BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PAUL PEZENNEC

Propriétés topologiques de $[X, Y]$ et fantômes de finitude

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 113-126
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__113_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 113-126.

PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE $[X, Y]$ ET FANTÔMES DE FINITUDE

PAR

JEAN-PAUL PEZENNEC (*)

[Université de Nantes]

RÉSUMÉ. — On étudie, dans le cas où X et Y sont des CW-complexes pointés, certaines propriétés de $[X, Y]$ muni de la topologie quotient de la CO-topologie de $\mathscr{C}(X, Y)$. On donne une caractérisation purement homotopique de cette topologie, et on étudie les propriétés de séparation, complétion et compacité.

On s'intéresse en particulier à la recherche de critères de séparation pour $[X, Y]$, ce qui équivaut à la recherche de critères assurant qu'il n'y a pas de fantômes de finitude dans $[X, Y]$. On montre le résultat suivant : si $[X, Y]$ est séparé pour tout CW-complexe X, alors pour tout $i \geqslant 2$, $\pi_i(Y)$ est somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe complet pour la topologie Z-adique. Enfin on donne un exemple prouvant que la réciproque du résultat précédent est fausse.

ABSTRACT. — We study, for X and Y pointed CW-complexes, some properties of $[X, Y]$ topologized by the quotient topology of the CO-topology on $\mathscr{C}(X, Y)$. We give an homotopic characterization of this topology and we study conditions implying that $[X, Y]$ is complete, Hausdorff or compact.

In particular we search for criteria for $[X, Y]$ to be a Hausdorff space, which is equivalent to the research of criteria ensuring that there are no phantoms of finiteness in $[X, Y]$. We show the following result: if $[X, Y]$ is Hausdorff for any CW-complex X, then for any $i \leqslant 2$, $\pi_i(Y)$ is the direct sum of a divisible group and of a group which is complete in the $\mathbf{Z}$-adic topology. Finally we give an example proving that the converse of the preceding result is false.

0. Introduction

Nous nous proposons dans cet article d'étudier les propriétés topologiques de l'ensemble $[X, Y] = \mathscr{C}(X, Y)/\mathscr{R} = \pi_0 \mathscr{C}(X, Y)$ des classes d'homo-

(*) Texte reçu le 17 février 1978.

Jean-Paul PEZENNEC, Institut de Mathématiques et d'Informatique, Université de Nantes, B.P. n° 1044, 44037 Nantes Cedex.

topie d'applications d'un CW-complexe X dans un espace topologique Y, muni de la topologie quotient de la CO-topologie de $\mathscr{C}(X, Y)$.

Dans une première partie, correspondant au premier paragraphe, nous étudions les propriétés formelles de cette topologie. Nous montrons en particulier que, lorsque Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe, $[X, Y]$ a la topologie initiale pour l'application

$$\theta : \ [X, Y] \to \lim\mathrm{proj}_K [K, Y],$$

la limite étant prise sur tous les sous-complexes finis K de X.

Nous donnons également un critère pour montrer que certains espaces n'ont pas le type d'homotopie d'un CW-complexe.

Dans la seconde partie, correspondant aux deuxième et troisième paragraphes, nous nous intéressons à la recherche de critères de séparation pour $[X, Y]$, ce qui équivaut à chercher des critères assurant qu'on n'a pas de fantômes de finitude. Nous résolvons d'abord complètement le problème dans le cas où Y appartient à un Ω-spectre de type fini. Nous nous intéressons ensuite au problème suivant : étant donné un espace connexe Y ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe, trouver une condition sur Y assurant la séparation de $[X, Y]$ pour tout CW-complexe X. Nous montrons qu'une condition nécessaire est que, pour tout $i \geqslant 2$, $\pi_i(Y)$ soit somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe complet pour la topologie $\mathbf{Z}$-adique. Nous donnons ensuite un exemple montrant que la condition précédente n'est pas suffisante : nous construisons un espace E ayant des groupes d'homotopie divisibles, et un CW-complexe X tels que $[X, E]$ ne soit pas séparé.

Je voudrais remercier ici Pierre VOGEL qui m'a orienté sur ce sujet et m'a dirigé tout au long de mon travail.

Dans tout ce qui suit, les espaces topologiques, les applications continues et les homotopies considérées sont supposés pointés.

Nous emploierons les notations suivantes : étant donné un CW-complexe X, l'ensemble des sous-complexes finis de X sera noté $\mathscr{K}_X$ ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $\mathscr{K}$. $\mathrm{Top}^{\bullet}$ désignera la catégorie des espaces topologiques pointés, $CW^{\bullet}$ la catégorie des CW-complexes pointés et $\mathscr{W}_0^{\bullet}$ la catégorie des espaces topologiques pointés ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe pointé. Enfin $CW_h^{\bullet}$ désignera la catégorie homotopique des CW-complexes pointés.

1. Propriétés topologiques de $[X, Y]$

Dans tout ce paragraphe, étant donnés un CW-complexe X et un espace topologique Y, l'ensemble $[X, Y] = \pi_0 \mathscr{C}(X, Y)$ est supposé muni de la topologie quotient de la CO-topologie.

LEMME 1.1. — *Si K est un CW-complexe fini et si Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe, alors $[K, Y]$ est discret.*

Ce lemme résulte du fait qu'alors $\mathscr{C}(K, Y)$ muni de la CO-topologie a le type d'homotopie d'un CW-complexe [7].

En revanche, si on ne suppose plus que Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe, alors $[K, Y]$ peut n'être pas discret, ni même séparé. Il suffit de prendre par exemple $K = S^0$ et Y = adhérence du graphe de $\sin 1/x$.

Dans le cas d'un CW-complexe quelconque, on a la caractérisation suivante :

PROPOSITION 1.2. — *Soient X un CW-complexe et Y un espace de $\mathscr{W}_0^{\bullet}$. Alors $[X, Y]$ a la topologie initiale pour l'application*

$$\theta : \quad [X, Y] \to \operatorname{lim\,proj}_{K \in \mathscr{K}} [K, Y].$$

Démonstration. — Soit K_0 un sous-complexe fini de X, et soit U un ouvert saturé de $\mathscr{C}(K_0, Y)$ (i. e. $p_0^{-1} p_0 U = U$).

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(X, Y) & \xrightarrow{i} & \mathscr{C}(K_0, Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_0} \\ [X, Y] & \xrightarrow{j} & [K_0, Y]. \end{array}$$

Alors, par cofibration, $pi^{-1}(U) = j^{-1} p_0(U)$.

Comme $\mathscr{C}(X, Y)$ admet pour base d'ouverts les ensembles de la forme $i^{-1}(U)$, et comme $[K_0, Y]$ est discret, donc $p_0(U)$ ouvert, on en déduit que $[X, Y]$ a la topologie initiale pour les applications $[X, Y] \to [K, Y]$ (pour tous les $K \in \mathscr{K}$). D'où la proposition.

Par exemple $KU(\mathbf{C}\,P^\infty) = [\mathbf{C}\,P^\infty, BU \times \mathbf{Z}]$ est homéomorphe à l'anneau des séries formelles $Z[[t]]$ muni de la topologie définie par la valuation : en effet, la suite exacte

$$0 \to \operatorname{lim\,proj}_n^1 KU^1(\mathbf{C}P^n) \to KU(\mathbf{C}P^\infty) \xrightarrow{\theta} \operatorname{lim\,proj}_n KU(\mathbf{C}P^n) \to 0,$$

se réduit en fait à un homéomorphisme

$$KU(\mathbf{C}P^{\infty}) \approx \operatorname{lim\,proj} KU(\mathbf{C}P^{n}) = \operatorname{lim\,proj} \mathbf{Z}[t]/t^{n+1} = \mathbf{Z}[[t]].$$

De même $\tilde{KU}(\mathbf{R}P^{\infty}) = [\mathbf{R}P^{\infty}, BU]$ est homéomorphe à l'anneau $\mathbf{Z}_2$ des entiers 2-adiques.

La topologie de $[X, Y]$ est fonctorielle, c'est-à-dire que l'on obtient un foncteur $[.,.] : CW^{\bullet} \times \mathrm{Top}^{\bullet} \to \mathrm{Top}^{\bullet}$.

De plus on a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.3. — *Étant donnés deux CW-complexes X et Y et un espace topologique Z, l'application composition*

$$\begin{gathered}[X, Y] \times [Y, Z] \to [X, Z] \\ ([f], [g]) \to [g \circ f],\end{gathered}$$

est continue.

PROPOSITION 1.4. — *Étant donnés un CW-complexe X, et un espace topologique Y, la bijection* $[S^1 \wedge X, Y] \approx [X, \Omega Y]$ *est un homéomorphisme.*

PROPOSITION 1.5. — *Étant donnés une famille* $(X_i)_{i \in I}$ *de CW-complexes, et un espace topologique Y, la bijection* $[\vee_i X_i, Y] \approx \prod_i [X_i, Y]$ *est un homéomorphisme.*

PROPOSITION 1.6. — *Étant donnée une application* $(n+1)$*-connexe* $f : Y \to Z$ *entre deux espaces de* $\mathcal{W}_0^{\bullet}$, *alors pour tout CW-complexe X de dimension inférieure ou égale à n, la bijection* $f_{\#} : [X, Y] \xrightarrow{\approx} [X, Z]$ *est un homéomorphisme.*

En particulier, si (Y_i) *est un système de Postnikov associé à un espace Y de* $\mathcal{W}_0^{\bullet}$, *on a un homéomorphisme* $[X, Y] \approx [X, Y_n]$ *pour tout CW-complexe X de dimension inférieure ou égale à n.*

On a aussi la proposition suivante :

PROPOSITION 1.7. — *Étant donnés un CW-complexe X, et un H-groupe Y dans* $\mathcal{W}_0^{\bullet}$, *alors* $[X, Y]$ *est un groupe topologique complet (mais non nécessairement séparé).*

Démonstration. — D'après la proposition 1.1, $[X, Y]$ a la topologie initiale pour l'application $\theta : [X, Y] \to \operatorname{lim\,proj}_{K \in \mathcal{K}} [K, Y]$.

On utilise alors le fait que l'application θ est surjective (*cf.* [1], théorème 1.8) et que le groupe $\lim \mathrm{proj}_{K \in \mathscr{K}} [K, Y]$ est complet comme limite projective de groupes discrets.

En particulier, puisque toute théorie cohomologique est classifiable à coefficient dans un Ω-spectre unique à équivalence d'homotopie près, on obtient, pour toute théorie cohomologique $\mathscr{H} = (\tilde{H}^*)$ et pour tout CW-complexe X, une structure naturelle de groupe topologique abélien sur $\tilde{H}^n(X)$.

De la proposition 1.2, on peut également déduire une version topologique du théorème de représentation de Brown :

PROPOSITION 1.8. — *Soit $H : CW_h^{\bullet} \to \mathrm{Top}^{\bullet}$ un foncteur contravariant représentable au sens ensembliste, de classifiant $Y \in CW^{\bullet}$. Alors il est représentable au sens topologique, c'est-à-dire que la bijection $H(X) = [X, Y]$ est un homéomorphisme pour tout CW-complexe X, si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1° *$H(K)$ est discret pour tout CW-complexe fini K;*

2° *Pour tout CW-complexe X, $H(X)$ a la topologie initiale pour l'application* $\theta : H(X) \to \lim \mathrm{proj}\, H(K)$.

Par ailleurs le fait que si K est un CW-complexe fini, $[K, Y]$ est discret lorsque Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe donne des critères pour montrer qu'un espace n'a pas le type d'homotopie d'un CW-complexe. Par exemple, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 1.9. — *Soit Y un espace topologique limite projective du système $Y_1 \leftarrow Y_2 \leftarrow \ldots \leftarrow Y_n \leftarrow Y_{n+1} \leftarrow \ldots$ les applications $Y_{n+1} \to Y_n$ étant des fibrés de Serre.*

Alors, si Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe, $\lim \mathrm{proj}^1 \pi_i Y_n$ *est nul pour $i \geqslant 1$ et* $\lim \mathrm{proj}\, \pi_i Y_n$ *est discret pour $i \geqslant 0$.*

Démonstration. — On a alors la suite exacte suivante pour $i \geqslant 0$ ([2], chapitre IX, § 3) :

$$0 \to \lim \mathrm{proj}^1 \pi_{i+1} Y_n \to \pi_i Y \xrightarrow{\theta} \lim \mathrm{proj}\, \pi_i Y_n \to 0.$$

Mais aucun point du noyau de θ ne peut être séparé de 0 : en effet, soit f appartenant au noyau de θ, et soit Ω un ouvert élémentaire de $\pi_i Y$ contenant 0, de la forme $\Omega = p\, \rho_n^{-1}(U_n)$, où U_n désigne un ouvert de

$\mathscr{C}(S^i, Y_n)$, et où p et ρ_n désignent les applications figurant dans le diagramme suivant, pour un n donné :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(S^i, Y) & \xrightarrow{\rho_n} & \mathscr{C}(S^i, Y_n) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p_n} \\ \pi_i(Y) & \longrightarrow & \pi_i(Y_n). \end{array}$$

On montre alors par fibration que f appartient à $p\,\rho_n^{-1}(U_n) = \Omega$.

Si donc Y a le type d'homotopie d'un CW-complexe, $\pi_i\, Y$ est discret, donc θ est injective, et l'on en déduit la proposition.

Cette proposition permet d'obtenir facilement un espace topologique qui est limite projective de CW-complexes et qui n'a pas le type d'homotopie d'un CW-complexe. Par exemple, pour p entier fixé, la limite projective du système

$$K(\mathbf{Z}/2, p) \leftarrow K(\mathbf{Z}/4, p) \leftarrow K(\mathbf{Z}/8, p) \leftarrow \ldots$$

Enfin de la proposition 1.2 on déduit le critère de séparation suivant :

COROLLAIRE 1.10. — *Étant donnés un CW-complexe X, et un espace Y de $W_0^{\bullet}$, alors $[X, Y]$ est séparé si, et seulement si, l'application*

$$\theta : \quad [X, Y] \to \lim\operatorname{proj}_{K \in \mathscr{K}} [K, Y]$$

est injective.

Dans la suite de cet article, nous allons nous intéresser à la recherche de critères de séparation pour $[X, Y]$, ce qui équivaut donc à chercher des critères assurant qu'on n'a pas de fantômes de finitude.

Par exemple, $[\mathbf{C}P^{\infty}, S^3]$ n'est pas séparé (*cf.* [4]).

En revanche, à l'aide des méthodes utilisées par SULLIVAN dans [8], on montre que, si Y est un CW-complexe connexe et $\hat{Y}$ sa complétion profinie, alors, pour tout CW-complexe X, l'application

$$[X, \hat{Y}] \xrightarrow{\theta} \lim\operatorname{proj} [K, \hat{Y}]$$

est bijective, donc $[X, \hat{Y}]$ est séparé.

En particulier, si $\pi_i\, Y$ est fini pour tout i, puisqu'alors $Y = \hat{Y}$, on obtient que $[X, Y]$ est compact pour tout CW-complexe X.

2. Critère de séparation pour les théories cohomologiques de type fini

Soit $\mathscr{H}^* = (\tilde{\mathscr{H}}^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une théorie cohomologique telle que $\tilde{\mathscr{H}}^n$ (point) soit de type fini pour tout n.

On sait qu'on peut lui associer, pour tout groupe abélien G, une théorie cohomologique à coefficients dans G, soit $\mathscr{H}^*(., G)$, coïncidant avec $\mathscr{H}^*$ pour $G = \mathbf{Z}$. De plus, YOSIMURA a montré dans [9] qu'il existe une théorie homologique $\mathscr{H}_*$ telle que le théorème des coefficients universels soit vérifié, c'est-à-dire telle que, pour tout entier n, pour tout groupe abélien G, et pour tout CW-complexe X, on ait la suite exacte des coefficients universels :

$$0 \to \operatorname{Ext}(\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X), G) \to \tilde{\mathscr{H}}^n(X, G) \to \operatorname{Hom}(\tilde{\mathscr{H}}_n(X), G) \to 0.$$

Par exemple, si $\mathscr{H}^*$ est la cohomologie singulière, $\mathscr{H}_*$ est l'homologie singulière

$$\text{si} \quad \mathscr{H}^* = KU^*, \qquad \mathscr{H}_* = KU_*,$$
$$\text{si} \quad \mathscr{H}^* = KO^*, \qquad \mathscr{H}_* = KSp_*.$$

Nous allons montrer pour une telle théorie cohomologique le critère de séparation suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Soit $\mathscr{H}^* = (\tilde{\mathscr{H}}^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une théorie cohomologique telle que $\tilde{\mathscr{H}}^n$ (point) soit de type fini pour tout n. Soit $\mathscr{H}_*$ la théorie homologique associée.*

Alors, pour tout entier n, pour tout groupe abélien G, et pour tout CW-complexe X, on a la suite exacte suivante :

$$0 \to \operatorname{Pext}(\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X), G) \to \tilde{\mathscr{H}}^n(X, G) \xrightarrow{\theta} \lim \operatorname{proj}_{K \in \mathscr{K}} \tilde{\mathscr{H}}^n(K, G) \to 0,$$

où Pext $(\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X), G)$ *désigne le groupe des extensions pures de $\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X)$ par G.*

On trouvera également une démonstration de ce théorème dans HUBER-MEIER [5].

Rappelons comment est défini le groupe des extensions pures (*cf.* [6], § 4, et [3]).

Étant donné un anneau noethérien R, on définit la notion de suite exacte pure de R-modules [6]. Dans le cas où $R = \mathbf{Z}$, une suite exacte de R-modules $0 \to A \to B \to C \to 0$ est exacte pure si, et seulement si, pour tout élément n de $\mathbf{Z}$, $A \cap nB = nA$ ou, ce qui est équivalent, si, et seulement si, la suite est scindée au-dessus de tout sous-module de type fini de C.

On définit alors les notions de module projectif pur et module injectif pur analogues à celles de module projectif et module injectif. On montre que tout module a une résolution projective pure et une résolution injective pure. Ceci permet d'introduire les foncteurs $\mathrm{Pext}^n(A, B)$ comme $H^n(\mathrm{Hom}(\mathbf{P}, B))$ ou $H^n(\mathrm{Hom}(A, \mathbf{Q}))$ où $\mathbf{P}$ (resp. $\mathbf{Q}$) est une résolution projective pure (resp. injective pure) de A (resp. B).

On obtient ainsi des foncteurs Pext^n dont les propriétés sont analogues à celles des foncteurs Ext^n.

On montre aussi que $\mathrm{Pext}^1(A, B)$ est le sous-groupe de $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ correspondant aux extensions pures.

Dans le cas des groupes abéliens, on a $\mathrm{Pext}^n = 0$ pour $n \geqslant 2$ et

$$\mathrm{Pext}(A, B) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} n \,\mathrm{Ext}(A, B).$$

LEMME 2.2. — *Soient* Ω *et* G *groupes abéliens. Alors,* $\mathscr{A}$ *désignant l'ensemble des sous-groupes de type fini de* Ω, *on a*

$$\lim\mathrm{proj}^p_{A_\alpha \in \mathscr{A}} \mathrm{Hom}(A_\alpha, G) = 0 \quad \textit{pour tout } p \geqslant 2$$
$$\lim\mathrm{proj}^p_{A_\alpha \in \mathscr{A}} \mathrm{Ext}\ (A_\alpha, G) = 0 \quad \textit{pour tout } p \geqslant 1.$$

De plus

$$\lim\mathrm{proj}^1_{A_\alpha \in \mathscr{A}} \mathrm{Hom}(A_\alpha, G) = \mathrm{Pext}(\Omega, G).$$

Démonstration du lemme 2.2. — On sait ([6], § 4) que, pour tout système inductif de R-modules A_α et tout R-module G, il existe une suite spectrale telle que $E_2^{p,q} = \lim\mathrm{proj}^p \mathrm{Ext}^q(A_\alpha, G)$ (resp. $E_2^{p,q} = \lim\mathrm{proj}^p \mathrm{Pext}^q(A_\alpha, G)$) convergeant vers $\mathrm{Ext}^n(\lim\mathrm{inj}\, A_\alpha, G)$ (resp. $\mathrm{Pext}^n(\lim\mathrm{inj}\, A_\alpha, G)$).

Ici A_α étant de type fini est projectif pur, donc $\mathrm{Pext}^q(A_\alpha, G) = 0$ pour tout $q \geqslant 1$, et la seconde suite spectrale dégénère en des isomorphismes

$$\mathrm{Pext}^n(\Omega, G) = \lim\mathrm{proj}^n \mathrm{Hom}(A_\alpha, G) \quad \text{pour tout } n.$$

Mais $\mathrm{Pext}^n = 0$ pour $n \geqslant 2$ puisque l'on considère des groupes abéliens. Donc

$$\lim\mathrm{proj}^n \mathrm{Hom}(A_\alpha, G) = 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 2.$$

Puisque $\mathrm{Ext}^n = 0$ pour $n \geqslant 2$, la première suite spectrale nous donne alors

$$\lim\mathrm{proj}^n \mathrm{Ext}(A_\alpha, G) = 0 \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Démonstration du théorème 2.1. — Le théorème du coefficient universel donne une suite exacte

$$\ldots \to \operatorname{lim\,proj}_K^{p-1} \operatorname{Hom}(\tilde{\mathscr{H}}_n(K), G) \to \operatorname{lim\,proj}_K^p \operatorname{Ext}(\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(K), G)$$
$$\to \operatorname{lim\,proj}_K^p \tilde{\mathscr{H}}^n(K, G) \to \operatorname{lim\,proj}_K^p \operatorname{Hom}(\tilde{\mathscr{H}}_n(K), G) \to \ldots$$

Mais le système des $\tilde{\mathscr{H}}_n(K)$ pour tous les CW-complexes finis K inclus dans X est cofinal dans le système (B_α) des groupes de type fini qui s'envoient dans $\tilde{\mathscr{H}}_n(X)$, puisque $\tilde{\mathscr{H}}_n(X) = \lim\,\operatorname{proj}_k \tilde{\mathscr{H}}_n(K)$. Par ailleurs ce système (B_α) admet aussi pour système cofinal le système $\mathscr{A} = (A_\alpha)$ des sous-groupes de type fini de $\tilde{\mathscr{H}}_n(X)$. On a donc d'après le lemme

$$\operatorname{lim\,proj}^p \operatorname{Hom}(\tilde{\mathscr{H}}_n(K), G) = 0 \qquad \text{pour} \quad p \geqslant 2$$

et

$$\operatorname{lim\,proj}^p \operatorname{Ext}(\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(K), G) = 0 \qquad \text{pour} \quad p \geqslant 2.$$

La suite exacte précédente donne alors $\lim\,\operatorname{proj}^p \tilde{\mathscr{H}}^n(\mathrm{K}, \mathrm{G}) = 0$ pour $p \geqslant 2$.

Or on sait qu'il existe une suite spectrale telle que

$$E_2^{p,q} = \operatorname{lim\,proj}^p \tilde{\mathscr{H}}^q(K, G)$$

convergeant dans les bons cas vers $\tilde{\mathscr{H}}^n(X, G)$.

On en déduit une suite exacte

$$0 \to \operatorname{lim\,proj}^1 \tilde{\mathscr{H}}^{n-1}(K, G) \to \tilde{\mathscr{H}}^n(X, G) \to \operatorname{lim\,proj} \tilde{\mathscr{H}}^n(K, G) \to 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\theta &= \operatorname{lim\,proj}^1 \tilde{\mathscr{H}}^{n-1}(K, G)\\ &= \operatorname{lim\,proj}^1 \operatorname{Hom}(\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(K), G)\\ &= \operatorname{lim\,proj}^1_{A_\alpha \in \mathscr{A}} \operatorname{Hom}(A_\alpha, G)\\ &= \operatorname{Pext}(\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X), G).\end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.3. — *Dans les hypothèses du théorème* 2.1, *si G est sans torsion, alors le noyau de l'application*

$$\theta: \quad \mathscr{H}^n(X, G) \to \operatorname{lim\,proj}_{K \in \mathscr{K}} \mathscr{H}^n(K, G)$$

est le sous-groupe des éléments de $\operatorname{Ext}(\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X), G)$ *nuls sur la torsion de* $\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X)$.

Démonstration. — Nous allons montrer plus généralement que si G est sans torsion, alors, pour tout groupe abélien Γ, on a

$$\operatorname{Pext}(\Gamma, G) = \{ u \in \operatorname{Ext}(\Gamma, G);\ u \,|\, \operatorname{Tors}\Gamma = 0 \}.$$

Pour cela on considère la suite exacte pure

$$0 \to T = \operatorname{Tors}\Gamma \to \Gamma \to L = \Gamma/\operatorname{Tors}\Gamma \to 0.$$

On obtient deux suites exactes correspondant l'une au foncteur Ext, l'autre au foncteur Pext

$$\begin{array}{l} 0 \to \operatorname{Hom}(L, G) \to \operatorname{Hom}(\Gamma, G) \\ \quad \to \operatorname{Hom}(T, G) \to \operatorname{Ext}(L, G) \to \operatorname{Ext}(\Gamma, G) \to \operatorname{Ext}(T, G) \to 0 \\ \qquad\qquad \searrow \\ \qquad\qquad\quad \operatorname{Pext}(L, G) \to \operatorname{Pext}(\Gamma, G) \to \operatorname{Pext}(T, G) \to 0. \end{array}$$

Mais, d'après le lemme 2.2, $\operatorname{Pext}(T, G) = \lim\operatorname{proj}^1 \operatorname{Hom}(T_\alpha, G) = 0$ puisque les T_α sont de torsion et G sans torsion.

D'autre part, L étant sans torsion, Ext (L, G) est divisible, donc puisque Pext (L, G) est égal à $\bigcap_n n \operatorname{Ext}(L, G)$, on a Pext (L, G) = Ext (L, G).

On en déduit

$$\operatorname{Pext}(\Gamma, G) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Ext}(\Gamma, G) \to \operatorname{Ext}(T, G)).$$

Du théorème 2.1 on déduit aussi la caractérisation suivante :

COROLLAIRE 2.4. — *Soit $\mathscr{H}^* = (\tilde{\mathscr{H}}^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une théorie cohomologique telle que $\tilde{\mathscr{H}}^n$ (point) soit de type fini pour tout n.*

Alors, étant donnés un CW-complexe X et un entier n supérieur ou égal à 1, *$\tilde{\mathscr{H}}^n(X, G)$ est séparé pour tout groupe abélien G si, et seulement si, $\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X)$ est projectif pur c'est-à-dire si, et seulement si, $\tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(X)$ est somme directe de groupes cycliques (finis ou infinis)* (*cf.* [3], théorème 30-2).

Dans le cas de la cohomologie singulière ($\tilde{H}^n$), puisque, pour tout groupe abélien Γ et tout entier n supérieur ou égal à 2, il existe un CW-complexe X tel que $\tilde{H}_{n-1}(X) = \Gamma$, on a de plus le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.5. — *Soit $\mathscr{H} = (\tilde{H}^n)$ la théorie de cohomologie singulière.*

Alors, étant donnés un groupe abélien G et un entier n supérieur ou égal à 2, *$\tilde{H}^n(X, G)$ est séparé pour tout CW-complexe X si, et seulement si, G est injectif pur, c'est-à-dire si, et seulement si, G est somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe complet pour la topologie Z-adique* (*cf.* [3], théorème 39-1).

3. Recherche d'un critère de séparation dans le cas général

Des résultats obtenus au paragraphe précédent, on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. — *Soit Y espace topologique connexe ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe tel que $[X, Y]$ soit séparé pour tout CW-complexe X.*

Alors, pour tout $i \geqslant 2$, $\pi_i(Y)$ est somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe complet pour la topologie $\mathbf{Z}$-adique.

Démonstration. — Il est équivalent de montrer que, pour $i \geqslant 2$, on a Pext $(\Gamma, \pi_i(Y)) = 0$ pour tout groupe abélien Γ.

Pour cela considérons X, CW-complexe, obtenu par attachement au point de cellules de dimension i et $i-1$, tel que $\tilde{H}_{i-1}(X) = \Gamma$ et $\tilde{H}_n(X) = 0$ pour tout $n \neq i-1$. Soit (Y_i) le système de Postnikov associé à Y. Alors on a une suite exacte

$$[X, \Omega Y_{i-1}] \to \tilde{H}^i(X, \pi_i(Y)) \to [X, Y_i] = [X, Y].$$

Mais par obstruction, $[X, \Omega Y_{i-1}] = 0$, donc puisque $[X, Y]$ est séparé, $\tilde{H}_i(X, \pi_i(Y))$ l'est aussi. D'où Pext $(\Gamma, \pi_i(Y)) = 0$.

On peut maintenant se poser le problème suivant : étant donné Y un espace connexe de $W_0^{\bullet}$, trouver une condition sur Y assurant la séparation de $[X, Y]$ pour tout CW-complexe X.

Le problème reste ouvert. Nous allons seulement montrer que la réciproque de la proposition précédente est fausse : le fait que les groupes d'homotopie de Y soient somme directe d'un groupe divisible et d'un groupe complet pour la topologie $\mathbf{Z}$-adique n'entraîne pas que $[X, Y]$ soit séparé pour tout CW-complexe X.

De façon précise, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2. — *Il existe un espace E ayant des groupes d'homotopie divisibles et un CW-complexe X tels que $[X, E]$ ne soit pas séparé.*

Construction de E. — Soit $k : K(\mathbf{Q}, 2) \to K(\mathbf{Q}, 4) \to K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4)$ l'application représentant le générateur canonique α^2 de $H^4(K(\mathbf{Q}, 2), \mathbf{Q})$ prolongé à $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Nous définissons E comme l'espace à deux étages de

Postnikov obtenu comme l'image réciproque par k du fibré des chemins au-dessus de $K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4)$

$$\begin{tikzcd} K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 3) \arrow[r, hook] & E \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & \mathscr{E} \arrow[d] \\ & K(\mathbf{Q}, 2) \arrow[r, "k"] & K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4). \end{tikzcd}$$

Alors, pour tout CW-complexe X, on a une action de $H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sur $[X, E]$, dont les orbites sont les images réciproques des points de $H^2(X, \mathbf{Q})$ par l'application $p_* : [X, E] \to H^2(X, \mathbf{Q})$.

Avant de construire X, nous allons étudier plus précisément ces orbites :

LEMME 3.2. — *Soit* $[f] \in [X, E]$, *et* $\varphi_f : H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to [X, E]$ *l'application induite par l'action de* $H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ *sur* $[X, E]$. *Notons* β *la classe de* $p_\#([f])$ *dans* $H^2(X, \mathbf{Q})$.

Alors, si l'on note $[u]$ *la classe dans* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ *d'un élément u de cohomologie rationnelle, on a la suite exacte suivante :*

$$H^1(X, \mathbf{Q}) \xrightarrow{[2\beta \cup .]} H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\varphi_f} [X, E].$$

Démonstration. — Rappelons de quelle façon est définie l'application φ_f.

En fibrant k, on peut choisir un représentant f de $[f]$ tel que l'on ait $k \circ g = 0$, où $g = p \circ f$:

$$\begin{tikzcd} & K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 3) \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \mathscr{E} \arrow[d] \\ & X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"] & K(\mathbf{Q}, 2) \arrow[r, "k"] & K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4). \end{tikzcd}$$

Le fibré

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] & K(\mathbf{Q}, 2) \arrow[d, "k"] \\ & K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4) \end{tikzcd}$$

induit un fibré

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}(X, E) \arrow[r, hook] & \mathscr{C}(X, K(\mathbf{Q}, 2)) \arrow[d, "\hat{k}"] \\ & \mathscr{C}(X, K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4)) \end{tikzcd}$$

et l'on peut pointer $\mathscr{C}(X, E)$ par f, $\mathscr{C}(X, K(\mathbf{Q}, 2))$ par g, et $\mathscr{C}(X, K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4))$ par 0. L'application φ_f est alors induite par l'action de $\pi_1(\mathscr{C}(X, K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4))$ sur $\pi_0(\mathscr{C}(X, E))$. En particulier on obtient la suite exacte

$$\pi_1(\mathscr{C}(X, K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 2)), g) \xrightarrow{\psi} \pi_1(\mathscr{C}(X, K(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, 4)) = H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\varphi_f} [X, E] \to H^2(X, \mathbf{Q}).$$

Donc, étant donné α dans $H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, α appartient au noyau de φ_f si, et seulement si, il existe ω dans $H^2(S^1 \times X, \mathbf{Q})$ tel que $\alpha = k_\#(\omega)$ dans $H^4(S^1 \times X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Si l'on note 1 et ε les générateurs canoniques de $H^0(S^1)$ et $H^1(S^1)$, ceci équivaut à dire qu'il existe $v \in H^1(X, \mathbf{Q})$ tel que l'on ait

$$\alpha = [(1 \times \beta + \varepsilon \times v)^2] = [2\varepsilon \times (\beta \cup v)]$$

dans $H^4(S^1 \times X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ soit $\alpha = [2\beta \cup v]$ dans $H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Ceci démontre le lemme.

Construction de X. — Nous allons maintenant définir un CW-complexe X et une application $f : X \to E$ tels que l'orbite de $[f]$ ne soit pas réduite à $[f]$, mais telle que, pour tout sous-complexe fini K de X, l'orbite de $[f \mid K]$ soit réduite à $[f \mid K]$.

Soit $X = S^2 \times Y$. Notons ε_2 le générateur canonique de $H^2(S^2)$, 1 le générateur de $H^0(Y, \mathbf{Q})$, et choisissons une classe $[f]$ de $[X, E]$ telle que la classe $\beta = [p \circ f]$ de $H^2(S^2 \times Y, \mathbf{Q})$ soit donnée par $\beta = \varepsilon_2 \times 1$.

Alors du lemme 3.2 on déduit une suite exacte

$$H^1(Y, \mathbf{Q}) \xrightarrow{\varepsilon_2 \times [\cdot]} H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{\varphi_f} [X, E].$$

Prenons maintenant $Y = M(\mathbf{Q}, 1)$. Alors

$$H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = H^2(S^2) \otimes H^1(Y, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Donc se donner un élément α de $H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ équivaut à se donner un élément α'' de $H^1(Y, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et dire que α appartient au noyau de φ_f équivaut à dire que α'' se factorise par $\mathbf{Q}$.

Or on peut trouver un élément α'' de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ qui ne se factorise pas par $\mathbf{Q}$. Donc il existe un élément α de $H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ tel que $\varphi_f(\alpha)$ soit différent de $[f]$ dans $[X, E]$

$$\begin{array}{ccc} H^3(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\quad \varphi_f \quad} & [X, E] \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ \lim\mathrm{proj}_{K \in \mathscr{K}} H^3(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \to & \lim\mathrm{proj}_{K \in \mathscr{K}} [K, E]. \end{array}$$

Mais pour tout sous-complexe fini $K \overset{i}{\hookrightarrow} Y$, on peut rendre commutatif le diagramme.

$$\begin{array}{ccc} H_1(K) & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ \downarrow{\scriptstyle i_*} & & \downarrow \\ H_1(Y) \simeq \mathbf{Q} & \xrightarrow{\alpha''} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \end{array}$$

puisque H_1 (K) est de type fini.

Par conséquent, $\varphi_f(\alpha)$ et $[f]$ ont même image par θ, donc θ n'est pas injective, et la proposition 3.2 est démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS (J. F.). — A variant of E. H. Brown's representability theorem, *Topology*, t. 10, 1971, p. 185-198.

[2] BOUSFIELD (A. K.), KAN (D. M.). — *Homotopy limits, completions and localizations.* — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Lecture Notes in Mathematics*, 304).

[3] FUCHS (L.). — *Infinite abelian groups*, I. — New York, Academic Press, 1970 (*Pure and applied Mathematics*, Academic Press, 36).

[4] GRAY (B. I.). — Spaces of the same *n*-type, for all *n*, *Topology*, t. 5, 1966, p. 241-243.

[5] HUBER (M.) et MEIER (W.). — Cohomology theories and infinite *CW*-complexes, *Comment. Math. Helvet.* (à paraître).

[6] JENSEN (C. U.). — *Les foncteurs dérivés de* lim proj *et leurs applications en théorie des modules.* — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Lecture Notes in Mathematics*, 254).

[7] MILNOR (J.). — On spaces having the homotopy type of a *CW*-complex, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 90, 1971, p. 272-280.

[8] SULLIVAN (D.). — *Geometric topology*, Part I. — Cambridge, M.I.T. Press, 1970.

[9] YOSIMURA (Z. I.). — Universal coefficient sequences for cohomology theories of *CW*-spectra, *Osaka J. Math.*, t. 12, 1975, p. 305-323.