{n}$.

Ici, $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v=U(\mathfrak{k})$ et l'application naturelle de $\mathfrak{g}$ dans $S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})v=S(\mathfrak{k})$ restreinte à $\mathfrak{k}$ est l'application naturelle de $\mathfrak{k}$ dans $S(\mathfrak{k})$; on note $\operatorname{Ker}\rho(\mathfrak{k})$ l'idéal primitif de $U(\mathfrak{k})\otimes_k\bar{\Lambda}$ qu'elle détermine, $\varphi(\mathfrak{k})$ et $t(\mathfrak{k})$ les objets qui s'en déduisent (chapitre I); il est clair que t est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})\otimes_k\Delta$ si et seulement si $t(\mathfrak{k})$ est un idéal maximal de $U(\mathfrak{k})\otimes_k\Delta$; et ce cas vient d'être traité.

3° $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{t}$ où $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{t}$ vérifient les hypothèses du lemme III.4, et $\mathfrak{t}\neq 0$. On adopte les notations de ce lemme; et on définit $t(\mathfrak{k})$ de manière analogue à t mais relativement à $(\mathfrak{k},\mathfrak{n},v)$. Grâce à r (resp. r'), on identifie $(\operatorname{Fract} U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})v)^{\mathfrak{k}}$ (resp. $(\operatorname{Fract} S(\mathfrak{k})/S(\mathfrak{k})v)^{\mathfrak{k}}$) à Γ (resp. Δ); d'après III.4, (iii) et les définitions de $t(\mathfrak{k})$ et de t, on a les suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (t(\mathfrak{k})\otimes_\Delta\bar{\Delta}/U(\mathfrak{k})v\otimes_k\bar{\Delta})\otimes_k A \arrow[r] & U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})v\otimes_k\bar{\Delta}\otimes_k A \arrow[r] & \operatorname{Fract} U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})v\otimes_{\Gamma,\varphi_{\mathfrak{k}}}\bar{\Delta}\otimes_k \\
0 \arrow[r] & t\otimes_\Delta\bar{\Delta}/U(\mathfrak{g})v\otimes_k\bar{\Delta} \arrow[r] & U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v\otimes_k\bar{\Delta} \arrow[r] \arrow[u, "\simeq"] & \operatorname{Fract} U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v\otimes_{\Gamma,\varphi}\bar{\Delta} \arrow[u, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

d'où :

$$U(\mathfrak{g})\otimes_k\bar{\Delta}/t\otimes_\Delta\bar{\Delta}=(U(\mathfrak{k})\otimes_k\bar{\Delta}/t(\mathfrak{k})\otimes_\Delta\bar{\Delta})\otimes_k A.$$

Le lemme résulte alors dans ce cas de l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{k}$.

(ii) On note φ l'isomorphisme de Duflo (I.8) de $Z(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. D'après ([2], 16.15, (*d*), il existe un ouvert de $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}$-invariant, admettant un quotient géométrique; grâce à [5], 2.2, en restreignant éventuellement cet ouvert, on suppose que cet ouvert est défini par la non-annulation d'un élément s de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}-\{0\}$. Alors $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}_s$ est une k-algèbre de type fini; soient S un ensemble fini d'éléments de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ tel que S et s^{-1} engendrent $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}_s$ et Π' la sous-k-algèbre engendrée par S et s; comme tout idéal maximal m de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ ne contenant pas s engendre un idéal maximal de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}_s$, m définit une unique $\mathcal{G}$-orbite; il est alors clair que $(\mathfrak{g}, 0, 0, \varphi^{-1}\Pi', \varphi^{-1}s, s)$ est un système régulier et (ii) résulte donc de (i).

III.6. Théorème. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une k-algèbre de Lie. On note* $E(\mathfrak{g})$ *l'ensemble des semi-invariants de* $U(\mathfrak{g})$. *L'algèbre* $U(\mathfrak{g})_{E(\mathfrak{g})-\{0\}}$ *est centrale simple. Autrement dit, tout idéal bilatère non nul de* $U(\mathfrak{g})$ *contient un semi-invariant non nul.*

Supposons d'abord que $\mathfrak{g}$ est algébrique et que $E(\mathfrak{g})=Z(\mathfrak{g})$. D'après I.9, l'idéal t est engendré par l'ensemble des éléments $z\otimes_k 1-1\otimes_k\varphi(z)$, où $z\in Z(\mathfrak{g})$. Donc III.5 démontre le théorème dans ce cas.

Notons $E'(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$ engendrée par $E(\mathfrak{g})$; supposons que $\mathfrak{g}$ est algébrique et montrons par récurrence sur $\dim\mathfrak{g}$ que $U(\mathfrak{g})_{E'(\mathfrak{g})-\{0\}}$ est simple. D'après ce qui précède, il reste à examiner le cas où il existe un semi-invariant z de poids $\chi\neq 1$. On note $\mathfrak{k}=\operatorname{Ker}\chi$ et X un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$-$\mathfrak{k}$. Comme $\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} X$ opère de façon localement finie dans $E'(\mathfrak{k})$, $E'(\mathfrak{g})=E'(\mathfrak{k})$; de plus $\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} X$ n'est pas une dérivation intérieure car z est central dans $U(\mathfrak{k})$ et $\operatorname{ad}_{\mathfrak{k}} X(z)\neq 0$. Alors d'après l'hypothèse de récurrence $U(\mathfrak{k})_{E'(\mathfrak{k})-\{0\}}$ est simple et l'assertion résulte de [6], 6 et de l'égalité

$$U(\mathfrak{g})_{E'(\mathfrak{g})-\{0\}}=U(\mathfrak{k})_{E'(\mathfrak{g})-\{0\}}[X].$$

Soit a un idéal non nul de $U(\mathfrak{g})$ et e un élément non nul de $E'(\mathfrak{g})$ appartenant à a. D'après ce qu'on vient de voir, il en existe; soit L un ensemble fini de caractères distincts de $\mathfrak{g}$ tel que e soit somme de semi-invariants de poids les éléments de L. Si card $L\neq 1$, on choisit $\chi\in L$ et $Y\in\mathfrak{g}$ tels que $\chi(y)=1$ et $\chi'(y)\neq 1$ pour $\chi'\in L-\{\chi\}$; $e-\operatorname{ad}Y(e)$ appartient à $a-\{0\}$ et est somme de semi-invariants dont les poids appartiennent à $L-\{\chi\}$; de proche en proche, cela montre que a contient un semi-invariant non nul. D'où le théorème dans le cas où $\mathfrak{g}$ est algébrique.

Supprimons cette hypothèse et notons $\mathfrak{k}$ une enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$. Soient $X_1, \ldots, X_r$ des éléments de $\mathfrak{k}$ dont les images dans $\mathfrak{k}/\mathfrak{g}$ forment une base de cet espace vectoriel et $a \neq \{0\}$ un idéal de $U(\mathfrak{g})$. Alors $U(\mathfrak{k})a$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{k})$, non nul, qui contient donc un semi-invariant z de $U(\mathfrak{k})$, non nul, tel que

$$z = \sum_{n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}} X_1^{n_1} \ldots X_r^{n_r} u_{n_1 \ldots n_r} \qquad \text{où} \quad u_{n_1 \ldots n_r} \in a.$$

Soient $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ tels que $u_{n_1 \ldots n_r} \neq 0$ et $n_1 + \ldots + n_r$ soit maximal pour cette propriété; comme $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{k}$, $u_{n_1 \ldots n_r} \in E(\mathfrak{g})$.

III.7. Théorème. — *Si l'ensemble des semi-invariants de $U(\mathfrak{g})$ est le centre $Z(\mathfrak{g})$, il existe une suite (z_i), $i \in \mathbb{N}$, d'éléments non nuls de $Z(\mathfrak{g})$, telle que si l'idéal primitif a de $U(\mathfrak{g})$ ne contient aucun z_i, alors :*

— *a est un idéal induit de Duflo;*
— *a est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})$;*
— *$a = (a \cap Z(\mathfrak{g}))\, U(\mathfrak{g})$.*

On fixe une base de $\mathfrak{g}$; on note k' le corps dénombrable engendré par les constantes de structure de cette base et $\mathfrak{g}'$ le k'-espace vectoriel qu'elle engendre; $\mathfrak{g}'$ est une sous-k'-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$; soit Z' le centre de $U(\mathfrak{g}')$; Z' est dénombrable et

$$U(\mathfrak{g})_{Z(\mathfrak{g}) - \{0\}} = U(\mathfrak{g}')_{Z' - \{0\}} \bigotimes\nolimits_{\mathrm{Fract}\, Z'} \mathrm{Fract}\, Z(\mathfrak{g}).$$

Comme d'après III.5, $U(\mathfrak{g})_{Z(\mathfrak{g}) - \{0\}}$ est une algèbre simple, il en est de même de $U(\mathfrak{g}')_{Z' - \{0\}}$. Soit $m \in \mathrm{Specm}\, Z(\mathfrak{g})$, tel que $m \cap Z' = 0$.

D'après [1], 4.5, (*c*) (démonstration), cela entraîne que $m\, U(\mathfrak{g})$ est un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})$. Soit φ et s comme dans la démonstration de III.5, (ii), $a \in \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{g})$ tel que $a \cap Z' = 0$ et $a \not\ni \varphi^{-1}(s)$; il existe $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ annulant $\varphi(a \cap Z(\mathfrak{g}))$; λ n'annule pas s (car $(a \cap Z(\mathfrak{g})$ est un idéal maximal de $S(\mathfrak{g})$ ne contenant pas s). Donc $I(\lambda)$ est défini et contient $a \cap Z(\mathfrak{g})$. Comme on vient de voir que $a \cap Z(\mathfrak{g})$ engendre un idéal maximal de $U(\mathfrak{g})$, on a les égalités

$$a = (a \cap Z(\mathfrak{g}))\, U(\mathfrak{g}) = I(\lambda).$$

D'où le théorème en prenant comme suite Z' et $\varphi^{-1}(s)$.

III.8. Lemme. — *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ un système régulier et $a \in \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{g})$ contenant $U(\mathfrak{g})v$ et ne contenant pas u_0; alors il existe $\lambda \in V(v)_{s_0}$ tel que $a \supset I(\lambda)$.*

Soit a comme dans l'énoncé du lemme. On raisonne par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$-hauteur v, comme dans III.5, (i); après un éventuel passage au quotient, on suppose que $v \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{n}] = 0$.

1[er] *cas :* Il existe un idéal abélien $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{n}$, tel que $a \cap U(\mathfrak{m}) \supsetneqq U(\mathfrak{m}) v$. On pose $w = a \cap U(\mathfrak{m})$.

D'après III.2, (i), dont on adopte les notations, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}, w, \tau\Pi, \tau u_0, \tau' s_0)$ est un système régulier. L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe $\lambda \in V(w)_{\tau'(s_0)}$ vérifiant $a \supset I_{\mathfrak{g}}(\lambda)$. Comme $V(w)_{\tau'(s_0)} \subset V(v)_{s_0}$, le lemme est démontré dans ce cas.

2[e] *cas :* Il existe $w \in \operatorname{Specm} S(\mathfrak{n})$, $w \supsetneqq v$, tel que $\bigcap_{\gamma \in \mathscr{G}} \gamma . w = v$. On pose $\mathfrak{h} = \operatorname{Stab}_{\mathfrak{g}} w$. D'après [7], théorème A, il existe $b \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{h})$ tel que

$$U(\mathfrak{n}) \cap b = w;$$
$$\operatorname{ind}^{\sim}(b, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g}) = a.$$

On reprend les notations de II.4. On remarque que b ne contient pas πu_0, car sinon, d'après la définition de π et la $\mathfrak{g}$-invariance de u_0, on aurait

$$u_0 \in U(\mathfrak{g}) \eta\, b / U(\mathfrak{g}) v;$$
$$u_0 \in \bigcap_{\gamma \in \mathscr{G}} \gamma . U(\mathfrak{g}) \eta\, b / U(\mathfrak{g}) v = a / U(\mathfrak{g}) v.$$

Le lemme III.2, (ii), montre qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à b : c'est-à-dire, il existe $\lambda' \in W(w)_{\pi'(s_0)}$ tel que $b \supset I_{\mathfrak{h}}(\lambda')$. Soit $\lambda \in V(v)_{s_0}$ tel que $\lambda \mid \mathfrak{h} = \lambda'$; d'après II.7, (ii) (*a*), et la définition de b, on a

$$\operatorname{ind}^{\sim}(I_{\mathfrak{h}}(\lambda'), \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g}) = I_{\mathfrak{g}}(\lambda),$$
$$a \supset I_{\mathfrak{g}}(\lambda).$$

D'où le lemme dans ce cas.

3[e] *cas :* $v \in \operatorname{Specm} U(\mathfrak{n})$ et il n'existe pas d'idéal abélien $\mathfrak{m}$ contenant strictement $\mathfrak{n}$.

Si $\mathfrak{g}$ est le produit direct d'une algèbre de Lie semi-simple et de $\mathfrak{n}$, le lemme est connu ([4], 8.4.3).

Sinon il existe $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{t}$ comme dans le lemme III.4 dont on adopte les notations. D'après [4], 10.1.8, (ii), il existe $b \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{k})$ contenant $U(\mathfrak{k}) v$ tel que :

$$r(a / U(\mathfrak{g}) v) = b / U(\mathfrak{k}) v \bigotimes_k A;$$

nécessairement $r(u_0) \notin b$ et d'après III.4, (i) on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à b; le lemme résulte dans ce cas de III.4, (ii).

III.9. Lemme. — *Soient* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{n}, v, \Pi, u_0, s_0)$ *un système régulier. Pour tout* $\lambda \in V(v)_{s_0}$, *l'ensemble des idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g})$ *contenant* $I_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ *est fini.*

On fixe $\lambda \in V(v)_{s_0}$ et on raisonne par récurrence sur dim g-hauteur v (*cf.* III.8).

1er *cas :* Il existe un idéal abélien $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{n}$, tel que $I(\lambda) \cap U(\mathfrak{m})$ contienne strictement $U(\mathfrak{m})v$. On note $w = I(\lambda) \cap U(\mathfrak{m})$.

D'après III.2, (i), l'hypothèse de récurrence s'applique à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}, w, \tau(\Pi), \tau(u_0), \tau'(s_0))$ et λ qui appartient, ici, à $V(w)_{\tau'(s_0)}$.

Cela donne immédiatement le résultat.

2^e *cas :* Il existe un idéal maximal w de $S(\mathfrak{n})$, contenant strictement v et tel que $\bigcap_{\gamma \in \mathscr{G}} \gamma . w = v$.

On note $\mathfrak{h} = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}\, w$ et $m = \Pi \cap I_{\mathfrak{g}}(\lambda)/U(\mathfrak{g})v$. Comme m est un idéal maximal de Π ne contenant pas u_0, un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ contenant $I_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ ne contient pas u_0. Soit J l'ensemble des idéaux de $U(\mathfrak{n})$ tels que pour $w' \in J$ il existe $a \in \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{g})$ vérifiant :

$$a \cap U(\mathfrak{n}) = w';$$

$$a \supset v;$$

$$a/U(\mathfrak{g})v \supset m.$$

D'après III.8 et III.3, (ii), J est un ensemble fini. On répartit l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ contenant $I_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ en sous-ensemble $P(w')$, où $w' \in J$, tels que si $a \in P(w')$, on ait $a \cap U(\mathfrak{n}) = w'$. Montrons que chaque $P(w')$ a un cardinal fini, ce qui donnera le résultat cherché.

1° Supposons que $w' = v$; d'après III.2, (ii), la condition C6 vaut pour $\mathfrak{h}$ et $\pi(\Pi)$: notons O l'ensemble fini des $\mathscr{H}$-orbites tel que si $\mathcal{O} \in O$, $I_{\mathfrak{h}}(\mathcal{O}) \supset U(\mathfrak{h})w$ et $I_{\mathfrak{h}}(\mathcal{O}) \supset \pi(m)$. Pour tout $\mathcal{O} \in O$, on note $Q(\mathcal{O})$ l'ensemble des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{h})$ contenant $I_{\mathfrak{h}}(\mathcal{O})$. D'après [7], théorème A, comme a appartient à $P(v)$, il existe $b \in \mathrm{Prim}\, U(\mathfrak{h})$ tel que

$$b \cap U(\mathfrak{n}) = w;$$

$$\mathrm{ind}^{\sim}(b, \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g}) = a.$$

Comme $(a + U(\mathfrak{g})w)/U(\mathfrak{g})w$ contient $\eta\pi(m)$, b contient $\pi(m)$. Et comme $\pi(\Pi)u_0 + \pi(m) = \pi(\Pi)$, $\pi(u_0)$ n'appartient pas à b; donc d'après III.8, il existe une $\mathscr{H}$-orbite $\mathcal{O}$ telle que $b \supset I_{\mathfrak{h}}(\mathcal{O})$; or

$$I_{\mathfrak{h}}(\mathcal{O})/U(\mathfrak{h})w \cap \pi(\Pi) \in \mathrm{Specm}\, \pi(\Pi).$$

On en déduit que $\mathcal{O} \in O$ et donc que $b \in Q(\mathcal{O})$. L'hypothèse de récurrence appliquée à chaque $Q(\mathcal{O})$ montre que le cardinal de $P(v)$ est fini.

2° Supposons que $w' \neq v$; fixons w'; le lemme III.2, (i), appliqué à w' (au lieu de w) montre que C6 vaut pour $\tau(m)$ qui est un élément de Specm $\tau(\Pi)$; notons O l'ensemble fini des $\mathcal{G}$-orbites de $V(w')$ telles que si $\mathcal{O} \in O$:

$$I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O}) \supset U(\mathfrak{g})\, w';$$
$$I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})/U(\mathfrak{g})\, w' \supset \tau(m).$$

Pour tout élément a de $P(w')$, il existe au moins un élément $\mathcal{O}$ de O tel que $a \supset I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})$ (*cf.* III.8). La finitude du cardinal de $P(w')$ résulte donc de l'hypothèse de récurrence appliquée à chaque $\mathcal{O} \in O$.

3ᵉ *cas* : Le lemme étant connu pour $\mathfrak{g}$ semi-simple, il est donc facile pour le produit direct d'une algèbre de Lie semi-simple avec un idéal abélien. Pour le cas restant $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{t}$, la correspondance entre Prim $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\, v$ et Prim $U(\mathfrak{k})/U(\mathfrak{k})\, v$ donnée en [4], 10.2.1 (et III.4, (ii), qui prouve qu'elle est compatible avec l'induction de Duflo), permet de conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{k}$ (*cf.* la démonstration de III.5, 3ᵉ cas).

III.10. THÉORÈME. — *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *est algébrique et que le radical de* $\mathfrak{g}$ *est nilpotent. Il existe* $u \in Z(\mathfrak{g})$ *tel que si* $m \in \operatorname{Specm} Z(\mathfrak{g})$ *et* $u \notin m$, *il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux primitifs de* $U(\mathfrak{g})$ *contenant* m*; ils contiennent tous la racine de l'idéal* $m\,U(\mathfrak{g})$*; cette racine est un idéal induit de Duflo.*

On choisit un système régulier comme en III.5, (ii), démonstration (dont on adopte les notations). Soit $m \in \operatorname{Specm} Z(\mathfrak{g})$ ne contenant pas $\varphi^{-1}(s)$; un idéal primitif a de $U(\mathfrak{g})$ contenant m ne contient pas $\varphi^{-1}(s)$; il existe une unique orbite $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{g}^*$ (d'après le choix de s) telle que $I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})$ soit défini et contienne m; d'après III.8, a contient $I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})$. Comme la racine de $m\,U(\mathfrak{g})$ est l'intersection d'idéaux primitifs contenant m, cela montre qu'elle est égale à $I_{\mathfrak{g}}(\mathcal{O})$. Le reste de la proposition résulte alors de III.9.

III.11. LEMME (hypothèses de III.10). — *Il existe* $s \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} - \{0\}$ *tel que si* U *est une sous-variété irréductible* $\mathfrak{g}$*-invariante de l'ouvert affine de* $\mathfrak{g}^*$ *défini par* s, *on a*

(i) $\lambda \in U \Leftrightarrow \langle \lambda, s' \rangle = 0$ *si* $\langle \mu, s' \rangle = 0$, $\forall \mu \in U$, *où* $s' \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, $\langle \lambda, s \rangle \neq 0$;

(ii) $\lambda \in U \Leftrightarrow \lambda$ *est un élément régulier de* $\mathfrak{g}^*$;

(iii) $\bigcap_{\lambda \in U} I_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ *est un idéal complètement premier de* $U(\mathfrak{g})$.

Soient x et Ξ comme dans 1.4, où l'on fait $\mathfrak{n} = v = 0$. D'après ([5], 2.2), il existe $s \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} - \{0\}$ et appartenant au plus petit idéal $\mathfrak{g}$-invariant non nul contenant x, de $S(\mathfrak{g})$. En multipliant éventuellement s par un élément de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} - \{0\}$, on suppose que l'ouvert affine de g^*, défini par s, possède un quotient géométrique pour l'action de $\mathscr{G}$; d'où (i). Soient U comme dans l'énoncé du lemme et p l'idéal premier de $S(\mathfrak{g})$ annulateur des éléments de U; comme $s \notin p$, p ne contient pas x et il existe $q \in \operatorname{Spec} \Xi$, tel que $q \cap S(\mathfrak{g}) = p$. Pour tout idéal $n \in \operatorname{Specm} S(\mathfrak{g})/p$, ne contenant pas x, il existe $n \in \operatorname{Specm} \Xi/q$, tel que $m \cap S(\mathfrak{g})/p = n$. Le lemme est alors une conséquence de 1.5, (iv) et (vi), et de la continuité de $I_{\mathfrak{g}}$.

III.12. THÉORÈME. — *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *est algébrique et que son radical est nilpotent. Il existe* $z \in Z(\mathfrak{g}) - \{0\}$ *et une suite dénombrable* (z_i) (où $i \in \mathbb{N}$), *contenant* z, *tels que :*

(i) *tout idéal premier de* $Z(\mathfrak{g})$ *ne contenant pas* z *engendre dans* $U(\mathfrak{g})$ *un idéal dont la racine est un idéal complètement premier, qui, dans le localisé* $U(\mathfrak{g})_z$ *est engendré par son intersection avec* $Z(\mathfrak{g})$;

(ii) *tout idéal premier de* $U(\mathfrak{g})$ *ne contenant aucun* z_i *est un idéal complètement premier, qui, dans le localisé* $U(\mathfrak{g})_z$ *est engendré par son intersection avec* $Z(\mathfrak{g})_z$.

On note φ l'isomorphisme de Duflo de $Z(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. On choisit $u \in Z(\mathfrak{g}) - \{0\}$ (resp. $s \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} - \{0\}$) satisfaisant aux conditions de III.10 (resp. III.11) et on note $z' = u\varphi^{-1}(s)$. On applique le lemme de platitude générique au $Z(\mathfrak{g})$-module $U(\mathfrak{g})$: ([4], 2.6.3 : on remarque que la démonstration n'utilise que la commutativité de l'algèbre graduée associée à B); on remplace alors M et B par $U(\mathfrak{g})$ et A par $Z(\mathfrak{g})$; il existe donc $z'' \in Z(\mathfrak{g}) - \{0\}$, tel que $U(\mathfrak{g})_{z''}$ soit un $Z(\mathfrak{g})_{z''}$-module libre. On pose $z = z'z''$; on choisit une suite dénombrable (z_i) (où $i \in \mathbb{N}$) d'éléments de $Z(\mathfrak{g}) - \{0\}$, contenant z et vérifiant les conditions de III.7.

(i) Soient j un idéal premier de $Z(\mathfrak{g})$ ne contenant pas z et $\hat{j}$ la racine de l'idéal de $U(\mathfrak{g})$ engendré par j. D'après III.11, (i), $\varphi(j)$ détermine une sous-variété irréductible U de l'ouvert affine de $\mathfrak{g}^*$ défini par $\varphi(z)$. Soit $j' = \bigcap_{\lambda \in U} I(\lambda)$. Comme j' contient $jU(\mathfrak{g})$ et comme j' est un idéal complètement premier d'après III.11, (iii), $\hat{j}$ est inclus dans j' et ne contient donc pas z. Comme $\hat{j}$ est un idéal semi-premier, il existe une partie W de $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$, formée d'idéaux ne contenant pas z et telle que

$$\hat{j}_z = \bigcap_{a \in W} a_z.$$

Soit $a \in W$; d'après III.10, il existe $\lambda \in U$ tel que $a \supset I(\lambda)$; donc $\hat{j}_z$ contient j'_z. Ceci montre que $\hat{j}_z = j'_z$, d'où (i).

(ii) Soient a un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$ ne contenant aucun z_i et $j = a \cap Z(\mathfrak{g})$. Alors j vérifie la condition de (i) et on adopte les notations introduites dans la démonstration (i). En outre, on pose

$$U^* = \{\lambda \in U \mid \langle \lambda, \varphi(z_i) \rangle \neq 0 \text{ pour tout } i\};$$

$$j^* = \bigcap_{\lambda \in U^*} I(\lambda).$$

D'après III.7, si $b \in \operatorname{Prim} U(\mathfrak{g})$ contient a et ne contient aucun z_i, $a = I(\lambda)$ avec $\lambda \in U^*$; d'où $a \subset j^*$. Comme $I(\lambda)$ est un idéal premier, il est immédiat que $j_z^* = \bigcap_{\lambda \in U^*} I(\lambda)_z$. De plus, d'après III.7, $I(\lambda)_z$, si $\lambda \in U$, est engendré par $I(\lambda)_z \cap Z(\mathfrak{g})_z$; comme $U(\mathfrak{g})_z$ est un $Z(\mathfrak{g})_z$-module libre, j_z^* est aussi engendré par son intersection avec $Z(\mathfrak{g})$ qui vaut j; d'où $a \subset j\,U(\mathfrak{g})$ et comme $a \supset j$, on a l'égalité $a = j\,U(\mathfrak{g})$; puisque a est un idéal premier, (i) entraîne (ii).

III.13. *L'exemple suivant, du à J. Dixmier, montre que la localisation dans* III.12, (i), *est indispensable*. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de dimension 5, de base $x_1, \ldots, x_5$, dont les crochets non nuls sont les suivants :

$$[x_1, x_2] = x_4,$$

$$[x_1, x_3] = x_5.$$

Cette algèbre est nilpotente et le centre de son algèbre enveloppante est l'algèbre de polynôme en 3 générateurs X, Y, Z où :

$$X = x_4,$$

$$Y = x_5,$$

$$Z = x_2 x_5 - x_3 x_4.$$

Soient r, $s \in k$ et $p(r, s)$ l'idéal de $Z(\mathfrak{g})$ engendré par $X + rY$ et $X + sZ$. Pour toute surface algébrique S de k^3, il existe des éléments, non nuls, r et s de k, tels que la droite définie par $p(r, s)$ ne soit pas contenue dans S. Ceci montre que pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$, il existe un idéal premier de la forme $p(r, s)$, où r et $s \in k - \{0\}$, ne contenant pas z. Dans ce qui suit, on suppose $r \neq 0$, et on va montrer que $U(\mathfrak{g})\,p(r, s)$ est un idéal semi-premier qui n'est pas premier.

On note $\mathfrak{g}'$ l'idéal abélien de $\mathfrak{g}$ engendré par $x_2, \ldots, x_5$ et T l'élément $1 - sr^{-1}x_2 - sx_3$. Soient a' et b' les idéaux de $U(\mathfrak{g}')$ engendrés respectivement par X et $X + rY$ et par T et $X + rY$. On remarque que ces idéaux sont premiers ($U(\mathfrak{g}') \simeq S(\mathfrak{g}')$) et que :

$$X + sZ = XT + sr^{-1}(X + rY)x_2;$$

$$U(\mathfrak{g}')\,p(r, s) = a' \cap b';$$

$$[x_1, T] = -sr^{-1}(X + rY).$$

Comme $U(\mathfrak{g})$ est un $U(\mathfrak{g}')$-module libre à droite de base (x_1^n) où $n \in \mathbb{N}$ et $[x_1, \mathfrak{g}'] \subset \mathfrak{g}'$, on vient de montrer que si

$$a = U(\mathfrak{g}) a' \quad \text{et} \quad b = U(\mathfrak{g}) b',$$

a et b sont des idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$;

$$U(\mathfrak{g}) p(r, s) = a \cap b;$$

a (resp. b) contient strictement $U(\mathfrak{g}) p(r, s)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BORHO (W.). — Definition einer Dixmier Abbildung für $sl(n, \mathbb{C})$, *Inventiones Math.*, t. 40, 1977, p. 143-169.
[2] BORHO (W.), GABRIEL (P.) et RENTSCHLER (R.). — Primideale in einhüllende auflösbaren Lie-Algebren, *Lecture notes*, n° 357, Springer Verlag, 1973.
[3] CONZE-BERLINE (N.). — Algèbres d'opérateurs différentiels et quotients des algèbres enveloppantes, *Bull. soc. math. France*, t. 102, 1974, p. 379-415.
[4] DIXMIER (J.). — Algèbres enveloppantes, *Cahiers scientifiques*, Gauthier-Villars, 1974, p. 37.
[5] DIXMIER (J.), DUFLO (M.) et VERGNE (M.). — Sur la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie, *Compositio Mathematica*, vol. 29, fasc. 3, 1974, p. 309-323.
[6] DIXMIER (J.). — Idéaux génériques dans les algèbres enveloppantes, *Bull. sc. math.*, 2e série, t. 96, 1972, p. 17-26.
[7] DIXMIER (J.). — Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes, *J. Algebra*, t. 48, 1977, p. 96-112.
[8] DUFLO (M.). — Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 10, 1977, p. 265-288.
[9] MOEGLIN (C.). — Éléments centraux dans les idéaux d'une algèbre enveloppante, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 286, série A, 1978, p. 539-541.
[10] RESCO (R.). — Transcendental division algebras and nœtherian rings, *Israël J. Math.* (à paraître).