BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES EMSALEM

Géométrie des points épais

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 399-416
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__399_0>

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. 399-416.

GÉOMÉTRIE DES POINTS ÉPAIS

PAR

JACQUES EMSALEM

[Université Paris-VII]

RÉSUMÉ. — On donne un moyen simple de produire toutes les algèbres locales artiniennes de Gorenstein sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et dans le cas où elles sont isomorphes à leur gradué associé, on les classe. Dans le cas général, on traduit en termes de déformation et de classification de polynômes les problèmes respectifs de la déformation et de la classification d'une telle algèbre.

SUMMARY. — One gives a simple way of getting all the local artinian algebras on a algebraically closed field of characteristic 0, and of classifying those which are isomorphic to their associated graded rings. In the general case, one translates in terms of deformation and classification of polynomials, the respective problems of deformation and classification of such an algebra.

Table des matières

A. Introduction

La classe des anneaux locaux artiniens de Gorenstein possède, dans la catégorie des anneaux noethériens, le privilège d'être la plus petite classe d'anneaux permettant d'énoncer un Nullstellensatz abstrait d'essence triviale : l'intersection des noyaux de tous les homomorphismes surjectifs d'un anneau noethérien dans des anneaux locaux artiniens de Gorenstein est nulle (Prop. 14).

Sur un corps k, algébriquement clos de caractéristique 0, on a une notion naturelle d'élément infinitésimal et d'« appartenance » d'un tel élément à un schéma, en sorte que tout k-schéma de type fini est entièrement déterminé par l'ensemble des éléments infinitésimaux qui lui « appartiennent » (Prop. 12).

Dans le contexte d'une dualité, qui est exposée dans la section B.1, on s'aperçoit que la seconde assertion est une version de la première dès qu'on dispose de la description des k-A.L.A.G. (algèbres locales artiniennes de Gorenstein sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0) fournie par la proposition 4 : soit P un polynôme sur k à un nombre quelconque de variables; soit E_p l'espace vectoriel engendré par P et toutes ses dérivées partielles à tous les ordres; considérons l'algèbre d'endomorphismes engendrée par les restrictions à E_p des dérivations partielles par rapport à chaque variable : cette algèbre est une k-A.L.A.G., et réciproquement toute k-A.L.A.G. peut être obtenue ainsi à isomorphisme près. Plus généralement, nous associons à chacune de ses présentations une interprétation de toute k-algèbre de type fini, en termes d'opérateurs différentiels. Il s'agit de « matérialiser » d'une façon géométrique spécifique un objet abstraitement défini, ce qui permet, dans certains cas, de les produire exhaustivement et, dans d'autres cas plus favorables encore, de les classer : cette démarche, en ce qui concerne du moins la construction principale, va donc à rebours de la recherche de caractérisations intrinsèques, qui sont, pour la plupart, triviales. En revanche, autour et à partir de cette construction, certains objets peuvent se présenter, de façon calculatoire d'abord, qui exigent rétrospectivement une caractérisation intrinsèque (Prop. 7 et 9).

La description ci-dessus des k-A.L.A.G. permet de transcrire les problèmes de leur classification et de leur déformation en termes de polynômes. En particulier, la classification de celles de ces algèbres qui sont isomorphes à leurs gradués associés respectifs se réduit à la classification, bien connue grâce à la théorie des invariants, des polynômes homogènes sous l'action du groupe linéaire (Prop. 17).

Notations

k désigne un corps algèbriquement clos de caractéristique 0.

$k[X_1, \ldots, X_n]$ l'algèbre des polynômes à n variables sur k.

$k[[d_1, \ldots, d_n]]$ l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants sur $k[X_1, \ldots, X_n]$, d_i notant la dérivation partielle par rapport à X_i ($k[[d_1, \ldots, d_n]]$ est isomorphe à l'algèbre des séries formelles à n variables).

$k[d_1, \ldots, d_n]$ la sous-algèbre de la précédente constituée par les polynômes en les d_i.

$k[[d_1, \ldots, \hat{d_i}, \ldots. d_n]] = k[[d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_n]]$.

$k^p[d_1, \ldots, d_n]$ l'ensemble des plynômes en les d_i de degré inférieur ou égal à p (signification homologue pour $k^p[X_1, \ldots, X_n]$).

$k_p[d_1, \ldots, d_n]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré p en les d_i et de 0 (signification homologue pour $k_p[X_1, \ldots, X_n]$).

Dans $k[[d_1, \ldots, d_n]]$, on note indifféremment $\partial/\partial d_i$ et δ_i l'endomorphisme de dérivation partielle par rapport à d_i. On conserve ces notations pour la restriction à $k[d_1, \ldots, d_n]$ de ce même endomorphisme;

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$, on pose $\alpha! = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i!$, $X^\alpha = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i^{\alpha_i}$ dans $k[X_1, \ldots, X_n]$, $d^\alpha = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i^{\alpha_i}$ dans $k[d_i, \ldots, d_n]$.

Si $(a) \in k^n$, on notera a_i sa i-ième composante.

Si E est un k-espace vectoriel, E^* désigne son dual.

Si $\lambda : E \to F$ est une application k-linéaire, $\lambda^t : F^* \to E^*$ désigne sa transposée, et $\ker \lambda$ son noyau.

Si E est un sous-espace vectoriel de $k[X_1, \ldots, X_n]$, $E^\perp$ désigne son orthogonal dans $k[[d_1, \ldots, d_n]]$, identifié par l'application λ de la proposition 1 au dual de $k[X_1, \ldots, X_n]$.

Si F est un sous-espace vectoriel de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$, $F^\perp$ désigne son orthogonal dans $k[X_1, \ldots, X_n]$, identifié au dual topologique de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ (Prop. 1).

Si V et W sont deux sous-ensembles d'un anneau A, on pose $(V : W) = \{x \in A; xW \subset V\}$.

On note m l'idéal maximal de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$, et on appelle topologie m-adique la topologie sur cet anneau associée à cet idéal.

Si $(a) \in k^n$, on note $m_{(a)} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ l'idéal maximal associé à (a). En particulier, $m_{(0)}$ est associé à l'origine de k^n.

Si I est un idéal d'un anneau de polynômes $k[T_1, \ldots, T_n]$, on note HI l'idéal homogène associé.

Si A est un anneau local d'idéal maximal m, on pose $\operatorname{gr} A = \bigoplus_{i \geq 0} m^i/m^{i+1}$.

Si P est un polynôme de $k[X_1, \ldots, X_n]$, A_P est l'algèbre de Gorenstein associée à P par la proposition 4.

Si A est un anneau, $A^{\bullet}$ désigne le groupe des unités de A.

Si V est un k-espace vectoriel, $GL_k(V)$ désigne le groupe linéaire de V.

Si S est un schéma affine, $\Gamma(S)$ représente l'anneau des sections globales de S.

B. Éléments infinitésimaux

1. Dualité entre $k[X_1, \ldots, X_n]$ et $k[[d_1, \ldots, d_n]]$.

On a le lemme suivant (facile) :

LEMME. — *L'application $\lambda : k[[d_1, \ldots, d_n]] \to k[X_1, \ldots, X_n]^*$,* définie *par $\lambda(F).P = F(P)(0)$ si $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$, est un isomorphisme linéaire. On identifiera donc, par λ^{-1}, le dual de $k[X_1, \ldots, X_n]$ à $k[[d_1, \ldots, d_n]]$.*

Ce lemme sert dans la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Le corps k étant muni de la topologie discrète, munissons $k[X_1, \ldots, X_n]^*$ de la topologie de la convergence simple, et $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ de la topologie m-adique. L'application λ, définie dans le lemme, devient alors un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.*

Soit $\lambda^* : k[X_1, \ldots, X_n] \to k[[d_1, \ldots, d_n]]^*$ l'application canoniquement déduite de λ. Cette application définit un isomorphisme entre $k[X_1, \ldots, X_n]$ et le sous-espace vectoriel de $k[[d_1, \ldots, d_n]]^*$, constitué par les formes linéaires continues ($k[[d_1, \ldots, d_n]]$ étant muni de la topologie m-adique, et k de la tolopogie discrète).

Soit E un sous-espace vectoriel de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$; pour que E soit fermé, il faut et il suffit que $E^{\perp\perp} = E$ (l'orthogonal étant pris chaque fois dans le dual topologique).

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur. Notons toutefois qu'il y aura avantage à remarquer que, pour qu'une forme linéaire

$\lambda : k[[d_1, \ldots, d_n]] \to k$ soit continue, il faut et il suffit que $\ker \lambda$ soit ouvert.

Remarque. — Cette dualité implique toutes les constructions et les propriétés habituelles dans ce genre de situation. Citons les plus importantes :

(*a*) Soit m_P la multiplication par un polynôme P dans $k[X_1, \ldots, X_n]$. Le transposé de l'endomorphisme m_P est l'opérateur différentiel polynomial $P(\partial/\partial d_1, \ldots, \partial/\partial d_n)$ opérant dans $k[[d_1, \ldots, d_n]]$. En particulier, le transposé de m_{X_i} est la dérivation partielle $\partial/\partial d_i$.

Signalons à cet égard que si P appartient à $k[X_1, \ldots, X_n]$ et si Δ appartient à $k[[d_1, \ldots, d_n]]$, on a

$$P\left(\frac{\partial}{\partial d_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial d_n}\right)(\Delta)(0) = \Delta(P)(0).$$

(*b*) On définit la notion ordinaire d'orthogonalité.

(*c*) Le passage à l'orthogonal établit une bijection canonique entre les idéaux de $k[X_1, \ldots, X_n]$ et les sous-espaces vectoriels F de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ tels que : (α) F soit fermé; (β) F soit stable par dérivation. Cette bijection inverse l'ordre d'inclusion.

Dans cette bijection, les idéaux de codimension p de $k[X_1, \ldots, X_n]$ et les sous-espaces vectoriels de dimension p de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ stables par dérivation se correspondent biunivoquement : par exemple, soit $(a) \in k^n$; à l'idéal maximal $m_{(a)}$ relatif à ce point est associé le sous-espace vectoriel de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ engendré par $\exp[a_1 d_1 + \ldots + a_n d_n]$; plus généralement, soit I un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$; pour que I soit $m_{(a)}$-primaire, il faut et il suffit que : $I^\perp \subset \exp(a_1 d_1 + \ldots + a_n d_n)\, k[d_1, \ldots, d_n]$; en particulier, si (a) se trouve à l'origine 0 de k^n, on a, pour tout entier p, une bijection entre les idéaux m_0-primaires de codimension p de $k[X_1, \ldots, X_n]$ et les sous-espaces vectoriels de dimension p de $k[d_1, \ldots, d_n]$ stables par dérivation.

2. Interprétation des algèbres artiniennes locales

Identifions $k[X_1, \ldots, X_n]$ à l'algèbre des opérateurs différentiels polynomiaux sur $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ par l'isomorphisme qui applique X_i sur la dérivation partielle $\partial/\partial d_i$. $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ devient alors un $k[X_1, \ldots, X_n]$-module. Soit I un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Comme l'orthogonal $I^\perp$ de I dans $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ est stable par dérivation, $I^\perp$ est un sous-$k[X_1, \ldots, X_n]$-

module de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$. Ce point de vue étant acquis, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Soit A une k-algèbre de présentation finie. Pour toute présentation*

$$0 \to I \to k[X_1, \ldots, X_n] \to A \to 0.$$

(*a*) *$I^{\perp}$ possède une structure naturelle de A-module pour laquelle il s'identifie canoniquement à l'espace vectoriel dual de A muni de sa structure canonique de A-module.*

(*b*) (Première interprétation de A). *En tant qu'espace vectoriel, A s'identifie à l'espace des restrictions à $I^{\perp}$ des formes linéaires sur $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ associées, par la proposition* 1, *aux polynômes de $k[X_1, \ldots, X_n]$.*

(*c*) (Deuxième interprétation de A). *En tant qu'algèbre, A s'identifie à l'algèbre des restrictions à $I^{\perp}$ des opérateurs différentiels polynomiaux sur $k[[d_1, \ldots, d_n]]$.*

(*d*) *Pour que A soit artinienne et de dimension r, il faut et il suffit que $I^{\perp}$ soit de dimension r.*

(*e*) *Pour que A soit artinienne, locale, de dimension r, et que I soit m_0-primaire, il faut et il suffit que $I^{\perp}$ soit un sous-espace vectoriel de dimension r de $k[d_1, \ldots, d_n]$.*

Avant d'esquisser la démonstration de cette proposition, dégageons, dans les deux corollaires suivants, ce qu'elle implique dans le cas des algèbres artiniennes locales. Mais auparavant, introduisons une définition.

Définition. — On appelle *élément infinitésimal* de k^n un couple (x, Δ) où $x \in k^n$ et $\Delta \in k[d_1, \ldots, d_n]$. On appelle *épaisseur* de cet élément, le degré de Δ. On note I_n l'ensemble des éléments infinitésimaux de k^n et $I_{n, p}$ l'ensemble de ceux de ces éléments qui sont d'épaisseur inférieure ou égale à p. On a une injection de k^n dans I_n qui à x associe $(x, 1)$. Toute application polynomiale $P : k^n \to k$ s'étend canoniquement à I_n par la formule

$$P(x, \Delta) = \Delta(P)(x).$$

COROLLAIRE 1. — *Soit j :* Spec $A \to k^n$ *une immersion fermée, où A est une algèbre artinienne locale de dimension r et où l'image du point fermé de* Spec A *est* (0). *Il existe alors un sous-espace vectoriel E de $k[d_1, \ldots, d_n]$ stable par dérivation, de dimension r, tel que A s'identifie, en tant qu'espace vectoriel, à l'ensemble des restrictions des fonctions polynomiales à l'ensemble des éléments infinitésimaux de k^n de la forme* $(0, \Delta)$ *où $\Delta \in E$. De plus, E s'identifie canoniquement au dual de A.*

COROLLAIRE 2. — *Soit A une algèbre artinienne locale de dimension r à n générateurs. Il existe un sous-espace vectoriel E de dimension r de $k[d_1, \ldots, d_n]$ stable par dérivation tel que A s'identifie à l'algèbre engendrée par les restrictions à E des dérivations partielles $\partial/\partial d_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Inversement, toute telle algèbre est une algèbre artinienne à n générateurs.*

Exemples

(*a*) La surjection canonique $k[X] \to k[X]/(X^n)$ permet d'interpréter $k[X]/(X^n)$ d'une part, comme l'espace vectoriel des restrictions de fonctions polynomiales à une variable à l'ensemble des éléments infinitésimaux $(0, \Delta)$, où Δ est une combinaison linéaire des puissances i-ièmes de l'opérateur $\partial/\partial X$ avec $0 \leqslant i < n$, d'autre part, comme l'algèbre des restrictions des opérateurs différentiels polynomiaux sur $k[d]$ à l'espace vectoriel engendré par d^{n-1} et ses dérivées successives.

(*b*) Soient P, Q, R trois formes quadratiques « en position générale » dans $k[X_1, X_2, X_3]$. Il existe une forme cubique S de $k[d_1, d_2, d_3]$ uniquement déterminée à un facteur scalaire non nul près telle que, si E est l'espace vectoriel engendré par S et toutes ses dérivées partielles à tous les ordres, $k[X_1, X_2, X_3]/(P, Q, R)$ (qui est de dimension 8) s'identifie d'une part à l'espace vectoriel de fonctions polynomiales restreintes aux points infinitésimaux de la forme $(0, \Delta)$ où $\Delta \in E$, et d'autre part à l'algèbre d'endomorphismes de E engendrée par les trois dérivations partielles $\partial/\partial d_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. Dans le cas particulier (auquel génériquement on peut toujours se ramener, *voir* [3]) où

$$P = X_1^2 + \lambda X_2 X_3, \qquad Q = X_2^2 + \lambda X_3 X_1, \qquad R = X_3^2 + \lambda X_1 X_2,$$

on a

$$\delta = d_1^3 + d_2^3 + d_3^3 - 6/\lambda\, d_1 d_2 d_3.$$

Esquisse d'une démonstration de la proposition 2. — Remarquons d'abord que, si E est un sous-espace vectoriel de $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ stable par dérivation, et Δ un opérateur différentiel polynomial sur $k[[X_1, \ldots, X_n]]$, il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(i) Pour tout P appartenant à E, $\Delta(P)(0) = 0$;

(ii) Pour tout P appartenant à E, $\Delta(P) = 0$.

Dès lors, on s'aperçoit que I est l'annulateur du $k[X_1, \ldots, X_n]$-module $I^{\perp}$, et les assertions de la proposition 2 se vérifient aisément.

3. Interprétation du passage au gradué associé

Notation. Définition. — Si A est une algèbre artinienne locale, on appellera *gradué associé* de A, et on notera gr A, l'algèbre $\bigoplus_{0 \leqslant i} m^i/m^{i+1}$, où m est l'idéal maximal de A.

Le corollaire 2 permet de construire toute algèbre artinienne locale à partir d'un espace vectoriel de polynômes, stable par dérivation. On se propose de traduire en termes de tels espaces l'opération de passage d'une telle algèbre à son gradué associé. Ceci fait l'objet de la proposition 3.

PROPOSITION 3. — *Soit E un sous-espace vectoriel de dimension finie et stable par dérivation de $k[d_1, \ldots, d_n]$. Soit F l'espace vectoriel engendré par les formes de plus haut degré des polynômes de E : F est stable par dérivation et* $\dim F = \dim E$. *Si A_E* (resp. A_F) *est l'algèbre des restrictions à E* (resp. *à F*) *des opérateurs différentiels sur $k[d_1, \ldots, d_n]$, A_F est canoniquement isomorphe à l'algèbre* gr A_E, *gradué associé à A_E.*

Plus précisément, soit J_E (resp. J_F) *le noyau du morphisme canonique de $k[d_1, \ldots, d_n]$ sur A_E* (resp. A_F)*; si J'_E est l'idéal homogène associé à J_E (idéal engendré par les formes de plus bas degré des éléments de J_E), on a $J'_E = J_F$; d'où*

$$\mathrm{gr}\, A_E = k[d_1, \ldots, d_n]/J'_E \quad \textit{implique}\ \mathrm{gr}\, A_E \simeq k[d_1, \ldots, d_n]/J_F \simeq A_F.$$

F est donc muni d'une structure de gr A_E*-module; en tant que tel, il est canoniquement isomorphe au dual de* gr A_E.

La graduation de $k[d_1, \ldots, d_n]$ induit sur F une graduation telle que si $\alpha \in \mathrm{gr}\, A_E$ est homogène de degré h, et si $x \in F$ est homogène de degré l, αx est homogène de degré $l-h$ si $h \leqslant l$, et nul sinon, et $\langle \alpha, x \rangle$ est nul sauf si $l = h$ auquel cas, à l'identification près du corps k avec son image dans gr A_E, *on a $\langle \alpha, x \rangle = \alpha x$ (le symbole $\langle\ ,\ \rangle$ désignant la forme bilinéaire qui permet d'identifier F au dual de* gr A_E).

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur.

4. Première application : production de toutes les algèbres locales, de Gorenstein et de dimension finie; quelques propriétés et constructions relatives à ces algèbres

(*a*) *Procédés de production*

PROPOSITION 4. — *Soit P un polynôme de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Soit E_P le sous-espace vectoriel de $k[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par P et toutes ses dérivées* *partielles à tous les ordres. Alors l'ensemble des restrictions à E_P de tous les opérateurs différentiels, linéaires à coefficients constants sur $k[X_1, \ldots, X_n]$ constitue une k-algèbre locale, artinienne, de Gorenstein (qui sera notée A_P).*

Réciproquement, à isomorphisme près, toute k-algèbre artinienne locale de Gorenstein peut s'obtenir par le procédé précédent.

Le degré de P est la plus haute puissance non nulle de l'idéal maximal de A_P.

Démonstration. — Un anneau local artinien est de Gorenstein si, et seulement si, l'annulateur de son idéal maximal, qui est canoniquement un espace vectoriel sur son corps résiduel, est de dimension 1 (*voir* [7], th. 221). De cette caractérisation on déduit facilement une seconde caractérisation des Gorensteins artiniens : l'ensemble des idéaux non nuls (parmi lesquels on admet l'anneau lui-même — cas d'un corps —) admet un plus petit élément; puis une troisième (qui est celle qui nous servira) lorsqu'en outre l'anneau est une k-algèbre : Soit A une k-algèbre locale artinienne. Soit A^* le k-espace vectoriel dual de A muni de sa structure canonique de A-module. A est de Gorenstein si, et seulement si, A^* est un A-module monogène.

Dès lors, le résultat annoncé est un cas particulier de la proposition 2 (*a*) et (*d*) (lorsqu'on a remarqué, toutefois, que le corps k étant algébriquement clos, toute k-algèbre artinienne locale peut s'identifier au quotient de $k[X_1, \ldots, X_n]$ par un idéal m_0-primaire).

Dans [6], A. IARROBINO donne le procédé suivant de production de toutes les k-algèbres de Gorenstein, locales, artinienne, isomorphes à leurs gradués associés respectifs ([6], p. 16, exemple 2.9) :

PROPOSITION 5. — *Pour tout entier l, appelons R_l l'espace de tous les polynômes homogènes de degré l dans $k[[d_1, \ldots, d_n]]$. Fixons un entier l_0. Soit H un hyperplan de R_{l_0}. Définissons dans ce cas particulier « l'idéal ancestral I de H » : si $i \leqslant l_0$, soit H_i le plus grand sous-espace vectoriel de R_i tel que $R_{l_0-i}.H_i \subset H$; on pose alors :*

$$I = (\oplus_{1 \leqslant i \leqslant l_0} H_i) \otimes m^{l_0+1},$$

où m est l'idéal maximal de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$; I est un idéal.

Alors $k[[d_1, \ldots, d_n]]/I$ est une algèbre artinienne locale de Gorenstein isomorphe à son gradué associé, et réciproquement, toute telle algèbre s'obtient, à isomorphisme près, par le procédé précédent.

Cette proposition s'obtient comme un cas particulier de la proposition 4, lorsque dans cette proposition, on prend P homogène. Ceci devient clair dès qu'on a remarqué que :

(α) l'application λ de la proposition 1 met en dualité l'espace des formes de degré l de $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ et l'espace des formes de même degré de $k[X_1, \ldots, X_n]$;

(β) si V est un sous-espace de R_{l_0}, et $V_i = (V : R_{l_0-i}) \subset R_i$ pour $i \leqslant l_0$, si W est dans l'espace des formes de degré l_0 de $k[X_1, \ldots, X_n]$ l'orthogonal de V, il résulte, de la remarque (a) suivant la proposition 1, que W_i est l'espace vectoriel engendré par toutes les dérivées partielles d'ordre $l_0 - i$ de tous les éléments de W.

(*b*) *Cas d'une intersection complète : solutions d'un système de n équations linéaires aux dérivées partielles portant sur des fonctions à n variables.*

PROPOSITION 6. — *Soient* $\Delta, \ldots, \Delta_n$ *n éléments de l'idéal* $m_{(0)}$ *de* $k[d_1, \ldots, d_n]$ *tels que* $k[d_1, \ldots, d_n]/(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ *soit de dimension finie (i. e. que* $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ *soit un idéal* m_0*-primaire). Alors l'ensemble S des f de* $k[[X_1, \ldots, X_n]]$, *telles que* $\Delta_i(f) = 0$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$, *est inclus dans* $k[X_1, \ldots, X_n]$, *et il existe* f_0 *dans S vérifiant la propriété : (P) S est l'ensemble des* $\Delta(f_0)$ *pour* Δ *appartenant à* $k[d_1, \ldots, d_n]$. *Pour qu'un autre élément* f_0 *de S vérifie (P), il faut et il suffit qu'il existe* Δ, *élément de* $k[d_1, \ldots, d_n]$ *inversible dans* $k[[d_1, \ldots, d_n]]$ *tel que* $\Delta f_0 = f'_0$.

L'idéal $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ *est l'idéal des opérateurs différentiels qui annulent un élément de S vérifiant (P).*

Si les Δ_i *sont homogènes, à multiplication près par un scalaire non nul, il existe un seul polynôme homogène* f_0 *vérifiant (P).*

Démonstration. — L'hypothèse sur les Δ_i implique que l'algèbre $k[d_1, \ldots, d_n]/(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ est intersection complète, donc de Gorenstein (*voir* [7]). On peut donc appliquer les propositions 4 et 5, et l'énoncé de la proposition 6 s'en déduit facilement.

(*c*) *Algèbre de Gorenstein graduée associée à une algèbre de Gorenstein locale artinienne et gradué associé à cette algèbre.*

Définition. — Soit A une algèbre artinienne locale d'idéal maximal m. On appelle nilindice de A le plus grand entier n tel que $m^n \neq (0)$.

Définition. — Soit A une algèbre locale (resp. locale graduée) artinienne. On dit qu'elle est canoniquement graduable (resp. canoniquement graduée), si en tant qu'algèbre (resp. algèbre graduée), elle est isomorphe au gradué associé à l'algèbre locale sous-jacente.

PROPOSITION 7. — *Soit P un polynôme de $R[X_1, \ldots, X_n]$, m son degré, et P_m sa composante homogène de plus haut degré. Soient A_P et A_{P_m} les algèbres locales artiniennes respectivement associées à P et P_m par le procédé de la proposition* 4 (*et qui, d'après la même proposition, sont de nilindice m*). *Soient J_P et J_{P_m} les noyaux respectifs des homomorphismes canoniques de $k[d_1, \ldots, d_n]$ sur A_P et A_{P_m}, et soit J'_P l'idéal homogène associé à J_P; on a $J'_P \subset J_{P_m}$ et, par suite, il y a une surjection canonique μ du gradué associé à A_P,* gr A_P, *sur A_{P_m}. Pour que* gr A_P *soit une algèbre de Gorestein, il faut et il suffit que les dimensions de A_P et de A_{P_m} coïncident, et μ est alors un isomorphisme.*

Remarque. — La proposition 5 implique que A_{P_m} possède une graduation canonique. Il est alors facile de voir que l'homomorphisme μ est gradué de degré 0.

La démonstration de la proposition 7, facile à partir de la proposition 3, est laissée au lecteur, de même que les démonstrations des deux propositions suivantes où l'on garde les hypothèses et les notations de la proposition 7.

PROPOSITION 8. — *La composante homogène de degré m de* gr A_P, (gr $A_P)_m$, *est de dimension* 1.

Dans la proposition suivante, le morphisme μ est caractérisé comme la la solution d'un problème universel qui, du reste, se trivialise; ceci fait néanmoins apparaître que la donnée de μ est intrinsèquement associée à la pure structure d'algèbre de A_P, indépendamment de sa construction à partir d'un polynôme P.

PROPOSITION 9 [1]. — *Considérons tous les homomorphismes surjectifs gradués de degré* 0 *de* gr A_P *sur toutes les algèbres artiniennes locales de Gorenstein canoniquement graduées de nilindice m. Alors chacun se factorise d'une manière unique à travers μ (qui est un tel homomorphisme) par un homomorphisme gradué de degré* 0 *qui est, de plus, un isomorphisme.*

On peut généraliser le résultat de la proposition 9 dans le cadre suivant :

PROPOSITION 10 [1]. — *Soit A une k-algèbre canoniquement graduée, de nilindice m, telle que* $\dim A_m = 1$. *Alors il existe une k-algèbre artinienne canoniquement graduée de Gorenstein de nilindice m, A', et, un morphisme gradué surjectif de degré* 0, ν *de A sur A' universel pour les k-morphismes*

[1] Nous devons le point de vue de la proposition 9 et la proposition 10 avec sa démonstration à la suggestion du rapporteur.

gradués de degré 0 *surjectifs de* A *dans les* k*-algèbres de Gorenstein canoniquement graduées de nilindice* m *et de dimension finie.*

Démonstration. — Soit f_j l'homomorphisme de A_j dans Hom (A_{m-j}, A_m) qui associe à un élément x de A_j la restriction à A_{m-j} de la multiplication par x, et H_j le noyau de f_j. On vérifie sans peine que la somme directe des H_j est un idéal homogène H de A et que la surjection canonique ν de A sur son quotient A' par H possède la propriété universelle en vue.

Remarques.

(*a*) La proposition 3 permet de voir qu'ici encore les homomorphismes intervenant dans la factorisation à travers A' sont des isomorphismes.

(*b*) Il est faux que le morphisme ν, défini dans la démonstration de la proposition 10, résolve le problème universel plus général dont l'énoncé s'obtiendrait à partir du précédent en supprimant les conditions de surjectivité. Si tel était le cas, en effet, aucune algèbre A locale, artinienne, canoniquement graduée, de nilindice m, et telle que dim $A_m = 1$ qui ne serait pas de Gorenstein, ne pourrait s'identifier à une sous-algèbre graduée d'une algèbre de Gorenstein canoniquement graduée et de même nilindice m. Or, l'algèbre de nilindice 3, $A = k[X, Y]/(X^3 - Y^3, X^2 Y, XY^2)$ qui n'est pas de Gorenstein (car les dimensions respectives de ses composantes de degré 0, 1, 2, 3 sont respectivement 1, 2, 3 et 1, alors que la proposition 5 implique qu'on aurait dans le cas d'un Gorenstein canoniquement gradué de nilindice m : dim A_j = dim A_{m-j}), s'identifie à la sous-algèbre graduée engendrée par les classes de X et de Y de toute algèbre

$$B_\alpha = k[X, Y, Z]/(X^2 - \alpha YZ, Y^2 - \alpha ZX, Z^2 - \alpha XY), \qquad \text{où} \quad \alpha^3 \neq 1,$$

qui est de nilindice 3 et de Gorenstein (en tant qu'intersection complète). Le même exemple permet de conclure facilement que le problème plus général en vue n'a pas de solution (α pouvant prendre une infinité de valeurs, *voir* [3]).

(*d*) *Exemples divers relatifs aux paragraphes* (*a*), (*b*) *et* (*c*).

1° Considérons dans $k[[X, Y, Z]]$ l'ensemble des solutions du système d'équations aux dérivées partielles $(d_X d_Y + d_Y^3) f = 0$, $d_X^2 f = 0$. C'est l'espace vectoriel E, engendré par le polynôme $Y^4 - 12 XY^2$ et toutes ses dérivées partielles à tous les ordres. L'algèbre des restrictions à E des opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants est donc isomorphe à $k[d_x, d_y]/(d_X d_Y + d_Y^3, d_X^2)$ (qui est de dimension 6) dont le gradué associé est isomorphe à $k[d_X, d_Y]/(d_X d_Y, d_X^2, d_Y^5)$. Le Gorenstein gradué associé à cette algèbre se construit sur le polynôme Y^4, et c'est donc l'algèbre des restrictions à l'espace F engendré par Y^4 et toutes ses dérivées dérivées partielles à tous les ordres des opérateurs de $k[d_x, d_y]$, algèbre isomorphe à $k[d_X, d_Y]/(d_X, d_Y)$ qui est de dimension 4.

2° Exemple d'une algèbre de Gorenstein construite par le procédé de la proposition 4, qui n'est pas intersection complète; soit $P = X^2 + Y^2 + Z^2$. Avec les notations de la proposition 4,

$$A_P \simeq k[d_X, d_Y, d_Z]/(d_X d_Y, d_Y d_Z, d_Z d_Y, d_X^2 - d_Y^2, d_X^2 . d_Z^2).$$

Il est facile de voir que A_P, qui est canoniquement graduable de dimension 5 n'est pas intersection complète.

3° L'exemple (*b*), suivant la proposition 2, fournit une version duale. Considérons le sytème d'équations aux diverses partielles :

$$(d_X^2 + \lambda d_Y d_Z) f = 0, \qquad (d_Y^2 + \lambda d_Z d_X) f = 0, \qquad (d_Z^2 + \lambda d_X d_Y) f = 0.$$

L'espace vectoriel des solutions de ce système est de dimension 8 : c'est l'espace engendré par le polynôme $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - 6/\lambda X_1 X_2, X_3$ et toutes ses dérivées partielles à tous les ordres. L'algèbre associée est canoniquement graduable de type (1, 3, 3, 1) isomorphe à

$$k[d_X, d_Y, d_Z]/(d_X^2 + \lambda d_Y d_Z, d_Y^2 + \lambda d_Z d_X, d_Z^2 + \lambda d_X d_Y).$$

(*e*) *Génériquement, le gradué associé d'une algèbre locale artinienne de Gorenstein est de Gorenstein.*

PROPOSITION 11. — *Il existe un ouvert de Zaniski Ω_p de l'espace vectoriel S_p constitué par* 0 *et les polynômes homogènes de degré p de $k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que, si P est de degré p dans $k[X_1, \ldots, X_n]$, et P_p, sa composante homogène ded egré p, appartient à Ω_p, l'algèbre de Gorenstein A_P a un gradué associé qui est de Gorenstein.*

Esquisse d'une démonstration. — D'après la proposition 7 et le corollaire 2 de la proposition 2, pour que gr A_P soit de Gorenstein, il faut et il suffit que les dimensions des espaces vectoriels engendrés par P (resp. P_p) et toutes ses dérivées partielles à tous les ordres coïncident. On peut montrer qu'il en sera ainsi si P_p appartient à l'ouvert Ω_P défini dans l'assertion suivante (*voir* [5], th. 3.31) :

il existe un ouvert de Zariski Ω_p de S_p tel que si $A \in \Omega_p$ et si W_A est l'espace engendré par A et toutes ses dérivées partielles à tous les ordres, on ait

$$\text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant p/2, \qquad \dim W_k = \dim R_{p-k};$$

$$\text{si} \quad p/2 \leqslant k \leqslant p, \qquad \dim W_k = \dim R_k.$$

Remarque. — On peut se demander si la propriété pour une algèbre de Gorenstein locale artinienne de posséder un gradué associé de Gorenstein ne serait pas générique dans un sens différent (qui, on pourrait le montrer alors, impliquerait la proposition 11) : quel que soit le couple formé par un morphisme plat $\pi : X \to S$ de k-schémas de type fini dont les fibres soient les spectres d'algèbres locales de dimension n et par une section σ de π induisant un isomorphisme de S sur le schéma des points fermés des fibres de π, si la fibre d'un point fermé s_0 de S était le spectre d'une algèbre de Gorestein ayant un gradué associé de Gorenstein, il en serait de même des fibres des points fermés d'un voisinage de s_0 (il est bien connu que, de toutes façons, ces fibres doivent être les spectres d'algèbres de Gorenstein au voisinage de s_0). L'exemple suivant, dû à IARROBINO, constitue une réponse négative à cette question : soient

$$\sigma : \quad \operatorname{Spec} k[T] \to \operatorname{Spec} k[X, Y, T]/(TXY + Y^3, X^2)$$

et

$$\pi : \quad \operatorname{Spec} k[X, Y, T]/(TXY + Y^3, X^2) \to \operatorname{Spec} k[T],$$

les morphismes de schémas respectivement associés à l'homomorphisme qui envoie la classe d'un polynôme $P(X, Y, T)$ sur le polynôme $P(0, 0, T)$ et à l'homomorphisme d'inclusion de $k[T]$ dans $k[X, Y, T]/(TXY + Y^3, X^2)$. On vérifie aisément que π et σ satisfont aux conditions précédentes, mais, tandis que la fibre de π au point $m_{(0)}$ est isomorphe à $\operatorname{Spec} k[X, Y]/(Y^3, X^2)$, algèbre de Gorenstein isomorphe à son gradué associé qui est donc de Gorenstein, aux points $m_{(t)}$ où $t \neq 0$, la fibre de π est isomorphe à $\operatorname{Spec} k[X, Y]/(tXY + Y^3, X^2)$ qui est encore isomorphe à

$$\operatorname{Spec} k[X, Y]/(XY + Y^3, X^2),$$

et il suffit de se reporter à l'exemple 1° de (*d*) pour conclure.

5. Deuxième application : deux versions d'un Nullstellensatz de nature triviale

(*Voir* la définition des éléments infinitésimaux après le proposition 2 dans la section 2.) Commençons par donner les deux énoncés en vue, puis un troisième qui généralise le second.

PROPOSITION 12. — *Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de l'algèbre des polynômes $k[X_1, \ldots, X_n]$, où k est un corps algébriquement clos. Soit $V_{\mathfrak{A}}$ l'ensemble* *des éléments* δ *de* I_n (*voir* la définition des éléments infinitésimaux) *tels que* $P(\delta) = 0$ *pour tout* $P \in \mathfrak{A}$, *et soit* $J_{V_{\mathfrak{A}}}$ *l'ensemble des* P *de* $k[X_1, \ldots, X_n]$ *tels que* $P(\delta) = 0$ *pour tout* $\delta \in V_{\mathfrak{A}}$. *Alors*, $\mathfrak{A} = J_{V_{\mathfrak{A}}}$.

PROPOSITION 13. — *Soit A une k-algèbre de type fini. Alors l'intersection des noyaux de tous les homomorphismes surjectifs allant de A vers toutes les algèbres artiniennes locales de Gorenstein possibles est l'idéal nul.*

PROPOSITION 14. — *Soit A un anneau noethérien. L'intersection des noyaux de tous les homomorphismes surjectifs, allant de A vers des anneaux locaux, artiniens et de Gorenstein, est l'idéal nul.*

Indications sur la démonstration de ces propositions. — Tout d'abord, on peut considérer les propositions 12 et 13 comme deux versions de la même assertion : d'une part, il revient au même de se donner un idéal de l'algèbre des polynômes ou une algèbre de type fini munie d'une présentation, d'autre part, il est facile de voir qu'on peut associer à tout élément infinitésimal de k^n une algèbre locale artinienne de Gorenstein, de telle sorte que le fait que tous les polynômes d'un idéal s'annulent sur cet élément infinitésimal équivaille à ce que leurs images soient nulles dans l'algèbre de Gorenstein (*voir* Prop. 4, le début de l'esquisse de démonstration de la proposition 2 et la remarque (*a*) suivant la proposition 1).

Ensuite, il est clair que la proposition 13 se déduit aisément de la proposition 14.

Esquissons, pour finir, la démonstration de la proposition 14 : on se ramène d'abord suivant un procédé classique (*voir* [2]) au cas où A est local noethérien, puis grâce au théorème de Krull, en considérant les quotients de A par les puissances successives de son idéal maximal, au cas où A est artinien. On conclut en raisonnant alors par récurrence sur la longueur de A.

Notons toutefois qu'on peut démontrer directement la proposition 12 (*voir* [8], prop. 13).

C. Applications aux problèmes de classification et de déformation

Nous décrirons dans un travail ultérieur des applications de ce qui précède aux problèmes de classification et de déformation des algèbres artiniennes. Mentionnons ici quelques résultats qui sont acquis et dont on pourra trouver la démonstration dans [8].

1. Problèmes de classification

Introduisons d'abord des définitions et des notations.

Définition. — Soit A une algèbre locale artinienne d'idéal maximal m. On appelle dimension d'immersion de A la longueur du module m/m^2.

Notations. — On note $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $k[[X_1, \ldots, X_p]]$. On note $k^i[d_1, \ldots, d_p]$ l'espace vectoriel des polynômes en les d_i de degré inférieur ou égal à i, et $k_i[d^1, \ldots, d_p]$ l'espace des formes de degré i.

Définition et notation d'une représentation canonique du groupe $\mathrm{Aut}[[k[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n]$ *dans* $k^{n-1}[d_1, \ldots, d_p]$. — Le dual topologique de $k[[X_1, \ldots, X_p]]$ s'identifiant à $k[d_1, \ldots, d_p]$, le dual de $k[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n$ s'identifie à l'orthogonal de $\mathfrak{M}^n$, c'est-à-dire à l'espace $k^{n-1}[d_1, \ldots, d_p]$. $\mathrm{Aut}[k[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n]$ possède donc une représentation canonique dans $k^{n-1}[d_1, \ldots, d_p]$ qui sera notée R.

On a alors les propositions suivantes :

PROPOSITION 15. — *La classification des algèbres artiniennes locales, de dimension n et de dimension d'immersion p, équivaut à la classification sous le groupe* $\mathrm{Aut}[k[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n]$ *agissant par R des sous-espaces vectoriels de $k^{n-1}[d_1, \ldots, d_p]$ de dimension n, stables par dérivation et contenant $k_1[d_1, \ldots, d_p]$.*

PROPOSITION 16. — *Soit G le groupe* $\mathrm{Aut}[k[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n]$, *et H le groupe des éléments inversibles de $k[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n$. G et H opèrent fidèlement dans $k[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n$, et le groupe Γ qu'ils engendrent dans le groupe linéaire de l'espace vectoriel sous-jacent à $k[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n$ est isomorphe au produit semi-direct de H par G défini par l'homomorphisme $\varphi : G \to \mathrm{Aut}\, H$, qui, à chaque élément de G, associe sa restriction à H.*

Γ opère dans le dual $k^{n-1}[d_1, \ldots, d_p]$ de $k[[X_1, \ldots, X_p]]/\mathfrak{M}^n$.

Soit P un élément de $k^{n-1}[d_1, \ldots, d_p]$. On considère la propriété suivante :

(α) *L'espace vectoriel E_p, engendré par P et toutes ses dérivées partielles à tous les ordres, est de dimension n, et il contient $k_1[d_1, \ldots, d_p]$.*

Alors les classes d'isomorphisme d'algèbres locales de Gorenstein de dimension n et de dimension d'immersion R sont en correspondance biunivoque avec les orbites sous Γ des éléments P de $k^{n-1}[d_1, \ldots, d_p]$ vérifiant (α).

PROPOSITION 17. — *Les classes d'isomorphisme d'algèbres locales artiniennes de Gorenstein canoniquement graduables correspondent biunivoque-*

ment aux classes de polynômes homogènes modulo l'action du groupe linéaire. En particulier, les classes d'isomorphisme d'algèbres locales, de Gorenstein, artiniennes canoniquement graduables de dimension n et de dimension d'immersion p correspondent biunivoquement aux polynômes homogènes de $k^{n-1}[d_1, \ldots, d_p]$ *vérifiant* (α).

2. Problèmes de déformation

Introduisons d'abord une définition.

Définition. – Une déformation en algèbre locale d'une algèbre artinienne locale A_0 de dimension n au-dessus d'un k-schéma de type fini S pointé par un point fermé s_0, est un morphisme de schémas sur k, fini et plat, dont toutes les fibres sont des spectres d'algèbres locales de longueur n, $\pi : X \longrightarrow S$, muni d'une section $\sigma : S \longrightarrow X$ qui induise un isomorphisme de X sur le schéma des points fermés des fibres de π.

Ceci étant, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 18. – *Soit A_0 une k-algèbre artinienne locale de dimension n. Soit $0 \longrightarrow J_0 \longrightarrow k[[X_1, \ldots, X_r]] \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$ une présentation de A_0. Soit $E_0 = J_0^{\perp}$ dans $k[d_1, \ldots, d_r]$. Soient $A_1, \ldots, A_l$ des polynômes en les d_i qui, réunis avec toutes leurs dérivées partielles à tous les ordres, engendrent E_0.*

Pour toute déformation $X \longrightarrow (S, s_0)$ de A_0 au-dessus de (S, s_0) en algèbre locale, quitte à remplacer S par un voisinage affine, ouvert de s_0, il existe l éléments de $\Gamma(S)[d_1, \ldots, d_r]$: $B_1(s, d), B_2(s, d), \ldots, B_l(s, d)$ tels que $B_i(s_0, d) = A_i(d)$ pour tout i, et que, quel que soit le point fermé s de S, l'algèbre des opérateurs différentiels restreints à l'espace vectoriel engendré par les $B_i(s, d)$ et toutes leurs dérivées partielles à tous les ordres, soit isomorphe à l'algèbre affine de la fibre de s. De plus, l'algèbre affine de X, $\Gamma(X)$, s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients dans $\Gamma(S)$, restreints au $\Gamma(S)$-module engendré les $B_i(s, d)$ et toutes leurs dérivées partielles à tous les ordres par rapport aux $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.

Cette proposition étant appliquée au cas où A_0 est une algèbre de Gorenstein donne le corollaire suivant :

COROLLAIRE. – *Avec les notations et les hypothèses de la proposition* 18, *supposons que A_0 soit de Gorenstein. Soit $A(d_1, \ldots, d_r)$ un générateur de $J_0^{\perp}$ (en tant que $k[\delta_1, \ldots, \delta_r]$-module). Se donner une déformation en algèbre* *locale de A_0 équivaut localement à se donner une famille, dépendant régulièrement de s point fermé de S, de polynômes $A(d_1, \ldots, d_r, s)$ tels que :*

1° $A(d_1, \ldots, d_r, s_0) = A(d_1, \ldots, d_r)$,

2° *La dimension de l'espace vectoriel engendré par $A(d_1, \ldots, d_r, s)$ et toutes ses dérivées partielles à tous les ordres par rapport aux d_i ne dépende pas de s.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bloom (T.). — Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques, *Séminaire Lelong* : Analyse, 8e année, 1967/1968, exposé n° 1, 20 p. — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 71).

[2] Bourbaki (N.). — *Algèbre commutative*, Chap. 1, 2 et 3. — Paris, Hermann, 1961. (*Act. scient. et ind.*, 1290, 1293; *Bourbaki*, 37, 38).

[3] Emsalem (J.) et Iarrobino (A.). — Réseaux de coniques et algèbres de longueur sept associées (preprint).

[4] Grothendieck (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, I : *Le langage des schémas*. Paris, Presses universitaires de France, 1960 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 4).

[5] Iarrobino (A.) and Emsalem (J.). — Some zero-dimensional generic singularities; finite algebras having small tangent space, *Compositio Mathematica*, vol. 36, fasc. 2, 1978, p. 145-188.

[6] Iarrobino (A.). — *Vector spaces of forms*, I : *Ancestor ideals*, Austin, University of Texas (preprint).

[7] Kaplansky (I.). — *Commutative rings*. — Boston, Allyn and Bacon, 1970.

[8] Emsalem (J.). — Géométrie des points épais (preprint).

(Texte reçu le 22 février 1978.)

Jacques Emsalem,
24, rue Sibuet,
75012 Paris.