BULLETIN DE LA S. M. F.

NGHIEM XUAN HAI

Réduction de produits semi-directs et conjecture de Gel'fand et Kirillov

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 241-267

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__241_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 241-267.

RÉDUCTION DE PRODUITS SEMI-DIRECTS ET CONJECTURE DE GEL'FAND ET KIRILLOV

PAR

NGHIEM-XUAN Hai (*)
[Université Paris-Sud, Orsay]

RÉSUMÉ. — On obtient une décomposition des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie dont le radical est abélien et ayant quelques propriétés supplémentaires assez simples. Ceci étant le cas des produits semi-directs des algèbres de Lie de Type A_n, B_n, C_n, D_n par les espaces vectoriels dans lesquels elles opèrent naturellement, on obtient les centres, des résultats du type de Gel'fand-Kirillov (on donne une base), ainsi que des renseignements sur des représentations induites

ABSTRACT. — One gives the decomposition of the envelopping algebras of Lie algebras whose radical is abelian and fulfilling some simple supplementary properties. This framework fits to the semi-direct products of the Lie algebras A_n, B_n, C_n, D_n by their naturally acted-upon vector-spece, and its gives the centers, some results of Gel'fand Kirillov type (with basis), and also some information on the induced representations.

1. Algèbres de Lie des déplacements

Dans ce travail est analysée la structure de l'algèbre enveloppante et du corps enveloppant d'algèbres de Lie ayant un idéal abélien.

L'outil algébrique sur lequel repose cette étude a déjà montré son utilité lors de l'étude des algèbres de Lie résolubles ([9] et [10]), et nous reproduisons, dans la partie 1, les propriétés principales de ces structures qui généralisent les algèbres de Lie ([5], [9], [10], [11] et [12]). On peut trouver un exposé plus complet dans les références [9] et [10].

Dans la partie 2, nous étudions le cas des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ produit semi-direct d'une sous-algèbre $\mathfrak{s}$ et d'un idéal abélien $\mathfrak{q}$, avec quelques conditions supplémentaires assez peu restreignantes (et qui sont satisfaites pour les algèbres de Lie (des groupes) des déplacements).

Dans la partie 3, nous vérifions les hypothèses de la partie 2 pour les algèbres de Lie des déplacements, c'est-à-dire les produits semi-directs des algèbres sl $(n+1, \mathbf{k})$, sp $((n+1)/2, \mathbf{k})$ et so $(n+1, \mathbf{k})$ par un espace $\mathbf{k}^{n+1}$ dans

(*) Texte reçu le 13 janvier 1978.
NGHIEM-XUAN Hai, Mathématiques, Bâtiment 425, Campus universitaire, 91405 Orsay.

lequel elles opèrent naturellement. La conjecture de Gel'fand-Kirillov peut alors être vérifiée pour les deux premières, et pour la dernière, on se ramène à une algèbre de type so $(n, \mathbf{k})$.

En particulier, la conjecture est vérifiée pour le groupe de Poincaré so $(4, \mathbf{C}) \times^{\sim} \mathbf{C}^4$ [8]. Par ailleurs, on obtient explicitement les centres des algèbres et des corps enveloppants pour ces algèbres de déplacements.

Comme dans [9] et [10], nous faisons la liaison avec la théorie des représentations induites (en particulier par des formes linéaires sur $\mathfrak{q}$), et des résultats nouveaux sont obtenus.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps $\mathbf{k}$ étant donnée, nous notons $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ son corps enveloppant, $\mathscr{Z}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$, et $\mathscr{C}(\mathfrak{g})$ le centre de $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$.

1.1. Algèbres de Lie unilatères

DÉFINITION. — *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps commutatif, et* Γ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre commutative à unité.*

On appelle algèbre de Lie unilatère sur $(\mathbf{k}, \Gamma)$ *(ou sur* Γ*) un ensemble* $\mathfrak{h}$ *muni des structures suivantes :*

1° $\mathfrak{h}$ *est un* Γ*-module de type fini sur* Γ*;*

2° $\mathfrak{h}$ *est une algèbre de Lie sur* $\mathbf{k}$*;*

3° *l'ensemble* $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}\,\Gamma$ *des dérivations de* Γ *nulles sur* $\mathbf{k}$ *étant une algèbre de Lie sur* $\mathbf{k}$ *et un module sur* Γ*, il est donné une application* ∂ *de* $\mathfrak{h}$ *dans* $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}\,\Gamma$ *qui vérifie, pour tous* $\lambda, \mu \in \Gamma$ *et* $Y, Z \in \mathfrak{h}$*, les relations suivantes :*

(i) $\partial(\lambda\, Y + \mu\, Z) = \lambda\, \partial(Y) + \mu\, \partial(Z)$,

(ii) $\partial([Y, Z]) = \partial(Y)\, \partial(Z) - \partial(Z)\, \partial(Y)$,

(iii) $[\lambda\, Y, \mu\, Z] = \lambda\, \mu\, [Y, Z] + \lambda\, (\partial(Y).\mu)\, Z - (\partial(Z).\lambda)\, \mu\, Y$.

Dans les formules précédentes, le produit par les scalaires est noté à gauche. On dit dans ce cas que $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie à gauche. De même, lorsque le produit par les scalaires est noté à droite, on dira qu'on a une algèbre de Lie à droite.

On note $(\mathfrak{h}, \partial)$ l'algèbre de Lie unilatère qu'on vient de définir, mais par commodité, on dira et notera $\mathfrak{h}$ au lieu de $(\mathfrak{h}, \partial)$.

1.2. Algèbres de Lie bilatères

Soient $(\mathfrak{h}, \partial)$ une algèbre de Lie à droite sur $(\mathbf{k}, \Gamma)$, et T_0 un élément nul de $\mathfrak{h}$ tel que $[\mathfrak{h}, T_0] = 0$ et $\partial(T_0) = 0$. Alors $\mathfrak{h}$ possède aussi une structure de Γ-module à gauche avec le produit

$$\lambda . Y = Y . \lambda - T_0(\partial(Y).\lambda), \qquad \lambda \in \Gamma \quad \text{et} \quad Y \in \mathfrak{h}.$$

Muni de son crochet et de l'homomorphisme ∂, $\mathfrak{h}$ devient alors une algèbre de Lie à gauche comme on peut le voir par des calculs faciles.

Ce qui nous amène à la définition suivante :

DÉFINITION. — *On appelle algèbre de Lie bilatère sur* $(\mathbf{k}, \Gamma)$ *un* Γ*-bimodule* $\mathfrak{h}$ *où l'on se donne :*

(i) *un crochet pour lequel* $\mathfrak{h}$ *est une algèbre de Lie sur* $\mathbf{k}$;

(ii) *un* Γ*-homomorphisme* ∂ *de* $\mathfrak{h}$ *dans* $\operatorname{Der}_{\mathbf{k}} \Gamma$ *tel que* $\mathfrak{h}$ *soit à la fois une algèbre de Lie à gauche et une algèbre de Lie à droite sur* $(\mathbf{k}, \Gamma)$ (*avec le crochet donné en* (i));

(iii) *un élément non nul* T_0 *de* $\mathfrak{h}$ *tel que :*

$$[\mathfrak{h}, T_0] = 0, \qquad \partial(T_0) = 0,$$
$$Y\lambda - \lambda\, Y = T_0\, \partial(Y).\lambda \quad \textit{pour tous } \lambda \in \Gamma \quad \textit{et} \quad Y \in \mathfrak{h}.$$

On notera cette algèbre de Lie bilatère $(\mathfrak{h}, \partial, T_0)$, *mais par abus de langage, on omettra souvent de noter* ∂ *et* T_0.

1.3. Algèbres enveloppantes

1.3.1. DÉFINITION. — *On dit que* L *est une algèbre décentrée sur* Γ *lorsque* L *a une structure d'anneau sur* Γ *et une structure de* Γ*-bimodule sur la même loi additive qui vérifient les formules d'associativité mixtes*

$$(Y.\lambda).Z = Y.(\lambda.Z),$$
$$(\lambda.Y).Z = \lambda.(Y.Z),$$
$$(Y.Z).\lambda = Y.(Z.\lambda),$$

pour tous $\lambda \in \Gamma$ *et* $Y, Z \in L$.

Un homomorphisme d'algèbre décentrée sur Γ *est un homomorphisme pour les deux structures précédentes, et une unité de* L *est une unité pour sa structure d'anneau.*

Soient $(\mathfrak{h}, \partial, T_0)$ une algèbre de Lie bilatère sur $(\mathbf{k}, \Gamma)$, et L une algèbre décentrée sur Γ ayant une unité notée 1_L. On appelle c-application de $\mathfrak{h}$ dans L une application π qui est Γ-linéaire à droite et telle que

$$\pi(T_0) = 1_L,$$
$$\pi([Y, Z]) = [\pi(Y), \pi(Z)] \qquad (Y, Z \in \mathfrak{h}),$$
$$\pi(Y).\lambda - \lambda.\pi(Y) = (\partial(Y)\lambda).1_L \ (= 1_L.(\partial(Y).\lambda) \text{ car } 1_L \text{ commute à } \Gamma).$$

On vérifie que π est automatiquement Γ-linéaire à gauche. De même que pour les algèbres de Lie, on a le problème universel :

Trouver une algèbre décentrée U sur Γ ayant une unité 1_U et une c-application π de $\mathfrak{h}$ dans U telles que, pour toute c-application π_1 de $\mathfrak{h}$ dans une algèbre décentrée L sur Γ ayant une unité 1_L vérifiant $\pi_1(T_0) = (1_L$, il existe un unique homomorphisme τ de U dans L tel que $\tau(1_U) = 1_L$ et $\pi_1 = \tau \circ \pi$.

La solution de ce problème est justement l'algèbre enveloppante réduite de la définition qui suit.

Soit $\mathscr{T}$ l'algèbre tensorielle du Γ-bimodule $\mathfrak{h}$, i. e. :

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_0 \oplus \mathscr{T}_1 \oplus \mathscr{T}_2 \oplus \ldots,$$

où $\mathscr{T}_0 = \Gamma$ et $\mathscr{T}_n = \mathfrak{h} \otimes_\Gamma \mathfrak{h} \otimes_\Gamma \ldots \otimes_\Gamma \mathfrak{h}$ (n facteurs); $\mathscr{T}$ est naturellement un Γ-bimodule et une algèbre filtrée.

1.3.2. DÉFINITION. — *Soit* $(\mathfrak{h}, \partial, T_0)$ *une algèbre de Lie bilatère sur* $(\mathbf{k}, \Gamma)$. *Soit* $\mathscr{I}$ *l'idéal bilatère de l'algèbre tensorielle* $\mathscr{T}$ *(du* Γ*-bimodule* $\mathfrak{h}$*) engendré par* $(T_0 - 1)$ (1) *et les éléments de la forme*

$$Y \otimes Z - Z \otimes Y - [Y, Z]$$

pour Y, Z *quelconques dans* $\mathfrak{h}$.

On appelle algèbre enveloppante réduite de $\mathfrak{h}$ *la* Γ*-algèbre décentrée* $\mathscr{T}/\mathscr{I}$, *et on la notera* $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$. *Elle est munie de la filtration quotient de celle de* $\mathscr{T}$ *que l'on notera* $\mathscr{E}(\mathfrak{h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_n(\mathfrak{h})$, $\mathscr{E}_n(\mathfrak{h})$ *étant l'ensemble des éléments de* $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$ *de filtration* $\leqslant n$.

1.3.3. DÉFINITION. — *Soit* $(\mathfrak{h}, \partial)$ *une algèbre de Lie unilatère sur* $(\mathbf{k}, \Gamma)$. *On appelle algèbre enveloppante de* $\mathfrak{h}$ *l'algèbre enveloppante réduite de* $(\mathfrak{h} \oplus \mathbf{k}\, T_0, \partial, T_0)$, *où* $\mathfrak{h} \oplus \mathbf{k}\, T_0$ *est algèbre de Lie bilatère obtenue par adjonction d'un élément* T_0 *central tel que* $\partial(T_0) = 0$. *On la note* $\mathscr{U}(\mathfrak{h})$ (2).

Si $(\mathfrak{h}, \partial)$ (resp. $(\mathfrak{h}, \partial, T_0)$) est une algèbre de Lie unilatère (resp. bilatère) qui admet $(T_1, \ldots, T_\sigma)$ (resp. $(T_0, T_1, \ldots, T_\sigma)$) comme famille génératrice sur Γ, alors l'ensemble des éléments de $\mathscr{U}(\mathfrak{h})$ (resp. de $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$) de la forme $T_1^{\alpha_1} \ldots T_\sigma^{\alpha_\sigma}$, où $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma) \in \mathbf{N}^\sigma$ est une famille génératrice à droite (ou à gauche) de $\mathscr{U}(\mathfrak{h})$ (resp. $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$) sur Γ. On a encore la généralisation suivante du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

---

(1) 1 est l'élément unité de $\Gamma = \mathscr{T}_0 \subset \mathscr{T}$.

(2) Pour une algèbre de Lie ordinaire (i. e. avec $\partial = 0$), on retrouve les notions classiques.

1.3.4. THÉORÈME DE POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT. — *Soit* $(\mathfrak{h}, \partial)$ (resp. $(\mathfrak{h}, \partial, T_0)$) *une algèbre de Lie unilatère* (resp. *bilatère*) *sur* $(\mathbf{k}, \Gamma)$ *admettant une base* $(T_1, \ldots, T_\sigma)$ (resp. $(T_0, T_1, \ldots, T_\sigma)$) *sur* Γ.

Soit $S(\mathfrak{h})$ *l'algèbre symétrique de* $\mathfrak{h}$ (resp. *le quotient de l'algèbre symétrique de* $\mathfrak{h}$ *considéré comme* Γ*-module à droite par l'idéal engendré par* $T_0 - 1$). *On note* $\mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$ *l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée* $\mathscr{U}(\mathfrak{h})$ (resp. $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$).

Il existe un isomorphisme canonique d'algèbre de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{h})$ *sur* $S(\mathfrak{h})$.

Il suffit de transposer la démonstration classique en utilisant l'algèbre $\mathscr{L}$ des applications $\mathbf{k}$-linéaires de $\Gamma[x_1, \ldots, x_\sigma]$ dans lui-même; $\mathscr{L}$ est alors une algèbre décentrée sur Γ.

Lorsque les hypothèses de 1.3.4 sont vérifiées, une Γ-base à droite (ou à gauche) de $\mathscr{U}(\mathfrak{h})$ (resp. $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$) est donnée par

$$\{ T_1^{\alpha_1} \ldots T_\sigma^{\alpha_\sigma};\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma) \in \mathbf{N}^\sigma \}.$$

Comme le gradué associé est une algèbre de polynômes, on en déduit les propriétés classiques d'intégrité des algèbres enveloppantes (réduites) lorsque Γ est intègre, d'être noethérien à droite ou à gauche si Γ est noethérien. En particulier, si Γ est noethérien et intègre, $\mathscr{U}(\mathfrak{h})$ (resp. $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$) est un anneau de Ore à gauche et à droite, et admet un corps des fractions. Ceci est donc le cas si Γ est un corps.

1.3.5. DÉFINITION [3]. — *On suppose* Γ *intègre. Soit* Δ *le corps des fractions de* Γ. *Soient* $(\mathfrak{h}, \partial, T_0)$ *une algèbre de Lie bilatère sur* $(\mathbf{k}, \Gamma)$ *admettant une base* $(T_0, T_1, \ldots, T_\sigma)$ *et* $(\mathfrak{h}_\Delta, \partial, T_0)$ *l'algèbre de Lie bilatère obtenue par extension des scalaires de* Γ *à* Δ.

On appelle corps enveloppant (*réduit*) *de* $\mathfrak{h}$ *le corps des fractions de* $\mathscr{E}(\mathfrak{h})$, *et on le notera* $\mathscr{F}(\mathfrak{h})$. *Il est canoniquement isomorphe au corps des fractions de* $\mathscr{E}(\mathfrak{h}_\Delta)$.

Dans le cas d'une algèbre de Lie unilatère $\mathfrak{h}$, *on définira son corps enveloppant* $\mathscr{K}(\mathfrak{h}) = \mathscr{F}(\mathfrak{h} \oplus k\, T_0)$.

1.3.6. APPLICATION. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \tilde{\times} \mathfrak{q}$ une algèbre de Lie produit semi-direct d'une sous-algèbre $\mathfrak{s}$ et d'un idéal abélien $\mathfrak{q}$ sur un corps de base $\mathbf{k}$. Soient $\Gamma = \mathscr{U}(\mathfrak{q})$ et $K = \mathscr{K}(\mathfrak{q})$.

Alors $\mathfrak{s}\,\Gamma$ est une algèbre de Lie à droite sur Γ, $\mathfrak{s}\,K$ est une algèbre de Lie à droite sur K (avec le crochet de $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$). Grâce au théorème de Poincaré-

---

[3] Ces définitions redonnent les notions classiques lorsque l'algèbre de Lie unilatère est une algèbre de Lie, c'est-à-dire lorsque $\partial = 0$.

Birkhoff-Witt, on voit sans peine que $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathscr{U}(\mathfrak{s}\,\Gamma)$ ou de $\mathscr{U}(\mathfrak{s}\,K)$ et que les corps de fractions sont les mêmes

$$\mathscr{K}(\mathfrak{g}) = \mathscr{K}(\mathfrak{s}\,\Gamma) = \mathscr{K}(\mathfrak{s}\,K).$$

2. Réduction de produits semi-directs

2.1. Données

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \tilde{\times} \mathfrak{q}$ une algèbre de Lie sur un corps $\mathbf{k}$, produit semi-direct d'une sous-algèbre $\mathfrak{s}$ de dimension ρ et d'un idéal abélien $\mathfrak{q}$ de dimension σ.

On note K le corps enveloppant de $\mathfrak{q}$ (que l'on identifie à $\mathbf{k}(q_1, \ldots, q_\sigma)$ si $(q_1, \ldots, q_\sigma)$ est une base de $\mathfrak{q}$). Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$, on note $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}\,K$ la sous-algèbre à droite sur K engendrée par $\mathfrak{n}$.

Quelle que soit la base $(X_1, \ldots, X_\rho)$ de $\mathfrak{s}$, le rang de la matrice

$$\mathscr{M} = ([X_i, q_j])_{i=1,\ldots,\rho;\, j=1,\ldots,\sigma} \tag{1}$$

est le même, et on le note r (4).

On suppose donnés :

(a) une base $(q_1, \ldots, q_\sigma)$ de $\mathfrak{q}$ et des éléments $W_1, \ldots, W_{\sigma-r}$ de K;

(b) une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{s}$ de dimension r munie d'une base $(P_1, \ldots, P_r)$;

(c) une base $(Y_1, \ldots, Y_{\rho-r})$ d'un supplémentaire de $\tilde{\mathfrak{p}}$ dans $\tilde{\mathfrak{s}}$;

tels que les propriétés qui suivent soient vraies :

(a') $W_1, \ldots, W_{\sigma-r}$ sont invariants sous l'action de $\mathfrak{s}$ (c'est-à-dire $[\mathfrak{s}, W_i] = 0$) et $K = \mathbf{k}(q_1, \ldots, q_\sigma) = \mathbf{k}(W_1, \ldots, W_{\sigma-r}, q_1, \ldots, q_r)$;

(b') $r = \text{rang}\,([P_i, q_j])_{i=1,\ldots,r;\, j=1,\ldots,r}$;

(c') pour tout $i = 1, \ldots, \rho-r$, on a $[Y_i, \tilde{\mathfrak{p}}] \subset \tilde{\mathfrak{p}}$.

2.2. Définitions immédiates

(i) soient $p_1, \ldots, p_r$ les uniques éléments de $\tilde{\mathfrak{p}}$ tels que

$$[p_i, q_j] = \delta_{i,j} \text{ (5)} \qquad \text{pour} \quad i, j = 1, \ldots, r;$$

---

(4) Lorsque $k = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$, r est égal à la dimension maximale des « orbites de $\mathfrak{s}$ » dans le dual $\mathfrak{q}^*$ de $\mathfrak{q}$.

(5) Par définition, $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon. On obtient les p_i en diagonalisant la matrice $([P_i, q_j])_{i=1,\ldots,r;\, j=1,\ldots,r}$ et $p_i \in \mathfrak{p}k[q_1, \ldots, q_n]\Delta^{-1}$, où Δ est le déterminant de cette matrice et est un polynôme en $q_1, \ldots, q_n$.

(ii) le commutant K' de K dans $\tilde{\mathfrak{s}}$ est de dimension $\rho - r$ d'après la définition de r. Compte tenu de (b'), on peut définir la projection θ de $\tilde{\mathfrak{s}}$ sur K' parallèlement à $\tilde{\mathfrak{p}}$; cette projection est K-linéaire à droite, a pour noyau $\tilde{\mathfrak{p}}$, et est une bijection de tout supplémentaire de $\tilde{\mathfrak{p}}$ sur K' ([6]);

(iii) d'après (a'), $W_1, \ldots, W_{\sigma-r}, q_1, \ldots, q_r$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{k}$. D'après (b'), $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}(W_1, \ldots, W_{\sigma-r})$ est égal au commutant de $\tilde{\mathfrak{p}}$ dans K; c'est aussi le corps des invariants (sous l'action de $\mathfrak{s}$) de K;

(iv) soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{q}$. On note $\mathfrak{s}^f$ le stabilisateur de f dans $\mathfrak{s}$, c'est-à-dire $\mathfrak{s}^f = \{ X \in \mathfrak{s}, [X, \mathfrak{q}] \subset \operatorname{Ker} f \}$.

On note K_f l'ensemble des éléments de K qui sont réguliers en f, c'est-à-dire ceux qui admettent une expression PQ^{-1} avec des polynômes $P, Q \in k[q_1, \ldots, q_\sigma]$ tels que $Q(\langle f, q_1 \rangle, \ldots, \langle f, q_\sigma \rangle) \neq 0$. On note E_f l'évaluation en f de K_f, définie par

$$E_f(PQ^{-1}) = P(\langle f, q_1 \rangle, \ldots, \langle f, q_\sigma \rangle) Q(\langle f, q_1 \rangle, \ldots, \langle f, q_\sigma \rangle)^{-1} \text{ ([7])},$$

et on généralise cette notion de manière évidente aux matrices, aux déterminants, etc., construits sur K_f.

Chaque élément de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})$ admet une expression unique sous la forme d'un polynôme ordonné en $X_1, \ldots, X_\rho$ à coefficients à droite et appartenant à K. Un tel élément sera dit régulier en f lorsque tous ces coefficients sont dans K_f ([8]), et l'ensemble des éléments réguliers d'un sous-ensemble A de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})$ est noté A_f. Comme précédemment, on définit l'évaluation E_f sur $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})_f$ comme l'application $\mathbf{k}$-linéaire de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})_f$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{s})$ obtenue en évaluant en f tous les coefficients dans ces polynômes ordonnés à coefficients à droite (et appartenant à K_f).

2.3. Proposition. — *Avec les données de* 2.1 *et les définitions de* 2.2, *on a:*

(i) $[p_i, p_j] = 0$ *pour tous* $i, j = 1, \ldots, r$;

(ii) $[\theta(Y_i), \tilde{\mathfrak{p}}] = 0$ *pour tout* $i = 1, \ldots, \rho - r$;

(iii) $[\theta(Y_i), \theta(Y_j)] = \theta([Y_i, Y_j])$ *pour tous* $i, j = 1, \ldots, \rho - r$;

([6]) Si X est un un élément de $\mathfrak{s}$, on a

$$\theta(X) = X - \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i [X, q_i] \in \mathfrak{s} + \mathfrak{p}\, k[q_1, \ldots, q_n]\, \Delta^{-1},$$

c'est-à-dire qu'il faut localiser par le dénominateur commun qui apparaît dans le calcul des p_i. Par linéarité de θ, on voit que le dénominateur réduit de $\theta(Y_i)$ divise le produit de Δ par le dénominateur propre de Y_i.

([7]) On note $\langle f, q_i \rangle$ la valeur de $f \in \mathfrak{q}^*$ au point $q_i \in \mathfrak{q}$. Clairement, E_f est un caractère de K_f, et il nous arrivera de noter $\langle f, PQ^{-1} \rangle = E_f(PQ^{-1})$.

([8]) En raisonnant à partir des monômes de degré le plus élevé, on voit que cette notion de régularité ne dépend pas de la base $(X_1, \ldots, X_\rho)$ de $\mathfrak{s}$ que l'on a choisie.

(iv) *le commutant* $\mathfrak{h}$ *de* $\tilde{\mathfrak{p}}$ *dans* K' (= *commutant* K *dans* $\tilde{\mathfrak{s}}$) *est une algèbre de Lie sur* $\mathbf{k}_1$ *qui admet* $(\theta(Y_1), \ldots, \theta(Y_{\rho-r}))$ *comme base, et pour tous* $i, j = 1, \ldots, \rho - r$, *on a*

$$[\theta(Y_i), \theta(Y_j)] = \sum_{k=1}^{\rho-r} c_{i,j}^k \theta(Y_k),$$
$$[Y_i, Y_j] \equiv \sum_{k=1}^{\rho-r} c_{i,j}^k Y_k \bmod \tilde{\mathfrak{p}},$$

les constantes de structure $c_{i,j}^k$ *sont des éléments de* $\mathbf{k}_1$;

(v) *les inclusions suivantes sont canoniques et sont des homomorphismes d'algèbres*

$$\mathscr{U}(\mathfrak{g}) \subsetneq \mathscr{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}_1} \mathscr{U}(\tilde{\mathfrak{p}})(^9) = \mathscr{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}_1} K[p_1, \ldots, p_r](^{10}) \subsetneq \mathscr{K}(\mathfrak{g}),$$
$$\mathscr{Z}(\mathfrak{g}) \subsetneq \mathscr{Z}(\mathfrak{h}),$$
$$\mathscr{K}(\tilde{\mathfrak{p}}) = K(p_1, \ldots, p_r) = \mathbf{k}_1(p_1, \ldots, p_r; q_1, \ldots, q_r)(^{11}),$$
$$\mathscr{K}(\mathfrak{g}) = \operatorname{Fract}(\mathscr{K}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}_1} \mathscr{K}(\tilde{\mathfrak{p}})),$$
$$\mathscr{C}(\mathfrak{g}) = \mathscr{C}(\mathfrak{h});$$

(iv) *lorsque la conjecture de Gel'fand-Kirillov* [3] *est vraie pour* $\mathfrak{h}$, *elle est vraie pour* $\mathfrak{g}$ [12].

(i) On vérifie que $[p_i, p_j]$ est un élément de $\tilde{\mathfrak{p}}$ qui commute à $q_1, \ldots, q_r$, et ceci entraîne sa nullité.

(ii) Comme $\theta(Y_i)$ commute à K par construction, on a

$$[[\theta(Y_i), \tilde{\mathfrak{p}}], K] \subset [[\theta(Y_i), K], \tilde{\mathfrak{p}}] + [\theta(Y_i), [\tilde{\mathfrak{p}}, K]] = \{0\}.$$

D'autre part, $[\theta(Y_i), \tilde{\mathfrak{p}}] \subset [Y_i + \tilde{\mathfrak{p}}, \tilde{\mathfrak{p}}] \subset \tilde{\mathfrak{p}}$, et on obtient encore $[\theta(Y_i), \tilde{\mathfrak{p}}] \subset \tilde{\mathfrak{p}} \cap K' = \{0\}$.

(iii) Rappelons que $\theta(X)$ est l'unique élément de $X + \tilde{\mathfrak{p}}$ qui commute à K. On a

$$[\theta(Y_i), \theta(Y_j)] \subset [Y_i + \tilde{\mathfrak{p}}, Y_j + \tilde{\mathfrak{p}}] \subset [Y_i, Y_j] + \tilde{\mathfrak{p}},$$

donc $[\theta(Y_i), \theta(Y_j)]$ est l'unique élément de $[Y_i, Y_j] + \tilde{\mathfrak{p}}$ qui commute à K, à savoir $\theta([Y_i, Y_j])$ lui-même.

---

(9) $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbf{k}_1$ et $\mathscr{U}(\mathfrak{h})$ une $\mathbf{k}_1$-algèbre.

(10) $K[p_1, \ldots, p_r]$ est une algèbre de polynômes non commutatifs avec les dérivations

$$\partial p_i(q_j) = \delta_{i,j}.$$

(11) $\mathbf{k}_1(p_1, \ldots, p_r; q_1, \ldots, q_r)$ est le corps des fractions de l'algèbre de Weyl

$$A^r(k_1) = \mathbf{k}_1[p_1, \ldots, p_r; q_1, \ldots, q_r] \quad ([1] \text{ et } [2]).$$

(12) En fait, $\mathbf{k}_1$ n'est pas nécessairement algébriquement clos, et on doit comprendre cette phrase mutatis-mutandi.

(iv) Comme $(Y_1, \ldots, Y_{\rho-r})$ est la base d'un supplémentaire dans $\tilde{\mathfrak{s}}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$, $(\theta(Y_1), \ldots, \theta(Y_{\rho-r}))$ est une base de K', et cette base est formée d'éléments qui commutent à $\tilde{\mathfrak{p}}$. Cet ensemble est encore une base sur $\mathbf{k}_1$ du commutant de $\tilde{\mathfrak{p}}$ dans K'. En effet, soit

$$Y = \textstyle\sum_{i=1}^{\rho-r} \theta(Y_i)\lambda_i \qquad \text{où} \quad \lambda_i \in K,$$

un élément quelconque de K' qui commute à $\tilde{\mathfrak{p}}$. Pour tout $j = 1, \ldots, r$, on a

$$0 = [p_j, Y] = \textstyle\sum_{i=1}^{\rho-r} \theta(Y_i)[p_j, \lambda_i],$$

d'où

$$[p_j, \lambda_i] = 0 \qquad \text{pour tout} \quad i = 1, \ldots, \rho - r \qquad \text{et tout} \quad j = 1, \ldots, r.$$

Donc λ_i commute à $\tilde{\mathfrak{p}}$, à $\tilde{\mathfrak{s}} = \tilde{\mathfrak{p}} + K'$ et à $\mathfrak{s}$. On en déduit que $\lambda_i \in k_1$.

C.Q.F.D.

Si l'on a $[Y_i, Y_j] \equiv \sum_{k=1}^{\rho-r} c_{i,j}^k \, Y_k \mod \tilde{\mathfrak{p}}$, nécessairement

$$[\theta(Y_i), \theta(Y_j)] = \theta([Y_i, Y_j]) = \textstyle\sum_{k=1}^{\rho-r} c_{i,j}^k \theta(Y_k),$$

et les éléments $c_{i,j}^k$, que l'on supposait initialement dans K, sont en fait dans $\mathbf{k}_1$.

(v) D'après 1.3.6, $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ s'identifie canoniquement au coups enveloppant de $\tilde{\mathfrak{s}}$. Développant sur la base $(\theta(Y_1), \ldots, \theta(Y_{\rho-r}), p_1, \ldots, p_r)$ de $\tilde{\mathfrak{s}}$, on a l'identification :

$$\begin{aligned} \mathscr{U}(\tilde{\mathfrak{s}}) &= \mathscr{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}_1} \mathscr{U}(\tilde{\mathfrak{p}}) = \mathscr{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}_1} K[p_1, \ldots, p_r] \\ &= \mathscr{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}_1} \mathbf{k}_1(q_1, \ldots, q_r)[p_1, \ldots, p_r] \\ &= \mathscr{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(q_1, \ldots, q_r)[p_1, \ldots, p_r] \end{aligned}$$

(Car $\mathscr{U}(\mathfrak{h})$ est déjà une algèbre sur $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}(W_1, \ldots, W_{\rho-r})$.)

De plus, $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ s'identifie canoniquement à une sous-algèbre de $\mathscr{U}(\tilde{\mathfrak{s}})$, et tout élément de $\mathscr{Z}(\mathfrak{g})$ s'identifie à un élément de $\mathscr{U}(\tilde{\mathfrak{s}})$ qui commute aux p_i, q_i et à $\mathfrak{h}$, donc à un élément de $\mathscr{Z}(\mathfrak{h})$.

Les identifications suivantes s'obtiennent par passage au corps des fractions.

(iv) Le centre de $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ est identifié au centre de

$$\mathscr{K}(\mathfrak{h}) \otimes k(q_1, \ldots, q_r; p_1, \ldots, p_r)$$

c'est-à-dire au centre $\mathscr{C}(\mathfrak{h})$ de $\mathscr{K}(\mathfrak{h})$. Si on peut écrire $\mathscr{K}(\mathfrak{h})$ comme un corps de Weyl sur son centre $\mathscr{C}(\mathfrak{h})$, clairement $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ s'écrit comme un corps de Weyl sur $\mathscr{C}(\mathfrak{h}) = \mathscr{C}(\mathfrak{g})$.

2.4. PROPOSITION (suite de 2.3). — *On reprend les données et les définitions de* 2.1 *et* 2.2. *Soient* Δ *le dénominateur commun de* $p_1, \ldots, p_r$ (*voir* les notes (5) et (6) de 2.2) *et* $f \in \mathfrak{q}^*$ *telle que* $\langle f, \Delta \rangle \neq 0$. *On note* $K'_f = (K')_f$ ([13]):

(i) *l'application* θ (resp. $E_f \circ \theta$) *transforme toute base d'un supplémentaire de* $\mathfrak{p}$ *dans* $\mathfrak{s}$ *en une base de* K'_f (resp. *de* $\mathfrak{s}^f$), *et on a*

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^f \oplus \mathfrak{p},$$
$$\mathfrak{s}^f = E_f(K'_f).$$

Dans la suite, soient $T_1, \ldots, T_{\rho-r} \in K'_f$ *tels que* $(E_f(T_1), \ldots, E_f(T_{\rho-r}))$ *est une base de* $\mathfrak{s}^f$. *On note* π *l'unique homomorphisme de* $\mathbf{k}$*-algèbre de* $\mathcal{U}(\mathfrak{s}^f)$ *dans* $\mathcal{U}(K'_f)$ *définie par les conditions* $\pi(E_f(T_i)) = T_i$ *pour* $i = 1, \ldots, \rho - r$;

(ii) $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ *est une base sur* K_f *de* K'_f;

(iii) $\mathcal{U}(K'_f)$ *et* $\mathcal{U}(K')_f$ *sont des* K_f*-algèbres qui sont isomorphes canoniquement;*

(iv) $E_f \mid \mathcal{U}(K'_f)$ *est un homomorphisme de* $\mathbf{k}$*-algèbre filtrée de* $\mathcal{U}(K'_f)$ *sur* $\mathcal{U}(\mathfrak{s}^f)$ *et admet* π *comme section* (*donc* $E_f(\mathcal{Z}(K'_f)) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{s}^f)$).

(v) *Supposons de plus que* $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ *soit une base sur* $\mathbf{k}_1$ *de* $\mathfrak{h}$ ([14]).

Alors $\mathfrak{h}_f$ (*qui est une* $\mathbf{k}_{1f}$*-algèbre de Lie*) *admet* $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ *comme* $\mathbf{k}_{1f}$*-base.* $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_f)$ *et* $\mathcal{U}(\mathfrak{h})_f$ *sont des* $\mathbf{k}_{1f}$*-algèbres qui sont canoniquement isomorphes.*

E_f *est un homomorphisme surjectif de* $\mathbf{k}$*-algèbre filtrée de* $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_f)$ *sur* $\mathcal{U}(\mathfrak{s}^f)$ *qui admet* π *comme section* (*donc* $E_f(\mathcal{Z}(\mathfrak{h}_f)) \subset \mathcal{Z}(\mathfrak{s}^f)$).

(i) Soit une base $(X_1, \ldots, X_\rho)$ de $\mathfrak{s}$ dont les derniers éléments sont $P_1, \ldots, P_r$.

Rappelons que les éléments $p_1, \ldots, p_r \in \tilde{\mathfrak{p}}$ s'obtiennent en inversant la matrice $([P_i, q_j])_{i=1, \ldots, r;\, j=1, \ldots, r}$, et, si l'on écrit :

$$p_i = \sum_{j=1}^r P_j \lambda_{j,i} \Delta^{-1}, \qquad \text{où} \quad \lambda_{i,j} \quad \text{et} \quad \Delta \in k[q_1, \ldots, q_\sigma],$$

alors $\sum_{j=1}^r [P_j, q_k] \lambda_{j,i} = \delta_{k,i} \Delta$, et il vient en évaluant

$$\sum_{j=1}^r \langle f, [P_j, q_k] \rangle \langle f, \lambda_{j,i} \rangle = \delta_{k,i} \langle f, \Delta \rangle,$$

ce qui montre la régularité de la matrice

$$(\langle f, [P_j, q_k] \rangle)_{j=1, \ldots, r;\, k=1, \ldots, r}.$$

([13]) Lorsque l'on notera A_f, on sous-entend que A s'identifie canoniquement à un sous-ensemble de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})$ de sorte que $A_f = A \cap \mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})_f$.

([14]) On pourra prendre $T_i = \theta(Y_i)$ pour $i = 1, \ldots, \rho - r$ lorsque $\theta(Y_i) \in K'_f$, et leurs images par E_f forment une base de $\mathfrak{s}^f$.

La matrice $\mathscr{M}$, étant définie en 2.1 (1) à partir de $(X_1, \ldots, X_\rho)$, $E_f(\mathscr{M})$ contient alors un mineur de rang r et de déterminant non nul. Comme $\operatorname{rang} E_f(\mathscr{M}) \leqslant \operatorname{rang} \mathscr{M} = r$, on a nécessairement $\operatorname{rang}(E_f(\mathscr{M})) = r$, et la codimension de $\mathfrak{s}^f$ est donc égale à r.

Comme $\langle f, \Delta \rangle \neq 0$, les p_i appartiennent à $\tilde{\mathfrak{s}}_f$ ainsi que les

$$\theta(X_i) = X_i - \textstyle\sum_{j=1}^r p_j [X_i, q_j]. \tag{2}$$

Par évaluation, $E_f(p_i) \in \mathfrak{p}$, donc

$$E_f(\theta(X_i)) = X_i - \textstyle\sum_{j=1}^r \langle f, [X_i, q_j] \rangle E_f(p_j) \in X_i + \mathfrak{p}.$$

En conséquence,

$$(E_f(\theta(X_1)), \ldots, E_f(\theta(X_{\rho-r})), P_1, \ldots, P_r)$$

est une base de $\mathfrak{s}$.

Il nous reste à montrer que $E_f(K'_f) \subset \mathfrak{s}^f$, et que $(\theta(X_1), \ldots, \theta(X_{\rho-r}))$ est une base de K'_f.

Soient $\mu \in K_f$ et $X = \sum_{i=1}^\rho X_i \lambda_i \in K'_f$. On a

$$[\mathfrak{s}, K_f] \subset K_f \qquad \text{et} \qquad 0 = [X, \mu] = \textstyle\sum_{i=1}^\rho [X_i, \mu] \lambda_i,$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_{i=1}^\rho \langle f, [X_i, \mu] \rangle \langle f, \lambda_i \rangle \\ &= \langle f, \textstyle\sum_{i=1}^\rho [\langle f, \lambda_i \rangle X_i, \mu] \rangle = \langle f, [E_f(X), \mu] \rangle, \end{aligned}$$

d'où l'inclusion cherchée.

Soit $X \in K'_f$. On a une expression

$$X = \textstyle\sum_{i=1}^\rho X_i \lambda_i, \qquad \text{où} \quad \lambda_i \in K_f.$$

D'après (2), on a

$$X - \textstyle\sum_{i=1}^{\rho-r} \theta(X_i) \lambda_i \in \tilde{\mathfrak{p}} \cap K' = \{0\},$$

ce qui termine la démonstration.

(ii) Choisissons la base $(X_1, \ldots, X_\rho)$ de $\mathfrak{s}$ dont les $\rho - r$ premiers éléments sont $X_i = E_f(T_i)$, et les r derniers éléments sont $X_{\rho-r+i} = P_i$.

On a alors

$$T_i = \textstyle\sum_{j=1}^\rho X_j \lambda_{j,i}, \qquad \lambda_{j,i} \in K_f \tag{3}$$

et

$$\langle f, \lambda_{j,i} \rangle = \delta_{i,j}, \qquad i, j = 1, \ldots, \rho - r.$$

En conséquence, f vaut 1 sur le déterminant de la matrice

$$(\lambda_{i,j})_{i=1,\ldots,\rho-r,\, j=1,\ldots,\rho-r},$$

et cette matrice est inversible dans K_f; notons $\mu_{i,j}$ les coefficients de son inverse. Compte tenu de (3), on a

$$(4)\qquad \textstyle\sum_{i=1}^{\rho-r} T_i \mu_{i,k} = \sum_{i=1}^{\rho-r} \sum_{j=1}^{\rho-r} X_j \lambda_{j,i} \mu_{i,k} + R_k = X_k + R_k,$$

où $R_k \in \tilde{\mathfrak{p}}$.

Comme le premier membre de (4) commute à K, nécessairement $X_k + R_k = \theta(X_k)$, et $\theta(X_k)$ est une combinaison K_f-linéaire de $T_1, \ldots, T_{\rho-r}$; $(\theta(X_1), \ldots, \theta(X_{\rho-r}))$ étant une base de K'_f, $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ l'est donc aussi.

(iii) Ainsi, $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ est une base de K'_f sur K_f. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt permet d'écrire tout $X \in \mathcal{U}(K'_f)$ sous la forme

$$(5)\qquad X = \textstyle\sum_{|\alpha| \leqslant n} T_1^{\alpha_1} \ldots T_{\rho-r}^{\alpha_{\rho-r}} \lambda_\alpha \quad (^{15}),$$

où n est le degré de X et tous les $\lambda_\alpha \in K_f$.

Par la suite, le calcul suivant sera répété plusieurs fois.

On reporte (3) dans (5), on développe en conservant l'ordre des facteurs, puis on regroupe tous les coefficients $\lambda_{j,i}$ à droite. Comme tous les T_i commutent à K, on retrouve alors exactement le même élément de $\mathcal{K}(\mathfrak{g})$ (ou de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})$) : il suffit de commencer à reporter (3) dans (5) en commençant par le premier T_i le plus à gauche; on développe ce terme, et comme tous les facteurs qui se trouve à sa droite commute à K, on peut regrouper tous les coefficients à droite de ces facteurs. En itérant ce calcul, on obtient le résultat annoncé.

Ainsi, on peut exprimer X comme une combinaison K_f-linéaire à droite d'éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{s})$, d'où $X \in \mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})_f \cap \mathcal{U}(K') = \mathcal{U}(K')_f$.

Inversement, soit X un élément de $\mathcal{U}(K')_f$ de degré n. On peut écrire encore une formule (5) avec des $\lambda_\alpha \in K$. Montrons par récurrence sur le degré n que l'on a nécessairement $\lambda_\alpha \in K_f$ pour tout α. Refaisons la même manipulation qu'auparavant, ce qui nous donne une somme de monômes en $X_1, \ldots, X_\rho$ à coefficients fonctions linéaires des λ_α et de degré $\leqslant n$. On réordonne ces monômes, et on les regroupe, et on obtient les termes de plus haut degré ($= n$) avec exactement les coefficients du polynôme commutatif.

$$(6)\quad P(x_1, \ldots, x_\rho) = \textstyle\sum_{|\alpha| = n} (\sum_{j=1}^{\rho} x_j \lambda_{j,1})^{\alpha_1} \ldots (\sum_{p=1}^{\rho} x_p \lambda_{p,\rho-r})^{\alpha_r} \lambda_\alpha.$$

Donc, les coefficients μ_β de

$$(7)\qquad P(x_1, \ldots, x_\rho) = \textstyle\sum_{|\beta| = n} x_1^{\beta_1} \ldots x_\rho^{\beta_\rho} \mu_\beta$$

appartiennent à K_f.

---

(15) Quand nous écrivons le symbole $\sum_{|\alpha| \leqslant n} \ldots$, nous sous-entendons une sommation sur le multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{\rho-r}) \in N^{\rho-r}$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{\rho-r} \leqslant n$.

Posant

$$(8) \qquad t_i = \sum_{j=1}^{\rho-r} x_j \lambda_{j,\,i}, \qquad i = 1, \ldots, \rho - r,$$

il vient

$$(9) \qquad x_j = \sum_{i=1}^{\rho-r} t_i \mu_{i,\,j} \qquad \text{car} \quad \sum_{i=1}^{\rho-r} \lambda_{k,\,i} \mu_{i,\,j} = \delta_{k,\,j}.$$

On fait $x_{\rho-r+1} = \ldots = x_\rho = 0$ dans (6) et (7), on reporte (8) dans (6) et (9) dans (7). On obtient alors le même polynôme en $t_1, \ldots, t_{\rho-r}$, donc les coefficients λ_α de (6) sont des combinaisons K_f-linéaires des coefficients μ_α de (7) (les $\mu_{i,\,j}$ sont les coefficients de la matrice inverse de $(\lambda_{k,\,i})_{k=1,\,\ldots,\,\rho-r;\; i=1,\,\ldots,\,\rho-r}$ et appartiennent à K_f). Ainsi, les λ_α pour $|\alpha| = n$ sont dans K_f et $X - \sum_{|\alpha|=n} T_1^{\alpha_1} \ldots T_{\rho-r}^{\alpha_{\rho-r}} \lambda_\alpha$ est encore un élément de $\mathcal{U}(K'_f)$. Son degré étant $< n$, on peut alors conclure.

(iv) Pour tout monôme en $T_1, \ldots, T_{\rho-r}$, on peut refaire la manipulation de (iii), et évaluer ses coefficients (à droite) par f. Ces coefficients étant des produits des $\lambda_{i,\,j}$, leur évaluation est égale au produit des valeurs correspondantes de f. On peut alors ramener tous les facteurs $\langle f, \lambda_{i,\,j} \rangle$ à la place initiale du facteur $\lambda_{i,\,j}$ dans le monôme en $T_1, \ldots, T_{\rho-r}$: on obtient immédiatement

$$E_f(T_{i_1} \ldots T_{i_n} \lambda) = E_f(T_{i_1}) \ldots E_f(T_{i_n}) \langle f, \lambda \rangle.$$

Comme, de plus, les T_i commutent à K_f, l'évaluation E_f est clairement un homomorphisme d'algèbre qui est surjective. Ecrivant tout élément X de $\mathcal{U}(K'_f)$ sous la forme (5), on voit que E_f respecte le degré et qu'il admet π comme section.

(v) Comme $\mathfrak{h}$ admet $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ comme base sur $\mathbf{k}_1$, on peut écrire pour tout $X \in \mathfrak{h}_f$:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{\rho-r} T_i \lambda_i \\ &= \sum_{i=1}^{\rho-r} \sum_{j=1}^{\rho} X_j \lambda_{j,\,i} \lambda_i, \qquad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbf{k}_1. \end{aligned}$$

Donc $\mu_j = \sum_{i=1}^{\rho-r} \lambda_{j,\,i} \lambda_i$ appartient a K_f ainsi que

$$\sum_{j=1}^{\rho-r} \mu_{k,\,j} \mu_j = \sum_{i=1}^{\rho-r} \sum_{j=1}^{\rho-r} \mu_{k,\,j} \lambda_{j,\,i} \lambda_i = \lambda_k.$$

Ainsi, $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ est une $\mathbf{k}_{1f}$-base de $\mathfrak{h}_f$.

Le reste de notre assertion se démontre exactement comme en (iii) et (iv), à quelques changements de K en $\mathbf{k}_1$ près.

2.5. Extension algébrique

Avec les données de 2.1 et 2.2, on suppose de plus $\mathbf{k} = \mathbf{C}$ pour simplifier. Soient $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1(\omega)$ une extension algébrique de $\mathbf{k}_1$ de degré n. On note

$$I_\omega(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0,$$

le polynôme irréductible unitaire de ω sur $\mathbf{k}_1$ (i. e. $a_i \in \mathbf{k}_1$). Pour tout $\mathbf{k}_1$-module M, on note $M[\omega]$ le module $M \otimes_{\mathbf{k}_1} \mathbf{k}_2$ obtenu par extension des scalaires de $\mathbf{k}_1$ à $\mathbf{k}_2$; on a ainsi les ensembles $K[\omega]$, $\tilde{\mathfrak{s}}[\omega]$, $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})[\omega]$, etc.

Soient $f \in \mathfrak{q}^*$, et E_f le caractère correspondant de K_f. Soit M un $\mathbf{k}_1$-module tel que M_f soit défini. On pose alors

$$M[\omega]_f = M_f \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}_{1f}[\omega] = M_f[\omega]$$

et les éléments de $M[\omega]_f$ sont dits réguliers en f.

Par exemple, $I_\omega(x)$ est régulier en f lorsque $a_i \in \mathbf{k}_{1f}$ pour tout i, et un élément X de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{s}})[\omega]$ est régulier en f s'il est de la forme

$$X = \textstyle\sum_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_\rho^{\alpha_\rho} \lambda_\alpha \qquad \text{où} \quad \lambda_\alpha \in K_f[\omega]$$

pour une base $(X_1, \ldots, X_\rho)$ de $\mathfrak{s}$ (ceci est indépendant de la base).

Supposons $I_\omega(x)$ régulier en f. Pour toute racine ν de l'équation $E_f(I_\omega(x)) = 0$, il existe un unique prolongement $E_f^{\sim}$ de E_f en un caractère de $K_f[\omega]$ tel que $E_f^{\sim}(\omega) = \nu$.

Comme auparavant, l'évaluation $E_f^{\sim}$ se prolonge à tout $K_f(\omega)$-module à droite munie d'une base canonique, et on note ce prolongement par le même symbole $E_f^{\sim}$.

Proposition. — *Dans les hypothèses de* 2.1 *et* 2.2 *avec* $\mathbf{k} = \mathbf{C}$, *on suppose qu'il existe une extension algébrique* $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1(\omega)$ *de* $\mathbf{k}_1$ *telle que*

$$\mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{k}_1} \mathbf{k}_2 = \mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}_2,$$

où $\mathfrak{h}_0$ *est une algèbre de Lie sur* $\mathbf{k}$ *de dimension* $\rho - r$ *contenue dans* $\mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{k}_1} \mathbf{k}_2$.

L'ensemble Ω *des formes linéaires* $f \in \mathfrak{q}^*$, *telles que*

(i) $\langle f, \Delta \rangle \neq 0$;

(ii) $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}_f[\omega]$;

(iii) $E_f^{\sim}(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{s}^f$ *pour un prolongement* $E_f^{\sim}$ *de* E_f *dont la restriction à* $K_f[\omega]$ *est un caractère de* $K_f[\omega]$,

contient un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{q}^*$.

Pour toute $f \in \Omega$, $\mathfrak{s}^f$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_0$, et E_f est une application surjective de $\mathscr{Z}(\mathfrak{h}_f)$ sur $\mathscr{Z}(\mathfrak{s}^f)$.

Si de plus $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$, E_f est encore une application surjective de $\mathscr{Z}(\mathfrak{h}_f) \cap \mathscr{Z}(\mathfrak{g})$ sur $\mathscr{Z}(\mathfrak{s}^f)$. On a de plus

$$\mathscr{Z}(\mathfrak{h}_f) \subset \mathscr{Z}(\mathfrak{h}) \subset \mathscr{Z}(\mathfrak{g})\mathbf{k}_1 \qquad \textit{donc} \quad \mathscr{Z}(\mathfrak{h}) = \mathscr{Z}(\mathfrak{g}) \quad \textit{si } \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}.$$

Les conditions (i) et (ii), qui s'expriment par la non nullité d'un certain nombre de polynômes, déterminent un ouvert non vide de $\mathfrak{q}^*$.

On a

$$\tilde{E}_f(\mathfrak{h}_0) \subset \tilde{E}_f(\mathfrak{h}_f[\varpi]) \subset E_f(\mathfrak{h}_f) \subset \mathfrak{s}^f$$

et la condition (iii) implique

$$\tilde{E}_f(\mathfrak{h}_0) = E_f(\mathfrak{h}_f) = \mathfrak{s}^f.$$

Soit $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ une base de $\mathfrak{h}$. L'ensemble des $f \in \mathfrak{q}^*$, pour lesquelles $T_1, \ldots, T_{\rho-r}$ sont réguliers et $(E_f(T_1), \ldots, E_f(T_{\rho-r}))$ est une base de $\mathfrak{s}^f$, est encore un ouvert non vide de $\mathfrak{q}^*$. Pour une telle f, $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ est une base sur $\mathbf{k}_{1f}$ de $\mathfrak{h}_f$ par 2.4 (v).

Supposons de plus (i) et (ii) vérifiés par f. D'après (ii), si $(U_1, \ldots, U_{\rho-r})$ est une base de $\mathfrak{h}_0$, on a

$$U_i = \textstyle\sum_{j=1}^{\rho-r} T_j \lambda_{j,i} \qquad \text{où} \quad \lambda_{j,i}\mathbf{k}_{1f}[\omega],$$

et par construction, il existe un polynôme $D(x)$ à coefficients dans $\mathbf{k}_{1f}$, et non multiple du polynôme $I_\omega(x)$ tel que

$$D(\omega) = \det(\lambda_{i,j})_{i=1,\ldots,\rho-r;\, j=1,\ldots,\rho-r}$$

(car ce déterminant est non nul dans $\mathbf{k}_1[\omega]$).

La condition « $E_f(D(x))$ ne s'annule pas en au moins un zéro de $E_f(I_\omega(x))$ » permet alors d'obtenir un ouvert non vide de $\mathfrak{q}^*$ (en effet, pour f en position générale, $E_f(D(x))$ est un polynôme non nul de degré $< n =$ degré de $I_\omega(x)$; imposons de plus à $I_\omega(x)$ d'être régulier en f, alors $I'_\omega(x)$ est encore régulier en f, et la résultante R de $I_\omega(x)$ et $I'_\omega(x)$ est un élément de $\mathbf{k}_{1f}$; si $\langle f, R\rangle \neq 0$, $E_f(I_\omega(x))$ a alors exactement n racines distinctes, et $E_f(D(x))$ ne peut pas s'annuler en n points compte tenu de son degré. Ceci détermine un ouvert non vide de $\mathfrak{q}^*$ vérifiant nos conditions).

Soit $f \in \Omega$. Soient $(T_1, \ldots, T_{\rho-r})$ une base de $\mathfrak{h}_f$ sur $\mathbf{k}_{1f}$, et $(U_1, \ldots, U_{\rho-r})$ une base de $\mathfrak{h}_0$. On a les formules

$$U_i = \textstyle\sum_{j=1}^{\rho-r} T_j \lambda_{j,i} \qquad \text{où} \quad \lambda_{j,i} \in \mathbf{k}_{1f}[\omega]. \tag{10}$$

Remarquons d'abord que $\tilde{E_f}$ est encore un homomorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathfrak{s}^f$; à cause des dimensions, c'est en fait un isomorphisme. Posons $Z_i = \tilde{E_f}(U_i)$.

Soit a un élément de $\mathscr{Z}(\mathfrak{s}^f)$; on peut écrire :

$$a = \sum_\alpha Z_1^{\alpha_1} \dots Z_{\rho-r}^{\alpha_{\rho-r}} a_\alpha \qquad \text{où} \quad a_\alpha \in \mathbf{k}.$$

L'élément $A = \sum_\alpha U_1^{\alpha_1} \dots U_{\rho-r}^{\alpha_{\rho-r}} a_\alpha$ est encore central dans $\mathscr{U}(\mathfrak{h}_0)$ et commute à $\mathfrak{h}_f \subset \mathfrak{h}_0 k_2$.

Compte tenu de (10), on peut écrire $A = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \omega^i$, où $A_i \in \mathscr{U}(\mathfrak{h}_f)$, et on vérifie immédiatement que A est central (i. e. commute à $T_1, \dots, T_{\rho-r}$) si, et seulement si, chacun des A_i commute à $T_1, \dots, T_{\rho-r}$. Si $\nu = \tilde{E_f}(\omega)$, il suffit de prendre $B = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \nu^i \in \mathscr{Z}(\mathfrak{h}_f)$ pour obtenir $E_f(B) = a$, d'où la surjectivité.

Supposons maintenant $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$. Soit A un élément de $\mathscr{Z}(\mathfrak{h}_f)$. Nous allons déterminer un élément $B' \in \mathscr{Z}(\mathfrak{h}_f) \cap \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \subset \mathscr{Z}(\mathfrak{g})$ tel que $E_f(B') = E_f(A)$, ce qui permettra de conclure.

Soit $(X_1, \dots, X_\rho)$ une base de $\mathfrak{s}$, d'où la formule

$$A = \sum_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_\rho^{\alpha_\rho} a_\alpha \qquad \text{avec} \quad a_\alpha \in K_f.$$

Soit D le dénominateur commun des a_α; on peut alors écrire

$$a_\alpha = b_\alpha D^{-1} \ \text{où} \ b_\alpha \in \mathbf{k}[q_1, \dots, q_\sigma],\ D \in \mathbf{k}[q_1, \dots, q_\sigma]$$

et est premier à l'ensemble des b_α (on a nécessairement $\langle f, D \rangle \neq 0$).

Posons $B = \sum_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_\rho^{\alpha_\rho} b_\alpha \in \mathscr{U}(\mathfrak{g})$. Soit $X \in \mathfrak{s}$. On a

$$0 = [X, A] = ([X, B] D - B[X, D]) D^{-2}.$$

En posant

$$[X, B] = \sum_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_\rho^{\alpha_\rho} c_\alpha, \qquad \text{où} \quad c_\alpha \in \mathbf{k}[q_1, \dots, q_\sigma],$$

il vient

$$0 = \sum_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_\rho^{\alpha_\rho} (c_\alpha D - b_\alpha [X, D]),$$

et grâce à l'indépendance algébrique de $X_1, \dots, X_\rho$ sur K,

$$c_\alpha D - b_\alpha [X, D] = 0 \quad \text{pour tout } \alpha.$$

Comme D est premier à l'ensemble des b_α, nécessairement D divise $[X, D]$ et comme $[X, D]$ a le même degré au plus que D en $q_1, \dots, q_\sigma$, il existe une constante $c \in \mathbf{k}$ telle que $[X, D] = c\,D$. Ainsi, $\mathbf{k}\,D$ est une représentation de dimension 1 de $\mathfrak{s}$, et comme $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{s}$, on a nécessairement $c = 0$.

Donc D est un invariant de $\mathbf{k}[q_1, \ldots, q_\sigma]$ et appartient à $\mathscr{Z}(\mathfrak{g})$. Il nous suffit alors de prendre $B' = \langle f, D \rangle^{-1} AD$ pour conclure. On a par ailleurs $A = BD^{-1} \in \mathscr{Z}(\mathfrak{g})\,\mathbf{k}_1$. Comme ce calcul vaut également pour tout $A \in \mathscr{Z}(\mathfrak{h})$, on a aussi $\mathscr{Z}(\mathfrak{h}) \subset \mathscr{Z}(\mathfrak{g})\,\mathbf{k}_1$.

3. Application aux groupes de déplacement

Dans la suite, n est un entier > 0. On munit $\mathbf{k}^{n+1} = \mathfrak{q}$ de sa base canonique $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$, et on travaille avec l'ensemble d'indices égal à $\{0, 1, \ldots, n\}$. Le groupe $\mathrm{gl}(n+1, \mathbf{k})$ agit dans $\mathbf{k}^{n+1}$ par son action naturelle, et on note $E_{i,j}$ l'unité matricielle canonique, i. e. la matrice telle que $E_{i,j}\, q_k = \delta_{j,k}\, q_i$; avec cette action, on définit le produit semi-direct $\mathrm{gl}(n+1, \mathbf{k}) \tilde{\times}\, \mathbf{k}^{n+1}$ dans lequel on considère encore abusivement que les éléments $E_{i,j}$ et q_k forment une base. On a alors les relations de commutation canoniques

$$[E_{i,j}, q_k] = \delta_{j,k}\, q_i,$$
$$[E_{i,j}, E_{k,l}] = \delta_{j,k}\, E_{i,l} - \delta_{i,l}\, E_{k,j}.$$

On note $\mathfrak{q}^m$ l'ensemble des polynômes en $q_0, \ldots, q_n$ homogènes de degré m. On appliquera les résultats de la partie 2 aux algèbres de Lie des sous-groupes classiques de déplacement, c'est-à-dire à des sous-algèbres de Lie de $\mathrm{gl}(n+1, k) \tilde{\times}\, \mathbf{k}^{n+1}$.

Comme on a pu se rendre compte, la technique utilisée dans la partie 2 a permis d'abréger énormément les calculs, et en particulier, il ne nous a pas été nécessaire d'expliciter tous les éléments de $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ que nous utilisons. Toutefois, comme ce sont des éléments qui forment des « bases canoniques » de sous-algèbres, nous les avons explicités dans l'appendice, car ils sont utiles pour tout usage explicite ultérieur.

3.1. : $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n+1, \mathbf{k}) \tilde{\times}\, \mathbf{k}^{n+1}$.

On prend $\mathfrak{s} = \mathrm{sl}(n+1, \mathbf{k})$, $\mathfrak{q} = \mathbf{k}^{n+1}$, $K = \mathbf{k}(q_0, \ldots, q_n)$.

La sous-algèbre $\mathfrak{p}$ a pour base $(E_{0,0} - E_{n,n}, E_{0,1}, \ldots, E_{0,n})$.

Les éléments suivants de $\mathrm{gl}(n+1, \mathbf{k})\, K$:

$$\begin{aligned}
Y_{i,j} &= E_{i,j} && \text{pour } i,j = 1, \ldots, n-1,\\
Y_{i,n} &= E_{i,n}\, q_0^{-1} && \text{pour } i = 1, \ldots, n-1,\\
Y_{n,n} &= E_{n,n} &&\\
Y_{n,i} &= E_{n,i}\, q_0 && \text{pour } i = 1, \ldots, n-1,\\
Z_i &= \textstyle\sum_{\alpha=0}^{n} E_{i,\alpha}\, q_\alpha - E_{n,n}\, q_i && \text{pour } i = 1, \ldots, n-1,\\
Z_n &= \textstyle\sum_{\alpha=0}^{n} E_{n,\alpha}\, q_\alpha\, q_0 - E_{n,n}\, q_n\, q_0, &&
\end{aligned}$$

forment une base d'un supplémentaire de $\tilde{\mathfrak{p}}$ dans gl $(n+1, \mathbf{k})\, K$ et stabilisent $\tilde{\mathfrak{p}}$. Par ailleurs, on vérifie rapidement que :

1° $(Y_{i,j})_{i=1, \ldots, n;\, j=1, \ldots, n}$ est une base canonique d'une algèbre gl $(n, \mathbf{k})$ formée d'unités matricielles, c'est-à-dire vérifie les relations de commutation canoniques;

2° $[Z_i, Z_j] = 0$, pour tous $i, j = 1, \ldots, n$;

3° $[Y_{i,j}, Z_k] = \delta_{j,k} Z_i$, pour tous $i, j, k = 1, \ldots, n$.

Ainsi, on peut considérer gl $(n, \mathbf{k})$ lui-même à la place de sl $(n, \mathbf{k})$ et appliquer la proposition 2.3. En ce qui nous concerne, il suffit de remarquer qu'en prenant des éléments de trace nulle obtenus par combinaison $\mathbf{k}$-linéaire des $Y_{i,j}$, on retrouve les éléments de sl $(n+1, \mathbf{k})\, K = \tilde{\mathfrak{s}}$, avec les relations de commutation correspondantes. On peut donc appliquer la proposition 2.3 à $\mathfrak{g}$, d'où l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ isomorphe à sl $(n, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^n$. Dans notre cas, on a $r = n+1$, et les seuls invariants de K sont les éléments de $\mathbf{k}$.

Par itération de ce calcul, on voit que $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ s'identifie au corps enveloppant d'une algèbre de Weyl de dimension $(n^2+3\,n)/2$ sur le centre de $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ qui est engendré sur $\mathbf{k}$ par un élément transcendant sur $\mathbf{k}$ (cet élément s'obtient pour $n = 0$ puisque $\mathfrak{g}$ est alors égal à $\mathbf{k}$ et est de dimension 1).

Un résultat semblable est déjà obtenu dans [3] pour l'algèbre gl $(n+1, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n+1}$. Pour cette dernière, les calculs sont plus faciles car il suffit de prendre pour $\mathfrak{p}$ la sous-algèbre de base $(E_{0,0}, E_{0,1}, \ldots, E_{0,n})$ et les éléments

$$Y_{i,j} = E_{i,j} \qquad \text{pour} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$Z_i = \textstyle\sum_{\alpha=0}^{n} E_{i,\alpha}\, q_\alpha \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n,$$

qui stabilisent $\tilde{\mathfrak{p}}$ et forment une base d'un supplémentaire de $\tilde{\mathfrak{p}}$ dans gl $(n+1, \mathbf{k})\, K$. On a alors les relations de commutation d'une base naturelle de gl $(n, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^n$, et on peut ainsi éviter les calculs laissés au soin du lecteur de la référence [3].

3.1.1. Proposition (*voir* l'appendice A.1). — $\mathfrak{g} = $ sl $(n+1, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n+1}$, $n \geqslant 1$.

Dans les conventions de 2.1 *et* 2.3, *on pose* $\mathfrak{s} = $ sl $(n+1, \mathbf{k})$, $\mathfrak{q} = \mathbf{k}^{n+1}$, $r = \sigma = n+1$, $\rho = n^2+2\,n$, $q_{n+1} = q_0$.

Il existe des éléments $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}\, q_0^{-2}$,

$$\theta(Y_{i,i}-Y_{n,n}),\ \theta(Y_{i,j}) \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}(\mathbf{k}+\mathbf{k}\,q_0^{-1}+\mathbf{k}\,q_0^{-2})$$

pour $i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$

$$\theta(Z_i) \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}^2(\mathbf{k}+\mathbf{k}\,q_0^{-1}) \qquad \textit{pour} \quad i = 1, \ldots, n,$$

tels que :

1° $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$ *et* $[p_i, q_j] = \delta_{i,j}$ *pour* $i, j = 1, \ldots, n+1$;

2° *les autres éléments* (*écrits avec* θ) *commutent aux* p_i, q_j *et forment une base canonique d'une sous-algèbre* $\mathfrak{h}$ *isomorphe à* $\mathrm{sl}(n, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^n$;

3° $\mathscr{K}(\mathfrak{g}) = \mathscr{K}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(p_1, \ldots, p_{n+1}; q_1, \ldots, q_{n+1})$;

4° $\mathscr{Z}(\mathfrak{h}) = \mathscr{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbf{k}(w)$, *où l'élément* w *s'obtient par récurrence en se ramenant au cas* $n = 1$ *et* $\mathrm{sl}(1, \mathbf{k}) = \{0\}$.

En particulier, la conjecture de Gel'fand et Kirillov est vraie pour $\mathfrak{g}$.

3.2 : $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(n+1, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n+1}$.

On prend la forme bilinéaire symétrique égale à

$$\mathscr{B}(\textstyle\sum_{i=0}^{n} x_i q_i, \sum_{j=0}^{n} y_j q_j) = \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}.$$

Dans tout ce paragraphe, si i est un entier, on note $i' = n-i$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est la sous-algèbre de $\mathrm{gl}(n+1, \mathbf{k})$ qui laisse invariante la forme $\mathscr{B}$. On pose

$$X_{i,j} = E_{i,j} - E_{j',i'} = -X_{j',i'}$$

et une base de $\mathfrak{s} = \mathrm{so}(n+1, \mathbf{k})$ est donnée par l'ensemble des $X_{i,j}$ tels que $0 \leqslant i < n$, $0 \leqslant j < i'$.

Rappelons les relations de commutations « canoniques » :

$$[X_{i,j}, X_{k,l}] = \delta_{j,k} X_{i,l} - \delta_{i,l} X_{k,j} - \delta_{i',k} X_{j',l} + \delta_{l,i'} X_{k,i'}$$

$$[X_{i,j}, q_k] = \delta_{j,i} q_i - \delta_{i',k} q_{j'}.$$

On prend $\mathfrak{q} = \mathbf{k}^{n+1}$, $K = \mathscr{K}(\mathfrak{q}) = \mathbf{k}(q_0, \ldots, q_n)$.

Le corps $\mathbf{k}_1$ des invariants est engendré sur $\mathbf{k}$ par $W = \sum_{i=0}^{n} q_i q_{i'}$, et on a

$$K = \mathbf{k}(W, q_0, \ldots, q_{n-1}).$$

La sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{s}$ a pour base $(X_{0,0}, X_{0,1}, \ldots, X_{0,n-1})$.

Les éléments suivants de $\tilde{\mathfrak{s}}$,

$$X_{i,j} \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,\ i = 1, \ldots, j-1,$$

$$Y_i = \textstyle\sum_{\alpha=0}^{n} X_{i,\alpha} q_\alpha \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

forment une base d'un supplémentaire dans $\tilde{\mathfrak{s}}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$ et stabilisent $\tilde{\mathfrak{p}}$. Les relations de commutations des $X_{i,j}$ (pour $i, j \neq 0, n$) sont celles d'une base d'une algèbre so $(n-1, \mathbf{k})$.

On a par ailleurs

$$[X_{i,j}, Y_k] = \delta_{j,k} Y_i - \delta_{i',k} Y_{j'},$$
$$[Y_i, Y_j] = X_{i,j'} W,$$

et les coefficients sont bien dans $\mathbf{k}_1$.

Ces relations sont celles d'une base d'une algèbre so $(n, \mathbf{k}_1)$. Lorsque n est impair, il est possible de trouver des éléments de base dont les coefficients de structure sont dans $\mathbf{k}$:

Pour tout réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, et on note $x_1 = [x] + [2x/n]$. on pose, pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$$X_{i,j}(-W)^{i-j} = Y_{i_1, j_1},$$
$$Y_i(-W)^{i-(n+1)/2} = Y_{i_1, (n+1)/2}.$$

On a alors les relations de commutations canoniques

$$[Y_{i,j}, Y_{k,l}] = \delta_{j,k} Y_{i,l} - \delta_{i,l} Y_{k,j} - \delta_{i'',k} Y_{j'',l} + \delta_{j'',l} Y_{k,i''},$$

où, pour tout entier i, on note $i'' = n+1-i$.

L'application de la proposition 2.3, après une réindexation évidente, donnera la proposition suivante.

3.2.1. Proposition (*voir* l'Appendice A.2). — $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(n+1, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n+1}$, *où n est un entier impair. Dans les conventions de* 2.1 *et* 2.3, *on prend* $\mathfrak{s} = \mathrm{so}(n+1, \mathbf{k})$, $\mathfrak{q} = \mathbf{k}^{n+1}$, $r = n$, $\rho = n(n+1)/2$, $\sigma = n+1$, $q_0 = q_{n+1}$ *et* $W_1 = W = \sum_{i=0}^{n} q_i q_{n-i}$.

Il existe des éléments

$$p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathfrak{s} q_0^{-1},$$
$$\theta(Y_{i,j}) \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}\, q_0^{-1} W^{1-j-[2i/n]+[2j/n]}$$

pour $i, j = 1, \ldots, n$ *et* $i, j \neq (n+1)/2$,

$$\theta(Y_{i,(n+1)/2}) \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}^2 q_0^{-1} W^{i-[2i/n]-(n+1)/2} \qquad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tels que :

1° $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$; $[p_i, q_j] = \delta_{i,j}$ *pour* $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$.

2° *les* $\theta(Y_{i,j})$ *commutent aux* p_i, q_j, *vérifient :*

$$\theta(Y_{i,j}) = -\theta(Y_{n+1-j, n+1-i}) \qquad \textit{pour} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

et pour $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n-i$, *les* $\theta(Y_{i,j})$ *forment une « base canonique » d'une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ *sur* $\mathbf{k}$ *isomorphe à* so $(n, \mathbf{k})$.

3° $\mathscr{K}(\mathfrak{g}) = \mathscr{K}(\mathfrak{h}) \otimes \mathbf{k}(p_0, \ldots, p_{n-1}; q_0, \ldots, q_{n-1}) \otimes \mathbf{k}(W)$.

4° $\mathscr{Z}(\mathfrak{g}) \subset \mathscr{Z}(\mathfrak{h}) \subset \mathscr{Z}(\mathfrak{g})\, \mathbf{k}(W)$.

Lorsque n est pair, pour faire disparaître W des constantes de structures, nous sommes obligés de faire une extension quadratique de $k(W)$ et d'introduire une racine carrée ω de W et éventuellement $\sqrt{2}$:

On pose, pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$ et $i, j \neq n/2, n/2+1$ comme précédemment,

$$X_{i,j} = Y_{i_1, j_1}$$

et pour les valeurs exceptionnelles

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(X_{i,n/2} - Y_i \omega^{-1}) = Y_{i_1, n/2} = -Y_{n/2+1, n+1-i_1} \quad \text{si} \quad i \neq n/2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(X_{i,n/2} + Y_i \omega^{-1}) = Y_{i_1, n/2+1} = -Y_{n/2, n+1-i_1}$$

$$-Y_{n/2}\omega^{-1} = Y_{n/2, n/2} = -Y_{n/2+1, n/2+1}$$

Les relations de commutations des $Y_{i,j}$ sont alors celles d'une base canonique de so $(n, \mathbf{k})$ (déployé). On peut encore appliquer la proposition 2.3 à quelques changements évidents près :

3.2.2. PROPOSITION (*voir* l'Appendice A.2). — $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(n+1, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n+1}$, *n entier pair* < 0, *car* $\mathbf{k} \neq 2$.

Dans les conventions de 2.1, 2.3 *et* 2.5, *on prend*

$$\mathfrak{s} = \mathrm{so}(n+1, \mathbf{k}), \qquad \mathfrak{q} = \mathbf{k}^{n+1}, \qquad r = n,$$

$$\rho = n(n+1)/2, \qquad \sigma = n+1, \qquad q_0 = q_{n+1},$$

$$W_1 = W = \textstyle\sum_{i=0}^{n} q_i q_{n-i}, \qquad \omega = W^{1/2}.$$

Il existe des éléments

$$p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathfrak{s} q_0^{-1};$$

$$\theta(Y_{i,j}) \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}\, q_0^{-1}$$

pour $i, j = 1, \ldots, n$ *et* $i, j \neq n/2, (n/2)+1$;

$$\theta(Y_{n/2, n/2}) = -\theta(Y_{n/2+1, n/2+1}) \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}^2 \omega^{-1} q_0^{-1},$$

$$\theta(Y_{i, n/2}) = -\theta(Y_{n+1-i, n/2+1}) \in \mathfrak{s}(\mathfrak{q} + \mathfrak{q}^2 \omega^{-1}) q_0^{-1} \sqrt{2},$$

tels que :

1° $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$ *et* $[p_i, q_j] = \delta_{i,j}$ *pour* $i, j = 0, \ldots, n-1$.

2° *les* $\theta(Y_{i,j}) = -\theta(Y_{n+1-j,\, n+1-i})$ *commutent aux* p_i, q_j *et, pour* $i = 1, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, n-i$, *forment une « base canonique » de* $\mathfrak{h}_0$ *qui est isomorphe à* $\mathrm{so}(n, \mathbf{k})$.

3° $\mathscr{K}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(\sqrt{2}, \omega)$

$$= \mathscr{K}(\mathfrak{h}_0) \otimes \mathbf{k}(p_0, \ldots, p_{n-1}; q_0, \ldots, q_{n-1}) \otimes \mathbf{k}(\sqrt{2}, \omega).$$

4° *Un résultat similaire à* 3° *vaut aussi lorsque l'on ne fait pas l'extension par* ω *et* $\sqrt{2}$.

3.3 : $\mathfrak{g} = \mathrm{sp}(m, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{2m}$.

On suppose $n+1 = 2m$ dans les notations de la partie 3. Pour tout entier $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $\varepsilon_i = (-1)^{[i/m]}$ et $i' = n-i$. On considère la forme bilinéaire antisymétrique

$$\mathscr{B}(\textstyle\sum_{i=0}^n x_i q_i, \sum_{j=0}^m y_i q_j) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i x_i y_{i'}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{s} = \mathrm{sp}(m, \mathbf{k})$ est le stabilisateur de $\mathscr{B}$. On pose

$$X_{i,j} = E_{i,j} - \varepsilon_i \varepsilon_j E_{j',i'} = -\varepsilon_i \varepsilon_j X_{j',i'}.$$

Une base de $\mathfrak{s}$ est formée par les $X_{i,j}$ tels que $0 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant i'$. Les relations de commutations sont :

$$[X_{i,j'}, q_k] = \delta_{j,k} q_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \delta_{i',k} q_{j'}$$

$$[X_{i,j}, X_{k,l}] = \delta_{j,k} X_{i,l} - \delta_{i,l} X_{k,j} - \varepsilon_i \varepsilon_j (\delta_{i',k} X_{j',l} - \delta_{j',l} X_{k,i'}).$$

Le corps des invariants de $K = \mathscr{K}(\mathfrak{q})$ est réduit à $\mathbf{k}$.

La sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{s}$ a pour base $(X_{0,0}, X_{0,1}, \ldots, X_{0,n})$, et lorsque l'on diagonalise, on introduira q_0^{-2}.

Les éléments suivants de $\tilde{\mathfrak{s}}$:

$$X_{i,j}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, i',$$

$$Z_i = \textstyle\sum_{k=0}^n X_{i,k} q_k, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$Z_n = \textstyle\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \varepsilon_i X_{i,k} q_{i'} q_k,$$

stabilisent $\tilde{\mathfrak{p}}$ et forment une base d'un supplémentaire dans $\tilde{\mathfrak{s}}$ de $\tilde{\mathfrak{p}}$. Les relations de commutations des $X_{i,j}$ sont celles d'une « base canonique » de $\mathrm{sp}((n-1)/2, \mathbf{k})$, les Z_i commutent entre eux, et

$$[X_{i,j}, Z_k] = \delta_{j,k} Z_i - \varepsilon_i \varepsilon_j \delta_{i',k} Z_{j'}.$$

Ainsi, Z_n commute aux $X_{i,j}$ et aux Z_i, et $(Z_1, \ldots, Z_{n-1}) \cup \{X_{i,j}\}$ possède les relations de commutations « canoniques » d'une base de sp $((n-1)/2, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n-1}$. Par application de 2.3, on a donc la proposition suivante :

3.3.1. PROPOSITION (*voir* l'Appendice A.3). — $\mathfrak{g} = \mathrm{sp}((n+1)/2, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n+1}$, *où n est impair* $\geqslant 1$.

Dans les conventions de 2.1 *et* 2.3, *on prend* $\mathfrak{s} = \mathrm{sp}\,(n+1)/2, \mathbf{k}$, $\mathfrak{q} = \mathbf{k}^{n+1}$, $r = \sigma = n+1$, $\rho = (n+1)(n+2)/2$, $q_0 = q_{n+1}$.
Il existe des éléments

$$p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}\, q_0^{-2},$$
$$\theta(X_{i,j}) \in \mathfrak{s}(\mathfrak{q}\, q_0^{-1} + \mathfrak{q}^2 q_0^{-2}), \qquad i = 1, \ldots, n-1, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$
$$\theta(Z_i) \in \mathfrak{s}\mathfrak{q}^2 q_0^{-1}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$\theta(Z_n) = \textstyle\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n X_{i,j}\, \varepsilon_i\, q_{n-i}\, q_j = W_1,$$

tels que

1° $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0$ *et* $[p_i, p_j] = \delta_{i,j}$ *pour* $i, j = 0, 1, \ldots, n$.

2° *Les éléments écrits avec* θ *vérifient*

$$\theta(X_{i,j}) \doteq -\varepsilon_i \varepsilon_j\, \theta(X_{n-j,n-i}), \qquad \text{où} \quad \varepsilon_i = (-1)^{[2i/(n+1)]},$$

et si on tient compte de ces redondances, ces éléments forment une base d'une algèbre de Lie sur $\mathbf{k}$ *isomorphe à* sp $((n-1)/2, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^n$ *dont le centre est engendré par* $\theta(Z_n) = W_1$;

3° $\mathscr{K}(\mathfrak{g}) = \mathscr{K}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(p_0, \ldots, p_n; q_0, \ldots, q_n)$;

4° $\mathscr{Z}(\mathfrak{h}) = \mathscr{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbf{k}[W_1, \ldots, W_{(n+1)/2}]$ *où* $W_1, \ldots, W_{(n+1)/2}$ *sont algébriquement indépendants sur* $\mathbf{k}$;

5° $\mathscr{C}(\mathfrak{h}) = \mathscr{C}(\mathfrak{g}) = k(W_1, \ldots, W_{(n+1)/2})$;

6° $\mathscr{K}(\mathfrak{g})$ *est isomorphe au corps des fractions d'une algèbre de Weyl* $A_{(n+1)(n+3)/4}$ *sur son centre (et vérifie la conjecture de Gel'fand-Kirillov).*

3.4. Le cas du groupe de Poincaré : $\mathfrak{g} = \mathrm{so}\,(4, \mathbf{C}) \times^{\sim} \mathbf{C}^4$

Dans le cas du groupe de Poincaré complexe, qui relève de la proposition 3.2.1, on connaît une base de $\mathfrak{h}$ dans laquelle n'intervient pas la localisation par q_0, mais seulement une division par $\omega = W^{1/2}$ (on a repris les notations de 3.2.1 et 3.2.2). Elle est couramment utilisée par les physiciens et est formée des opérateurs de spin de Wigner ([7], [13]). Il se trouve que l'on peut aussi prendre une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ dont les éléments appartiennent à $\mathscr{U}(\mathfrak{g})\, W^{-1}$. Cette sous-algèbre étant isomorphe à so (3, $\mathbf{C}$) pour laquelle la conjecture de Gel'fand-Kirillov est vraie, il en est de même de $\mathfrak{g}$.

Nous donnons les calculs dans la forme la plus proche de celle utilisée par les physiciens, c'est-à-dire avec la forme quadratique

$$\mathscr{B}(\textstyle\sum_{i=0}^{3} x_i q_i, \sum_{j=0}^{3} y_j q_j) = \sum_{i=0}^{3} x_i y_i,$$

où (q_0, q_1, q_2, q_3) est la base canonique de $\mathbf{C}^4$.

Les matrices antisymétriques

$$X_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i} = -X_{j,i}$$

engendrent $\mathfrak{s} = \mathrm{so}(4,\mathbf{C})$, et forment une base pour $i = 0, 1, 2$; $i < j \leqslant 3$. On a le premier invariant $W = \sum_{i=0}^{3} q_i q_i$, ce qui nous oblige à choisir par exemple $q_0 + iq_3$, q_1, q_2 pour avoir

$$K = \mathbf{C}(q_0, q_1, q_2, q_3) = \mathbf{C}(W, q_0 + iq_3, q_1, q_2).$$

On sait que $\mathrm{so}(4,\mathbf{C}) \simeq \mathrm{sl}(2,\mathbf{C}) \times \mathrm{sl}(2,\mathbf{C})$. On prend pour $\mathfrak{p}$ l'une de ces sous-algèbres de base, par exemple,

$$(X_{0,1} - X_{2,3}, X_{0,2} - X_{3,1}, X_{0,3} - X_{1,2}).$$

Le commutant K' de K dans $\tilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}\, K$ est engendré par les opérateurs de spin de Wigner

$$w_\mu = \frac{1}{2}\textstyle\sum_{\nu,\rho,\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} X_{\nu\rho} q_\sigma \qquad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

où $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ est la signature de la permutation $(0, 1, 2, 3) \to (\mu, \nu, \rho, \sigma)$. K' est une algèbre de Lie sur K de type sl (2), et contient la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de type $\mathrm{sl}(2, \mathbf{k})$ ayant pour base les éléments :

$$\begin{aligned} X &= (w_0 q_1 - w_1 q_0 + w_2 q_3 - w_3 q_2) W^{-1}, \\ Y &= (w_0 q_2 - w_2 q_0 + w_3 q_1 - w_1 q_3) W^{-1}, \\ Z &= (w_0 q_3 - w_3 q_0 + w_1 q_2 - w_2 q_1) W^{-1}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que X commute à $X_{0,1} - X_{2,3}$ et à $X_{0,2} - X_{3,1}$, donc à $X_{0,3} - X_{1,2}$ aussi, ce dernier étant proportionnel au commutateur des deux premiers. Par permutations circulaires des indices 1, 2, 3, on a tous les autres commutateurs. Comme X, Y, Z commutent déjà à K, ils commutent aussi aux quantités conjuguées qui appartiennent à $\tilde{\mathfrak{p}}$.

D'après 3.3 (iv), $\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}(W)$, donc $[X, Y] = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{k}(W)$. Par homogénéité, on aura $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{q}^4 W^{-2} \cap K[W] W^{-2} = k$, ce qui montre que (X, Y, Z) est la base d'une algèbre de Lie sur $\mathbf{k}$.

En fait, on a $[X, Y] = -Z$, c'est-à-dire les relations de commutation d'une base canonique de $\mathrm{sl}(2, \mathbf{k})$ ([7], [8]).

3.5. Applications aux représentations induites des algèbres de déplacements

Pour les groupes de déplacement correspondants aux algèbres que nous venons d'étudier, nous obtenons un résultat concernant la non-équivalence infinitésimale des représentations induites :

Notons $G = S \times^{\sim} Q$ le groupe de déplacement correspondant à $\mathfrak{s} \times^{\sim} \mathfrak{q}$, où Q est son sous-groupe invariant commutatif. Pour chaque forme linéaire $f \in \mathfrak{q}^*$, soient e^f le caractère correspondant de Q, et S^f le stabilisateur de f dans S. Soient ρ une représentation irréductible de S^f et $\Pi' = e^f \times \rho$ la représentation correspondante de $S^f \times^{\sim} Q$. Soit Π la représentation induite à G par Π' [5]. Sur les vecteurs C^∞ de la représentation Π [14], les éléments invariants W_i (*cf.* 2.1) agissent par multiplication par $\langle E_f, W_i \rangle$. Comme E_f applique surjectivement $\mathscr{Z}(\mathfrak{g}) \cap \mathscr{Z}(\mathfrak{h}_f) \subset \mathscr{Z}(\mathfrak{g})$ sur $\mathscr{Z}(\mathfrak{s}^f)$, (pour f en position générale) pour tout élément $a \in \mathscr{Z}(\mathfrak{s}^f)$, il existe un élément $A \in \mathscr{Z}(\mathfrak{g})$ tel que $E_f . A = a$.

Supposons donnés f_1 et f_2 en position générale. Si f_1 et f_2 ne sont pas sur la même orbite, $(\langle E_{f_i}, W_1 \rangle, \ldots, \langle E_{f_i}, W_{\sigma-r} \rangle)$ n'est pas le même pour $i = 1$ ou $i = 2$. Les représentations induites ne sont donc pas infinitésimalement équivalentes. Si f_1 et f_2 sont sur la même orbite, on peut alors (par conjugaison) supposer $f_1 = f_2$. Les représentations induites diffèrent alors par les représentations ρ_1 et ρ_2 de S^f. Si ρ_1 n'est pas infinitésimalement équivalente à ρ_2 (nous entendons par là que, pour un certain $a \in \mathscr{Z}(\mathfrak{s}^f)$, la valeur propre correspondante à $\rho_1(a)$ n'est pas égale à celle de $\rho_2(a)$), $\Pi_i(A)$ opère par multiplication par le même scalaire que $\rho_i(a)$ et Π_1 n'est pas infinitésimalement équivalente à Π_2. Ceci répond à une question posée par A. GUICHARDET [4].

IV. APPENDICE

A.1 : $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n+1, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n+1}$.

Base de $\mathbf{k}^{n+1}$: $(q_0, \ldots, q_n)$.

Quantités conjuguées : Pour $i = 0, \ldots, n$,

$$p_i = E_{0,i} q_0^{-1} - \delta_{0,i} (E_{n,n} q_0 - E_{0,n} q_n) q_0^{-2}.$$

Base de $\mathfrak{h}$: les indices i, j varient dans $\{1, \ldots, n\}$,

$$\theta(Y_{i,j}) = (E_{i,j} q_0 - E_{0,j} q_i) q_0^{-1+\delta_{i,n}-\delta_{j,n}},$$

$$\theta(Z_i) = \{E_{0,n} q_n q_i - E_{n,n} q_0 q_i + \textstyle\sum_{\alpha=0}^{n} (E_{i,\alpha} q_0 - E_{0,\alpha} q_i) q_\alpha\} q_0^{-1+\delta_{i,n}}.$$

En ce qui concerne les éléments diagonaux $\theta(Y_{i,i})$, il faut considérer ceux de trace nulle, par exemple $\theta(Y_{i,i})-\theta(Y_{n,n})$, pour obtenir des éléments de la base de $\mathfrak{h}$.

A.2 : $\mathfrak{g} = \mathrm{so}(n+1, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{n+1}$.

Si i est un entier, on note $i' = n-i$.

Élément invariant : $W = \sum_{i=0}^{n} q_i q_{i'}$.

Base de $\mathbf{k}^{n+1}$: $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$. On choisit $q_0, \ldots, q_{n-1}$ pour compléter W.

Quantités conjuguées : $p_i = (E_{0,i}-E_{i',n})\, q_0^{-1}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$.

Base de $\mathfrak{h}$: $(i = 1, 2, \ldots, n-1; j = 1, 2, \ldots, i'-1)$,

$$\theta(X_{i,j}) = \{(E_{i,j}-E_{j',i'})\, q_0-(E_{0,i}-E_{j',n})\, q_i+(E_{0,i'}-E_{i,n})\, q_{j'}\}\, q_0^{-1},$$

$$\theta(Y_i) = \sum_{\alpha=0}^{n} \{(E_{i,\alpha}-E_{\alpha',i'})\, q_0-(E_{0,\alpha} E_{\alpha',n})\, q_i+(E_{0,i'}-E_{i,n})\, q_{\alpha'}\}\, q_\alpha q_0^{-1}.$$

A.3 : $\mathfrak{g} = \mathrm{sp}(m, \mathbf{k}) \times^{\sim} \mathbf{k}^{2m}$.

On pose $n+1 = 2m$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ est la partie entière de x, $\varepsilon_x = (-1)^{[x/m]}$ et $x' = n-x$. On a alors $\varepsilon_x \varepsilon_{x'} = -1$.

Base de $\mathbf{k}^{n+1}$: $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$.

Quantités conjuguées : $(i = 0, 1, \ldots, n)$,

$$p_i = \{E_{0,i} q_0-\varepsilon_i(E_{i',n} q_0-E_{0,n} q_{i'})\}\, q_0^{-2}.$$

Base de $\mathfrak{h}$: $(i = 1, \ldots, n-1; j = 1, \ldots, i')$,

$$\begin{aligned}\theta(X_{i,j}) = \{E_{i,j} q_0-E_{0,j} q_i &\\ &+\varepsilon_j(E_{i,n} q_{j'}+E_{j',n} q_i-2E_{0,n} q_i q_{j'} q_0^{-1})\\ &\qquad -\varepsilon_i \varepsilon_j(E_{j',i}\, q_0-E_{0,i'} q_{j'})\}\, q_0^{-1},\end{aligned}$$

$$\theta(Z_i) = \sum_{j=0}^{n} \{E_{i,j} q_0-E_{0,j} q_i+\varepsilon_j E_{j',n} q_i-\varepsilon_i \varepsilon_j E_{j',i'}\}\, q_j q_0^{-1},$$

$$\theta(Z_n) = Z_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} X_{i,j}\, \varepsilon_i q_{i'} q_j \qquad \text{(élément central).}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dixmier (J.). — Sur les algèbres de Weyl, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 96, 1968, p. 209-242.

[2] Dixmier (J.). — *Algèbres enveloppantes.* — Paris, Gauthier-Villars, 1974 (*Cahiers scientifiques*, 37).

[3] Gel'fand (I. M.) et Kirillov (A. A.). — *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie.* — Paris, Presses universitaires de France, 1966 (*Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques*, 31, p. 5-20).

[4] GUICHARDET (A.). — *Communication privée.*

[5] HERZ (J.). — Pseudo-algèbres de Lie, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 236, 1953, série A, p. 1935-1937.

[6] MACKEY (G. W.). — Induced representations of locally compact groups, *Annals of Math.*, t. 55, 1952, p. 101-139; t. 58, 1953, p. 193-221.

[7] MARTINEZ ALONSO (L.). — Group theoretical foundations of classical and quantum mechanics, I: Observables associated with Lie algebras, *J. math. Phys.*, t. 18, 1977, p. 1577-1581.

[8] MARTINEZ ALONSO (L.). — *Tesis doctoral*, Dep. Fis. teor., Univ. Complut. Madrid, 1975.

[9] NGHIEM-XUAN HAI. — *Sous algèbres commutatives et représentations de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble*, Thèse Sc. math. Univ. Pierre-et-Marie-Curie (Paris-VI), Paris, 1976.

[10] NGHIEM-XUAN HAI. — *Sur certaines représentations d'une algèbre de Lie résoluble complexe*, II, Publ. Départ. Math. Orsay, n° 213, 76-63.

[11] RINEHART (G. S.). — Differential form on general commutative algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 108, 1963, p. 195-222.

[12] RICHTI (R.). — *Twisted Hopf algebras.* — Zürich, Forschungsinstitut für Mathematik, E.T.H., 1977 (Preprint).

[13] SCHWEBER (S. S.). — *An introduction to relativistic quantum field theory.* — New York, Harper and Row, 1961 (*Harper international Student Reprint*).

[14] WARNER (G.). — *Harmonic analysis on semi simple Lie groups*, Vol. I and II. — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 188-189).