BULLETIN DE LA S. M. F.

GEORGES GRAS

Nombre de φ-classes invariantes. Application aux classes des corps abéliens

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 337-364
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__337_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. 337-364.

NOMBRE DE φ-CLASSES INVARIANTES. APPLICATION AUX CLASSES DES CORPS ABÉLIENS

par

GEORGES GRAS
[Université de Besançon]

RÉSUMÉ. — Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres de degré une puissance de l, l premier; on suppose que L est abélienne par rapport à un sous-corps K_0 de K tel que $[K : K_0]$ soit premier à l, et on note H le plus grand sous-groupe de Gal (L/K_0) d'ordre premier à l. Le groupe des l-classes de L, invariantes par Gal (L/K), est un $\mathbf{Z}_l[H]$-module, $\mathscr{H}_1$, qui admet une décomposition canonique de la forme $\mathscr{H}_1 = \oplus_\varphi \mathscr{H}_1^\varphi$, φ parcourant l'ensemble des caractères l-adiques irréductibles de H. On donne alors, dans le cas où $L/\mathbf{Q}$ est cyclique, une expression de l'ordre de $\mathscr{H}_1^\varphi$ puis quelques propriétés qui en découlent.

Le reste de l'article est consacré à l'étude de deux problèmes pour lesquels les calculs précédents apportent certaines simplifications :

(i) celui de l'annulation du 2-groupe des classes relatives d'une extension abélienne imaginaire : on montre qu'il est possible, sous certaines hypothèses, d'améliorer par le facteur 1/2 le résultat classique déduit du théorème de Stickelberger;

(ii) celui des relations, constatées dans des cas particuliers par plusieurs auteurs, qui peuvent exister entre classes réelles et classes relatives d'une extension abélienne imaginaire : on montre que ces relations dépendent essentiellement de la nature de l'opération « miroir » dans l'ensemble des caractères 2-adiques de l'extension.

I. — Définition de $\mathscr{H}_1^\varphi$

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres de groupe de Galois G. Si $\mathbf{H}(L)$ et $\mathbf{H}(K)$ désignent les groupes des classes (au sens ordinaire) de L et K, alors l'ordre du groupe $\mathbf{H}_1$, formé des classes (de L) invariantes par G, est donné par la formule bien connue de CHEVALLEY ([1], chap. IV) dite des *classes ambiges :*

$$|\mathbf{H}_1| = \frac{|\mathbf{H}(K)|\, 2^{t_\infty} \prod e_\mathfrak{p}}{[L:K](E(K):E(K)\cap N_{L/K} L^*)},$$

où :

t_∞ est le nombre de places à l'infini de K ramifiées dans L/K;

$\prod e_{\mathfrak{p}}$ désigne le produit des indices de ramification dans L/K des idéaux premiers de K;

$E(K)$ est le groupe des unités de K.

Soit l un nombre premier quelconque, et soit $\mathscr{H}_1$ le l-Sylow de $\mathbf{H}_1$; une remarque permet de simplifier l'étude de $\mathscr{H}_1$: soit L' le sous-corps de L, défini par $[L' : K]$ est une puissance de l, et $[L : L']$ est premier à l; alors on vérifie que le groupe des l-classes ambiges $\mathscr{H}_1(L/K)$ de L dans L/K est canoniquement isomorphe au groupe des l-classes ambiges $\mathscr{H}_1(L'/K)$ de L' dans L'/K. On est donc ramené au cas où L/K est cyclique d'ordre une puissance de l, ce que l'on suppose désormais.

Considérons maintenant un sous-corps K_0 de K tel que L/K_0 soit abélienne, et $[K : K_0]$ premier à l; soit L_0 l'unique sous-corps de L tel que $[L_0 : K_0] = [L : K]$; on pose

$$H = \mathrm{Gal}(L/L_0) \simeq \mathrm{Gal}(K/K_0)$$

et

$$G = \mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathrm{Gal}(L_0/K_0).$$

Pour tout caractère l-adique irréductible φ de H ([12], II), on considère l'idempotent e_φ de $\mathbf{Z}_l[H]$ associé à φ, et on pose $\mathscr{H}_1^\varphi = \mathscr{H}_1^{e_\varphi}$; $\mathscr{H}_1^\varphi$ est un sous-module de $\mathscr{H}(L)^{e_\varphi}$. On se propose de donner une formule pour l'ordre $|\mathscr{H}_1^\varphi|$; nous dirons que $\mathscr{H}_1^\varphi$ est le groupe des φ-classes ambiges dans L/K.

La connaissance de $|\mathscr{H}_1^\varphi|$ permet une étude plus précise d'un certain nombre de problèmes, où la formule de Chevalley est utilisée de façon essentielle.

II. — Calcul de $|\mathscr{H}_1^\varphi|$

1. Formalisme utilisé

Notons Φ_H l'ensemble des caractères l-adiques irréductibles de H. Comme les caractères φ ne sont pas nécessairement rationnels, le principe de Leopoldt, que nous avons utilisé systématiquement dans [8], n'est pas applicable ici; pour calculer $|\mathscr{H}_1^\varphi|$, il faut atteindre $\mathscr{H}_1^\varphi$ par une succession d'isomorphismes de $\mathbf{Z}_l[H]$-modules utilisant des suites exactes de $\mathbf{Z}_l[H]$-modules. En effet, si on a une telle suite exacte :

$$\ldots \to \mathscr{A} \to \mathscr{B} \to \mathscr{C} \ldots,$$

on en déduit les suites exactes

$$\ldots \to \mathscr{A}^{e_\varphi} \to \mathscr{B}^{e_\varphi} \to \mathscr{C}^{e_\varphi} \to \ldots,$$

que nous notons pour simplifier l'écriture

$$\ldots \to \mathscr{A}^{\varphi} \to \mathscr{B}^{\varphi} \to \mathscr{C}^{\varphi} \to \ldots$$

Nous tensorisons, sur $\mathbf{Z}$, tous les $\mathbf{Z}[H]$-modules par $\mathbf{Z}_l$ (le résultat étant canoniquement un $\mathbf{Z}_l[H]$-module); ainsi à une suite exacte de $\mathbf{Z}[H]$-modules de la forme

$$\ldots \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to \ldots,$$

on peut associer de façon canonique les suites (exactes en vertu de la platitude de $\mathbf{Z}_l$) :

$$\ldots \to \mathscr{A}^{\varphi} \xrightarrow{f} \mathscr{B}^{\varphi} \xrightarrow{g} \mathscr{C}^{\varphi} \to \ldots$$

de $\mathbf{Z}_l[H]$-modules, obtenues en tensorisant par $\mathbf{Z}_l$ et en prenant les composantes en φ de chaque terme, pour tout $\varphi \in \Phi_H$ (pour simplifier, nous appelons encore $f, g, \ldots$ les flèches obtenues après tensorisation et restriction aux composantes en φ).

Fixons quelques notations; soient :

σ, un générateur de $G = \mathrm{Gal}(L/K)$;

N, la norme dans L/K;

j, l'injection canonique du groupe des idéaux de K dans celui de L;

L^* (resp. K^*), le groupe multiplicatif $L \setminus \{0\}$ (resp. $K \setminus \{0\}$);

$I(L)$ (resp. $I(K)$), le sous-groupe des idéaux fractionnaires de L dont la classe au sens ordinaire est invariante par G (resp. le groupe des idéaux de K);

$I_0(L)$, $I_0(K)$, les sous-groupes des idéaux principaux au sens ordinaire de L et K;

$I^G(L)$, le groupe des idéaux de L invariants par G;

$E(L)$, $E(K)$, les groupes des unités de L et K;

$C = \{\gamma \in L^*, \gamma A_L = \mathfrak{A}^{\sigma-1}, \mathfrak{A} \in I(L)\}$ (A_L étant l'anneau des entiers de L);

on vérifie que $NC = E(K) \cap NL^*$,

$$E^*(L) = \{u \in E(L), Nu = 1\}.$$

Relativement à chacun des $\mathbf{Z}[H]$-modules ci-dessus définis, on note par la lettre ronde analogue le résultat de la tensorisation par $\mathbf{Z}_l$; on obtient donc $\mathscr{L}^*$, $\mathscr{K}^*$, $\mathscr{I}(L)$, $\mathscr{I}(K)$, $\mathscr{I}_0(L)$, $\mathscr{I}_0(K)$, $\mathscr{I}^G(L)$, $\mathscr{E}(L)$, $\mathscr{E}(K)$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{E}^*(L)$. En vertu de la platitude de $\mathbf{Z}_l$, on peut préciser la nature de certains de ces $\mathbf{Z}_l[H]$-modules, on a

$$\mathscr{I}^G(L) = \{\mathfrak{A} \in \mathscr{I}(L), \mathfrak{A}^{\sigma-1} = A_L\} = (\mathscr{I}(L))^G,$$

$$\mathscr{C} = \{\gamma \in \mathscr{L}^*, \gamma A_L \in \mathscr{I}(L)^{\sigma-1}\},$$

$$\mathscr{E}^*(L) = \{\varepsilon \in \mathscr{E}(L), N\varepsilon = 1\}$$

et enfin

$$\mathscr{E}(K) = \{\varepsilon \in \mathscr{E}(L), \varepsilon^{\sigma-1} = 1\}$$

(cas particulier du fait que $\mathscr{L}^{*G} = \mathscr{K}^*$).

Il suffit alors de reprendre les calculs de CHEVALLEY ([1], p. 402-408), en écrivant chaque fois la suite exacte correspondante et celle qui s'en déduit par le procédé que l'on vient de décrire; donnons-en la liste avec éventuellement un bref commentaire sur la suite exacte initiale utilisée :

$$(1) \qquad 1 \to \mathscr{I}_0(L)^\varphi \to \mathscr{I}(L)^\varphi \to \mathscr{H}_1^\varphi \to 1,$$

$$(2) \qquad 1 \to \mathscr{I}^G(L)^\varphi/\mathscr{I}^G(L)^\varphi \cap \mathscr{I}_0(L)^\varphi \to \mathscr{H}_1^\varphi \to \mathscr{I}(L)^\varphi/\mathscr{I}^G(L)^\varphi \mathscr{I}_0(L)^\varphi \to 1,$$

$$(3) \qquad 1 \to \mathscr{I}^G(L)^\varphi \cap \mathscr{I}_0(L)^\varphi/j\mathscr{I}_0(K)^\varphi$$
$$\to \mathscr{I}^G(L)^\varphi/j\mathscr{I}_0(K)^\varphi \to \mathscr{I}^G(L)^\varphi/\mathscr{I}^G(L)^\varphi \cap \mathscr{I}_0(L)^\varphi \to 1$$

$$(4) \qquad 1 \to \mathscr{H}(K)^\varphi \to \mathscr{I}^G(L)^\varphi/j\mathscr{I}_0(K)^\varphi \to \mathscr{I}^G(L)^\varphi/j\mathscr{I}(K)^\varphi \to 1,$$

$$(5) \qquad \mathscr{I}^G(L)^\varphi \cap \mathscr{I}_0(L)^\varphi/j\mathscr{I}_0(K)^\varphi \simeq \mathscr{E}^*(L)^\varphi/\mathscr{E}(L)^{(\sigma-1)\varphi}$$

(on considère $I^G(L) \cap I_0(L)$, groupe des idéaux principaux invariants de L; à un tel idéal αA_L, on associe la classe de $\alpha^{\sigma-1}$ (qui est une unité de norme relative 1) modulo $E(L)^{\sigma-1}$; on obtient un homomorphisme surjectif dont le noyau est $j I_0(K)$);

$$(6) \qquad \mathscr{I}(L)^\varphi/\mathscr{I}^G(L)^\varphi \mathscr{I}_0(L)^\varphi \simeq N\mathscr{C}^\varphi/N\mathscr{E}(L)^\varphi$$

(on utilise l'homomorphisme $I(L) \to I(L)^{\sigma-1}/I_0(L)^{\sigma-1}$ qui à $\mathfrak{A} \in I(L)$ associe la classe de $\mathfrak{A}^{\sigma-1}$ modulo $I_0(L)^{\sigma-1}$; le noyau est $I^G(L)\, I_0(L)$. On considère ensuite l'homomorphisme $C \to I(L)^{\sigma-1}/I_0(L)^{\sigma-1}$ qui à $\gamma \in C$ associe la classe de γA_L modulo $I_0(L)^{\sigma-1}$; cet homomorphisme

surjectif a pour noyau $L^{*(\sigma-1)}E(L)$; l'application N induit, par passage au quotient, un homomorphisme de $C/L^{*(\sigma-1)}E(L)$ sur $NC/NE(L)$ qui est un isomorphisme);

$$(7) \qquad 1 \to N\mathscr{C}^{\varphi}/N\mathscr{E}(L)^{\varphi} \to \mathscr{E}(K)^{\varphi}/N\mathscr{E}(L)^{\varphi} \to \mathscr{E}(K)^{\varphi}/N\mathscr{C}^{\varphi} \to 1.$$

On peut donc déjà exprimer $|\mathscr{H}_1^{\varphi}|$ sous la forme suivante :

$$|\mathscr{H}_1^{\varphi}| = \frac{|\mathscr{H}(K)^{\varphi}|\,|\mathscr{I}^G(L)^{\varphi}/j\mathscr{I}(K)^{\varphi}|\,|\mathscr{E}(K)^{\varphi}/N\mathscr{E}(L)^{\varphi}|}{|\mathscr{E}(K)^{\varphi}/\mathscr{E}(K)^{\varphi}\cap N\mathscr{L}^{*\varphi}|\,|\mathscr{E}^*(L)^{\varphi}/\mathscr{E}(L)^{(\sigma-1)\varphi}|};$$

il faut ensuite effectuer deux autres calculs :

(i) celui du terme $|\mathscr{E}(K)^{\varphi}/N\mathscr{E}(L)^{\varphi}|\,/\,|\mathscr{E}^*(L)^{\varphi}/\mathscr{E}(L)^{(\sigma-1)\varphi}|$ que nous désignerons par a_{φ};

(ii) celui du terme $|\mathscr{I}^G(L)^{\varphi}/j\mathscr{I}(K)^{\varphi}|$ qui provient essentiellement des idéaux ramifiés dans L/K.

2. Étude de a_{φ}

On remarque que a_{φ} est le quotient de Herbrand du G-module $\mathscr{E}(L)^{\varphi}$.

(*a*) *Rappels sur le quotient de Herbrand* (*d'après* [15], chap. VIII, § 4). — Si A est un G-module (G cyclique), alors le quotient de Herbrand de A, $q(A)$, est égal (lorsqu'il est défini) à

$$q(A) = \frac{|A^G/A^{\nu}|}{|\mathrm{Ker}_{\nu} A/A^{\sigma-1}|} \quad (\sigma \text{ générateur de } G,\ \nu = \textstyle\sum_{\tau\in G}\tau).$$

Si on a une suite exacte de G-modules $1 \to A \to B \to C \to 1$ alors (si les quotients de Herbrand sont finis) $q(B) = q(A)\,q(C)$, et si A est un G-module fini alors $q(A) = 1$.

(*b*) *Calcul de* a_{φ} *dans le cas cyclique* (1) *sur* $\mathbf{Q}$. — Nous allons effectuer ce calcul dans le cas où $L/\mathbf{Q}$ est cyclique de degré dl^m, $m \geqslant n \geqslant 1$, $(d, l) = 1$ (il est possible d'adapter le cas que nous allons traiter à d'autres situations).

Posons $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$; L_0 est le sous-corps de L de degré l^m sur $\mathbf{Q}$, et K_0 le sous-corps de K de degré l^{m-n} sur $\mathbf{Q}$; donc $H = \mathrm{Gal}(L/L_0)$, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Soit k le sous-corps de L de degré d sur $\mathbf{Q}$. On introduit alors les corps $L(\varphi)$, $K(\varphi)$, $k(\varphi)$ correspondant au noyau de φ considéré

(1) En fait, comme on le vérifie facilement, il suffira dans tous les énoncés ultérieurs, de supposer seulement que le l-Sylow de $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ est cyclique (autrement dit, le groupe H peut être supposé abélien d'ordre premier à l).

successivement comme caractère du groupe de Galois de L/L_0, K/K_0 et $k/\mathbf{Q}$ et plus généralement de toute extension analogue. On a donc les inclusions

$$L_0 \subset L(\varphi) \subset L, \qquad K_0 \subset K(\varphi) \subset K, \qquad \mathbf{Q} \subset k(\varphi) \subset k$$

et

$$k(\varphi) \subset K(\varphi) \subset L(\varphi).$$

(α) *Caractères :* Soit χ un caractère rationnel irréductible de L; on désigne par χ' un caractère de degré 1 au-dessous de χ, et par $\boldsymbol{\varphi}$ le caractère l-adique au-dessus de χ'. On désigne, comme dans [7] [chap. I, § 1, (*b*)], par $\mathfrak{X}_M$, $\mathfrak{X}'_M$ et Φ_M les ensembles de caractères rationnels, de degré 1 et l-adiques d'un corps M et, si Ψ est un ensemble de caractères, Ψ^+ (resp. Ψ^-) désigne le sous-ensemble des caractères pairs (resp. impairs) de Ψ. Enfin, pour les définitions de g_χ, G_χ, K_χ et f_χ se reporter à [7] [chap. I, § 1, (*a*)].

Définissons le caractère modéré associé à un caractère : étant donné $\chi' \in \mathfrak{X}'_L$, on peut écrire $\chi' = \psi' \gamma'$, γ' d'ordre puissance de l ($\gamma' \in \mathfrak{X}'_{L_0}$), ψ' d'ordre premier à l ($\psi' \in \mathfrak{X}'_k$). Soient alors φ le caractère l-adique au-dessus de ψ', et ψ le caractère rationnel au-dessus de ψ'. On vérifie que les caractères ψ', φ et ψ ne dépendent respectivement que de χ', $\boldsymbol{\varphi}$ et χ. Les caractères ψ', φ et ψ sont appelés les caractères modérés associés respectivement à χ', $\boldsymbol{\varphi}$ et χ ($\psi' \in \mathfrak{X}'_k$, $\varphi \in \Phi_k$ et $\psi \in \mathfrak{X}_k$).

On remarque que φ est ici défini comme caractère de k; il peut donc être considéré comme élément de Φ_H (d'où le fait que nous ayons pris la même notation).

(β) *Calcul de* $q(\mathscr{E}(L)^{\varphi})$: d'après le théorème de Dirichlet sur les unités, il existe un sous-module $E'(L)$ de $E(L)$ d'indice fini dans $E(L)$, Γ-monogène et sans $\mathbf{Z}$-torsion.

Posons $\mathscr{E}'(L) = \mathbf{Z}_l \otimes E'(L)$. Considérons $\mathbf{Z}_l$ comme Γ-module sur lequel Γ opère trivialement; soit ε un générateur de $E'(L)$, et soit Tr l'application trace de $\mathbf{Z}_l[\Gamma]$ sur $\mathbf{Z}_l$; alors l'application

$$f: \quad \mathbf{Z}_l[\Gamma] \to \mathbf{Z}_l \oplus \mathscr{E}'(L),$$

définie par $\omega \to (\mathrm{Tr}\,\omega, \varepsilon^{\omega})$, est un homomorphisme de Γ-modules dont l'image est d'indice fini dans $\mathbf{Z}_l \oplus \mathscr{E}'(L)$. On déduit de [12] (III, § 2), sur l'interprétation du théorème de Dirichlet, que la représentation $\mathbf{Q}_l \otimes (\mathbf{Z}_l \oplus \mathscr{E}'(L))$ de Γ est isomorphe à la représentation

$$\oplus_{\varphi_1 \in \Phi_k^+} \mathbf{Q}_l[\Gamma]\, e_{\varphi_1}$$

de Γ. On en déduit en particulier que si L est réelle, alors f est injective et que si L est imaginaire, alors $\operatorname{Ker} f = (\sigma_{-1}-1)\,\mathbf{Z}_l[\Gamma]$ (où σ_{-1} est la conjugaison complexe).

Considérons maintenant les Γ-modules comme des G-modules; puisque $\mathbf{Z}_l[\Gamma]\,e_\varphi$ et $\bigoplus_{\varphi_1 \in \Phi_L} \mathbf{Z}_l[\Gamma]\,e_{\varphi_1}\,e_\varphi$ ont même quotient de Herbrand, ainsi que $(\sigma_{-1}-1)\,\mathbf{Z}_l[\Gamma]\,e_\varphi$ et $\bigoplus_{\varphi_1 \in \Phi_L^-} \mathbf{Z}_l[\Gamma]\,e_{\varphi_1}\,e_\varphi$, le calcul de $q(\mathscr{E}'(L)^\varphi)$ en résulte; on a (que L soit réelle ou non) :

$$q(\mathscr{E}'(L)^\varphi) = \left(\prod_{\varphi_1 \in \Phi_L^+} q(\mathbf{Z}_l[\Gamma]\,e_{\varphi_1}\,e_\varphi)\right) q(\mathbf{Z}_l^\varphi)^{-1}.$$

Pour calculer $q(\mathbf{Z}_l[\Gamma]\,e_{\varphi_1}\,e_\varphi)$ on remarque que l'on a l'isomorphisme de G-modules ([7], prop. 1.4)

$$\mathbf{Z}_l[\Gamma]\,e_{\varphi_1} \simeq \mathbf{Z}_l^{(g_{\chi_1})}$$

(χ_1 : caractère rationnel au-dessus de φ_1); l'isomorphisme est déduit de l'application

$$\tau e_{\varphi_1} \to \chi_1'(\tau), \qquad \tau \in \Gamma(\chi_1' \mid \varphi_1).$$

On a donc

$$q(\mathbf{Z}_l[\Gamma]\,e_{\varphi_1}\,e_\varphi) = q(\mathbf{Z}_l^{(g_{\chi_1})}\,\chi_1'(e_\varphi)).$$

Il suffit de caractériser les cas où $\chi_1'(e_\varphi)$ est non nul et, dans ce cas, on a

$$q(\mathbf{Z}_l^{(g_{\chi_1})}\,\chi_1'(e_\varphi)) = q(\mathbf{Z}_l^{(g_{\chi_1})}).$$

On vérifie facilement le résultat suivant.

LEMME II.1. — *On a $\chi_1'(e_\varphi) \neq 0$ si, et seulement si, φ_1 admet φ pour caractère modéré associé.*

L'ensemble des caractères $\varphi \in \Phi_L$, ayant φ pour caractère modéré associé, est en correspondance bijective avec l'ensemble des corps K_χ (χ au-dessus de φ) tels que l'on ait $k(\varphi) \subset K_\chi \subset L(\varphi)$.

On distingue deux sortes de tels caractères φ :

(i) les caractères φ' tels que $K(\varphi) \subsetneq K_\chi \subset L(\varphi)$ $(\varphi' \mid \chi)$,

(ii) les caractères φ'' tels que $k(\varphi) \subset K_\chi \subset K(\varphi)$ $(\varphi'' \mid \chi)$.

Posons $A_\chi = \mathbf{Z}_l^{(g_\chi)}$; on rappelle que A_χ est muni de la structure de G-module, définie par $\tau\omega = \chi'(\tau)\,\omega$, pour tout $\tau \in G$ et tout $\omega \in A_\chi$, $\chi' \mid \chi$. Le calcul de $q(A_\chi)$ en résulte facilement, et on obtient le lemme suivant.

LEMME II.2. — *Soit $\varphi \in \Phi_L$ de caractère modéré associé φ, et soit n_φ le degré résiduel de l dans $\mathbf{Q}_l^{(g_\psi)}$ $(\varphi \mid \psi)$:*

(i) *si $\varphi = \varphi'$, $g_\chi = l^{m-n+i}\,g_\psi$, $i \in \{1, \ldots, n\}$; alors $q(A_\chi) = l^{-n_\varphi\, l^{m-n}}$,*

(ii) *si* $\varphi = \varphi''$, $g_\chi = l^i g_\psi$, $i \in \{0, 1, \ldots, m-n\}$; *alors*

$$q(A_\chi) = l^{nn_\varphi l^{i-1}(l-1)}$$

(*resp.* l^{nn_φ}) *si* $i > 0$ (*resp.* $i = 0$).

De même, pour G opérant trivialement sur $\mathbf{Z}_l$, $q(\mathbf{Z}_l^\varphi)$ est donné par le résultat suivant.

LEMME II.3. — *On a* $q(\mathbf{Z}_l^\varphi) = 1$ *pour* $\varphi \neq 1$, $q(\mathbf{Z}_l^\varphi) = l^n$ *sinon.*

Le calcul de a_φ résulte des deux lemmes précédents.

PROPOSITION II.1.

(i) *Si* $l \neq 2$ *ou si* $l = 2$ *avec* L *réelle, alors* $a_\varphi = 1$ (*resp.* l^{-n}) *si* $\varphi \neq 1$ (*resp.* $\varphi = 1$);

(ii) *si* $l = 2$, L *imaginaire, alors* $a_\varphi = 2^{n_\varphi 2^{m-n}}$ (*resp.* $2^{-n} 2^{2^{m-n}}$) *si* $\varphi \neq 1$ (*resp.* $\varphi = 1$).

Remarque II.1. — Dans le cas $l = 2$, L imaginaire, $\varphi \neq 1$, alors $a_\varphi = (\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^{2\varphi})$. Définissons alors a_φ^0 et a_φ^∞ :

(i) si $l \neq 2$ ou si $l = 2$ avec L réelle, on pose $a_\varphi^\infty = 1$ pour tout φ, $a_\varphi^0 = 1$ pour $\varphi \neq 1$, et $a_1^0 = l^{-n}$;

(ii) si $l = 2$, L imaginaire, on pose $a_\varphi^\infty = (\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^{2\varphi})$ pour tout φ, $a_\varphi^0 = 1$ pour $\varphi \neq 1$, et $a_1^0 = 2^{-n}$.

On a bien $a_\varphi = a_\varphi^\infty a_\varphi^0$ pour tout $\varphi \in \Phi_H$.

(γ) *Étude de* $\mathscr{E}(K)^\varphi / \mathscr{E}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi}$.

Remarque II.2. — On a $(\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi}) = 1$ lorsque φ est impair ($l \neq 2$) sauf peut-être si K contient $\mathbf{Q}^{(l)}$ et si φ est le caractère de Leopoldt θ (*cf.* [7], I, § 1, (*b*), (β), pour la définition de θ) auquel cas cet indice est égal à 1 ou l.

3. Étude de $\mathscr{I}^G(L)/j\mathscr{I}(K)$.

On sait que $\mathscr{I}^G(L)$ est engendré par $j\mathscr{I}(K)$ et par les produits $\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de K ramifiés dans L/K, et où $\mathfrak{P}$ divise $\mathfrak{p}$ dans L/K. L'image du sous-module $\mathscr{I} = \langle \ldots, \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}, \ldots \rangle$ est encore génératrice dans $\mathscr{I}^G(L)/j\mathscr{I}(K)$; on peut donc étudier $\mathscr{I}$ à la place de $\mathscr{I}^G(L)$; $\mathscr{I}$ est un $\mathbf{Z}_l[\Gamma]$-module $\mathbf{Z}_l$-libre, et on a $\mathscr{I} = \bigoplus_p \langle \ldots, \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}, \ldots \rangle$, où p parcourt l'ensemble

des nombres premiers ramifiés dans L/K, et $\mathfrak{p}$ l'ensemble des idéaux premiers au-dessus de p dans $K/\mathbf{Q}$. Posons

$$\mathscr{I}_p = \langle \ldots, \textstyle\prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} \mathfrak{P}, \ldots \rangle, \mathfrak{p} \mid p;$$

on a alors

$$\mathscr{I}/\mathscr{I} \cap j\mathscr{I}(K) = \textstyle\bigoplus_p \mathscr{I}_p/(\bigoplus_p \mathscr{I}_p) \cap j\mathscr{I}(K)$$

mais

$$(\textstyle\bigoplus_p \mathscr{I}_p) \cap j\mathscr{I}(K) = \bigoplus_p (\mathscr{I}_p \cap j\mathscr{I}(K)) = \bigoplus_p \langle \ldots, \mathfrak{p} A_L, \ldots \rangle, \mathfrak{p} \mid p;$$

par conséquent,

$$\mathscr{I}/\mathscr{I} \cap j\mathscr{I}(K) \simeq \textstyle\bigoplus_p (\mathscr{I}_p/\mathscr{I}_p^{e(p)}),$$

où $e(p)$ désigne l'indice de ramification commun dans L/K des idéaux $\mathfrak{p} \mid p$ dans $K/\mathbf{Q}$. On est donc ramené à l'étude de $\mathscr{I}_p$ ou de $\mathscr{I}'_p = \langle \ldots, \mathfrak{p}, \ldots \rangle$, $\mathfrak{p} \mid p$: on a $\mathscr{I}'_p \simeq \mathscr{I}_p$ comme Γ-modules. Introduisons alors le corps de décomposition D_p de p dans $K/\mathbf{Q}$; posons $D_0 = K_0 \cap D_p$, $k_p = k \cap D_p$, $K_p = K_0 D_p$ et $D = k D_p$ (en particulier, k_p est le corps de décomposition de p dans k). On a alors $\mathscr{I}'_p \simeq \mathbf{Z}_l[\Gamma]\, \nu_p$ en posant $\nu_p = \sum_\tau \tau$, τ parcourant $\mathrm{Gal}(L/D_p)$. On a donc

$$\mathscr{I}^G(L)^\varphi/j\mathscr{I}(K)^\varphi \simeq \textstyle\bigoplus_p (\mathbf{Z}_l[\Gamma]\, \nu_p e_\varphi / e(p)\, \mathbf{Z}_l[\Gamma]\, \nu_p e_\varphi),$$

e_φ étant considéré comme idempotent relatif à $\mathrm{Gal}(L/L_0) \simeq H$. On remarque que l'on est ramené au calcul du quotient de Herbrand de $\mathbf{Z}_l[\Gamma]\, \nu_p e_\varphi$, relativement cette fois à un groupe cyclique d'ordre $e(p)$ opérant trivialement. Par conséquent

$$q(\mathbf{Z}_l[\Gamma]\, \nu_p e_\varphi) = \textstyle\prod_{\varphi_1} q(\mathbf{Z}_l[\Gamma]\, e_{\varphi_1} e_\varphi),$$

φ_1 parcourant Φ_{D_p}. D'après un calcul déjà effectué, il suffit de restreindre le produit aux caractères $\varphi \in \Phi_{D_p}$ tels que φ soit le caractère modéré associé à φ. On a $g_\chi = g_\psi l^i$, $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ en posant $[D_p : k_p] = l^k$; on vérifie facilement que $q(A_\chi)$ est égal ici à

$$|A_\chi/e(p) A_\chi| = (e(p))^{n_\varphi l^{i-1}(l-1)}$$
$$(\text{resp. } (e(p))^{n_\varphi}) \qquad \text{si} \quad i \neq 0 (\text{resp. } i = 0).$$

Il y a alors deux cas : si $\varphi \notin \Phi_{k_p}$, alors $q(\mathbf{Z}_l[\Gamma]\, \nu_p e_\varphi) = 1$, sinon

$$\begin{aligned} q(\mathbf{Z}_l[\Gamma]\, \nu_p e_\varphi) &= (\textstyle\prod_{i=1}^k (e(p))^{n_\varphi l^{i-1}(l-1)})(e(p))^{n_\varphi} \\ &= (e(p))^{n_\varphi l^k} = (e(p))^{n_\varphi [D_p : k_p]}, \end{aligned}$$

d'où le lemme suivant.

LEMME II.4. — $|\mathscr{I}^G(L)^\varphi/j\mathscr{I}(K)^\varphi| = \prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)}$, où $d_\varphi(p)$ *est ainsi défini :* $d_\varphi(p) = [D_p : k_p]$ *si* $\varphi \in \Phi_{k_p}$, $d_\varphi(p) = 0$ *sinon.*

Remarque II.3. — On vérifie facilement que φ est un caractère de k_p si, et seulement si, $\psi'(p) = 1$ $(\psi' \mid \varphi)$ ([12], IV, § 5). En particulier, pour $\varphi = 1$, on a toujours $d_\varphi(p) \neq 0$.

4. Expression des résultats (2)

(*a*) *Énoncés* (cas ordinaire et restreint).

THÉORÈME II.1. — *Soit* $L/\mathbf{Q}$ *cyclique de degré multiple de* l^n (l *premier*, $n \geqslant 1$). *Soit* K *le sous-corps de* L *défini par* $[L : K] = l^n$, *et soit* H *le plus grand sous-groupe d'ordre premier à* l *de* $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$. *Soit* $\mathscr{H}_1$ *le* l*-groupe des classes de* L (*au sens ordinaire*) *invariantes par* $\mathrm{Gal}(L/K)$. *Alors, pour tout caractère irréductible* l*-adique* φ *de* H, *on a* (3)

$$|\mathscr{H}_1^\varphi| = \frac{|\mathscr{H}(K)^\varphi| \prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} a_\varphi^0 a_\varphi^\infty}{(\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi})}.$$

Si l'on remplace la notion de classe au sens ordinaire par celle de classe au sens restreint, les calculs de CHEVALLEY se transposent facilement; il est alors nécessaire d'introduire le groupe des unités totalement positives $E^+(K)$ de K, et de considérer $\mathscr{E}^+(K) = \mathbf{Z}_l \otimes E^+(K)$. On obtient alors le théorème ci-après.

THÉORÈME II.2. — *Soit* $L/\mathbf{Q}$ *cyclique de degré multiple de* l^n (l *premier*, $n \geqslant 1$). *Soit* K *le sous-corps de* L *défini par* $[L : K] = l^n$, *et soit* H *le plus grand sous-groupe d'ordre premier à* l *de* $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$. *Soit* $\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K)$ (*resp.* $\mathscr{H}_1^{\mathrm{res}}$) *le* l*-groupe des classes au sens restreint de* K (*resp. celles, au sens restreint, de* L, *invariantes par* $\mathrm{Gal}(L/K)$). *Alors, pour tout caractère irréductible* l*-adique* φ *de* H, *on a*

$$|\mathscr{H}_1^{\mathrm{res}\,\varphi}| = \frac{|\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K)^\varphi| \prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} a_\varphi^0}{(\mathscr{E}^+(K)^\varphi : \mathscr{E}^+(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi})}$$

(*b*) *Décomposition de* $\mathscr{H}_1^\varphi$ *en produit d'entiers.*

---

(2) *Voir* note de bas de page, § 2 (*b*).

(3) Pour les définitions des quantités intervenant dans cette evpression, se reporter respectivement au lemme II.2, à la remarque II.1 et au lemme II.4

THÉORÈME II.3. — *Soit $L/\mathbf{Q}$ cyclique de degré multiple de l^n (l premier, $n \geqslant 1$). Soit K le sous-corps de L, défini par $[L : K] = l^n$, et soit H le plus grand sous-groupe d'ordre premier à l de* Gal $(L/\mathbf{Q})$; *alors, pour tout caractère irréductible l-adique φ de H, on a*

(i) *si $l \neq 2$ ou si $l = 2$ avec L réelle, alors*

$$\frac{\prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} a_\varphi^0}{(\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi})}$$

est entier,

(ii) *si $l = 2$ et L imaginaire, alors*

$$\frac{\prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} a_\varphi^0}{(\mathscr{E}^+(K)^\varphi : \mathscr{E}^+(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi})}$$

est entier.

Démonstration. — Considérons le symbole de Hasse $((\beta, L/K)/\mathfrak{p})$ (*cf.* [10], II, § 6) défini par $a \in K^* \to ((a, L/K)/\mathfrak{p}) \in G$, $\mathfrak{p}$ place déterminée de K; on écrira ce symbole $(a/\mathfrak{p})$ pour simplifier ([4]). On considère alors l'application $f : E(K) \to \prod_\mathfrak{p} G_\mathfrak{p}$ défini par $\varepsilon \to ((\varepsilon/\mathfrak{p}))_\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des places de K ramifiées dans L/K, et où $G_\mathfrak{p}$ est le groupe d'inertie de $\mathfrak{p}$ dans L/K (en effet, pour toute unité ε, on a nécessairement $(\varepsilon/\mathfrak{p}) \in G_\mathfrak{p}$ (*cf.* [10], § 7)). Cette application est un homomorphisme de groupes (multiplicativité du symbole de Hasse).

Posons $\overline{G} = \prod_\mathfrak{p} G_\mathfrak{p}$, et mettons sur $\overline{G}$ la structure de Γ-module suivante : si $(\sigma_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \overline{G}$, on pose

$$(\sigma_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}^\tau = (\sigma_{\mathfrak{p}^{\tau^{-1}}})_\mathfrak{p}, \text{ pour tout } \tau \in \Gamma$$

(si $\mathfrak{p}$ est une place à l'infini associée au conjugué $\tau' K$ de K, alors $\mathfrak{p}^{\tau^{-1}}$ est la place associée à $\tau\tau'(K)$).

Avec ces définitions, on a le résultat suivant.

LEMME II.5. — *L'application f est un homomorphisme de $\mathbf{Z}_l[\Gamma]$-modules dont le noyau est égal à $E(K) \cap NL^*$.*

On a $f(\varepsilon^\tau) = ((\varepsilon^\tau/\mathfrak{p}))_\mathfrak{p}$. Pour étudier $(\varepsilon^\tau/\mathfrak{p})$, reprenons la définition du symbole de Hasse pour $(\varepsilon/\mathfrak{p})$ (*cf.* [10], II, § 6, n° 1) :

(i) *Cas des idéaux premiers :* Soit $\mathfrak{f}$ la partie finie du conducteur de L/K; on choisit $a \in K^*$ tel que $a\varepsilon^{-1} \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ et $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}/\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ (où $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ désigne la $\mathfrak{p}$-participation du conducteur); on pose $a A_K = \mathfrak{a}$ et le sym-

([4]) Pour des commodités d'impression, les symboles usuels de Hasse et d'Artin sont parfois écrits sur la ligne $(*/*)$ au lieu de $\left(\frac{*}{*}\right)$.

bole de Hasse $(\varepsilon/\mathfrak{p})$ est défini par le symbole d'Artin $((L/K)/\mathfrak{a})$. On aura donc $a^\tau \varepsilon^{-\tau} \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_\mathfrak{p}^\tau = \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}^\tau}$ et $a^\tau \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}^\tau/\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}^\tau}$ (*a priori* $\mathfrak{f}^\tau$ peut être différent de $\mathfrak{f}$; on peut cependant supposer $\mathfrak{f}$ invariant par Γ car il suffit de résoudre les congruences, relatives à ε, modulo un multiple convenable de $\mathfrak{f}$ contenant les mêmes diviseurs premiers et invariant par Γ : ceci est possible car L étant abélienne, si une place $\mathfrak{p}$ est ramifiée dans L/K, toute place conjuguée de $\mathfrak{p}$ dans $K/\mathbf{Q}$ est aussi ramifiée dans L/K, donc divise $\mathfrak{f}$). On a alors $a^\tau A_K = \mathfrak{a}^\tau$ soit $(\varepsilon^\tau/\mathfrak{p}^\tau) = ((L/K)/\mathfrak{a}^\tau)$ et, d'après les propriétés du symbole d'Artin, on a

$$\left(\frac{L/K}{\mathfrak{a}^\tau}\right) = \tau\left(\frac{L/K}{\mathfrak{a}}\right)\tau^{-1} = \left(\frac{L/K}{\mathfrak{a}}\right),$$

car L/K est abélienne. D'où $(\varepsilon^\tau/\mathfrak{p}^\tau) = (\varepsilon/\mathfrak{p})$.

(ii) *Cas des places à l'infini :* Soit $\mathfrak{f}_\infty$ la partie non finie du conducteur; comme $L/\mathbf{Q}$ est abélienne, le seul cas à examiner est celui où L est imaginaire et K réelle ($l = 2$); dans ce cas, $\mathfrak{f}_\infty$ est le produit des places à l'infini de K. Pour une place à l'infini $\mathfrak{p}_i$ correspondant à $\tau_i \in \mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})$, on a $(\varepsilon/\mathfrak{p}_i) = \sigma_{-1}$ (resp. 1) si $\varepsilon^{\tau_i} < 0$ (resp. $\varepsilon^{\tau_i} > 0$); il est alors clair que $(\varepsilon^\tau/\mathfrak{p}_i^\tau)$ est caractérisé par le signe de $\varepsilon^{\tau\tau_i\tau^{-1}} = \varepsilon^{\tau_i}$, d'où $(\varepsilon^\tau/\mathfrak{p}_i^\tau) = (\varepsilon/\mathfrak{p}_i)$. On obtient alors

$$f(\varepsilon^\tau) = \left(\left(\frac{\varepsilon^\tau}{\mathfrak{p}}\right)\right)_\mathfrak{p} = \left(\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}^{\tau^{-1}}}\right)\right)_\mathfrak{p} = f(\varepsilon)^\tau, \quad \text{pour tout } \tau \in \Gamma.$$

D'après le théorème des normes de Hasse, on a $\varepsilon \in NL^*$ si, et seulement si, ε est norme locale partout. Or, lorsque $\mathfrak{p}$ n'est pas une place ramifiée, on sait que toute unité est norme locale; d'où $\varepsilon \in NL^*$ si, et seulement si, $f(\varepsilon) = 1$, soit $\varepsilon \in \mathrm{Ker}\, f$.

Soit $\overline{G}_0 = \prod_\mathfrak{p} G_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ parcourant l'ensemble des idéaux premiers de K ramifiés dans L/K. Posons $\mathring{E}(K) = E(K)$ (resp. $E^+(K)$) dans le cas (i) (resp. le cas (ii)) du théorème. On a donc une suite exacte de la forme

$$1 \to \mathring{E}(K) \cap NL^* \to \mathring{E}(K) \to \overline{G}_0$$

qui conduit aux suites exactes

$$1 \to \mathring{\mathscr{E}}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi} \to \mathring{\mathscr{E}}(K)^\varphi \to \overline{G}_0^\varphi, \qquad \varphi \in \Phi_H.$$

On peut écrire $\overline{G}_0 = \bigoplus_p \overline{G}_p$, p ramifié dans L/K, avec $\overline{G}_p = \prod_{\mathfrak{p} \mid p} G_\mathfrak{p}$. On vérifie facilement que

$$\overline{G}_p \simeq (\mathbf{Z}/e(p)\mathbf{Z})[\Gamma]\nu_p \simeq \mathbf{Z}_l[\Gamma]\nu_p/e(p)\mathbf{Z}_l[\Gamma]\nu_p,$$

module que l'on a déjà étudié : on a $|\overline{G}_p^{\varphi}| = (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)}$. Le théorème est démontré pour $\varphi \neq 1$. Supposons $\varphi = 1$. On vérifie que l'on peut supposer $L = L_0$, $K = K_0$ et $k = \mathbf{Q}$. On a la suite exacte

$$1 \to \mathring{\mathscr{E}}(K_0) \cap N\mathscr{L}_0^* \to \mathring{\mathscr{E}}(K_0) \to \prod_{\mathfrak{p}} G_{\mathfrak{p}},$$

$\mathfrak{p}$ idéal premier de K_0. On a alors la formule du produit $\prod_{\mathfrak{p}} (\varepsilon/\mathfrak{p}) = 1$ (en limitant le produit aux idéaux premiers de K_0 ramifiés dans L_0/K_0). Soit p_1 un nombre premier totalement ramifié dans $L_0/\mathbf{Q}$ (qui existe car $L_0/\mathbf{Q}$ est cyclique de degré l^m), et soit $\mathfrak{p}_1$ l'unique idéal premier de K_0 au-dessus de p_1; on peut construire l'homomorphisme de Γ-modules $\mathring{\mathscr{E}}(K_0) \to \prod_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1} G_{\mathfrak{p}}$ défini par $\varepsilon \to ((\varepsilon/\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_1}$. La relation du produit fait que le noyau est toujours $\mathring{\mathscr{E}}(K_0) \cap N\mathscr{L}_0^*$; le théorème résulte alors de la définition de a_φ^0 pour $\varphi = 1$ et du fait que l'on a pu choisir p_1 tel que $|G_{\mathfrak{p}_1}| = l^n$.

(*c*) *Application aux classes relatives.* — Si L est imaginaire, notons $\mathscr{H}(L)^-$ le groupe des l-classes relatives de L.

COROLLAIRE II.1. — *On suppose que $l = 2$, que L est cyclique imaginaire, et que K est son sous-corps réel maximal. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que le module $(\mathscr{H}(L)^-)^\varphi$, $\varphi \in \Phi_H$, soit trivial est que l'on ait les trois conditions :*

(i) $\mathscr{H}(K)^\varphi = (1)$;

(ii) $\mathscr{E}^+(K)^\varphi = \mathscr{E}(K)^{2\varphi}$;

(iii) $(\varphi \neq 1)$ *pour tout p ramifié dans L/K, $\varphi \notin \Phi_{k_p}$;*

(iii') $(\varphi = 1)$ *il existe dans $L_0/\mathbf{Q}$ un unique nombre premier ramifié dans $L_0/\mathbf{Q}$ (donc totalement ramifié dans $L_0/\mathbf{Q}$).*

Démontrons d'abord le lemme suivant.

LEMME II.6. — *Soit L une extension imaginaire cyclique de $\mathbf{Q}$, et soit K son sous-corps réel maximal; alors (pour $l = 2$), $\mathscr{H}(K)^\varphi \neq 1$ entraîne $(\mathscr{H}(L)^-)^\varphi \neq (1)$.*

En effet, soit h un élément d'ordre 2 de $\mathscr{H}(K)^\varphi$, et soit h' l'extension de h à $\mathscr{H}(L)^\varphi$; d'après [8] (prop. II.1), h' est encore d'ordre 2 dans $\mathscr{H}(L)^\varphi$; comme $N_{L/K}\, h' = h^2 = 1$, il en résulte que $h' \in (\mathscr{H}(L)^-)^\varphi$ qui est non trivial.

On a $|\mathscr{H}(L)^\varphi| = |\mathscr{H}(L)^{-\varphi}|\,|\mathscr{H}(K)^\varphi|$ (il suffit de considérer la suite (exacte, car L/K est ramifiée) :

$$1 \to \mathscr{H}(L)^- \to \mathscr{H}(L) \xrightarrow{N} \mathscr{H}(K) \to 1$$

en φ). Si $(\mathscr{H}(L)^-)^\varphi = (1)$, on a donc $\mathscr{H}(L)^\varphi = (1)$, soit nécessairement $\mathscr{H}_1^\varphi = (1)$, soit

$$\prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} a_\varphi = (\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi}).$$

On a $\mathscr{E}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi} \subset \mathscr{E}^+(K)^\varphi$ puisque L/K est imaginaire;

$$(\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi})$$
$$= (\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}^+(K)^\varphi).(\mathscr{E}^+(K)^\varphi : \mathscr{E}^+(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi});$$

or

$$\frac{\prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} a_\varphi^0}{(\mathscr{E}^+(K)^\varphi : \mathscr{E}^+(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi})} \quad \text{(th. II.3)} \qquad \text{et} \qquad \frac{a_\varphi^\infty}{(\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}^+(K)^\varphi)}$$

sont entiers. On doit donc avoir $(\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}^+(K)^\varphi) = a_\varphi^\infty$; or

$$a_\varphi^\infty = (\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^{2\varphi}),$$

ce qui fait qu'on obtient bien la condition (ii); on a alors

$$(\mathscr{E}^+(K)^\varphi : \mathscr{E}^+(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi}) = (\mathscr{E}(K)^{2\varphi} : \mathscr{E}(K)^{2\varphi} \cap N\mathscr{L}^{*\varphi}) = 1$$

et on doit avoir $a_\varphi^0 \prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} = 1$; si $\varphi \neq 1$, pour tout p ramifié dans L/K, $d_\varphi(p) = 0$, d'où (iii); si $\varphi = 1$, la condition

$$a_\varphi^0 \prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} = 1$$

se traduit par $1/2 \prod_p (e(p))^{d_1(p)} = 1$ et (iii) doit être remplacée par (iii').

La réciproque est évidente.

On obtient ainsi une généralisation d'un théorème de FURUYA ([2], th. 3) ([5]).

COROLLAIRE II.2. — *On suppose $l = 2$ et L réelle. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{H}^{\text{res}}(L)^\varphi = (1)$ est que l'on ait les trois conditions :*

(i) $\mathscr{H}(K)^\varphi = (1)$;

(ii) $\mathscr{E}^+(K)^\varphi = \mathscr{E}(K)^{2\varphi}$;

(iii) $(\varphi \neq 1)$ *pour tout p ramifié dans L/K, $\varphi \notin \Phi_{k_p}$;*

(iii') $(\varphi = 1)$ *il existe dans $L_0/\mathbf{Q}$ un unique nombre premier totalement ramifié dans $L_0/\mathbf{Q}$.*

([5]) Ainsi qu'un résultat de O. Neumann exposé aux « journées arithmétiques » de Luminy (juin 1978).

On utilise les théorèmes II.2 et II.3 (i), et on conclut de manière analogue à celle du corollaire précédent. On remarque que dans ce cas ($l = 2$ et L réelle), le résultat du corollaire s'applique à tous les corps K intermédiaires entre L et k, donc à k en particulier.

III. — Application à une conjecture sur le théorème de Stickelberger

Soit χ un caractère rationnel irréductible impair, et soit $\boldsymbol{\varphi}$ un caractère irréductible 2-adique, $\boldsymbol{\varphi} \mid \chi$; on appelle comme d'habitude φ le caractère 2-adique modéré associé à $\boldsymbol{\varphi}$, et ψ le caractère rationnel modéré associé à χ.

1. Rappels

On rappelle que dans [8] (chap. II, § 1) nous avons défini les modules $\mathscr{H}_{\varphi}$ et les invariants l-adiques $m_{\varphi}(h)$ et $m_{\varphi}(\mathscr{H})$ ([8], déf. II.8 et II.7).

L'interprétation du théorème de Stickelberger ([8], th. II.5 et II.6) nous a conduit à formuler la conjecture suivante, dans le cas $l = 2$ et $\boldsymbol{\varphi}$ impair ([8], rem. II.6) : « l'idéal $\hat{\mathscr{P}}_{\chi}^{m_{\boldsymbol{\varphi}}(h)}$ annule $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\varphi}}$ » : on rappelle que $\hat{\mathscr{P}}_{\chi}$ désigne l'idéal maximal de $\mathbf{Z}_2^{(g_\chi)}$ et que l'on a, par définition,

$$\hat{\mathscr{P}}_{\chi}^{m_{\boldsymbol{\varphi}}(h)} = \left(\frac{1}{2} B_1(\chi'^{-1})\right) \mathbf{Z}_2^{(g_\chi)}(\chi' \mid \boldsymbol{\varphi}), \qquad \text{si} \quad K_\psi \neq \mathbf{Q},$$

$$\mathscr{P}_{\chi}^{m_{\boldsymbol{\varphi}}(h)-1} = \left(\frac{1}{2} B_1(\chi'^{-1})\right) \mathbf{Z}_2^{(g_\chi)}(\chi' \mid \boldsymbol{\varphi}),$$

si

$$K_\psi = \mathbf{Q} \qquad \text{et} \qquad K_\chi \neq \mathbf{Q}^{(4)},$$

où $B_1(\chi'^{-1})$ désigne le nombre de Bernoulli généralisé relatif à χ'^{-1} (*cf.* [7], II, § 2). Remarquons enfin que l'on a $\mathscr{H}_{\boldsymbol{\varphi}} = (\mathscr{H}(K_\chi)^-)^{\boldsymbol{\varphi}}$ (*cf.* [8], chap. I, th. 1.2 et cor. II.1), ce qui permet de faire le lien avec les résultats de II, § 4 (*c*).

Pour tout corps cyclotomique $\mathbf{Q}^{(f)}$, nous désignons par σ_a, $(a, f) = 1$, le symbole d'Artin habituel, et par (L/a) sa restriction à un sous-corps L de $\mathbf{Q}^{(f)}$. En particulier, σ_{-1} est la conjugaison complexe.

2. Résultats

THÉORÈME III.1. — *Soit $\boldsymbol{\varphi} \mid \chi$ un caractère 2-adique irréductible impair. Soit $\varphi \mid \psi$ le caractère modéré associé à $\boldsymbol{\varphi}$. Uniquement dans le cas $\varphi \neq \psi$* (i. e. $\boldsymbol{\varphi} \neq \chi$), *on suppose qu'aucun nombre premier ramifié dans K_χ/K_ψ n'est totalement décomposé dans K_ψ et que les seules φ-unités totalement*

positives du sous-corps réel maximal de K_χ sont les carrés des φ-unités. Alors $\hat{\mathscr{P}}_\chi^{m_\varphi\,(h)}$ annule $\mathscr{H}_\varphi$.

Démonstration. — Soit $G_\chi = \mathrm{Gal}(K_\chi/\mathbf{Q})$, et soit S_{K_χ} l'élément de Stickelberger associé à K_χ; on rappelle que, pour tout élément $\Omega \in \mathbf{Z}[G_\chi]$ tel que $\Omega\, S_{K_\chi} \in \mathbf{Z}[G_\chi]$, alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de K_χ (non ramifié dans $K_\chi/\mathbf{Q}$), $\mathfrak{P}^{\Omega S_{K_\chi}}$ est principal.

Distinguons deux cas selon que $\varphi \neq \psi$ ou non (i. e. $\varphi \neq \chi$ ou non).

(i) *Cas où $\varphi \neq \psi$; g_χ est alors distinct d'une puissance de* 2. — On a

$$S_{K_\chi} = \frac{1}{f_\chi} \sum_{b=1\,(b,f_\chi)=1}^{f_\chi} \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1} b.$$

Considérons $\Omega = (K_\chi/a) - a$, avec a premier à f_χ; on a ([8], chap. II, § 4 (b)) :

$$\left(\left(\frac{K_\chi}{a}\right) - a\right) S_{K_\chi} = -\sum_{b=1\,(b,f_\chi)=1}^{f_\chi} \lambda_b \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1},$$

où $\lambda_b = (ab - [ab])/f_\chi$, en désignant par [ ] la fonction résidu positif modulo f_χ. Définissons B : si f_χ est pair, alors on pose

$$B = \{b,\ 0 < b < f_\chi/2,\ (b, f_\chi) = 1\};$$

si f_χ est impair, un seul des deux nombres b ou $f_\chi - b$ est impair, on pose dans ce cas

$$B = \{b,\ 0 < b < f_\chi,\ (b, 2f_\chi) = 1\}.$$

Dans les deux cas, on a

$$\{b,\ 0 < b < f_\chi,\ (b, f_\chi) = 1\} = B \cup (f_\chi - B) \quad \text{(réunion disjointe).}$$

On a

$$\left(\left(\frac{K_\chi}{a}\right) - a\right) S_{K_\chi} = -\sum_B \lambda_b \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1} - \sum_B \lambda_{f_\chi - b} \left(\frac{K_\chi}{f_\chi - b}\right)^{-1};$$

or on vérifie que $\lambda_{f_\chi - b} = a - 1 - \lambda_b$, d'où

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{K_\chi}{a}\right) - a\right) S_{K_\chi} \\
&\quad = -\sum_B \left(\lambda_b \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1} + \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1} \left(\frac{K_\chi}{-1}\right)(a - 1 - \lambda_b)\right) \\
&\quad = (1-a)\left(\frac{K_\chi}{-1}\right) \sum_B \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1} + \left(\left(\frac{K_\chi}{-1}\right) - 1\right) \sum_B \lambda_b \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

LEMME III.1. — *Pour tout entier N, on peut choisir a premier à f_χ de telle sorte que* $1-a \equiv 0 \bmod 2^N$ *et tel que* (K_χ/a) *soit d'ordre non puissance de* 2.

En effet, si f_χ est impair, et si a est tel que (K_χ/a) soit d'ordre non puissance de 2, ce qui est possible puisque $K_\psi \neq \mathbf{Q}$, la congruence $a+\lambda f_\chi \equiv 1 \bmod 2^N$ est équivalente à la congruence $\lambda f_\chi \equiv 1-a \bmod 2^N$ qui est toujours soluble en λ puisque f_χ est impair.

Si f_χ est pair, posons $f_\chi = 2^n f'_\chi$, f'_χ impair. Puisque $K_\psi \neq \mathbf{Q}$, $[K_\chi \mathbf{Q}^{(2n)} : \mathbf{Q}^{(2n)}]$ n'est pas une puissance de 2, et on peut trouver a premier à f_χ, $a \equiv 1 \bmod 2^n$ (correspondant à $\sigma_a \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{(f_\chi)}/\mathbf{Q}^{(2n)})$) tel que (K_χ/a) soit d'ordre non puissance de 2 (par exemple générateur dans $\mathrm{Gal}(K_\chi \mathbf{Q}^{(2n)}/\mathbf{Q}^{(2n)})$). La congruence $a+\lambda f_\chi \equiv 1 \bmod 2^N$ équivaut à la congruence $\lambda f_\chi \equiv 1-a \bmod 2^N$ soit $\lambda f'_\chi \equiv (1-a)\, 2^{-n} \bmod 2^{N-n}$ qui est soluble en λ puisque f'_χ est impair (si $N \leqslant n$, a convient).

Les hypothèses du théorème (appliquées à $L = K_\chi$ et à K égal au sous-corps réel maximal de K_χ) conduisent à

$$\frac{\prod_p (e(p))^{n_\varphi d_\varphi(p)} a_\varphi}{(\mathscr{E}(K)^\varphi : \mathscr{E}(K)^\varphi \cap N\mathscr{L}^{*\varphi})} = 1 \quad (\textit{cf.}\ \text{th. II.2 et th. II.3}).$$

On a donc $|\mathscr{H}_1^\varphi| = |\mathscr{H}(K)^\varphi|$; considérons alors le quotient de Herbrand de $\mathscr{H}(L)^\varphi$ (égal à 1) relativement au groupe

$$G = \{1, \sigma_{-1}\} : \quad q(\mathscr{H}(L)^\varphi) = \frac{|\mathscr{H}_1^\varphi|}{|\mathscr{H}(L)^{\nu\varphi}|} \times \frac{|\mathscr{H}(L)^{(\sigma_{-1}-1)\varphi}|}{|\mathrm{Ker}_\nu \mathscr{H}(L)^\varphi|} = 1$$

($\nu = \sigma_{-1}+1$); or l'application canonique $\mathscr{H}(K) \to \mathscr{H}(L)$ étant injective ([8], prop. II.1), il en résulte que $\mathrm{Ker}_\nu \mathscr{H}(L)^\varphi = \mathscr{H}_\varphi$; l'application $N : \mathscr{H}(L) \to \mathscr{H}(K)$ étant surjective, on a $\mathscr{H}(L)^{\nu\varphi} \simeq \mathscr{H}(K)^\varphi$, d'où :

$$\mathscr{H}_\varphi = \mathscr{H}(K_\chi)^{(\sigma_{-1}-1)\varphi}.$$

Soit alors h une classe de $\mathscr{H}_\varphi$; $h = h_0^{\sigma_{-1}-1}$, $h_0 \in \mathscr{H}(K_\chi)^\varphi$, et représentons h_0 par un idéal $\mathfrak{P}$ premier de K_χ non ramifié dans $K_\chi/\mathbf{Q}$; alors $\mathfrak{P}^{\sigma_{-1}-1}$ représente h, $\mathfrak{P}^{((K_\chi/a)-a)S_{K_\chi}}$ est principal, et h_0 est annulée par $(1-a)\,\sigma_{-1} \sum_B (K_\chi/b)^{-1} + (\sigma_{-1}-1) \sum_B \lambda_b (K_\chi/b)^{-1}$. Ceci étant valable sans hypothèse sur a, choisissons a comme il est dit dans le lemme III.1, avec N choisi de telle sorte que 2^{N-1} annule $\mathscr{H}(K_\chi)$; alors $(\sigma_{-1}-1) \sum_B \lambda_b (K_\chi/b)^{-1}$

annule h_0 et $\sum_B \lambda_b (K_\chi/b)^{-1}$ annule h donc $\mathscr{H}_\varphi$. En terme de $\mathbf{Z}_2^{(g_\chi)}$-modules, $\mathscr{H}_\varphi$ est annulé par $\sum_B \lambda_b \chi'^{-1}(b)$ et par $1/2(1-a)\sigma_{-1}\sum_B \chi'^{-1}(b)$ (avec $1-a \equiv 0 \bmod 2^N$). Or

$$(\chi'(a)-a)B_1(\chi'^{-1}) = (a-1)\sum_B \chi'^{-1}(b) - 2\sum_B \lambda_b \chi'^{-1}(b).$$

Il en résulte que $1/2(\chi'(a)-a)B_1(\chi'^{-1})$ annule $\mathscr{H}_\varphi$; or $\chi'(a)-a$ est inversible dans $\mathbf{Z}_2^{(g_\chi)}$ par choix de a ($\chi'(a)$ est une racine de l'unité d'ordre non puissance de 2); d'où le résultat dans ce cas.

(ii) *Cas* $\varphi = \psi$. — Posons $A = \mathbf{Z}_2^{(g_\chi)}$; on a

$$\mathscr{H}_\varphi \simeq A/\hat{\mathscr{P}}_\chi^{n_1} \times \ldots \times A/\hat{\mathscr{P}}_\chi^{n_r}, \qquad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_r > 0$$

et

$$|\mathscr{H}_\varphi| = 2^{(n_1+\ldots+n_r)n_\varphi}.$$

Posons $(1/2)B_1(\chi'^{-1})A = \hat{\mathscr{P}}_\chi^m$ et supposons $K_\chi \neq \mathbf{Q}^{(4)}$; on a alors $m = m_\varphi(h)$ (resp. $m_\varphi(h)-1$) si $K_\psi \neq \mathbf{Q}$ (resp. $K_\psi = \mathbf{Q}$). Puisque $\varphi = \psi$ (donc $\varphi = \chi$), le théorème II.2 de [8] conduit à

$$|\mathscr{H}_\varphi| = |\mathscr{H}_\chi| = \left(2^{\alpha_\chi} w_\chi \prod_{\chi' \mid \chi} \frac{-1}{2} B_1(\chi'^{-1})\right)_2 = 2^{\alpha_\chi + m n_\varphi}.$$

avec $\alpha_\chi = 1$ (resp. 0) si $K_\psi = \mathbf{Q}$ (resp. $K_\psi \neq \mathbf{Q}$); on a donc : $n_1+\ldots+n_r = m+1$ si $K_\psi = \mathbf{Q}$ (car, dans ce cas, $n_\varphi = 1$ et $\alpha_\chi = 1$), $n_1+\ldots+n_r = m$ sinon. On a donc $n_1+\ldots+n_r = m_\varphi(h)$ dans tous les cas; par conséquent, $n_i \leqslant m_\varphi(h)$ pour tout i, et $\hat{\mathscr{P}}_\chi^{m_\varphi(h)}$ annule $\mathscr{H}_\varphi$. D'où le théorème.

IV. Application à des problèmes de parité des nombres de classes réelles et relatives

1. Introduction

Un certain nombre de résultats ([3]; [8], prop. II.1; [16], th. 3) montrent qu'il existe un lien entre classes réelles et classes relatives, lien que nous nous proposons d'établir de façon plus complète, grâce à l'utilisation simultanée des résultats sur les φ-classes invariantes, de ceux que nous avons obtenus dans [5] et [6], de ceux de [13], et enfin d'une nouvelle propriété des nombres de Bernoulli $B_1(\chi'^{-1})$ que nous allons établir pour commencer.

2. Relation entre nombres de Bernoulli et signatures d'unités cyclotomiques. Application

Soit χ un caractère rationnel impair, et soit $G_\chi = \mathrm{Gal}(K_\chi/\mathbf{Q})$. Soit a premier à f_χ choisi tel que (K_χ/a) engendre le groupe G_χ. Il est clair que l'on peut choisir a impair.

Posons $\omega = \exp(i\pi/f_\chi + i\pi)$; si f_χ est impair (resp. pair), ω est une racine primitive d'ordre f_χ de l'unité (resp. d'ordre $2f_\chi$). Posons

$$\theta_a = (\omega^a - \omega^{-a})(\omega - \omega^{-1})^{-1};$$

on a le résultat suivant qui établit un lien fondamental :

LEMME IV.1. — *Le nombre θ_a est une unité réelle de $\mathbf{Q}^{(f_\chi)}$; en désignant par s la fonction signe additive, on a $s(\theta_a^{\sigma_b}) \equiv \lambda_b \bmod 2$ pour tout $\sigma_b \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{(f_\chi)}/\mathbf{Q})$ tel que $0 < b < f_\chi$, $(b, 2f_\chi) = 1$, avec $\lambda_b = (ab - [ab])/f_\chi$.*

Si f_χ est impair, on constate que $\theta_a \in \mathbf{Q}_+^{(f_\chi)}$. Si f_χ est pair alors, $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{(2f_\chi)}/\mathbf{Q}^{(f_\chi)}) = \{1, \sigma_c\}$ avec $c = 1 + f_\chi$; or $\omega^{\sigma_c} = -\omega$ et, comme a est impair, on a bien $\theta_a^{\sigma_c} = \theta_a$. Enfin il est clair que θ_a est réelle. Soit $\sigma_b \in \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}^{(f_\chi)}/\mathbf{Q})$ (en choisissant b impair, $0 < b < f_\chi$) : on a

$$\begin{aligned}\theta_a^{\sigma_b} &= (\omega^{ab} - \omega^{-ab})(\omega^b - \omega^{-b})^{-1}\\ &= (-1)^{ab+b}\sin(\pi ab/f_\chi)(\sin(\pi b/f_\chi))^{-1};\end{aligned}$$

on a $ab = [ab] + \lambda_b f_\chi$, soit

$$\begin{aligned}\theta_a^{\sigma_b} &= \sin(\pi[ab]/f_\chi + \pi\lambda_b)(\sin(\pi b/f_\chi))^{-1}\\ &= (-1)^{\lambda_b}\sin(\pi[ab]/f_\chi)(\sin(\pi b/f_\chi))^{-1}\end{aligned}$$

qui est du signe de $(-1)^{\lambda_b}$; d'où le lemme.

D'après les calculs effectués dans III [§ 2], on a

$$\left(\left(\frac{K_\chi}{a}\right) - a\right) S_{K_\chi} = (1-a)\sigma_{-1}\sum_B \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1} + (\sigma_{-1} - 1)\sum_B \lambda_b \left(\frac{K_\chi}{b}\right)^{-1},$$

où B est l'ensemble défini dans III [§ 2]. On peut donc écrire avec $\chi' \mid \chi$:

$$(\chi'(a) - a) B_1(\chi'^{-1}) = (a-1)\sum_B \chi'^{-1}(b) - 2\sum_B \lambda_b \chi'^{-1}(b)$$

soit

$$\frac{1}{2}(\chi'(a)-a)B_1(\chi'^{-1}) = \frac{a-1}{2}\sum_B \chi'^{-1}(b) - \sum_B \lambda_b \chi'^{-1}(b)$$

$$\equiv \frac{a-1}{2}\sum_B \chi'^{-1}(b) + \sum_B \chi'^{-1}(b)\, s(\theta_a^{\sigma_b}) \bmod 2$$

(on peut appliquer le lemme IV.1, car tout $b \in B$ est impair).

Écrivons $\chi' = \psi'\gamma'$ (*cf.* II, § 2 (*b*), (α)). Les racines de l'unité $\gamma'(b)$ sont d'ordre puissance de 2, et vérifient $\gamma'(b) \equiv 1 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi$. D'où, dans $\mathbf{Z}_2^{(g_\chi)}$,

$$\frac{1}{2}(\chi'(a)-a)B_1(\chi'^{-1}) \equiv \frac{a-1}{2}\sum_B \psi'^{-1}(b) + \sum_B \psi'^{-1}(b)\, s(\theta_a^{\sigma_b}) \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi.$$

Comme ψ' est pair, on a $\psi'(-b) = \psi'(b)$, et comme θ_a est réelle, on a $s(\theta_a^{\sigma_{-b}}) = s(\theta_a^{\sigma_b})$; on est donc amené à introduire $\mathbf{Q}_+^{(f_\chi)}$ et K_{χ^+}, sous-corps réels maximaux de $\mathbf{Q}^{(f_\chi)}$ et K_χ respectivement. On obtient alors (où σ décrit $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_+^{(f_\chi)}/\mathbf{Q})$) :

$$\sum_B \psi'^{-1}(b)\, s(\theta_a^{\sigma_b}) = \sum_\sigma \psi'^{-1}(\sigma)\, s(\theta_a^\sigma).$$

Décomposons cette somme modulo $H' = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_+^{(f_\chi)}/K_\psi)$: on obtient (avec $\bar{\sigma} \in G_\psi$, $\tau \in H'$) :

$$\sum_{\bar{\sigma},\tau} \psi'^{-1}(\bar{\sigma})\, s(\theta_a^{\sigma\tau}) = \sum_{\bar{\sigma}} \psi'^{-1}(\bar{\sigma})\, s(\theta_a'^{\bar{\sigma}})$$

en posant

$$\theta_a' = N_{\mathbf{Q}_+^{(f_\chi)}/K_\psi}\theta_a;$$

on a donc

$$\frac{1}{2}(\chi'(a)-a)B_1(\chi'^{-1})$$

$$\equiv \frac{a-1}{2}|H'|\sum_{\bar{\sigma}\in G_\psi}\psi'^{-1}(\bar{\sigma}) + \sum_{\bar{\sigma}\in G_\psi}\psi'^{-1}(\bar{\sigma})\, s(\theta_a'^{\bar{\sigma}}) \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi.$$

On remarque que, pour $\psi \neq 1$ (i. e. $K_\psi \neq \mathbf{Q}$), alors $\sum_{\bar{\sigma}\in G_\psi}\psi'^{-1}(\bar{\sigma}) = 0$ et que, pour $\psi = 1$, alors $\sum_{\bar{\sigma}\in G_\psi}\psi'^{-1}(\bar{\sigma}) = 1$.

Considérons l'homomorphisme signature restreint au groupe des unités de K_ψ, $S : E(K_\psi) \to \mathbf{F}_2^{g_\psi}$ défini par $\varepsilon \to (s(\varepsilon^\sigma))_\sigma$, $\sigma \in G_\psi$. On munit $\mathbf{F}_2^{g_\psi}$

d'une structure de G_ψ-module en posant $(s_\sigma)_\sigma^\tau = (s_{\sigma\tau})_\sigma$ pour tout $\tau \in G_\psi$. Dans ces conditions, S est un homomorphisme de G_ψ-modules. On a l'isomorphisme canonique de G_ψ-modules : $\mathbf{F}_2^{g_\psi} \to \mathbf{F}_2[G_\psi]$ défini par $(s_\sigma)_\sigma \to \sum_{\sigma \in G_\psi} s_\sigma \sigma^{-1}$. On appelle encore S l'application $\mathscr{E}(K_\psi) \to \mathbf{F}_2[G_\psi]$ qui en résulte canoniquement.

Le diagramme ci-dessous est commutatif ($\varphi \in \Phi_H$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}_2[G_\psi]e_\varphi \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\text{mod } 2"'] & \mathbf{Z}_2^{(g_\psi)} \arrow[r] & \mathbf{Z}_2^{(g_\psi)}/\hat{\mathscr{P}}_\psi \\
\mathscr{E}(K_\psi)^\varphi \arrow[r, "S"] & \mathbf{F}_2[G_\psi]\bar{e}_\varphi \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et on a l'isomorphisme $\mathbf{F}_2[G_\psi]\bar{e}_\varphi = \mathbf{Z}_2^{(g_\psi)}/\hat{\mathscr{P}}_\psi$, $\hat{\mathscr{P}}_\psi$ désignant l'idéal maximal de $\mathbf{Q}_2^{(g_\psi)}$. On peut donc considérer l'homomorphisme de G_ψ-modules, noté par abus $\psi' S : \mathscr{E}(K_\psi)^\varphi \to \mathbf{Z}_2^{(g_\psi)}/\hat{\mathscr{P}}_\psi$ et où $\psi' S(\varepsilon)$ est la classe de $\sum_{\sigma \in G_\psi} \psi'^{-1}(\sigma)\, s(\varepsilon^\sigma) \bmod \hat{\mathscr{P}}_\psi$. On a en particulier ici

$$\psi' S(\theta'_a) = \textstyle\sum_{\sigma \in G_\psi} s(\theta_a'^\sigma)\, \psi'^{-1}(\sigma) \bmod \hat{\mathscr{P}}_\psi;$$

on a donc prouvé (compte tenu du fait que $\hat{\mathscr{P}}_\chi$ est au-dessus de $\hat{\mathscr{P}}_\psi$ dans $\mathbf{Q}_2^{(g_\chi)}$) le résultat suivant.

THÉORÈME IV.1. — *Soit $\chi' \mid \chi$ un caractère irréductible impair de caractère modéré associé $\psi' \mid \psi$; soit a impair tel que (K_χ/a) engendre G_χ, et soit*

$$\theta'_a = N_{\mathbf{Q}_+^{(f_\chi)}/K_\psi}((\omega^a - \omega^{-a})(\omega - \omega^{-1})^{-1}), \qquad \omega = \exp(i\pi/f_\chi + i\pi);$$

(i) *si $\psi' \neq 1$, alors* $\psi' S(\theta'_a) = 1/2\,(\chi'(a) - a)\, B_1(\chi'^{-1}) \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi$;
(ii) *si $\psi' = 1$, alors* $\theta'_a = \pm 1$ et

$$s(\theta'_a) = \frac{a-1}{2}\,\frac{[\mathbf{Q}^{(f_\chi)} : \mathbf{Q}]}{2} + \frac{1}{2}(\chi'(a) - a)\, B_1(\chi'^{-1}) \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi.$$

Il faut maintenant examiner θ'_a qui n'est pas nécessairement une unité cyclotomique « de base ». On suppose $\psi \neq 1$.

LEMME IV.2. — *Posons*

$$W = \prod_{q \mid f_\chi}\left(1 - \left(\frac{K_\psi}{q}\right)^{-1}\right) \text{ avec la convention } \left(\frac{K_\psi}{q}\right) = 0 \text{ si } q \mid f_\psi.$$

Alors $\theta'_a = \pm\theta_\psi^{(\sigma_a-1)W}$, *où* θ_ψ *est le nombre défini par* LEOPOLDT dans [11] (§ 8, 1).

Posons $\zeta_f = \exp(2i\pi/f)$ pour tout entier $f > 0$; alors on a $\omega^2 = \zeta_{f_\chi}$ et $\omega = -\zeta_{2f_\chi}$. On a

$$\begin{aligned}\theta_a &= (\omega-\omega^{-1})^{\sigma_a-1} = (\zeta_{2f_\chi}-\zeta_{2f_\chi}^{-1})^{\sigma_a-1}\\ &= (\zeta_{2f_\chi}^{-1}(\zeta_{2f_\chi}^{2}-1))^{\sigma_a-1} = \omega'(\zeta_{f_\chi}-1)^{\sigma_a-1}, \qquad \text{avec} \quad \omega'^{f_\chi} = 1.\end{aligned}$$

On a $N_{\mathbf{Q}^{(f_\chi)}/K_\psi}\theta_a = \theta_a'^2$, car $\theta_a \in \mathbf{Q}_+^{(f_\chi)}$. D'où

$$\theta_a'^2 = N_{\mathbf{Q}^{(f_\psi)}/K_\psi} N_{\mathbf{Q}^{(f_\chi)}/\mathbf{Q}^{(f_\psi)}}\theta_a;$$

or d'après [11] (§ 8, 2), on a $N_{\mathbf{Q}^{(f_\chi)}/\mathbf{Q}^{(f_\psi)}}(\zeta_{f_\chi}-1) = (\zeta_{f_\psi}-1)^W$, d'où

$$\theta_a'^2 = N_{\mathbf{Q}^{(f_\psi)}/K_\psi}(\omega''(\zeta_{f_\psi-1})^{(\sigma_a-1)W}) \qquad \text{avec} \quad \omega''^{f_\psi} = 1;$$

or K_ψ étant réel, on a

$$\theta_a'^2 = \pm N_{\mathbf{Q}^{(f_\psi)}/K_\psi}(\zeta_{f_\psi}-1)^{(\sigma_a-1)W};$$

d'après [11] (§ 8, 1) :

$$N_{\mathbf{Q}^{(f_\psi)}/K_\psi}(\zeta_{f_\psi}-1) = \pm\theta_\psi^2,$$

d'où $\theta_a'^2 = \theta_\psi^{2\,(\sigma_a-1)W}$ et $\theta'_a = \pm\theta_\psi^{(\sigma_a-1)W}$. Ce qui démontre le lemme.

Pour faire le lien avec les résultats de [6], il faut introduire l'unité cyclotomique $\eta_\psi = \theta_\psi^{\delta_\psi(\sigma_a-1)}$, $\delta_\psi = \prod_{p\,|\,g_\psi}(\sigma_\psi^{q_\psi/p}-1)$ (*cf.* [6], II, § 2), avec σ_ψ générateur de G_ψ. On a alors $\theta_a'^{\delta_\psi} = \theta_\psi^{(\sigma_a-1)W\delta_\psi} = \eta_\psi^W$; d'où

$$\theta_a'^{\delta_\psi e_\varphi} = \eta_\psi^{We_\varphi}(\varphi\,|\,\psi),$$

ce qui conduit, par l'homomorphisme $\psi' S(\psi' \mid \varphi)$ à

$$\psi'(\delta_\psi)\psi' S(\theta'_a) = \psi'(W)\psi' S(\eta_\psi)$$

(car $\psi'(e_\varphi) = 1$). On remarque que $\psi'(W) = \prod_{q\,|\,f_\chi}(1-\psi'^{-1}(q))$. On remarque aussi que $\psi'(\delta_\psi)$ est inversible modulo $\hat{\mathscr{P}}_\psi$ car $\psi'(\sigma_\psi)^{g_\psi/p}$ est une racine d'ordre p de l'unité, et on a $p \neq 2$ car g_ψ est impair.

Soit $\mathscr{F} = \mathbf{Z}_2 \otimes F$, F désignant le groupe des unités cyclotomiques de K_ψ (celles de LEOPOLDT ([11], § 8, 4) qui sont utilisées dans [6] (p. 181); en particulier $\mathscr{F}^\varphi$ est engendré par $\eta_\psi^{e_\varphi}$). Alors $\mathscr{F}^\varphi$ est inclus dans $\mathscr{F}^+$ ($\mathscr{F}^+ = \mathbf{Z}_2 \otimes F^+$) si, et seulement si, $\psi' S(\eta_\psi) = 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\psi$.

Si l'on suppose maintenant $\psi'(W) \neq 0$, alors nécessairement $\psi'(W)$ est inversible modulo $\hat{\mathscr{P}}_\psi$ car autrement, c'est qu'il existe $q \mid f_\chi$ tel que $\psi'(q)$ soit racine de l'unité d'ordre puissance de 2; or ψ' est d'ordre impair et la seule possibilité est $\psi'(q) = 1$, ce qui n'est pas. D'où $\mathscr{F}^\varphi \subset \mathscr{F}^+$ équivaut à $\psi' S(\eta_\psi) = 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\psi$, qui équivaut à (th. IV 1 (i)) $\psi' S(\theta'_a) = 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\psi$, soit

$$\frac{1}{2}(\chi'(a)-a)\,B_1(\chi'^{-1}) \equiv 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi,$$

soit

$$\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}) \equiv 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi,$$

car $\chi'(a)-a$ est inversible modulo $\hat{\mathscr{P}}_\chi$. On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME IV.2. — *Soit $\boldsymbol{\varphi} \mid \chi$ un caractère 2-adique impair tel que g_χ soit distinct d'une puissance de 2, et soit $\varphi \mid \psi$ son caractère modéré associé. Soit $\mathscr{F} = \mathbf{Z}_2 \otimes F$ (resp. $\mathscr{F}^+ = \mathbf{Z}_2 \otimes F^+$) où F (resp. F^+) désigne le groupe des unités cyclotomiques de K_ψ (resp. celles qui sont totalement positives). On suppose en outre*

$$\prod_{q \mid f_\chi}(1-\psi'(q)) \neq 0 (\psi' \mid \varphi).$$

Alors on a $\mathscr{F}^\varphi = \mathscr{F}^{+\varphi}$ si, et seulement si, l'invariant analytique $m_\varphi(h)$ est non nul, soit encore, si, et seulement si,

$$\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}) \equiv 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi(\chi' \mid \boldsymbol{\varphi}).$$

On remarque que l'implication $\mathscr{F}^\varphi = \mathscr{F}^{+\varphi} \Rightarrow m_\varphi(h) \neq 0$ est toujours vraie.

Désignons par $\bar{\varphi}$ (resp. $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$) le miroir du caractère 2-adique φ (resp. $\boldsymbol{\varphi}$) ([13], § 3, p. 305). Si φ est le caractère modéré associé à $\boldsymbol{\varphi}$ alors $\bar{\varphi}$ est le caractère modéré associé à $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$.

Avec ces notations, on peut énoncer le critère de parité suivant qui établit un lien de type analytique entre classes réelles et relatives :

THÉORÈME IV.3. — *Soit L une extension imaginaire cyclique de $\mathbf{Q}$, et soit k le plus grand sous-corps de L de degré impair sur $\mathbf{Q}$. On suppose $k \neq \mathbf{Q}$, et on suppose qu'aucun nombre premier ramifié dans L/k ne se décompose dans k. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que*

le nombre de classes (au sens ordinaire) de k soit pair est qu'il existe un caractère 2-adique impair φ de L (de caractère modéré non trivial) tel que $m_\varphi(h)$ et $m_\varphi^-(h)$ soient non nuls, soit encore que l'on ait

$$\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}) \equiv \frac{1}{2}B_1(\chi') \equiv 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi(\chi' \mid \varphi).$$

Démonstration. — Du critère de parité que nous avons obtenu dans [5] et [6], il résulte : on a $|\mathscr{H}(k)| \neq 1$ si, et seulement si, il existe un caractère 2-adique $\varphi \neq 1$ de k tel que $\mathscr{F}^\varphi \subset \mathscr{F}^+$ et $\mathscr{F}^{\bar{\varphi}} \subset \mathscr{F}^+$ (cor. IV.2 de [6]), donc (th. IV.2 ci-dessus) si, et seulement si, $m_\varphi(h)$ et $m_\varphi^-(h)$ sont non nuls.

Remarque IV.1. — Étant donné $k/\mathbf{Q}$ (cyclique réelle de degré impair quelconque), on peut toujours trouver une extension cyclique imaginaire L contenant k et pour laquelle les hypothèses du théorème soient vérifiées (on peut par exemple composer k avec un corps quadratique imaginaire convenable).

3. Un résultat de type arithmétique

Donnons maintenant un résultat utilisant les calculs sur les φ-classes ambiges et les résultats de [13] :

THÉORÈME IV.4. — *Soit $\varphi \mid \chi$ un caractère 2-adique impair tel que g_χ soit distinct d'une puissance de 2, et soit $\varphi \mid \psi$ son caractère modéré associé. On suppose $\prod_{q \mid f_\chi}(1-\psi'(q)) \neq 0$ $(\psi' \mid \varphi)$. Alors les deux groupes $\mathscr{H}_\varphi$ et $\mathscr{H}_{\bar{\varphi}}$ sont non triviaux si, et seulement si, l'un des deux groupes $\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi$ ou $\mathscr{H}(K_\psi)^{\bar{\varphi}}$ est non trivial.*

Démonstration. — Démontrons d'abord le lemme suivant.

LEMME IV.3. — *Sous les hypothèses du théorème, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathscr{H}_\varphi = (1)$;
(ii) $\mathscr{H}(K_\chi)^\varphi = (1)$;
(iii) $\mathscr{H}_1(K_\chi/K_\psi)^\varphi = (1)$;
(iv) $\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K_\psi)^\varphi = (1)$.

On désigne par K_{χ^+} le sous-corps réel maximal de K_χ. Montrons que (i) entraîne (ii). On a la suite exacte

$$1 \to \mathscr{H}_\varphi \to \mathscr{H}(K_\chi)^\varphi \xrightarrow{N} \mathscr{H}(K_{\chi^+})^\varphi \to 1;$$

si $\mathscr{H}_\varphi = (1)$, $|\mathscr{H}(K_\chi)^\varphi| = |\mathscr{H}(K_{\chi^+})^\varphi|$; d'après le lemme II.6, on a nécessairement $\mathscr{H}(K_{\chi^+})^\varphi = (1)$, d'où $\mathscr{H}(K_\chi)^\varphi = (1)$. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i)

et l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) sont évidentes. L'équivalence de (iii) et (iv) provient du calcul du nombre de φ-classes ambiges dans K_χ/K_ψ : comme $\varphi \neq 1$, l'hypothèse du théorème conduit à la relation (th. II.2 et II.3) :

$$|\mathscr{H}_1^{\mathrm{res}}(K_\chi/K_\psi)^\varphi| = |\mathscr{H}_1(K_\chi/K_\psi)^\varphi| = |\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K_\psi)^\varphi|.$$

Supposons maintenant $\mathscr{H}_\varphi$ et $\mathscr{H}_{\bar{\varphi}}$ non triviaux. En vertu du lemme précédent, $\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K_\psi)^\varphi$ et $\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K_\psi)^{\bar{\varphi}}$ sont non triviaux. On utilise alors le théorème 2 de [13] (cas abélien, § 3.3 (i)) qui affirme que l'une au moins des différences

$$\dim_2(\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K_\psi)^\varphi) - \dim_2(\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi)$$

ou

$$\dim_2(\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K_\psi)^{\bar{\varphi}}) - \dim_2(\mathscr{H}(K_\psi)^{\bar{\varphi}})$$

est nulle et que l'autre ne peut valoir que 0 ou n_φ (ici, $\dim_2$ désigne le 2-rang d'un $\mathbf{Z}_2$-module); donc l'un des deux modules $\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi$ ou $\mathscr{H}(K_\psi)^{\bar{\varphi}}$ est non trivial.

Supposons enfin $\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi \neq (1)$, ce qui entraîne $\mathscr{H}_\varphi \neq (1)$. On utilise alors l'analogue de la « Spiegelungsrelation » de Leopoldt dans le cas restreint ([13], § 3) : on a

$$\dim_2(\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi) = \dim_2(R/K_\psi^*)^{\bar{\varphi}},$$

où R est le radical associé à la 2-extension abélienne de K_ψ non ramifiée pour toutes les places ([13], § 1.1). On a donc, par hypothèse, $\dim_2(R/K_\psi^*)^{\bar{\varphi}} \neq 0$, et il existe $\alpha \in K_\psi^*$ tel que $K_\psi(\sqrt{\alpha})$ soit une extension quadratique de K_ψ non ramifiée partout; il en résulte $\alpha A_{K_\psi} = \mathfrak{a}^2$ ($\mathfrak{a}$ idéal de K_ψ) et $\alpha \gg 0$. Si $\mathfrak{a}$ est non principal au sens ordinaire, il en résulte $\mathscr{H}(K_\psi)^{\bar{\varphi}} \neq (1)$; si $\mathfrak{a} = \beta A_{K_\psi}$, $\beta \in K_\psi^*$, alors $\alpha = \beta^2 \varepsilon$, $\varepsilon \in E^+(K_\psi)$, et on a $\mathscr{E}^+(K_\psi)^{\bar{\varphi}} = \mathscr{E}(K_\psi)^{\bar{\varphi}}$. Ainsi dans tous les cas $\mathscr{H}^{\mathrm{res}}(K_\psi)^{\bar{\varphi}} \neq (1)$, soit $\mathscr{H}_{\bar{\varphi}} \neq (1)$.

4. Remarques sur les résultats précédents

Si l'on utilise les conjectures sur les invariants (*cf.* [8], Rem. III.2), on obtient alors la conjecture suivante pour laquelle il serait très intéressant de trouver une démonstration directe :

CONJECTURE. — *Soit* $\varphi \mid \chi$ *un caractère 2-adique impair tel que* g_χ *soit distinct d'une puissance de* 2, *et soit* $\varphi \mid \psi$ *son caractère modéré associé. On suppose*

$$\prod_{q \mid f_\chi}(1-\psi'(q)) \neq 0 (\psi' \mid \varphi).$$

Alors une condition nécessaire et suffisante pour que l'un des deux modules $\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi$ *ou* $\mathscr{H}(K_\psi)^{\bar{\varphi}}$ *soit non trivial est que l'on ait*

$$\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}) \equiv \frac{1}{2}B_1(\chi') \equiv 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi(\chi' \mid \varphi).$$

Remarque IV.2. — Une certaine crédibilité, concernant la conjecture sur les invariants que nous avons formulée dans [7] et [8], est aussi accordée par d'autres auteurs (*cf.* [4] et[9], où il est démontré que les conjectures de COATES et LICHTENBAUM entraînent la conjecture sur les invariants). Cependant, on remarque qu'il « suffirait » du critère analogue au critère démontré par RIBET [14] pour les p-classes relatives des corps $\mathbf{Q}^{(p)}$ $\Big($à savoir, ici, que $\mathscr{H}_\varphi \neq (1)$ si, et seulement si,

$$\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}) \equiv 0 \bmod \mathscr{P}_\chi(\chi' \mid \varphi)\Big)$$

pour démontrer la conjecture et réunir ainsi les résultats des paragraphes 2 et 3 en un seul énoncé.

Citons maintenant deux corollaires aux résultats obtenus afin de mettre en évidence quelques cas particuliers significatifs.

COROLLAIRE IV.1. — *Soit* $L/\mathbf{Q}$ *imaginaire cyclique; soit* k *le plus grand sous-corps de* L *de degré impair sur* $\mathbf{Q}$ *et soit* L_0 *le sous-corps de* L *défini par* $[L : L_0] = [k : \mathbf{Q}]$. *Supposons* $\mathrm{Gal}(k/\mathbf{Q})$ *d'ordre* d *tel que* -1 *soit congru à une puissance de* 2 modulo d (*condition équivalente à* $\bar{\varphi} = \varphi$, *pour tout* $\varphi \in \Phi_k$). *Si aucun nombre premier ramifié dans* L/k *ne se décompose dans* k, *alors une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathscr{H}(k)$ *soit non trivial est que* $|\mathscr{H}(L)^-| / |\mathscr{H}(L_0)^-|$ *soit différent de* 1.

En effet, on a $\mathscr{H}(L)^- = \bigoplus_\varphi (\mathscr{H}(L)^-)^\varphi$; or

$$|\mathscr{H}(L)^-| / |\mathscr{H}(L_0)^-| = \prod_{\varphi \neq 1} |(\mathscr{H}(L)^-)^\varphi| = \prod_{\varphi \neq 1} |\mathscr{H}_\varphi|.$$

On utilise alors le théorème IV.4 dans le cas où $\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi}$ pour tout $\boldsymbol{\varphi}$.

Ce résultat en généralise un certain nombre dont [3] (th. 4) et [16] (th. 3).

Lorsqu'un caractère 2-adique $\boldsymbol{\varphi}$ coïncide avec le caractère rationnel χ, le caractère modéré φ coïncide avec le caractère modéré rationnel ψ. Dans ce cas, on sait que la conjecture sur les invariants restreinte à $\boldsymbol{\varphi}$ et φ est trivialement vérifiée (*cf.* [8]). On a donc des résultats très précis dans ce cas (d'autant plus que nécessairement $\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\varphi}$ et $\bar{\varphi} = \varphi$) :

COROLLAIRE IV.2. — *Soit* $\boldsymbol{\varphi}$ *un caractère 2-adique impair qui coïncide avec le caractère rationnel* χ *et tel que* g_χ *soit distinct d'une puissance de* 2.

On suppose $\prod_{q \mid f_\chi}(1-\psi'(q)) \neq 0\,(\psi' \mid \varphi)$. *Alors* $\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi$ *est non trivial si, et seulement si,* $(1/2)\,B_1(\chi'^{-1}) \equiv 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi(\chi' \mid \varphi))$.

On peut généraliser le corollaire IV.2 de la façon suivante :

COROLLAIRE IV.3. — *Soit* φ *un caractère 2-adique impair tel que* $\varphi+\bar{\varphi} = \chi$ *(il en résulte que* $\varphi+\bar{\varphi} = \psi$*). On suppose*

$$\prod_{q \mid f_\chi}(1-\psi'(q)) \neq 0\,(\psi' \mid \psi).$$

Alors $\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi \oplus \mathscr{H}(K_\psi)^{\bar{\varphi}} \neq (1)$ *si, et seulement si*

$$\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}) \equiv \frac{1}{2}B_1(\chi') \equiv 0 \bmod \hat{\mathscr{P}}_\chi(\chi' \mid \chi).$$

(On utilise les résultats précédents ainsi que le théorème II.2 et le théorème III.1 ou III.2 de [8].)

Remarque IV.3. — Il est possible d'avoir $\mathscr{H}_\varphi \neq (1)$, $\mathscr{H}_{\bar{\varphi}} = (1)$ comme le montre l'exemple de $K_\chi = \mathbf{Q}^{(29)}$, K_ψ étant le sous-corps de degré 7. On a $\chi = \varphi+\bar{\varphi}$ avec $\bar{\varphi} \neq \varphi$; on vérifie que $|\mathscr{H}_\varphi| = 2^3$ et $|\mathscr{H}_{\bar{\varphi}}| = 1$, tandis que le critère de parité de [6] appliqué à K_ψ donne

$$\mathscr{H}(K_\psi)^\varphi = \mathscr{H}(K_\psi)^{\bar{\varphi}} = (1)$$

(on vérifie d'ailleurs qu'un seul des deux nombres de Bernoulli concernés vérifie la congruence).

Remarque IV.4. — Dans le théorème IV.3, la condition de non-décomposition dans k des nombres premiers ramifiés dans L/k est nécessaire comme le montre l'exemple suivant : soit $K_\chi = K_\psi\,\mathbf{Q}(i)$, où K_ψ est le corps cubique de conducteur 31 (dans lequel 2 est décomposé). On a $\chi = \varphi$, $\bar{\varphi} = \varphi$. Soit $\chi' \mid \varphi$; on vérifie que $(1/2)\,B_1(\chi'^{-1})$ engendre l'idéal (2) dans $\mathbf{Q}^{(3)}$; ce qui fait que l'on a bien, comme prévu, $m_\varphi(h) > 0$. On vérifie directement que dans K_ψ, $\mathscr{F}^{+\varphi} = \mathscr{F}^{2\varphi}$ (le nombre de classes de K_ψ est impair).

Terminons par une illustration numérique : le cas le plus simple où l'on puisse illustrer les théorèmes IV.3 et IV.4 (dans le cas $\bar{\varphi} \neq \varphi$) est le cas où $[k : \mathbf{Q}] = 7$. Prenons alors pour k le corps de degré 7 de conducteur 491, et pour L l'extension imaginaire de degré 14 contenue dans $\mathbf{Q}^{(491)}$. On sait, d'après le critère de parité de [5], que le nombre de classes de k est pair; si χ' est un caractère de L d'ordre 14, on prévoit que l'on doit avoir

$$\frac{1}{2}B_1(\chi'^{-1}) \equiv \frac{1}{2}B_1(\chi') \equiv 0 \bmod \mathscr{P}_\chi$$

($\mathscr{P}_\chi$ divisant (2) dans $\mathbf{Q}^{(7)}$); or dans $\mathbf{Q}^{(7)}$ il n'y a que deux idéaux premiers au-dessus de (2), et ils sont échangés par la conjugaison complexe; il en résulte que l'on doit avoir $(1/2)\ B_1\ (\chi') \equiv 0 \bmod \mathscr{P}_\chi\ \overline{\mathscr{P}_\chi}$, soit $(1/2)\ B_1\ (\chi') \equiv 0 \bmod (2)$. Un calcul direct confirme ce fait : on obtient

$$-\frac{1}{2}B_1(\chi') = 2(1+\zeta+\zeta^3-\zeta^4+2\zeta^5), \quad \zeta^7 = 1.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (C.). — Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, *J. Fac. Sc. Tokyo*, Sect. 1, t. 2, 1933, p. 365-476.

[2] FURUYA. (H.). — On divisibility by 2 of the relative class numbers of imaginary number fields, *Tôhoku Math. J.*, 2nd Series, t. 23, 1971, p. 207-218.

[3] GARBANATI (D.A.). — Unit signatures, and even class numbers and relative class numbers, *J. für reine angew. Math.*, t. 274-275, 1975, p. 376-384.

[4] GILLARD (R.). — Sur le groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes réelles, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 18e année, 1976/1977, n° 10, 6 p.

[5] GRAS (G.) et GRAS (M.-N.). — Signature des unités cyclotomiques et parité du nombre de classes des extensions cycliques de **Q** de degré premier impair, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 1, p. 1-22.

[6] GRAS (G.). — Critère de parité du nombre de classes des extensions abéliennes réelles de **Q** de degré impair, *Bull. Soc. math. France*, t. 103, 1975, p. 177-190.

[7] GRAS (G.). — Classes d'idéaux des corps abéliens et nombres de Bernoulli généralisés, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 27, 1977, fasc. 1.

[8] GRAS (G.). — Application de la notion de φ-objet à l'étude du groupe des classes d'idéaux des extensions abéliennes, *Théorie des nombres*, 1975/1976, fasc. 2, 100 p. (*Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon*).

[9] GREENBERG (R.). — On p-adic L-functions and cyclotomic fields, II., *Nagoya math. J.*, t. 67, 1977, p. 139-158.

[10] HASSE (H.). — *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, II. — Würzburg, Physica-Verlag, 1965.

[11] LEOPOLDT (H. W.). — Über Einheitengruppe und Klassenzahl reeler abelscher Zahlkörper, *Abh. Deutsche Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Natur.*, t. 2, 1953, 48 p.

[12] ORIAT (B.). — Quelques caractères utiles à l'arithmétique, *Théorie des nombres*, 1974/1975, 26 p. (*Publications mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon*).

[13] ORIAT (B.). — Relation entre les 2-groupes des classes d'idéaux au sens ordinaire et restreint de certains corps de nombres, *Bull. Soc. math. France*, t. 104, 1976, p. 301-307.

[14] RIBET (K. A.). — A modular construction of unramified p-extension of $\mathbf{Q}(\mu_p)$, *Inv. Math.*, t. 34, 1976, p. 151-162.

[15] SERRE (J. P.). — *Corps locaux*. — Paris, Hermann, 1962 (*Act. scient et ind.*, 1296; *Publ. Inst. Math. univ. Nancago*, 8).

[16] UCHIDA (K.). — On a cubic cyclic field with discriminant 163^2, *J. of Number Theory*, t. 8, 1976, p. 346-349.

(Texte reçu le 28 mars 1977.)

Georges GRAS
Mathématiques, E.R.A. n° 070654 du C.N.R.S.,
Université de Franche-Comté,
25030 Besançon Cedex.