BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE RABOIN

Le problème du $\overline{\partial}$ sur un espace de Hilbert

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 225-240

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__225_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 225-240.

LE PROBLÈME DU $\bar{\partial}$ SUR UN ESPACE DE HILBERT

PAR

PIERRE RABOIN (*)

[Université Nancy-I]

RÉSUMÉ. — On propose une résolution de l'équation $\bar{\partial} f = F$ sur un espace de Hilbert H (de dimension infinie) : si F est une forme de type (0,1) sur un ouvert pseudoconvexe Ω dans H, $\bar{\partial}$-fermée, on construit par approximation une fonction f régulière sur $\Omega \cap TH$ où T est un opérateur compact, solution de l'équation. Ce résultat permet de résoudre quelques problèmes demeurés ouverts en analyse complexe en dimension infinie, comme le premier problème de Cousin sur un espace dual de Fréchet nucléaire.

ABSTRACT. — We propose here a resolution of the $\bar{\partial}$-equation on an Hilbert space H: let F be a (0,1), $\bar{\partial}$-closed form on a pseudoconvex open set Ω in H; it is possible to construct a function f on $\Omega \cap TH$ where T is a compact given operator, which satisfies $\bar{\partial} f = F$. This makes possible to solve some open problems in complex analysis in infinite dimension, such as the Cousin's first problem on a $\mathcal{D}FN$ space.

Introduction

Dans une première tentative d'appliquer les techniques hilbertiennes à la résolution de l'équation $\bar{\partial} f = F$ sur un espace de Hilbert de dimension infinie, on avait obtenu une solution « au sens des distributions », dans tout l'espace, pour un second membre F à croissance exponentielle [16]. Il a fallu pour cela définir un prolongement de l'opérateur $\bar{\partial}$ au sens de L^2, et on doit constater que la solution obtenue est d'un intérêt assez limité car le noyau de cet opérateur ne se réduit pas aux fonctions analytiques au sens de Fréchet. Il était donc nécessaire d'étudier l'existence de solutions régulières, le seul résultat connu jusqu'ici étant celui de C. J. HENRICH [12], qui met en évidence le phénomène suivant, nouveau par rapport à la dimension finie : si F est à croissance polynomiale sur l'espace tout entier H, il existe

(*) Texte reçu le 18 mars 1978.

Pierre RABOIN, Mathématiques, Université de Nancy-I, Case officielle n° 140, 54030 Nancy Cedex.

une solution f *régulière sur un sous-espace propre de* H. Ce phénomène était d'ailleurs déjà clairement apparu à propos de la théorie du potentiel de L. GROSS en dimension infinie [9], et est essentiellement dû à l'absence d'une mesure analogue à la mesure de Lebesgue. On améliore ici le résultat de HENRICH, en résolvant l'équation sur un ouvert pseudoconvexe de H (sans condition de croissance sur F), sans échapper toutefois à la contrainte précédente : la solution obtenue n'est régulière que sur l'image d'un opérateur compact injectif. Cette restriction limite singulièrement la portée du théorème obtenu quant à son application aux problèmes d'analyse complexe en dimension infinie. On donne cependant, avec le théorème 3, un élément de réponse au premier problème de Cousin sur un espace de Fréchet nucléaire à base.

Notations

Si H est un espace de Hilbert complexe séparable, H^R est l'espace réel sous-jacent, et $\bar{H}$ l'espace complexe conjugué. Si T est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint et injectif sur H, on sait qu'il existe une base orthonormale de H formée de vecteurs propres $\{ e_j \}$ de T, associés aux valeurs propres $\{ \lambda_j \}$, telles que la série de terme général λ_j^2 soit convergente : on note $\| T \|$ la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur T. On désigne par H_T l'espace image TH, muni de la structure hilbertienne complexe définie par le produit scalaire $(x, y)_{H_T} = (T^{-1} x, T^{-1} y)$. Pour tout entier positif n, H_n est le sous-espace propre de dimension complexe n défini par

$$H_n = \oplus_{j=1}^{n} \mathbf{C}\, e_j,$$

et P_n la projection orthogonale de H sur H_n.

On désigne par μ_T la mesure gaussienne centrée d'opérateur de corrélation T^2 et, pour tout z dans H, par $\mu_{T,z}$ la mesure translatée de z, définie par

$$\mu_{T,z}(B) = \mu_T(B-z), \quad \text{pour tout borélien } B \text{ dans } H.$$

On sait [19] que, pour tout z dans TH, les mesures μ_T et $\mu_{T,z}$ sont équivalentes, et que la dérivée de Radon-Nikodym de $\mu_{T,z}$ par rapport à μ_T est donnée par

$$(1) \quad \frac{d\mu_{T,z}}{d\mu_T}(x) = \rho_T(x, z) = \exp -\frac{1}{2}\{ \| T^{-1} z \|^2 - 2\,\mathrm{Re}(T^{-1} z, T^{-1} x)\},$$

la série $(T^{-1} z, T^{-1} x)$ étant convergente μ_T-presque partout sur H.

Un calcul immédiat montre que $\rho_T(., z)$ est de carré μ_T-sommable, avec

$$(2) \qquad \int_H (\rho(x, z))^2 \, d\mu_T(x) = \exp - \| z \|_{H_T}^2, \quad \text{pour tout } z \text{ dans } H_T.$$

Les espaces de fonctions intégrables seront toujours relatifs à la mesure μ_T.

Une propriété sera dite vérifiée localement dans un ouvert Ω de H, si elle est vraie sur toute boule de Ω située à une distance strictement positive de la frontière $\partial\Omega$ de Ω.

Si f est une fonction μ_T-mesurable, pour tout z dans H, la fonction $x \to f(x+z)$ est aussi μ_T-mesurable; on la note ${}_z f$.

Enfin, B_R désignera la boule centrée en 0 et de rayon R.

On commence par démontrer deux lemmes assez techniques.

LEMME 1. — *Si g est une fonction localement de carré sommable sur H, la fonction G, définie sur H, par*

$$G(z) = \int_B g(x) . \exp(z, T^{-1} x) \, d\mu_T(x),$$

où B est un borné dans H, est différentiable, et sa différentielle, donnée par

$$(3) \qquad d_z G = \int_B g(x) . \exp(z, T^{-1} x) . T^{-1} x \, d\mu_T(x)$$

est de type borné sur H.

Preuve. — On considère, pour tout z et pour tout a dans H, la fonction $G_{z,a}$ d'une variable réelle, définie par

$$G_{z,a}(\lambda) = G(z + \lambda a) = \int_B g(x) . \exp(z, T^{-1} x) . \exp \lambda (a, T^{-1} x) . d\mu_T(x),$$

compte tenu de l'inégalité

$$| \exp \lambda (a, T^{-1} x) | < 1 + | \lambda | . \exp \mathrm{Re} (a, T^{-1} x),$$

on peut appliquer le théorème de Lebesgue-Leibnitz et affirmer que $G_{z,a}$ est dérivable à l'origine, avec

$$G'_{z,a}(0) = \int_B g(x) (a, T^{-1} x) . \exp(z, T^{-1} x) \, d\mu_T(x).$$

D'après l'inégalité de Schwarz et un calcul élémentaire, on obtient alors

$$| G'_{z,a}(0) | < \| a \| . \| g \|_{L^2(B)} (1 + 4 \| z \|^2)^{1/2} . e^{4 \| z \|^2}.$$

La fonction G est donc différentiable au sens de GATEAUX sur H, avec une dérivée faible continue : elle est donc différentiable au sens de FRÉCHET sur H, et sa différentielle satisfait l'estimation

$$\| G'(z) \| < \| g \|_{L^2(B)} . (1+4 \| z \|^2)^{1/2} e^{4 \| z \|^2},$$

ce qui permet de conclure.

LEMME 2. — *Pour toute fonction* φ *localement bornée et localement uniformément continue sur* H, *la fonction* Φ, *définie sur* H *par*

$$\Phi(z) = \int_{B_R + z} \varphi(x)\, d\mu_T(x),$$

est différentiable en tout point de H *dans la direction du sous-espace* H_T, *et*

(i) *si* μ_T^S *est la mesure de surface de la sphère* $S(z, R)$, *bord de* $B_R + z$, *et si* n_x *est le vecteur normal unitaire extérieur à cette sphère en* x, *on a*

$$d_z \Phi = \int_{S(z,R)} \varphi(x)\, n_x\, d\mu_T^S(x); \tag{4}$$

(ii) *la fonction* $z \to \| d_z \varphi \|_{H_T}$ *est localement bornée sur* H;

(iii) *pour tout* h *dans* H_T, *la fonction* $z \to d_z \varphi(h)$ *est continue sur* H.

Preuve. — On va utiliser la propriété suivante de la mesure μ_T ([19] : § 20, théorème 1) : soit u un vecteur unitaire dans H, $L = R . u$ la droite réelle engendrée par u, L_1 le supplémentaire orthogonal de L dans H. Si θ est l'isomorphisme de H sur $R \times L_1$, défini par $\theta(t . u + y) = (t, y)$, si μ_{L_1} est la projection de la mesure μ_T sur L_1, alors, pour u dans H_T, la mesure $\tilde{\mu}_T$, image de la mesure μ_T par θ, est équivalente à la mesure produit $\tilde{\mu} = dt \times \mu_{L_1}$, avec, plus précisément,

$$\frac{d\tilde{\mu}_T}{d\tilde{\mu}}(t, y) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_T(tu + y; \tau u)\, d\tau \right)^{-1}$$

soit, tous calculs faits,

$$\frac{d\tilde{\mu}_T}{d\tilde{\mu}}(t, y) = \frac{\| T^{-1} u \|}{\sqrt{2\pi}} . \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ t . \| T^{-1} u \| + \frac{\operatorname{Re}(T^{-1} u, T^{-1} y)}{\| T^{-1} u \|} \right\}^2 \right) \tag{5}$$

Soit h un vecteur non réel dans H_T, et soit u le vecteur unitaire porté pour h. Pour tout y dans $P_{L_1}(B(z, R))$, où P_{L_1} désigne la projection orthogonale sur L_1, on désigne par $[t_1(y), t_2(y)] . u$ le segment découpé par la boule $B(z, R)$ sur la droite réelle $t \to y+t.u$. On peut alors écrire l'accroissement $\Phi(z+h)-\Phi(z) = \Delta\Phi(z; h)$:

$$\Delta\Phi(z;h)=\int_{P_{L_1}\,|\,B(z,R)\,|}\int_{t_2(y)}^{t_2(y)+h}-\int_{t_1(y)}^{t_1(y)+h}\varphi(y+t.u)$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{2}\left\{t.\|T^{-1}u\|^2+\frac{\mathrm{Re}(T^{-1}u, T^{-1}y)}{\|T^{-1}u\|}\right\}^2\right)d\mu_{L_1}(y)\,dt.$$

Or, la fonction à intégrer, qui est définie sur $(L_1-N)\times R$, où $\mu_{L_1}(N)=0$, est localement uniformément continue en t quand y parcourt $P_{L_1}(B(z, R))$, ce qui permet d'écrire :

(6) $\Delta\Phi(z; h)$

$$=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{P_{L_1}(B(z,R))}\right|(y+t.u)\times\exp$$
$$-\frac{1}{2}\left\{t\|T^{-1}u\|^2+\frac{\mathrm{Re}(T^{-1}y,T^{-1}u)}{T^{-1}u}\right\}^2\Bigg|_{t_1(y)}^{t_2(y)}\times d\mu_{L_1}(y)\Bigg|$$
$$\times|h|_{H_T}+O(|h|)$$

ou encore, compte tenu de [19] (§ 27, théorème 1),

$$\Delta\Phi(z;h)=\int_{S(z,R)}\varphi(x)(n_x, h)\,d\mu_T^S(x)+O(|h|),$$

ce qui démontre que Φ est bien différentiable en z dans la direction de H_T, avec l'expression (4) de la différentielle.

De (6), on déduit immédiatement que

$$\|d_z\Phi\|_{H_T}<2\|\varphi\|_{P_{L_1}(B(z,R))},$$

ce qui prouve, (ii).

Enfin, pour y fixé dans $P_{L_1}(B(z, R))$, $t_1(y)$ et $t_2(y)$ dépendent continûment de z, la frontière de $P_{L_1}(B(z, R))$ est μ_{L_1}-négligeable, si bien que (iii) s'obtient en appliquant le théorème de convergence dominée.

Remarque. — L'expression (4) est la généralisation d'une formule classique dans $\mathbf{R}^N$; on peut d'ailleurs s'inspirer d'une méthode de démonstration de [11] (§ 354), en s'aidant d'une formule de GAUSS en dimension infinie ([8], [19]). On signale aussi une autre forme de la différentielle, obtenue dans une situation analogue par [1] (exemple 1.2), à partir d'un résultat de [6].

THÉORÈME 1. — *Soit Ω un ouvert borné dans H. Pour tout entier n positif, f_n est une fonction continûment dérivable, à dérivée de type borné sur le cylindre $\Omega^n = P_n^{-1}(\Omega \cap H_n)$. On suppose en outre que :*

(*a*) *la suite (f_n) converge faiblement vers l'application f dans l'espace $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$;*

(*b*) *la suite $(\bar{\partial} f_n)$ est localement bornée dans son ensemble, et converge simplement sur Ω vers une application F de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.*

Alors,

(i) *la suite (f_n) converge simplement sur $\Omega \cap H_T$ vers l'application f^*, définie par*

$$(7)\quad f^*(z).\mu_T(B) = \int_{B_\varepsilon} f(x+z).d\mu_T(x) + 2\int_0^1 \int_{B_\varepsilon} F(z+rx)(x)\, dr\, d\mu_T(x),$$

pour tout z dans H_T et pour tout nombre ε positif tels que la boule $B_\varepsilon + z$ soit contenue dans Ω, et la fonction f^* est localement uniformément continue sur $H_T \cap \Omega$;

(ii) *la fonction f^* est différentiable sur $H^{\mathbf{R}}_{T^2} \cap \Omega$; sa différentielle est de type borné et faiblement continue sur $H_{T^2} \cap \Omega$;*

(iii) *enfin, f^* satisfait à l'équation $\bar{\partial}_z f^*(h) = F(z)(h)$ pour tout z dans $\Omega \cap H_{T^2}$ et pour tout h dans H_{T^3}.*

Démonstration. — Pour tout ε positif assez petit, Ω^ε désignera l'ouvert formé des points situés à une distance supérieure à ε du bord de Ω. Aucune confusion n'étant à craindre, pour tout entier positif p, on note encore par μ_T la mesure gaussienne centrée sur H_{T^p}, dont l'opérateur de corrélation est défini par le système des valeurs propres $\{\lambda_j^2\}$, associées à la base orthonormale $\{\lambda_j^p e_j\}$ de H_{T^p}.

(i) Pour tout z dans $\Omega^{2\varepsilon} \cap H_T$, et pour n assez grand, la boule $B(z, \varepsilon)$ est contenue dans le cylindre Ω^n. La formule intégrale de Cauchy ([14], 1.2.3), appliquée à la fonction $\zeta \to f_n(z+\zeta.x)$, où x est dans B_ε, sur le disque unité du plan complexe, donne

$$f_n(z) = \int_0^{2\pi} f_n(z+xe^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} + 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \bar{\partial} f_n(z+rxe^{i\theta})(xe^{i\theta})\, dr \frac{d\theta}{2\pi}.$$

En intégrant en x sur la boule B_ε par rapport à la mesure μ_T, on obtient, compte tenu de l'invariance de μ_T par rotation sur le sous-espace propre H_n,

$$f_n(z).\mu_T(B_\varepsilon) = \int_{B_\varepsilon} f_n(x+z)\, d\mu_T(x) + 2\int_0^1 \int_{B_\varepsilon} \bar{\partial} f_n(z+rx)(x)\, dr\, d\mu_T(x)$$

$$= \int_{B_\varepsilon + z} f_n(x) \cdot \rho_Z(x, z)\, d\mu_T(x)$$
$$+2\int_0^1 \int_{B_\varepsilon} \bar\partial f_n(z+rx)(x)\, dr\, d\mu_T(x).$$

Comme la densité de translation $\rho_T(\,.\,; z)$ est de carré sommable, la première intégrale converge vers $\int_{B_\varepsilon + z} f(x) \cdot \rho_T(x, z)\, d\mu_T(x)$. L'assertion (i) découle alors de l'hypothèse (b) et de la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Pour toute fonction f dans L^2_{loc}, l'application $z \mapsto {}_z f$ est localement uniformément continue de H_T dans L^1_{loc}, et pour toute boule B de Ω située à une distance strictement positive de $\partial\Omega$, on a :*

$$\|{}_z f\|_{L^1(B)} \leqslant \|f\|_{L^2(B+z)}, \tag{8}$$

$$\int_B f(x+z)\, d\mu_T(x) = \int_{B+z} f(x) \cdot \rho_T(x; z)\, d\mu_T(x). \tag{9}$$

Démonstration de la proposition. — Soit (f_n) une suite de fonctions continues à support borné dans H_n, telle que la suite $(f_n \circ P_n)$ converge vers f dans L^2_{loc}. Pour tout couple d'entiers p, q, on a, d'après (2),

$$\|{}_z f_p - {}_z f_q\|_{L^1(B)} = \int_{B+z} |f_p(x) - f_q(x)| \cdot \rho_T(x, z)\, d\mu_T(x)$$
$$\leqslant \|f_p - f_q\|_{L^2(B+z)}.$$

Il en résulte que la suite $({}_z f_n)$ converge vers ${}_z f$ dans L^1_{loc}, que

$$\|{}_z f\|_{L^1(B)} \leqslant \|f\|_{L^2(B+z)},$$

et que

$$\int_B {}_z f \cdot d\mu_T = \lim_{n\to\infty} \int_B {}_z f_n \cdot d\mu_T = \int_{B+z} f(x)\, \rho_T(x; z)\, d\mu_T(x).$$

De plus, pour tous z, z' dans H_T, et pour tout entier n positif, on a

$$\|{}_z f - {}_{z'} f\|_{L^1(B)} \leqslant \|{}_z f - {}_z f_n\|_{L^1(B)} + \|{}_z f_n - {}_{z'} f_n\|_{L^1(B)} + \|{}_{z'} f_n - {}_{z'} f\|_{L^1(B)}$$
$$\leqslant \|f - f_n\|_{L^2(B+z)} + \|f - f_n\|_{L^2(B+z')} + \|{}_z f_n - {}_{z'} f_n\|_{L^1(B)}.$$

En fixant n assez grand, puis en utilisant l'uniforme continuité de f_n, on obtient l'uniforme continuité de : $z \mapsto {}_z f$ sur tout borné.

(ii) La suite (f_n) étant faiblement convergente dans L^2_{loc} est bornée dans L^2_{loc}. Ceci, joint à l'hypothèse (b) et à l'inégalité (8), montre que la suite (f_n) est localement bornée sur $\Omega \cap H_T$. On écrit alors (7) pour la mesure de Gauss sur H_T et pour z dans H_{T2}, la boule B étant celle de H_T : la suite (f_n) étant simplement convergente sur $\Omega \cap H_T$ et localement bornée, on peut, toujours grâce à (8), passer à la limite sous le signe somme dans (7) pour obtenir la représentation intégrale suivante f^* sur $\Omega \cap H_{T2}$:

$$(10)\quad f^*(z)\,\mu_T(B_\varepsilon) = \int_B f^*(x+z)\,d\mu_T(x) + 2\int_0^1 \int_B F(z+rx)(x)\,dr\,d\mu_T(x).$$

De nouveau, pour l'étude de la différentiabilité de f^*, seule la première intégrale pose un problème. On considère, pour la résoudre, la fonction g définie sur $(\Omega^{2\varepsilon} \cap H_{T2}) \times H_T$ par

$$(11)\qquad g(z_1, z_2) = \int_{B_\varepsilon + z_2} f^*(x).\rho_T(x;\, z_1)\,d\mu_T(x).$$

D'après la proposition intervenant dans la démonstration du point (i), g peut encore se mettre sous la forme

$$(12)\qquad g(z_1, z_2) = \int_{B_\varepsilon + z_2 - z_1} f^*(x+z_1)\,d\mu_T(x).$$

Alors, d'après les lemmes 1 et 2 appliqués respectivement aux expressions (11) et (12), g admet des dérivées partielles en tout point (z_1, z_2) de $(\Omega^{2\varepsilon} \cap H_T) \times H_T$, qui valent

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial z_1}(z_1, z_2)(h) &= \int_{B_\varepsilon + z_2} f^*(x).\rho_T(x, z_1).(h_1, T^{-1}x)_{H_T}\,d\mu_T(x),\\
&= \int_{B_\varepsilon + z_2 - z_1} f^*(x+z_1).(h_1, T^{-1}x + T^{-1}z_1)_{H_T}\,d\mu_T(x),\\
\frac{\partial g}{\partial z_2}(z_1, z_2)(h) &= \int_{S_\varepsilon + z_2 - z_1} f^*(x+z_1)(n_x, h_2)_{H_T}\,d\mu_T^S(x),
\end{aligned}$$

pour tout $h = (h_1, h_2)$ dans $H_{T2} \times H_{T2}$.

Il reste, pour achever la démonstration du point (ii), à vérifier la continuité de ces deux dérivées partielles.

Désignant par χ la fonction caractéristique de la boule B_ε, et par F l'intégrant définissant $\partial g/\partial z_1$, on a

$$\Delta\frac{\partial g}{\partial z_1} = \int \Delta\chi.F\,d\mu_T + \int \chi.\Delta F\,d\mu_T,$$

le premier accroissement tend vers zéro d'après le théorème de convergence dominée; quant au second, il tend aussi vers zéro d'après la proposition énoncée en (i).

D'autre part, en appliquant le théorème de convergence dominée à l'expression développée sous la forme (5) de l'intégrale de surface définissant $\partial g/\partial g_2$, on constate également la continuité de $\partial g/\partial z_2$.

(iii) D'après le point (ii), les hypothèses d'applications de la proposition 1.10 de [16] sont satisfaites sur H_{T^2}, si bien que, pour toute fonction ψ de classe $\mathscr{C}^1$ à support borné dans $\Omega \cap H_{T^2}$ et à dérivée de type borné, et pour tout z dans H_{T^3}, on a la formule d'intégration par parties suivante :

$$\int_{H_{T^2}} \bar{\partial}_x f^*(z).\psi(x)\, d\mu_{T^2}(x) = -\int_{H_{T^2}} f^*(x).\bar{\delta}_x \psi(z).\, d\mu_{T^2}(x), \tag{13}$$

avec

$$\bar{\delta}_x \psi(z) = \bar{\partial}_x \psi(z) - \frac{1}{2}(T^{-1}x,\, T^{-1}z)_{H_{T^2}}.\psi(x).$$

Pour tout entier positif n, on a de même

$$\int_{H_{T^2}} \bar{\partial}_x f_n(z).\psi(x)\, d\mu_T(x) = -\int_{H_{T^2}} f_n(x).\bar{\delta}_x \psi(z)\, d\mu_T(x).$$

En répétant l'argument développé au début de la démonstration du point (ii), et en appliquant l'hypothèse (b), on peut alors passer à la limite dans chacun des membres de la relation précédente, et on obtient ainsi :

$$\int_{H_{T^2}} F(x).\psi(x)\, d\mu_T(x) = -\int_{H_{T^2}} f^*(x).\bar{\delta}_x \psi(z)\, d\mu_T(x). \tag{14}$$

La comparaison de (13) et (14) permet enfin de conclure.

THÉORÈME 2. — *Soit F une forme différentielle fermée de type* (0,1) *de classe $\mathscr{C}^\infty$ et de type borné sur un ouvert pseudoconvexe Ω borné dans H. Alors, pour tout opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint et injectif T sur H, il existe une application f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\Omega \cap H_{T^3}$, solution de l'équation $\bar{\partial} f = F$.*

Démonstration. — L'application F étant de type borné sur Ω borné, on peut trouver une fonction φ de la forme $\chi(-\log d(.\,;\partial\Omega))$ avec χ convexe croissant assez vite, qui soit plurisousharmonique sur Ω telle que $\|F\|^2 \leqslant e^\varphi$ sur Ω.

Pour tout entier n positif, on pose

$$\varphi_n = \varphi\,|_{H_n} \circ P_n,$$

$$F_n(z) = \textstyle\sum_{j=1}^n \dot{F}_j(P_n z).\bar{e}_j, \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \Omega^n,$$

avec

$$\dot{F}_j(z) = F(z)(e_j).$$

Si T_n est l'application linéaire de $\mathbf{C}^n$ dans H_n, définie par

$$T_n(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j e_j,$$

le forme différentielle $\tilde{F}_n$, définie sur l'ouvert pseudoconvexe

$$E_n = T_n^{-1}(\Omega \cap H_n)$$

par

$$\tilde{F}_n(z) = \sum_{j=1}^n \lambda_j . \dot{F}_j(T_n z)\, d\bar{z}_j,$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$, $\bar{\partial}$ fermée, et si on pose

$$\tilde{\varphi}_n(z) = \varphi \circ T_n(z) + \frac{1}{2}\|z\|^2_{\mathbf{C}^n} \quad \text{pour tout } z \text{ dans } E_n,$$

on a, en notant σ_{2n} la mesure de Lebesgues dans $\mathbf{R}^{2n}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{E_n} \|\tilde{F}_n(z)\|^2 . \exp(-\tilde{\varphi}_n(z)) . \frac{d\sigma_{2n}}{(2\pi)^n} \\
&= \int_{E_n} \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j^2 . |\dot{F}_j(T_n z)|^2 . \exp\left(-(\varphi(T_n z) + \frac{1}{2}\|z\|^2)\right) . \frac{d\sigma_{2n}}{(2\pi)^n} \\
&\leqslant \Lambda^2 . \int_{E_n} \|F(T_n z)\|^2 . \exp\left(-(\varphi(T_n z) + \frac{1}{2}\|z\|^2)\right) . \frac{d\sigma_{2n}}{(2\pi)^n} \\
&\leqslant \Lambda^2 . \int_{\Omega^n} |F \circ P_n\|^2 . \exp(-\varphi_n . d\mu_T) \leqslant \Lambda^2.
\end{aligned}$$

En outre, $\tilde{\varphi}_n$ est une fonction plurisousharmonique sur E_n, avec un minorant de p. s. h. $c = 1$, si bien que d'après [14] (lemme 4.4.1 et démonstration du théorème 4.4.2), il existe une fonction $\tilde{f}_n$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E_n, telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial}\tilde{f}_n = \tilde{F}_n \quad \text{sur } E_n, \\ \displaystyle\int_{E_n} |\tilde{f}_n|^2 . \exp(-\tilde{\varphi}_n) \frac{d\sigma_{2n}}{(2\pi)^n} \leqslant 2\Lambda^2. \end{cases}$$

En posant $f_n(z) = \tilde{f}_n(z_1/\lambda_1, \ldots, z_n/\lambda_n)$ pour tout $z = \sum_{j=1}^\infty z_j e_j$ dans Ω^n, on définit donc une application f_n telle que

$$\begin{cases} \bar{\partial} f_n = F_n \quad \text{sur } \Omega^n, \\ \displaystyle\int_{\Omega^n} |f_n|^2 . \exp(-\varphi_n)\, d\mu_T \leqslant 2\Lambda^2. \end{cases}$$

Puisque toute boule est incluse dans un cylindre Ω^n pour n assez grand, la suite $(f_n.\exp(-\varphi_n/2)$ est bornée dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mu_T)$ et on peut donc, modulo une extraction, supposer qu'elle converge faiblement dans cet espace vers une fonction $g = f\exp(-\varphi_n/2)$ où f est μ_T-mesurable. D'autre part, pour toute fonction h de L^2_{loc} et toute boule B de Ω, on a

$$\int_B |f-f_n|.|h|.d\mu_T \leqslant \int_B |f_n \exp(-\varphi_n/2) - f.\exp(-\varphi/2)|.\exp(\varphi_n/2).|h|\,d\mu_T$$
$$+ \int_B |f.h(\exp(\varphi-\varphi_n)/2)-1)|\,d\mu_T,$$

pour tout entier n positif, ce qui, avec le théorème de convergence dominée, montre que la suite (f_n) converge faiblement vers f dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mu_T)$: on est en position d'appliquer le théorème 1.

Remarque. — Un choix convenable de la fonction χ permet d'énoncer le même résultat dans le cas d'un ouvert Ω non borné [16].

Dans ce qui suit, E est un espace dual fort d'un espace de Fréchet nucléaire (en abrégé $\mathcal{D}FN$) qui possède une base. On sait alors que E est un espace nucléaire : sa topologie peut être définie par une famille saturée $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de semi-normes provenant de produits scalaires $\{(\ |\ )_\alpha\}_{\alpha\in A}$, telle que, si l'on désigne par H_α le complété de E pour la semi-norme $\|.\|_\alpha$, pour tout α appartenant à A, il est possible de trouver un indice β dans A pour lequel on ait une injection $H_\beta \to H_\alpha$ qui soit un opérateur nucléaire. Le calcul différentiel adopté sur E est celui de Fréchet : on renvoit pour les définitions et propriétés classiques à [1] et [15].

THÉORÈME 3. — *Soit F une forme différentielle fermée de type* (0,1), *de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert pseudoconvexe Ω de E. On suppose que F possède sur Ω la propriété locale suivante :*

(P) Pour tout x dans Ω, il existe un indice $\alpha(x)$ dans A, et un nombre positif $R(x)$ tels que, si $B_{\alpha(x)}(x;\ R(x))$ désigne la boule centrée en x et de rayon $R(x)$ dans $H_{\alpha(x)}$, il existe une forme différentielle F_x fermée, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cette boule, et dont la restriction à $B_{\alpha(x)}(x, R(x)) \cap E \subset \Omega$ coïncide avec F.

Il existe alors une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, solutionsur Ω de l'équation $\partial f = F$.

Démonstration. — (i) Soit K une partie compacte dans Ω : en vertu de la propriété (P), il est possible de trouver un indice α_K dans A, un voisinage ouvert V_K de K dans H_{α_K}, et une forme différentielle F_K fermée, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur V_K, qui prolonge F.

On désigne par $\{ e_j \}_{j \geqslant 1}$ une base de E, qui soit de plus une base orthonormale de H_{α_K} et, pour tout entier n positif, par π_n (resp. P_n) la projection (orthogonale) de E (resp. H_{α_K}) sur l'espace de dimension finie $E_n = \bigoplus_{j=1}^{j=n} \mathbf{C}.e_j$.

Si K est $A(\Omega)$-convexe, il existe un entier positif N_K tel que l'enveloppe $A(V_K \cap E_n)$-convexe de $\pi_n K$ soit contenue dans $V_K \cap E_n$ pour tout $n \geqslant N_K$. On le montre en raisonnant par l'absurde : il existerait une suite $(x_n \in \widehat{\pi_n K} - V_K \cap E_n)_{n \geqslant 1}$, et, comme les parties compactes $(\widehat{\pi_n K})_{n \geqslant 1}$ sont contenues dans une partie compacte fixe de Ω, on pourrait extraire de cette suite, une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ qui convergerait vers un point x de Ω. Or, pour toute fonction f de $A(\Omega)$, l'inégalité

$$| f(P_n x_n) | \leqslant | f |_{\pi_n K}, \qquad n \geqslant 1,$$

entraîne, par passage à la limite $| f(x) | \leqslant | f |_K$, ce qui montre que x appartiendrait à K, d'où la contradiction.

Si ε est la distance (dans H_{α_K}) de K au complémentaire de V_K, on pose

$$V_K^{\varepsilon/3} = \{ x \in V_K ;\ \inf_{y \in \partial V_K} \| x - y \|_{\alpha_K} < \varepsilon/3 \}$$

et, d'après ce qui précède, il est possible de trouver un nombre entier M_K tel que, pour tout $n \geqslant N_K$, on ait

$$\begin{cases} \widehat{p_n K} \subset V_K^{\varepsilon/3} \cap E_n \\ \sup_{x \in K} \| x - p_n x \|_{\alpha_K} < \varepsilon/3. \end{cases}$$

D'après une propriété connue de la dimension finie, il existe alors un ouvert pseudoconvexe w dans E_{M_K} tel que

$$\widehat{p_{M_K} K} \subset w \subset V_K^{\varepsilon/3} \cap E_{M_K},$$

si bien que la partie

$$w_K = \{ x \in H_{\alpha_K} ;\ p_{M_K}(x) \in w \quad \text{et} \quad \| x - p_{M_K}(x) \|_{\alpha_K} < \varepsilon/3 \},$$

est un ouvert pseudoconvexe dans H_{α_K}, contenant K, et contenu dans V_K.

Soit alors β_K un indice pour lequel l'injection $H_{\beta_K} \to H_{\alpha_K}$ soit le cube d'un opérateur de type Hilbert-Schmidt : d'après le théorème 2, il existe une fonction f_K de classe $\mathscr{C}^1$ sur w_K, solution sur cet ouvert de l'équation $\bar{\partial} f_K = F_K$.

(ii) En tant qu'espace $\mathscr{D}FN$, E est en particulier dénombrablement compact, et il est donc possible de trouver une exhaustion $\{ K_j \}_{j \geqslant 1}$ de Ω, formée de parties compactes et $A(\Omega)$-convexes.

D'après (i), il existe une suite $(f_j)_{j \geqslant 1}$ de fonctions telle que f_j soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de K_j dans Ω, et solution sur ce voisinage, de l'équation :

$$\bar{\partial} f_j = F_{K_j}, \quad \text{pour tout } j \geqslant 1.$$

Mais, grâce à la propriété d'Oka-Weil, qui reste vraie sur E d'après [18], on peut supposer que, pour tout $j \geqslant 1$, on a

$$|f_{j+1} - f_j|_{K_j} \leqslant 2^{-j},$$

si bien que la fonction $f = \lim_{j \to \infty} f_j$ convient.

Les corollaires qui suivent montrent que la condition imposée à F dans l'énoncé précédent est vérifiée dans des situations importantes pour l'analyse complexe.

COROLLAIRE 1. — *Le premier problème de Cousin admet une solution sur tout ouvert pseudoconvexe d'un espace $\mathscr{D}FN$ à base.*

COROLLAIRE 2. — *Si E est espace nucléaire à base, si Ω est un ouvert pseudoconvexe dans E, pour toute partie compacte convexe K dans Ω, le premier problème de Cousin admet une solution sur $\Omega \cap E_K$ (où E_K désigne l'espace de Banach engendré par K).*

COROLLAIRE 3. — *Soit Ω un ouvert pseudoconvexe dans E et soit H un hyperplan fermé de E tels que $H \cap \Omega$ soit non vide. Alors, l'application de restriction $A(\Omega) \to A(\Omega \cap H)$ est surjective.*

Remarque 1. — Un contre exemple de [7] sur $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ montre qu'en général le premier problème de Cousin n'est pas résoluble sur un espace nucléaire.

Remarque 2. — Le premier problème de Cousin pour deux ouverts convexes peut être résolu à l'aide du théorème de prolongement de Hahn-Banach et en s'appuyant sur le principe de dualité de $A(\Omega)$ établi sur un $\mathscr{D}FN$ à base par [2] et [4].

Remarque 3. — Le corollaire 3 améliore dans un certain sens un résultat de [3].

Démonstration des corollaires. — Il s'agit, en tous cas, de reprendre la démonstration connue en dimension finie et basée sur la résolution du problème du $\bar{\partial}$, en vérifiant que le second membre F de l'équation vérifie la propriété (P) de l'énoncé du théorème 3.

Cette vérification est naturellement liée à la forme particulière de F, et s'appuie essentiellement sur la forme locale des partitions $\mathscr{C}^\infty$ de l'unité dans un espace nucléaire, forme donnée par le lemme suivant :

LEMME. — *Soit* $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert d'un ouvert* Ω *d'un espace nucléaire* E. *Il existe une partition* $\mathscr{C}^\infty$ *de l'unité* $\{\varphi_\nu\}_{\nu\geqslant 1}$, *subordonnée à ce recouvrement,*

- $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset \Omega_{i_\nu}$, $\nu \geqslant 1$;
- $\{\varphi_\nu\}$ *localement fini;*
- $\sum_\nu \varphi_\nu = 1$,

qui possède en outre la propriété locale suivante :

Pour tout x *dans* Ω, *il existe des indices* $i(x)$, $k(x)$, $p_j(x)$, *et un nombre positif* $\varepsilon(x)$, *tels que*

$$u(x) = B_{p(x)}(x, \varepsilon(x)) \cap E \subset \Omega_{i(x)},$$

avec

$$\varphi_\nu\big|_{u(x)} = 0 \qquad \text{si} \quad \nu > k(x),$$

et, si $\nu \leqslant k(x)$, $\varphi_\nu\big|_{u(x)}(.)$ *s'exprime comme fonction différentiable de* $\|x_1 - .\|_{p_1(x)}, \ldots, \|x_j - .\|_{p_j(x)}$ *où* $x_j \in$ E.

Preuve. — On reprend la construction donnée par [5] (théoreme 1), dans le cadre banachique, construction essentiellement basée sur le fait suivant :

si x est dans E, si V est un voisinage ouvert de x dans E, on peut trouver un entier $p(x)$ positif, et une fonction $\tilde{\varphi}$ dans $\mathscr{D}_+(\mathbf{R})$, qui vaut 1 au voisinage de 0, tels que

$$\{y\in E;\ \tilde{\varphi}(\|x-y\|_{p(x)}) > 0\} \subset V,$$

la fonction $\tilde{\varphi}$ étant alors de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur E.

Démonstration des corollaires 1 *et* 2. — On reprend les notations de [14] : si ($g_{ij} \in A(\Omega_i \cap \Omega_j)$) est la donnée de Cousin subordonnée au recouvrement $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ de Ω, la résolution du problème découle de la possibilité de résoudre l'équation $\bar{\partial} f = F$, où $F = -\bar{\partial}(\sum_{\nu\geqslant 1} \varphi_\nu . g_{ii_\nu})$ sur Ω_i ([14], theorem 1.4.5).

Pour voir que F vérifie bien la condition (P), il suffit, vu le lemme, de montrer qu'il est également possible de prolonger localement les fonctions (g_{ij}) en des fonctions analytiques sur les espaces H_α, ce qui est bien connu [13] (proposition 4.5).

Démonstration du corollaire 3. — On reprend la technique développée par [10] (lemme 3.1). Tout d'abord, E étant σ-compact est en particulier de Lindelöf, ce qui permet de trouver une famille dénombrable $\{\|\cdot\|_{\alpha_n}\}_{n\geq 1}$ de semi-normes qui définissent une topologie à laquelle Ω appartient; on désigne par $\mathbf{d}$ la distance associée.

Si a n'appartient pas à H, tout élément x de E s'écrit sous la forme

$$x = x_1 + z.a \qquad \text{avec} \quad x_1 \in H, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Les ensembles

$$K_1 = \left\{ x \in \Omega;\, |z| < \frac{1}{2} d(x, \partial\Omega) \right\}$$

et

$$K_2 = \{ x \in \Omega;\, x_1 \notin \Omega \cap H \},$$

sont deux parties fermées disjointes de Ω. On peut alors construire une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur Ω, valant 1 au voisinage de K_1, et 0 sur un voisinage de K_2, et vérifiant en outre la même propriété locale que les fonctions $\{\varphi_\nu\}$ du lemme. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la construction de [5] (Theorem 2, Corollary), en remarquant que tout espace métrisable est normal.

Enfin, si f est une fonction analytique sue $\Omega \cap H$, on recherche son relèvement sur Ω sous la forme

$$\tilde{f}(x) = \varphi(x) f(x_1) - z v(x), \qquad x \in \Omega,$$

où v est une fonction devant vérifier l'équation :

$$\bar{\partial} v = \frac{1}{2} f(x_1) . \bar{\partial} \varphi = F.$$

La forme de F permet de conclure avec le théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AVERBUKH (V. I.) et SMOLYANOV (O. G.). — The theory of differentiation in linear topological spaces, *Russian math. Surveys*, t. 22, 1967, p. 201-258.

[2] BOLAND (P.). — Duality and spaces of holomorphic functions, *Infinite dimensional holomorphy and applications* [1975. Univ. Campinas, Saõ Paulo], p. 131-138. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1977 (*North-Holland Mathematics Studies*, 12).

[3] BOLAND (P.). — Holomorphic functions on nuclear spaces, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 209, 1975, p. 279-281.

[4] Boland (P.) et Dineen (S.). — *Holomorphic functions on fully nuclear space*, Preprint, 1977.

[5] Bonic (R.) et Frampton (J.). — Smooth functions on Banach manifolds, *J. Math. and Mech.*, t. 15, 1966, p. 877-898.

[6] Cameron (R. H.). — The first variation of an indefinite Wiener integral, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 2, 1951, p. 914-924.

[7] Dineen (S.). — Cousin's first problem on certain locally convex topological spaces, *Anais Acad. brasil. C.*, t. 48, 1976, p. 11-12.

[8] Goodman (V.). — A divergence theorem for Hilbert space, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 164, 1972, p. 411-426.

[9] Gross (L.). — Potential theory on Hilbert space, *J. funct. Anal.*, t. 1, 1967, p. 123-181

[10] Gruman (L.). — The Levi problem in certain infinite dimensional vector spaces, *Illinois J. of Math.*, t. 18, 1974, p. 20-26.

[11] J. Hadamard. — *Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique*, Tome 2. — Paris, Hermann, 1930.

[12] Henrich (C. J.). — The $\bar{\partial}$ equation with polynomial growth on a Hilbert space, *Duke math. J.*, t. 40, 1973, p. 279-306.

[13] Hirschowitz (A.). — *Prolongement analytique en dimension infinie*, *Ann. Inst. Fourier*, t. 22, 1972, p. 255-292.

[14] Hörmander (L.). — *An introduction to complex analysis in several variables*. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1973 (*North-Holland mathematical Library*, 7).

[15] Lloyd (J.). — Smooth partition of unity on manifolds, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 187, 1974, p. 249-259.

[16] Raboin (P.). — Étude de l'équation $\bar{\partial} f = g$ sur un espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 1976, série A, p. 627-630; et exposé aux *Journées de fonctions analytiques* [1976, Toulouse]. — Berlin, Springer-Verlag (*Lecture Notes in Math.* n° 578).

[17] Schaeffer (H. H.). — *Topological vector spaces*, — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Graduate Texts in Mathematics*, 3).

[18] Schottenloher (M.). — *The Levi problem for domains spead over l.c. spaces with a Schauder decomposition*, Habilitationschrift München, 1974.

[19] Skorohod (A. V.). — *Integration in Hilbert space*. — Berlin, Springer-Verlag, 1974 (*Ergebnisse der Mathematik*, 79).