BULLETIN DE LA S. M. F.

ROLAND GILLARD

GILLES ROBERT

Groupes d'unités elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 305-317

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__305_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__305_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GROUPES D'UNITÉS ELLIPTIQUES

PAR

ROLAND GILLARD et GILLES ROBERT (*)

[Univ. Grenoble-I et Univ. Paris-Sud (Orsay)]

RÉSUMÉ. — Pour chaque extension abélienne H d'un corps quadratique imaginaire K , on définit deux groupes d'unités elliptiques $\mathcal{V}_3$ et $\mathcal{V}_4$, dont l'indice dans le groupe de toutes les unités de H est lié au nombre de classes de ce corps par une formule comparable à celle de LEOPOLDT.

ABSTRACT. — For each abelian extension H of an imaginary quadratic field K , we define two groups $\mathcal{V}_3 \subset \mathcal{V}_4$ of elliptic units in H . Each is a subgroup of the unit group of H whose index in this group is related to the class number of H by a formula analogous to the classical formula of LEOPOLDT for real abelian extensions of the rational field.

0. Introduction

Soit H/K une extension abélienne finie de corps de nombres, et

$$\zeta_H(s)/\zeta_K(s) = \prod_{\chi \neq 1} L_K(s, \chi)$$

la décomposition de la fonction zêta de H en produit de fonctions L relatives aux caractères χ de l'extension H/K . Pour K quadratique imaginaire, ou bien K le corps des rationnels et H réel, on sait que les nombres

$$L'_K(0, \chi) = \lim_{s \rightarrow 0} L_K(s, \chi)/s, \quad \chi \neq 1,$$

sont des sommes finies à coefficients algébriques de logarithmes des valeurs absolues d'unités de H ; d'autre part, on a aussi

$$\lim_{s \rightarrow 0} \zeta_H(s)/s^{(H:K)-1} = -h_H \cdot R_H/e_H,$$

(*) Texte reçu le 25 septembre 1978.

Roland GILLARD, Institut de Mathématiques pures, Université de Grenoble-I B. P. n° 116, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex.

Gilles ROBERT, Mathématiques Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, Campus universitaire, 91405 Orsay Cedex.

où e_H , h_H et R_H désignent respectivement le nombre de racines de l'unité, le nombre de classes d'idéaux, et le régulateur de H . Ceci offre la possibilité de construire des groupes d'unités de H , valeurs singulières de fonctions transcendentes, dont l'indice dans le groupe E_H de toutes les unités de H est lié à h_H par une formule explicite.

(a) $K = \mathbf{Q}$ et H réel.

Désignons par G le groupe de Galois de $H/\mathbf{Q}$; on note $[G]$ son ordre. LEOPOLDT [6] a construit un groupe d'unités cyclotomiques dont l'indice dans E_H est le produit de h_H par un entier ne dépendant que de la structure de G : cet entier (noté Q_G par LEOPOLDT) divise $[G]^{[G]-1}$, en particulier ses facteurs premiers divisent $[G]$. Ce résultat généralise un résultat précédent de HASSE [4] qui prouve, pour les extensions de *conducteur puissance d'un nombre premier*, un théorème plus précis : l'indice $[E_H : C_H]$ du groupe C_H de toutes les unités cyclotomiques de H est alors égal à h_H .

Récemment, ces résultats ont été généralisés dans au moins deux directions. D'une part, l'un des auteurs [2] a sensiblement agrandi le groupe des unités de LEOPOLDT : notamment, *lorsque G est cyclique*, la formule obtenue prouve que le quotient $h_H/[E_H : C_H]$ (*sic*) est un entier, en général non trivial. D'un autre côté, SINNOTT [10], lorsque H est le *sous-corps réel maximal d'un corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\mu_m)$ de conducteur m* , prouve en particulier que le quotient $[E_H : C_H]/h_H$ est un entier puissance de 2, dont l'exposant ne dépend que du nombre de diviseurs premiers distincts de m . Les méthodes de SINNOTT, qui introduit nombre d'idées nouvelles, devraient pouvoir s'étendre au cas des extensions abéliennes réelles *quelconques* H de $\mathbf{Q}$.

(b) K quadratique imaginaire.

Nous désignons par $H_{(1)}$ le corps de classes de Hilbert de K , et par $H_0 = H \cap H_{(1)}$ la sous-extension non ramifiée maximale de H/K ; nous notons G (resp. $\mathfrak{G}$) le groupe de Galois de H/H_0 (resp. H/K).

L'un des auteurs [7] a prouvé, lorsque le *conducteur de l'extension H/K est puissance d'un idéal premier de K* , une formule analogue à celle de HASSE; d'après un résultat de STARK [11] précisé dans l'appendice du présent travail, cette formule peut s'énoncer ainsi : l'indice dans E_H du groupe Ω_H , obtenu en adjoignant au groupe de toutes les unités elliptiques de H les éléments de E_{H_0} , est alors le produit du quotient h_H/h_{H_0} par un entier λ_H diviseur de 6; la signification arithmétique précise de λ_H , liée à des propriétés arithmétiques fines de H_0 , n'est complètement élucidée que dans le cas où le groupe *relatif* G est *cyclique* (cf. [2], appendice).

Par ailleurs, on peut espérer que les méthodes de SINNOTT s'adaptent au cas présent; cependant, cela pose des problèmes techniques délicats, non encore résolus aujourd'hui. *Dans le présent travail*, partant d'un groupe d'unités elliptiques $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$, construit aux paragraphes 1 et 2, et isomorphe comme $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$ -module à l'idéal d'augmentation $I(\mathfrak{G})$ de l'algèbre de groupe $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$, nous l'agrandissons en des groupes d'unités $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ et $\mathcal{V}_4$ qui vérifient :

$$\Theta_{I(\mathfrak{G})} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}_3 \subset \mathcal{V}_4.$$

Notre résultat principal est la détermination de l'indice de $\mathcal{V}_3$ (resp. $\mathcal{V}_4$) dans E_H : c'est le produit de $h_H/(H_{(1)} : H_0)$ (resp. h_H/h_{H_0}) par un entier c_3 (resp. c_4) que nous déterminons explicitement (cf. théorème, § 3). Notons que le calcul exact de c_3 et c_4 nécessite l'introduction d'invariants arithmétiques particuliers, dont l'étude fait l'objet du paragraphe 4. Les formules donnant c_3 et c_4 , valables *quel que soit le corps quadratique imaginaire K et l'extension abélienne H/K considérés*, sont l'analogue des résultats de LEOPOLDT [6]. Le fait le plus remarquable est peut-être que c_3 et c_4 ne dépendent, pour l'essentiel du moins, que de la structure du groupe relatif $G = G(H/H_0)$ et du degré $(H_0 : K)$ de H_0/K ; en particulier, les facteurs premiers de c_3 (resp. c_4) divisent $6.[G]$ (resp. $[G]$). Par suite, la relation

$$E_H \neq \mathcal{V}_3 \cdot E_H^p \text{ (resp. } E_H \neq \mathcal{V}_4 \cdot E_H^p),$$

caractérise, parmi les nombres premiers ne divisant pas $6.(H : K)$ (resp. $(H : H_0)$), ceux tels que p divise $h_H/(H_{(1)} : H_0)$ (resp. h_H/h_{H_0}) c'est-à-dire tels que l'action de $\mathfrak{G}$ (resp. G) sur la p -partie du groupe des classes d'idéaux de H soit non triviale. Précisons enfin que la construction de $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ et $\mathcal{V}_1$ repose sur les méthodes de LEOPOLDT [6]; celle de $\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ et $\mathcal{V}_4$ fait appel aux résultats obtenus par l'un des auteurs dans [7] et complétés en appendice.

Indépendamment du présent travail, des formules analogues ont également été prouvées par SCHERTZ [9]. Les résultats de celui-ci s'appliquent aussi aux corps N tels que l'extension NK/K soit abélienne. Précisons que ses groupes d'unités sont en partie construits à l'aide des valeurs singulières, de la forme modulaire usuelle Δ de poids 12, *prises* non seulement sur les idéaux de l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire K , mais aussi *sur les idéaux de chacun des ordres de K* ; les formules reliant ces valeurs singulières aux invariants considérés ici sont encore mal connues.

Pour conclure, signalons que dans [2] l'un des auteurs, après la rédaction commune de ce travail, a construit des groupes d'unités elliptiques sensi-

blement plus gros que ceux considérés ici, et déterminé leur indice dans E_H en fonction du quotient h_H/h_{H_0} .

1. Notations

Si N est un corps de nombres, on note μ_N le groupe des racines de l'unité de N ; comme d'habitude le groupe des racines de l'unité d'ordre m est noté μ_m .

Nous fixons une extension abélienne finie H d'un corps quadratique imaginaire K , et conservons les notations de l'introduction. Nous posons $e = e_K$ et $h = h_K$. Pour tout idéal entier $\mathfrak{f}$ de K , soient $\text{Cl}(\mathfrak{f})$ le groupe des classes de rayon $\mathfrak{f}$, et $H_{\mathfrak{f}}$ le corps de rayon correspondant; on note f le plus petit entier > 0 contenu dans $\mathfrak{f}$, et $e(\mathfrak{f})$ le nombre de racines de l'unité de K congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$. Désignons par ξ_0 le caractère unité du groupe relatif G . Pour tout caractère ξ de G défini et irréductible sur $\mathbf{Q}$, introduisons $\ker \xi$ le groupe $\{\sigma \in G; \xi(\sigma) = \xi(1)\}$, H_{ξ} le sous-corps de H fixé par $\ker \xi$, et G_{ξ} (resp. $\mathfrak{G}_{\xi}$) le groupe de Galois de H_{ξ}/H_0 (resp. H_{ξ}/K). Le groupe G_{ξ} est cyclique: notons g_{ξ} son ordre, et choisissons un générateur $\sigma(\xi)$ parmi les $\varphi(g_{\xi})$ possibles. Enfin, par d_{ξ} , nous désignons le discriminant du polynôme cyclotomique $P_{g_{\xi}}$ d'indice g_{ξ} .

Soit χ un caractère de $\mathfrak{G}$ défini et irréductible sur $\mathbf{C}$. Sa restriction à G figure dans la décomposition d'un unique caractère ξ , et son conducteur est égal à $\mathfrak{f}_{\xi}$, conducteur de l'extension H_{ξ}/K . De plus, χ définit un homomorphisme de $\mathfrak{G}_{\xi}$ dans $\mathbf{C}^*$, donc aussi, par composition avec l'homomorphisme d'Artin, un caractère primitif $\chi: \text{Cl}(\mathfrak{f}_{\xi}) \rightarrow \mathbf{C}^*$.

Pour tout groupe abélien fini A , on désigne par $I(A)$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[A]$. Si $F: \alpha \mapsto F_{\alpha}$ est une application de A dans $\mathbf{C}^*$, on étend F à $\mathbf{Z}[A]$ par multiplicativité en posant

$$F_u = \prod_{\alpha \in A} F_{\alpha}^{n_{\alpha}} \quad \text{si} \quad u = \sum_{\alpha \in A} n_{\alpha} \cdot \alpha,$$

et on désigne par $F_{I(A)}$ le groupe $\{F_u; u \in I(A)\}$. De même, pour tout A -module $M \subset \mathbf{C}^*$, et tout élément μ de M , on définit μ^{α} pour $\alpha \in \mathbf{Z}[A]$ par multiplicativité, et on pose $\mu^I = \{\mu^{\alpha}; \alpha \in I\}$ pour tout idéal I de $\mathbf{Z}[A]$. Par ailleurs, on note $[A]$ l'ordre de A .

Soient ξ comme précédemment, $e_{\xi} = [G]^{-1} \sum_{g \in G} \xi(g^{-1}) \cdot g$ l'idempotent associé, $u_{\xi} = [G] \cdot e_{\xi}$, et posons

$$\gamma_{\xi} = \prod_{p \mid g_{\xi}} (\sigma(\xi)^{g_{\xi}/p} - 1),$$

où p parcourt l'ensemble des diviseurs premiers de g_ξ . Pour $\xi \neq \xi_0$, le produit γ_ξ (resp. u_ξ) appartient à $I(G_\xi) \subset I(\mathfrak{G}_\xi)$ (resp. $I(G) \subset I(\mathfrak{G})$). Notons I_ξ l'idéal de $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ engendré par les normes

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sigma(\xi)^{i \cdot g_\xi/p}, \quad p \text{ diviseur premier de } g_\xi;$$

d'après un résultat de MARTINET (cité après la proposition I.1 dans [3]), il est aussi engendré par $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$. Soit :

$$\theta_\xi = N_{H_{f_\xi}/H_\xi}(\varphi_{f_\xi}(C_0)), \quad \xi \neq \xi_0,$$

où $\varphi_{f_\xi}(C_0)$ est défini comme dans [7] (§ 2.2), et C_0 désigne la classe unité de $\text{Cl}(f_\xi)$. Posons $(\gamma_\xi) = \gamma_\xi \cdot \mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$, et notons la remarque suivante.

REMARQUE. — *L'idéal (γ_ξ) est annulé par I_ξ , de sorte que le groupe $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ est formé d'unités de H_ξ dont la norme sur chaque sous-corps strict de H_ξ contenant H_0 est 1.*

En fait, on a le résultat suivant :

LEMME 1. — *L'idéal (γ_ξ) est isomorphe au quotient $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]/I_\xi$; c'est donc un $\mathbf{Z}$ -module libre de rang $\varphi(g_\xi) \cdot [\mathfrak{G}/G]$.*

Démonstration. — Notons d'abord que $P_{g_\xi}(\sigma(\xi)) \cdot \gamma_\xi = 0$, puisque le polynôme $X^{g_\xi} - 1$ divise $P_{g_\xi}(X) \cdot \prod_{p|g_\xi} (X^{g_\xi/p} - 1)$. D'autre part, en envoyant $\sigma(\xi)$ sur ζ , racine de P_{g_ξ} , on obtient un isomorphisme d'anneaux

$$v: \mathbf{Z}[G_\xi]/P_{g_\xi}(\sigma(\xi)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}[\zeta].$$

Mais l'image de γ_ξ par l'application $\mathbf{Z}[G_\xi] \rightarrow \mathbf{Z}[\zeta]$, déduite de v , est non nulle, si bien que $P_{g_\xi}(\sigma(\xi))$ engendre l'annulateur de γ_ξ dans $\mathbf{Z}[G_\xi]$. L'assertion du lemme s'en déduit par extension des scalaires de $\mathbf{Z}[G_\xi]$ à $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$.

D'autre part, pour toute classe absolue c de K , définissons $\delta(c)$ comme dans [7] (§ 3.1). Pour $\sigma \in \mathfrak{G}/G$, soit $\delta_\sigma = \prod_{c \rightarrow \sigma} \delta(c)$, où le produit est pris sur toutes les classes absolues de K dont l'image par l'homomorphisme d'Artin de H_0/K est σ . Posons $\Delta_{H_0} = \delta_{I(\mathfrak{G}/G)}$; d'après [7] (§ 3.1, prop. 4), le groupe Δ_{H_0} est contenu dans E_{H_0} et l'on a le lemme ci-dessous :

LEMME 2. — *Pour tous $\bar{\alpha} \in I(\mathfrak{G}/G)$ et $\bar{\beta} \in \mathbf{Z}[\mathfrak{G}/G]$, on a*

$$(\delta_\alpha)^{\bar{\beta}} = \delta_{\alpha \cdot \bar{\beta}}.$$

Notons alors $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ l'homomorphisme de $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}]$ sur $\mathbf{Z}[\mathfrak{G}/G]$ induit par celui de $\mathfrak{G}$ sur $\mathfrak{G}/G$, et posons

$$\Theta_\alpha = \delta_{\bar{\alpha}} \cdot (\prod_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{\gamma_\xi})^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{Z}[\mathfrak{G}].$$

Pour chaque $\alpha \in \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$, on a

$$(1) \quad \Theta_{\alpha, u_\xi} = \begin{cases} \theta_\xi^{\alpha \cdot \gamma_\xi \cdot [G]} & \text{si } \xi \neq \xi_0; \\ \delta_\xi^{[G]} & \text{si } \xi = \xi_0. \end{cases}$$

2. Indice $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ dans E_H

D'après le paragraphe précédent, $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ est un sous-groupe de E_H ; suivant [5] (chap. 21, § 2, th. 6), son régulateur est donc donné par la formule :

$$R(\Theta_{I(\mathfrak{G})}) = 2^{[G]-1} \prod_{\chi \neq 1} \Sigma(\chi),$$

où χ parcourt l'ensemble des homomorphismes $\neq 1$ de $\mathfrak{G}$ dans $\mathbb{C}^\times$, et

$$\Sigma(\chi) = \text{dfn} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau^{-1}) \cdot \log |\Theta_\tau|.$$

Mais, vu (1), nous pouvons estimer $\Sigma(\chi)$ en fonction de la somme $S(\chi)$ définie dans [7] (§ 2.3). Pour cela, prolongeons χ par $\mathbb{Z}$ -linéarité à $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$ et rappelons le lemme suivant :

LEMME 3. — Soit L une application $\mathbb{Z}$ -linéaire de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $u \in \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$, on a

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) \cdot L(u \cdot \tau) = \chi(u) \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) \cdot L(\tau).$$

Appliquons ce lemme pour $u = u_\xi$ et $L : \alpha \mapsto \log |\Theta_\alpha|$; on obtient, en divisant par $[G] = \chi(u_\xi)$ (si χ figure dans la décomposition de ξ),

$$\begin{aligned} \Sigma(\chi) &= [G]^{-1} \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) \cdot \log |\Theta_{\tau, u_\xi}| \\ &= \begin{cases} \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) \cdot \log |\theta_\xi^{\tau \cdot \gamma_\xi}|, & \xi \neq \xi_0; \\ \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) \cdot \log |\delta_\tau|, & \xi = \xi_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Par suite, si $\xi = \xi_0$, on a (cf. [7], § 3.2, formule (20)) :

$$\Sigma(\chi) = [G] \sum_{\tau \in \mathfrak{G}/G} \chi(\bar{\tau}^{-1}) \cdot \log |\delta_{\bar{\tau}}| = h \cdot [G] \cdot S(\chi).$$

Si $\xi \neq \xi_0$, une nouvelle application du lemme, pour $u = \gamma_\xi$ et $L : \alpha \mapsto \log |\theta_\xi^\alpha|$, nous donne

$$\Sigma(\chi) = \chi(\gamma_\xi) \sum_{\tau \in \mathfrak{G}} \chi(\tau^{-1}) \cdot \log |\theta_\xi^\tau| = \chi(\gamma_\xi) \cdot ([G]/g_\xi) \cdot S(\chi).$$

Nous obtenons ainsi l'expression suivante du régulateur de $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$:

$$(2) \quad R(\Theta_{I(\mathfrak{G})}) = 2^{[G]-1} \cdot h^{[G/g]-1} \cdot A \cdot \prod_{\chi \neq 1} S(\chi),$$

avec

$$A = [G]^{[\mathfrak{G}/G]-1} \cdot \prod_{\xi \neq \xi_0} \left(\prod_{\chi, \text{res } \chi \mid \xi} \chi(\gamma_\xi) \cdot ([G]/g_\xi) \right).$$

Posons alors :

$$N_G = ([G]^{[G]}/\Pi_\xi d_\xi)^{1/2},$$

de sorte que le quotient $N_G/[G]$ est égal à l'entier Q_G de [6] (formule (11) du § 1.3). En utilisant la formule (11) de [6] (§ 8.4), et en remarquant qu'il y a $[\mathfrak{G}/G]$ caractères χ de $\mathfrak{G}$ ayant une restriction donnée à G , on voit que A est un entier relatif dont la valeur absolue est donnée par la formule :

$$|A| = \frac{1}{[G]} N_G^{2 \cdot [\mathfrak{G}/G]}.$$

La comparaison de la formule (2) avec la formule analytique du nombre de classes (cf. e. g. [7], § 2.4, th. 3 (ii)) prouve que l'indice de $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ dans E_H est fini et est donné par l'égalité

$$(3) \quad [E_H : \Theta_{I(\mathfrak{G})}] = B \cdot h_H,$$

avec

$$B = |A| \cdot (12)^{[\mathfrak{G}]-1} \cdot h^{[\mathfrak{G}/G]-2} \cdot \prod_{\xi} (f_\xi \cdot e(\mathfrak{f}_\xi))^{[\mathfrak{G}/G] \cdot \varphi(g_\xi)}.$$

COROLLAIRE. — L'application $\alpha \mapsto \Theta_\alpha$ de $I(\mathfrak{G})$ dans $\Theta_{I(\mathfrak{G})}$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$ -modules.

3. Définition de nouveaux groupes d'unités elliptiques

Énonçons la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — Les groupes Δ_{H_0} et $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ ($\xi \neq \xi_0$) sont sans torsion.

Démonstration. — L'assertion est claire pour Δ_{H_0} d'après [7]. D'autre part, d'après la formule (1), le $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_\xi]$ -module $\Theta_{u_\xi \cdot \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]}$, isomorphe à $u_\xi \cdot \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$, est un sous-module du quotient $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ de (γ_ξ) ; mais (γ_ξ) et $u_\xi \cdot \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]$ sont des $\mathbb{Z}$ -modules libres de même rang $\varphi(g_\xi) \cdot [\mathfrak{G}/G]$, d'où la proposition.

Notons $\mathcal{V}_1$ le produit de Δ_{H_0} et des groupes $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$, $\xi \neq \xi_0$; il résulte de la proposition 1 et de la remarque du paragraphe 1 que ce produit est direct. A l'aide du corollaire du paragraphe 2, et en notant la double inclusion $\mathcal{V}_1^{[G]} \subset \Theta_{I(\mathfrak{G})} \subset \mathcal{V}_1$, on obtient d'après (1) :

$$[\mathcal{V}_1 : \Theta_{I(\mathfrak{G})}] = [\mathcal{V}_1^{[G]} : \Theta_{I(\mathfrak{G})}^{[G]}] = [e_{\xi_0} \cdot I(\mathfrak{G}) \oplus (\bigoplus_{\xi \neq \xi_0} e_\xi \cdot \mathbb{Z}[\mathfrak{G}]) : I(\mathfrak{G})].$$

Projetons $e_{\xi_0} \cdot I(\mathfrak{G}) \oplus (\bigoplus_{\xi \neq \xi_0} e_\xi \cdot \mathbb{Z}[\mathfrak{G}])$ sur son quotient par $e_{\xi_0} \cdot I(\mathfrak{G})$;

il vient

$$[\mathcal{V}_1 : \Theta_{I(\mathfrak{G})}] = [G]^{[\mathfrak{G}/G]} \cdot [\bigoplus_{\xi \neq \xi_0} e_\xi \cdot Z[\mathfrak{G}] : (1 - e_{\xi_0}) \cdot Z[\mathfrak{G}]].$$

Or (cf. [6], § 1.3, formules (10) et (11)) on a

$$\begin{aligned} & [\bigoplus_{\xi \neq \xi_0} e_\xi \cdot Z[G] : (1 - e_{\xi_0}) \cdot Z[G]] \\ &= [\bigoplus_{\xi} e_\xi \cdot Z[G] : Z[G] + e_{\xi_0} \cdot Z[G]] = N_G/[G]. \end{aligned}$$

Vu l'isomorphisme de $Z[G]$ -modules $Z[\mathfrak{G}] \simeq Z[G]^{[\mathfrak{G}/G]}$, on obtient donc :

$$(4) \quad [\mathcal{V}_1 : \Theta_{I(\mathfrak{G})}] = N_G^{[\mathfrak{G}/G]}.$$

D'autre part, pour chaque automorphisme $\tau \in \mathfrak{G}_\xi$, choisissons un idéal entier α_τ de K premier à $12.f_\xi$, d'image τ par l'homomorphisme d'Artin de H_ξ/K ; la classe modulo e_{H_ξ} de la norme $N(\alpha_\tau)$ de α_τ ne dépend pas du choix précédent, de sorte que

$$J_\xi = \text{dfn} \left\{ \sum_{\tau \in \mathfrak{G}_\xi} n_\tau \cdot \tau \mid \sum_{\tau \in \mathfrak{G}_\xi} n_\tau \cdot N(\alpha_\tau) \equiv 0(e_{H_\xi}) \right\},$$

est un idéal de $Z[\mathfrak{G}_\xi]$. Considérons alors le groupe $\theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}$: comme on a $(\gamma_\xi) = \gamma_\xi \cdot Z + (\gamma_\xi) \cap J_\xi$, son indice dans $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ est égal au plus petit entier $a > 0$ tel que $\gamma_\xi \cdot a$ appartienne à J_ξ . Or, pour l'entier n_ξ ci-dessous, on a $\gamma_\xi - n_\xi \in J_\xi$, d'où le lemme suivant :

LEMME 4. — *L'indice de $\theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}$ dans $\theta_\xi^{(\gamma_\xi)}$ est égal au quotient*

$$a(\xi) = e_{H_\xi} / \text{p.g.c.d.}(e_{H_\xi}, n_\xi),$$

avec $n_\xi = \prod_{p|g_\xi} (N(\alpha_{\sigma(\xi)})^{g_\xi/p} - 1)$.

Mais, les éléments de $\theta_\xi^{J_\xi}$ sont des puissances d'ordre $12.f_\xi \cdot e(f_\xi)$ dans H_ξ (cf. appendice). Pour chaque caractère $\xi \neq \xi_0$, notons alors Ω'_{H_ξ} le groupe formé des unités de H_ξ qui sont racines d'ordre $12.f_\xi \cdot e(f_\xi)$ d'éléments de $\theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}$, et posons

$$\mathcal{V}_2 = \mu_H \cdot \Delta_{H_0} \cdot \prod_{\xi \neq \xi_0} \Omega'_{H_\xi}, \quad \mathcal{V}_3 = \Omega_{H_0} \cdot \mathcal{V}_2, \quad \mathcal{V}_4 = E_{H_0} \cdot \mathcal{V}_3,$$

où le sous-groupe Ω_{H_0} de E_{H_0} est défini comme dans [7] (§ 3.2). Alors, on a

$$\begin{aligned} (5) \quad [\mathcal{V}_2 : \mu_H \cdot \Delta_{H_0} \cdot \prod_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}] \\ = 12^{[\mathfrak{G}] - [\mathfrak{G}/G]} \cdot \prod_{\xi \neq \xi_0} (f_\xi \cdot e(f_\xi))^{g_\xi \cdot [\mathfrak{G}/G]}, \end{aligned}$$

et, d'après le lemme 4,

$$(6) \quad [\mathcal{V}_1 : \Delta_{H_0} \cdot \prod_{\xi \neq \xi_0} \theta_\xi^{(\gamma_\xi) \cap J_\xi}] = \prod_{\xi \neq \xi_0} a(\xi).$$

On déduit de (3), (4), (5) et (6) la formule :

$$(7) \quad [E_H : \mathcal{V}_2] = \frac{12^{[\mathbb{G}/G]-1}}{q_H} \cdot \frac{e^{[\mathbb{G}/G]}}{e_{H_0}} \cdot h^{[\mathbb{G}/G]-2} \cdot \frac{N_G^{[\mathbb{G}/G]}}{[G]} \cdot h_H,$$

où l'on a noté $1/q_H$ la quantité $(\prod_{\xi \neq \xi_0} a(\xi)) \cdot e_{H_0}/e_H$; la proposition 2 (cf. infra, § 4) montre que q_H est un entier puissance de 2.

Enfin, les indices $[\mathcal{V}_4 : \mathcal{V}_2] = [E_{H_0} : \mu_{H_0} \cdot \Delta_{H_0}] = (1/e_{H_0}) \cdot [E_{H_0} : \Delta_{H_0}]$ et $[\mathcal{V}_4 : \mathcal{V}_3] = [E_{H_0} : \mu_{H_0} \cdot \Omega_{H_0}]$ sont respectivement égaux à

$$12^{[\mathbb{G}/G]-1} \cdot h^{[\mathbb{G}/G]-2} \cdot \frac{e^{[\mathbb{G}/G]}}{e_{H_0}} \cdot h_{H_0}$$

et

$$12^{[\mathbb{G}/G]-1} \cdot \frac{e}{e_{H_0}} \cdot h_{H_0}/(H_{(1)} : H_0) \quad (\text{cf. [7], § 3.2, th. 4 et 6}).$$

Par suite, la formule (7) permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les indices de $\mathcal{V}_3$ et $\mathcal{V}_4$ dans E_H sont donnés par les égalités*

$$[E_H : \mathcal{V}_3] = c_3 \cdot h_H/(H_{(1)} : H_0), \quad [E_H : \mathcal{V}_4] = c_4 \cdot h_H/h_{H_0},$$

où les entiers c_3 et c_4 sont définis par

$$c_3 = 12^{[\mathbb{G}/G]-1} \cdot \frac{e}{e_{H_0}} \cdot c_4, \quad c_4 = \frac{1}{q_H} \cdot \frac{N_G^{[\mathbb{G}/G]}}{[G]}.$$

N. B. — On notera que le quotient h_H/h_{H_0} , et donc $h_H/(H_{(1)} : H_0)$, est un entier.

4. Détermination de q_H

Soit $\xi \neq \xi_0$ un caractère de G , défini et irréductible sur $\mathbf{Q}$. Pour chaque diviseur premier p de g_ξ , désignons par $H_{\xi, p}$ le sous-corps d'indice p de H_ξ contenant H_0 , et posons $e_{\xi, p} = e_{H_{\xi, p}}$. Il vient le résultat suivant :

LEMME 5. — *On a l'identité*

$$\text{p.g.c.d.}(n_\xi, e_{H_\xi}) = \text{p.g.c.d.}(\prod_{p \mid g_\xi} e_{\xi, p}, e_{H_\xi}).$$

Démonstration. — L'assertion du lemme provient de l'égalité

$$e_{\xi, p} = \text{p.g.c.d.}(N(\mathfrak{a}) - 1),$$

où α parcourt l'ensemble des idéaux entiers de K premiers à $12.f_\xi$ dont l'image par l'homomorphisme d'Artin de H_ξ/K fixe $H_{\xi, p}$ (cf. [7], § 4.1, lemme 6). En effet, comme $\sigma(\xi)^{q_\xi/p}$ engendre le groupe de Galois de $H_\xi/H_{\xi, p}$, il s'ensuit que $N(\alpha_{\sigma(\xi)})^{q_\xi/p} - 1$ et $e_{\xi, p}$ engendrent le même idéal de $\mathbb{Z}/e_{H_\xi} \cdot \mathbb{Z}$.

LEMME 6. — *L'entier $a(\xi)$ vaut 1, à moins que H_ξ ne soit engendré sur H_0 par un groupe μ_m , pour m puissance d'un nombre premier.*

Démonstration. — D'après le lemme 5, il suffit de démontrer que e_{H_ξ} divise $\prod_{p|q_\xi} e_{\xi, p}$. C'est trivial si H_ξ n'est pas engendré sur H_0 par un groupe de racines de l'unité. Supposons donc $H_\xi = H_0(\mu_n)$, et choisissons n minimal. Si n est puissance d'un nombre premier, il n'y a rien à démontrer. Si $n = a.b$, avec a et b entiers > 1 premiers entre eux, alors $H_0(\mu_a)$ et $H_0(\mu_b)$ sont des sous-corps stricts de H_ξ , et e_{H_ξ} , qui divise le produit

$$e_{H_0} \cdot \text{p.p.c.m.}(e_{H_0}, n) = \text{p.p.c.m.}(e_{H_0}, a) \cdot \text{p.p.c.m.}(e_{H_0}, b),$$

divise donc $\prod_{p|q_\xi} e_{\xi, p}$.

LEMME 7. — *Si $H = H_0(\mu_{q^r})$, avec $r > 0$ et q premier, alors $a(\xi)$ vaut q^ε , où $\varepsilon = 2$ si $H = H_0(\mu_4) = H_0(\mu_8)$ et $\varepsilon = 1$ sinon.*

Démonstration. — On distingue deux cas :

Cas $q = 2$: Si $H = H_0(\mu_4) = H_0(\mu_8)$, l'assertion du lemme est immédiate à vérifier; sinon, le seul sous-corps d'indice premier de H_ξ contenant H_0 est $H_0(\mu_{2^{r-1}})$ et $a(\xi) = 2$.

Cas $q \neq 2$: Si $r = 1$, l'assertion du lemme est claire. Si $r > 1$, le sous-corps d'indice q de $H_0(\mu_{q^r})$ est $H_0(\mu_{q^{r-1}})$, donc $e_{H_\xi} = q \cdot e_{\xi, q}$. De plus, pour $p \neq q$, le nombre $e_{\xi, p}$ est premier à q ; ce qui achève la démonstration du lemme 7.

PROPOSITION 2. — *Soit 2^r la plus grande puissance de 2 divisant e_H ; si l'extension $H_0(\mu_{2^r})/H_0$ est cyclique, on a $q_H = 1$, sinon on a $q_H = 2^{r-3}$ ou 2^{r-2} suivant que $\sqrt{2}$ appartient ou non à H_0 .*

Démonstration. — D'après le lemme 6, on a $q_H = q_{H_0(\mu_{e_H})}$; ce lemme prouve aussi la multiplicativité de l'application : $\alpha \mapsto q_{H_0(\mu_\alpha)}$. Par suite, il suffit de déterminer q_H lorsque $H = H_0(\mu_{p^r})$, avec p premier et p^r la plus grande puissance de p qui divise e_H . Si l'extension $H_0(\mu_{p^r})/H_0$ est cyclique, en particulier si $p \neq 2$, on déduit du lemme 7, par récurrence sur r , l'égalité $q_{H_0(\mu_{p^r})} = 1$. Enfin si $p = 2$ et si $H_0(\mu_{2^r})/H_0$ n'est pas cyclique, le quotient e_H/e_{H_0} vaut 2^{r-1} , et $H_\xi = H_0(\mu_4)$ est l'unique sous-extension cyclique de $H_0(\mu_{2^r})/H_0$ telle que $a(\xi) \neq 1$. Or, d'après le lemme 7, suivant que $H_0(\mu_4)$ contient μ_8 ou non, l'entier $a(\xi)$ vaut 4 ou 2, d'où $q_H = 2^{r-3}$ ou 2^{r-2} .

APPENDICE

Pour toute extension abélienne L/K , de conducteur $\mathfrak{f}$, et tout idéal entier $\mathfrak{b}$ de K premier à $\mathfrak{f}$, on désigne par $(\mathfrak{b}, L/K)$ l'automorphisme d'Artin de L/K associé à $\mathfrak{b}$. Notons alors $1_{H_{\xi}} = ((1), H_{\xi}/K)$ l'élément neutre de $\mathfrak{G}_{\xi}$, et énonçons le lemme facile suivant :

LEMME A-1. — *L'idéal J_{ξ} de $\mathbb{Z}[\mathfrak{G}_{\xi}]$ est engendré comme $\mathbb{Z}$ -module par les différences*

$$(\mathfrak{b}, H_{\xi}/K) - N(\mathfrak{b}) \cdot 1_{H_{\xi}},$$

lorsque $\mathfrak{b}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers de K premiers à $12 \cdot f_{\xi}$.

Démonstration. — D'après [7] (§ 4.1, lemme 7), l'entier $e_{H_{\xi}}$ divise $12 \cdot f_{\xi}$, si bien que l'assertion du lemme se démontre comme le cas $n = 1$ du lemme 12 de [1].

D'après le lemme précédent, les éléments du groupe $\theta_{\xi}^{J_{\xi}}$ sont des puissances d'ordre $12 \cdot f_{\xi} \cdot e(\mathfrak{f}_{\xi})$ dans H_{ξ} si, et seulement si, il en est de même pour les quotients

$$\theta_{\xi}^{(\mathfrak{b}, H_{\xi}/K)} / \theta_{\xi}^{N(\mathfrak{b})},$$

lorsque $\mathfrak{b}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers de K premiers à $12 \cdot f_{\xi}$. Vu la définition de θ_{ξ} , notre affirmation résulte donc de la proposition suivante.

PROPOSITION A-2. — *Soient $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K tel que le corps $H_{\mathfrak{f}}$ contienne strictement $H_{(1)}$, et $C \in \text{Cl}(\mathfrak{f})$ une classe de rayon modulo $\mathfrak{f}$. Comme dans [7] (§ 2.2), associons à C l'élément $\varphi_{\mathfrak{f}}(C)$ de $H_{\mathfrak{f}}$. Alors, pour tout idéal entier $\mathfrak{b}$ de K premier à $12 \cdot f$ (*), le quotient $\varphi_{\mathfrak{f}}(C)^{(\mathfrak{b}, H_{\mathfrak{f}}/K)} / \varphi_{\mathfrak{f}}(C)^{N(\mathfrak{b})}$ est une puissance d'ordre $12 \cdot f \cdot e(\mathfrak{f})$ dans $H_{\mathfrak{f}}$.*

Démonstration. — Distinguons deux cas suivant que l'entier $e(\mathfrak{f})$ vaut 1 ou non.

(a) *Cas $e(\mathfrak{f}) = 1$.*

D'après [11], l'élément $E(C) = \varphi_{\mathfrak{f}}(C)$ possède une racine d'ordre $12 \cdot f$ dans l'extension abélienne $H_{(12 \cdot f, 2)}$ de K . Par suite, l'affirmation de la proposition résulte de la reformulation suivante du lemme 1 de [11], avec $n = 12 \cdot f$ et $\delta^n = \varphi_{\mathfrak{f}}(C)$.

(*) En fait, un calcul explicite, basé sur la formule (4) et le corollaire A-2 de [8], prouve que l'assertion de la proposition reste vraie si l'on suppose seulement l'idéal entier $\mathfrak{b}$ de K premier à $12 \cdot \mathfrak{f}$.

LEMME A-3. — Désignons par K un corps de nombres, et par H une extension abélienne de conducteur $\mathfrak{f}$ de K . Soient n un entier > 0 , et δ un nombre algébrique qui possède les deux propriétés suivantes :

- (i) δ appartient à l'extension abélienne maximale de K ;
- (ii) δ^n appartient à H .

Alors, pour tout idéal entier $\mathfrak{b}$ de K premier à $n \cdot \mathfrak{f}$, le quotient $(\delta^n)^{(\mathfrak{b}, H/K)} / \delta^{n \cdot N(\mathfrak{b})}$ est une puissance d'ordre n dans H .

Démonstration. — Soit m un entier > 0 divisible par n et par le conducteur de l'extension abélienne $H' = H(\delta)$ de K . Pour chaque automorphisme σ de H'/H , on a

$$\delta^\sigma = \omega(\sigma) \cdot \delta,$$

où $\omega(\sigma)$ est une racine n -ième de l'unité puisque δ^n appartient à H . Désignons par $\mathfrak{b}'$ un idéal entier de K premier à m qui vérifie les deux conditions suivantes :

(α) la restriction à H/K de l'automorphisme $(\mathfrak{b}', H'/K)$ coïncide avec $(\mathfrak{b}, H/K)$;

(β) $N(\mathfrak{b}') \equiv N(\mathfrak{b})(n)$;

et considérons l'action de σ sur $\delta' = \delta^{(\mathfrak{b}', H'/K)}$. On a

$$\begin{aligned} \delta'^\sigma &= (\delta^{(\mathfrak{b}', H'/K)})^\sigma = (\delta^\sigma)^{(\mathfrak{b}', H'/K)} \\ &= (\omega(\sigma) \cdot \delta)^{(\mathfrak{b}', H'/K)} = \omega(\sigma)^{N(\mathfrak{b}')} \cdot \delta'. \end{aligned}$$

Or, d'après (β), on a $\omega(\sigma)^{N(\mathfrak{b}')} = \omega(\sigma)^{N(\mathfrak{b})}$ si bien que le quotient $\delta' / \delta^{N(\mathfrak{b})}$, fixé par σ , appartient à H ; mais, vu (α), sa puissance n -ième n'est autre que le quotient $(\delta^n)^{(\mathfrak{b}, H/K)} / \delta^{n \cdot N(\mathfrak{b})}$ et l'assertion du lemme est démontrée.

(b) *Fin de la démonstration de la proposition A-2, $e(\mathfrak{f}) > 1$.*

Comme $H_{(1)}$ doit être un sous-corps strict de $H_{\mathfrak{f}}$, on constate aisément que l'on a $e(\mathfrak{f}) = 2$ et $\mathfrak{f} = (2)$. Il s'agit donc de prouver que le quotient $\varphi_{(2)}(C)^{(\mathfrak{b}, H_{(2)}/K)} / \varphi_{(2)}(C)^{N(\mathfrak{b})}$ est une puissance d'ordre $12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ dans $H_{(2)}$. Mais, comme $e((4)) = 1$, on sait déjà, d'après (a), que les quotients

$$\varphi_{(4)}(C')^{(\mathfrak{b}, H_{(4)}/K)} / \varphi_{(4)}(C')^{N(\mathfrak{b})}, \quad C' \in \text{Cl}((4)),$$

sont des puissances d'ordre $12 \cdot 4 = 48$ dans $H_{(4)}$. L'assertion de la proposition résulte alors du lemme suivant, qui précise dans le cas particulier considéré ici la formule de normes du théorème 2 (i) (§ 2.3) de [7].

LEMME A-4. — Pour toute classe $C \in \text{Cl}((2))$, on a

$$N_{H(4)/H(2)}(\varphi_{(4)}(C'_i)) = \prod_{j=1}^2 \varphi_{(4)}(C'_j) = \varphi_{(2)}(C), \quad i = 1, 2,$$

où le produit est pris sur les deux classes, de rayon modulo (4), C'_1 et C'_2 contenues dans C .

Démonstration. — Soient $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un réseau complexe, $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ un système complet de représentants de $\Gamma/2$ modulo Γ , et $t \in \mathbb{C}$ un nombre complexe tel que $4t \in \Gamma$, $t \notin \Gamma/2$. Définissons alors la fonction $\varphi^{(12)}$ comme dans [7] (§ 1, p. 8), et observons que la somme $\tau = \sum_{j=1}^4 t_j$ appartient à Γ . Élevant la formule (6) de [7] (§ 1, p. 10) à la puissance 24, on obtient l'identité

$$\varphi^{(12)}(t; \Gamma/2)^2 = \prod_{j=1}^4 \varphi^{(12)}(t+t_j; \Gamma)^2,$$

(cf. démonstration de la proposition 1, § 1, de [7]). L'assertion du lemme résulte maintenant de cette dernière identité, de la même façon que la proposition 1 (loco citato) implique la formule de normes du théorème 2 (i) de [7].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COATES (J.), SINNOTT (W.). — Integrality properties of the values of partial zeta functions, *Proc. London math. Soc.*, t. 34, 1977, p. 365-384.
- [2] GILLARD (R.). — Remarques sur les unités cyclotomiques et les unités elliptiques, *J. of Number Theory* (à paraître).
- [3] GRAS (G.). — Étude d'invariants relatifs aux groupes de classes des corps abéliens, « Journées arithmétiques de Caen, 1976 », *Astérisque* n° 41-42, 1977, p. 35-53.
- [4] HASSE (H.). — *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*. — Berlin, Akademie Verlag, 1952 (*Mathematische Lehrbücher und Monographien, Abteilung 2, Band 1*).
- [5] LANG (S.). — *Elliptic functions*. — Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1973 (*Addison-Wesley Series in Mathematics*).
- [6] LEOPOLDT (H.). — Über die Einheitengruppe und Klassenzahl reeller abelscher Zahlkörper, *Abh. Deutsche Akad. Wiss., Kl. Math. Natur.*, t. 2, 1954, 48 p.
- [7] ROBERT (G.). — Unités elliptiques, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire 36, 1973, 77 p.
- [8] ROBERT (G.). — Nombres de Hurwitz et unités elliptiques, *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, 4^e série, t. 11, 1978, p. 297-389.
- [9] SCHERTZ (R.). — Die Klassenzahl der Teilkörper abelscher Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper, I und II, *J. reine und angew. Math.*, I, t. 295, 1977, p. 151-168; II, t. 296, 1977, p. 58-79.
- [10] SINNOTT (W.). — On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclotomic field, *Ann. of Math.* t. 108, 1978, p. 107-134.
- [11] STARK (H. M.). — Class fields and modular forms of weight one, "Modular functions of one variable" V [1976, Bonn], p. 277-288. — Berlin, Springer-Verlag, 1977 (*Lecture Notes in Mathematics*, 601).