BULLETIN DE LA S. M. F.

SEÁN DINEEN
PHILIPPE NOVERRAZ
MARTIN SCHOTTENLOHER

Le problème de Lévi dans certains espaces vectoriels topologiques localement convexes

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 87-97
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__87_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 87-97.

LE PROBLÈME DE LÉVI DANS CERTAINS ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES

PAR

SEÁN DINEEN
[Dublin]

PHILIPPE NOVERRAZ
[Nancy]

MARTIN SCHOTTENLOHER
[Munich]

RÉSUMÉ. — Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe complexe possédant une base de Schauder équicontinue, nous montrons que le problème de Lévi a une solution (c'est-à-dire que les ouverts pseudo-convexes et les ouverts d'existence d'une fonction analytique coïncident) si l'espace E est métrisable; puis nous généralisons ce résultat à une classe d'espaces qui contient les espaces à base qui sont de type $\mathscr{L}\mathscr{F}$ ou, plus généralement, qui sont sousliniens.

Introduction

Dans cet article nous montrons que pour de nombreux espaces vectoriels topologiques localement convexes complexes (en abrégé elc) le problème de Lévi a une solution, c'est-à-dire que les ouverts pseudo-convexes et les ouverts d'existence d'une fonction analytique coïncident; en particulier, c'est le cas des espaces à base de Schauder équicontinue qui sont métrisables, de type $\mathscr{L}\mathscr{F}$ ou plus généralement des espaces de Souslin.

Le problème de Lévi a déjà été résolu dans les espaces de Banach à base [7] ou avec propriété d'approximation de Banach, dans les espaces de Silva ($\mathscr{D}\mathscr{F}\mathscr{S}$) à base [14] et [16] ainsi que dans des espaces définis par des limites surjectives ouvertes [4]. Un problème, moins général, a été étudié par divers auteurs ([2], [3], [4], [6], [13], [16]). Dans le cas des espaces de Banach non séparables des contre-exemples ont été données dans [8] et [10].

Au paragraphe 1, nous montrons que dans un espace métrisable à base de Schauder équicontinue les ouverts pseudo-convexes sont des ouverts d'existence. Au paragraphe 2, nous introduisons la notion d'espace σ-convexe ainsi que celle d'espace fortement séparable; ces notions, ainsi que les résultats du paragraphe 1, permettent de résoudre le problème de Lévi dans de nombreux espaces. Les notions voisines ont été considérées par POMÈS dans un travail non encore publié.

Le lecteur pourra trouver dans [12] les diverses définitions et propriétés relatives à la pseudo-convexité et à l'analyticité, dans [3] et [4] la notion de limite surjective et dans [11] et [14] les propriétés des elc à base de Schauder ainsi que des exemples de tels espaces.

Les résultats démontrés ici ont été annoncés, par les deux premiers auteurs, dans une note aux *Compte rendus de l'Académie des Sciences* [1]. La présente rédaction du théorème 1 diffère de celle esquissée dans la note, qui contenait une inexactitude. Signalons, pour terminer, que la plupart des résultats démontrés sont encore vrais pour les espaces étalés (*voir* [17]).

Paragraphe I

Dans tout ce qui suit, E désignera un espace vectoriel topologique localement convexe sur le corps des complexes (en abrégé : elc); cet espace sera de plus supposé muni d'une base de Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, c'est-à-dire que tout x de E s'écrit de manière unique $x = \sum_{n \geqslant 1} x_n e_n$, et que les applications u_n: $E \rightarrow E$, définies par $u_n(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, sont continues. On dira que la base est équicontinue (ou équi-Schauder) si l'ensemble des applications (u_n) est équicontinu; dans cet espace tonnelé, toute base de Schauder est équicontinue. Il n'est pas difficile de voir que la base est équicontinue si, et seulement si, il existe une famille $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ de semi-normes qui définit la topologie de E, et qui est telle que :

$$(\star) \quad p_\alpha(x) = \sup_n p_\alpha[u_n(x)] \quad \text{pour tout } \alpha \text{ de } A,\ n \text{ de } \mathbf{N} \text{ et } x \text{ de } E.$$

Par la suite, lorsque nous considérons une base de Schauder équicontinue, nous supposerons toujours que la condition $(\star)$ est satisfaite (une telle base est désignée dans [3] sous le nom de base de Schauder forte). Nous utiliserons aussi le résultat suivant, prouvé en [4] :

PROPOSITION 1. — *Tout elc E possédant une base de Schauder équicontinue est une limite surjective ouverte d'elc E_i, chaque E_i possédant une base de Schauder équicontinue et admettant une norme continue non nulle.*

Si un elc possède une base de Schauder (e_n), on note E_n le sous-espace engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_n$ et $E_\infty = \bigcup_{n \geq 1} E_n$. Si U est un ouvert de E, on note $U_n = U \cap E_n$ et $U_\infty = U \cap E_\infty$.

THÉORÈME 1. — *Soit U un ouvert pseudo-convexe d'un elc métrisable possédant une base de Schauder équicontinue. Soit $(y_n)_{n=1}^\infty$ une suite d'éléments de la frontière ∂U de U dans E et, pour tout n, soit $(y_n(m))_{m=1}^\infty$ une suite d'éléments de U_∞ telle que $y_n = \lim_{m\infty} y_n(m)$. Il existe alors une fonction f holomorphe dans U telle que $\sup_m |f(y_n(m))| = +\infty$ pour tout n.*

COROLLAIRE. — *Tout ouvert pseudo-convexe d'un espace de Fréchet qui possède une base de Schauder (ou plus généralement la propriété d'approximation de Banach) est le domaine d'existence d'une fonction holomorphe.*

En effet, il suffit de considérer une suite (y_n), dense dans ∂U, et d'utiliser le fait, prouvé par PELCZYNSKI, que tout espace de Fréchet séparable, possédant la propriété d'approximation de Banach, est isomorphe à un sous-espace direct d'un espace de Fréchet à base de Schauder.

Démonstration du théorème. — Par la proposition 1, l'espace E est la limite surjective ouverte d'une famille (F_i) d'espaces qui sont dénombrablement normés et qui possèdent une base de Schauder équicontinue; notons v_i les applications ouvertes de E dans F_i et supposons que U est connexe (plus précisément, on se place sur une composante connexe de U). D'après [4], il existe un indice i tel que U soit égal à $v_i^{-1} \circ v_i(U)$ et tel que $v_i(U)$ soit un ouvert pseudo-convexe de F_i. Nous pouvons donc supposer qu'il existe sur E une norme continue non nulle, c'est-à-dire que la topologie de E peut être définie par une famille dénombrable et croissante $(\| \ \|_n)_{n=1}^\infty$ de normes qui satisfont à la condition $(\star)$.

Si U est un ouvert, désignons, pour tout x de U et x' de E, par $d_U(x, x')$ la borne supérieure des $r \geq 0$ tels que $x + r\,\Delta\, x'$ appartienne à U où l'on a noté $\Delta = \{ z \in \mathbf{C}; |z| < 1 \}$. On sait que l'ouvert U est pseudo-convexe si, et seulement si, $-\log d_U$ est une fonction plurisousharmonique sur $U \times E$. Soit, pour tout $n \geq 1$, la fonction δ_n, définie sur U par

$$\delta_n(x) = \inf_{m \geq n} d_U(x, u_m(x) - x).$$

Il n'est pas difficile de prouver cette fonction, introduite par SCHOTTENLOHER [17], est semi-continue inférieurement et donc que $-\log \delta_n$ est plurisousharmonique dans U.

Soit $V_n = \{ x \in U;\ \delta_n(x) > 1 \}$, alors pour tout $n \geqslant 1$:

1° V_n est un ouvert pseudo-convexe et, pour tout sous-espace F de dimension finie, $(V_n \cap F, V_{n+1} \cap F)$ et $(V_n \cap F, U \cap F)$ sont des couples de Runge dans F.

2° $V_n \subset V_{n+1}$ et $U = \cup V_n$.

3° $V_n \cap E_n = U \cap E_n$.

4° $u_n(V_n) = U \cap E_n$.

Le 1° est évident.

2° $\delta_n \leqslant \delta_{n+1}$ entraîne $V_n \subset V_{n+1}$. Soit x dans U, il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage disqué V de 0 tels que $x+(1+\varepsilon)\, V$ appartienne à U. Il existe n_0 tel que $u_n(x)-x$ appartienne à V dès que $n \geqslant n_0$; ceci entraîne que $x+(1+\varepsilon)\, \Delta\,(u_n(x)-x)$ appartient à U et donc que $d_U(x, u_n(x)-x) \geqslant 1+\varepsilon$ si $n \geqslant n_0$. Le point x est alors dans V_{n_0} puisque $\delta_{n_0}(x) \geqslant 1+\varepsilon > 1$.

3° Il suffit de montrer que tout x de $U \cap E_n$ appartient à V_n; or, pour un tel point, $u_n(x) = x$ et $u_m(x) = u_n(x)$ si $m \geqslant n$, d'où $\delta_n(x) = d_U(x, 0) = +\infty$.

4° Soit $x = u_n(y)$ avec y dans V_n, donc $d_U(y, u_n(y)-y) > 1$ qui entraîne $x = y+(u_n(y)-y) \in y+\Delta\,(u_n(y)-y) \subset U$.

Pour tout $n \geqslant 1$, il existe un entier $m_n \geqslant n$ tel que l'intérieur de V_n dans l'espace normé $(E, \|\ \|_{m_n})$ soit non vide; on peut donc, au besoin en prenant une sous-suite de normes, notées encore $(\|\ \|_n)$, ce qui ne change pas la topologie, supposer que, pour tout n, l'intérieur de U dans $(E, \|\ \|_{m_n})$ est non vide. Pour tout $n \geqslant 1$ et $\alpha \geqslant 0$, posons

$$K(n, \alpha) = \left\{ x \in V_n;\ \| x \|_0 \leqslant \alpha \text{ et } d_n(x, \complement V_n) \geqslant \frac{1}{\alpha} \right\},$$

où $d_n(x, \complement V_n) = \inf_{y \notin V_n} \| x-y \|_n$. On définit ainsi une suite croissante par rapport à n et α.

Considérons une fonction $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que, pour tout n, l'ensemble $\Phi^{-1}(n)$ soit infini.

Soient $\alpha_1 \geqslant 1$ et $n_1 \geqslant 1$, tels que $K(n_1, \alpha_1) \neq \varnothing$, et on choisit $m_1 \geqslant 1$ tel que $y_{\Phi(1)}(m_1) \notin K(n_1, \alpha_1)$, ce qui est toujours possible puisque, si $m \to +\infty$,

$$d_{n_1}(y_{\Phi(1)}(m), \complement V_{n_1}) \leqslant d_{n_1}(y_{\Phi(1)}(m), \complement U) \to 0.$$

Notons $z_1 = y_{\Phi(1)}(m_1)$; il existe h_1 tel que z_1 appartienne à E_n pour tout $n \geqslant h_1$.

On choisit $n_2 \geqslant \sup(n_1, 2, h_1)$ tel que z_1 appartienne à V_{n_2}, puis $\alpha_2 > \alpha_1$ tel que $K(n_2, \alpha_2) \supset \{ z_1 \} \cup K(n_1, n_2\, \alpha_1)$, etc.

Par récurrence, on peut définir des suites (m_i), (n_i) et (α_i) telles que, pour tout $i \geqslant 1$, on ait :

1° $m_i \geqslant i$, $n_i \geqslant \sup(i, n_{i-1})$ et $\alpha_i > \alpha_{i-1}$;

2° $z_i = y_{\Phi(i)}(m_i) \in K(n_{i+1}, \alpha_{i+1}) \cap E_{n_{i+1}} \setminus K(n_i, \alpha_i) \cap E_{n_i}$;

3° $K(n_i, \alpha_i) \supset \bigcup_{j<i} K(n_j, n_i\, \alpha_j)$;

4° $u_{n_i}(K(n_i, \alpha_i)) \subset u_{n_i}(V_{n_i}) \subset U$.

Pour tout $i \geqslant 1$, posons $K_i = E_{n_{i+1}} \cap K(n_i, \alpha_i)$.

Pour tout i, K_i est un compact de Runge de $E_{n_{i+1}} \cap V_{n_i}$, donc aussi de $E_{n_{i+1}} \cap U$; de plus, $u_{n_i}(\mathrm{K}_i)$ est contenu dans U.

Montrons maintenant que, pour tout compact K de U, il existe un entier N tel que $u_{n_m}(K) \subset K_{m-1}$ pour tout $m \geqslant N$.

Soit donc K un compact de U, il existe un entier n_k tel que $d_{n_k}(\mathrm{K}, \complement V_k) = \delta > 0$; pour tout x de K, on a

$$d_{n_k}(x, \complement V_{n_k}) \geqslant d_{n_k}(x, \complement V_k) \geqslant \frac{3\delta}{4}.$$

On choisit m_0 tel que $n_{m_0}\, \alpha_{n_k} \geqslant \sup_{x \in \mathrm{K}} \| x \|_0$, et $n_{m_0}\, \alpha_{n_k} \geqslant 2/\delta$. Il existe un entier N_0 tel que $\| u_n(x) - x \|_{n_k} \leqslant \delta/4$ pour tout x de K et $n \geqslant N_0$. Alors, pour tout $m \geqslant \sup(\mathrm{N}_0, m_0+1, k+2)$ et pour tout x de K, il vient :

$$\| u_{n_m}(x) \|_0 \leqslant \| x \|_0 \leqslant n_{m_0}\, \alpha_{n_k}$$

et

$$\begin{aligned} d_{n_k}(u_{n_m}(x), \complement V_{n_k}) &\geqslant d_{n_k}(x, \complement V_{n_k}) - \| u_{n_m}(x) - x \|_{n_k} \\ &\geqslant \frac{3\delta}{4} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} \geqslant \frac{1}{n_{m_0}\, \alpha_{n_k}}, \end{aligned}$$

d'où

$$u_{n_m}(K) \subset K(n_k, n_{m_0}\, \alpha_{n_k}) \subset K(n_k, n_{m-1}\, \alpha_{n_k}) \subset K(n_{m-1}, \alpha_{m-1})$$

qui donne le résultat cherché.

Il n'est pas difficile maintenant de construire une fonction analytique ayant U pour domaine d'existence : soit g_k une fonction analytique sur $V_{n_k} \cap E_{k_n}$; définissons sur $(\mathrm{V}_{n_k} \cap E_{n_k}) \oplus E_{n_k}^{n_{k+1}}$ la fonction $\hat{g}_k$ par $\hat{g}_k(x+y) = g(x)$ pour tout x de $V_{n_k} \cap E_{n_k}$ et pour tout y du sous-espace $E_{n_k}^{n_{k+1}}$ engendré par $e_{n_k+1}, e_{n_k+2}, \ldots, e_{n_{k+1}}$. Cette fonction est bien définie et analytique au voisinage du compact de Runge K_k; il existe donc une fonction h, analytique sur $\mathrm{V}_{n_{k+1}} \cap E_{n_{k+1}}$, telle que $| \hat{g}_k - h |_{K_k} \leqslant 2^{-(k+1)}$.

On peut aussi choisir une fonction h' analytique sur $V_{n_{k+1}} \cap E_{n_{k+1}}$ telle que

$$|h'(z_k)| > k + |h(z_k)| \qquad \text{et} \qquad |h'|_{K_k} \leqslant 2^{-(k+1)}.$$

D'où, si $g_{k+1} = h+h'$:

(a) $|g_{k+1} - g_k \circ u_{n_k}|_{K_k} \leqslant 2^{-k}$,

(b) $|g_{k+1}(z_k)| \geqslant k$.

Par récurrence, on construit une suite $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions telles que, pour tout k, la fonction g_k est analytique dans $V_{n_k} \cap E_{n_k}$ et satisfait aux conditions (a) et (b).

Si K est un compact de U, soit N l'entier défini plus haut tel que $u_{n_m}(K) \subset K_{m-1}$ pour tout $n \geqslant N$. Pour tout couple d'entiers $m < m'$, il vient

$$\begin{aligned} |g_{m'} \circ u_{n_{m'}} - g_m \circ u_{n_m}|_K \quad & \textstyle\sum_{i=m}^{m'-1} |g_{i+1} \circ u_{n_{i+1}} - g_i \circ u_{n_i}|_K \\ & \leqslant \textstyle\sum_{i=m}^{m'-1} |g_{i+1} - g_i \circ u_i|_{u_{n_{i+1}}(K)} \\ & \leqslant \textstyle\sum_{i=m}^{m'-1} |g_{i+1} - g_i \circ u_i|_{K_i} \\ & \leqslant \textstyle\sum_{i=m}^{m'-1} 2^{-i} \leqslant 2^{m-1}. \end{aligned}$$

La suite de fonctions $(g_m \circ u_{n_m})_{m=1}^{\infty}$ converge uniformément sur tout compact de U, sa limite g est continue et G-analytique, donc analytique dans U. Pour k assez grand, il vient, en faisant tendre m' vers l'infini, $|g(z_k) - g_{k+1}(z_k)| \leqslant 2^{-k}$, d'où $|g(z_k)| \geqslant k-1$. Le théorème est démontré.

Paragraphe II

Nous allons maintenant introduire une classe d'espaces dans laquelle on peut, pour étudier le problème de Lévi, se ramener au cas métrisable que nous venons de résoudre. Ces espaces peuvent être comparés avec les espaces de type ω, étudiés en [4] et [5]. Leur introduction s'inspire de l'utilisation faite en [3] des espaces de Lindelöf héréditaire. Rappelons qu'un espace topologique X, muni d'une topologie T, est de Lindelöf si, de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable. Un espace X est de Lindelöf héréditaire si tout sous-ensemble Y de X est un espace de Lindelöf pour la topologie induite. Il est facile de voir que cette notion coïncide avec celle d'espace fortement de Lindelöf étudiée en [18]. La classe des espaces de Lindelöf héréditaire est stable pour les opérations suivantes : somme directe dénombrable, passage au sous-espace, intersection, réunion dénombrable, image par une application continue.

DÉFINITION 1. — Un elc est dit *σ-convexe* si tout domaine (i. e. ouvert connexe) pseudo-convexe est ouvert pour une topologie métrisable plus faible que la topologie initiale.

Exemples de tels espaces :

1° les espaces de Lindelöf héréditaire, en particulier les espaces de dimension (algébrique) dénombrable, le dual d'un espace de Fréchet séparable muni de la topologie de la convergence compacte (par exemple les espace $\mathscr{D}\mathscr{F}\mathscr{M}$), les espaces $\mathscr{L}\mathscr{F}$ séquentiellement séparables;

2° la limite surjective ouverte (*voir* [4]) d'espace σ-convexe est σ-convexe.

Dans le premier cas, si on considère des recouvrements par des boules, il est clair que tout espace de Lindelöf héréditaire est σ-convexe. Voyons les exemples : on sait que la topologie de la convergence compacte induit sur les parties équicontinues du dual E' d'un Fréchet séparable une topologie métrisable et séparable, donc de Lindelöf héréditaire; or E' est la réunion d'une suite de tels espaces (les polaires d'une base de voisinage de 0 dans E). Ensuite, si E contient un sous-espace F de dimension dénombrable séquentiellement dense, et si E est la limite inductive stricte d'espaces de Fréchet E_n, l'adhérence, notée F_n, de $F \cap E_n$ dans E_n est, pour tout n, un espace de Fréchet séparable grâce au fait que toute suite convergente dans E est contenue et convergente dans un E_n, on voit sans peine que E est la limite inductive stricte des F_n, et donc un espace de Lindelöf héréditaire.

Dans le deuxième cas, on utilise le fait, prouvé en [4], que, dans une limite surjective ouverte d'espaces E_i par des applications u_i (et si les E_i sont des espaces de Fréchet cela équivaut à dire que l'on a une limite projective et que les applications u_i sont surjectives), à tout domaine U pseudo-convexe corrrespond un indice i tel que $U = u_i^{-1} \circ u_i(U)$ avec $u_i(U)$ pseudo-convexe dans E_i.

THÉORÈME 2. — *Si E est un elc σ-convexe possédant une base de Schauder équicontinue, alors :*

(*a*) *tout ouvert pseudo-convexe est un ouvert d'holomorphie*;

(*b*) *tout ouvert régulier pseudo-convexe est un ouvert d'existence d'une fonction analytique.*

Rappelons qu'un ouvert est dit régulier s'il est égal à l'intérieur de son adhérence ($\mathring{\overline{U}} = U$).

Pour pouvoir utiliser le théorème 1 nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit U un ouvert d'un elc E possédant une base de Schauder, équicontinue, et $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de ∂U telle que, pour tout n, il existe une suite $(y_{m,n})_{m=1}^{\infty}$ d'éléments de U telle que* $\lim_{m\infty} y_{m,n} = y_n$. *Il existe alors, pour tout n, une suite $(z_{m,n})_{m=1}^{\infty}$ d'éléments de $U \cap E_{\infty}$ telle que* $\lim_{m\infty} z_{m,n} = y_n$.

Démonstration. — On peut supposer que la topologie de E est engendrée par une famille de semi-normes $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que

$$(\star\star) \qquad p_\alpha(x) = \sup_n p_\alpha[u_n(x)], \qquad \forall \alpha\in A, \quad \forall x\in E.$$

Pour tout n et m fixés, U est un voisinage de $y_{m,n}$, et $\lim_{r\infty} u_r(y_{m,n}) = y_{m,n}$; il existe donc $R(m, n)$ tel que $u_r(y_{m,n})$ appartienne à U dès que $r \geqslant R(m, n)$. Pour tout n et m, choisissons $r_{m,n} \geqslant \sup(n+m, \mathrm{R}(m, n))$, et posons $z_{m,n} = u_{r_{m,n}}(y_{m,n})$. Alors $(z_{m,n})_{m,n=1}^{\infty} \subset U \cap E_{\infty}$ et, pour tout n, $\lim_{m\infty} z_{m,n} = y_n$; en effet, pour toute semi-norme p_α et pour tout n :

$$\begin{aligned} p_\alpha(z_{m,n}-y_n) &\leqslant p_\alpha[u_{r_{m,n}}(y_{m,n})-u_{r_{m,n}}(y_n)]+p_\alpha[u_{r_{m,n}}(y_n)-y_n] \\ &\leqslant p_\alpha[y_{m,n}-y_n]+p_\alpha[u_{r_{m,n}}(y_n)-y_n] \quad \text{d'après } (\star\star). \end{aligned}$$

D'où le résultat, puisque

$$\lim_{m\infty} y_{m,n} = y_n, \qquad \lim_{r\infty} u_r(y_n) = y_n \qquad \text{et} \qquad r_{m,n} \geqslant m+n.$$

Démonstration du 2° (*a*). — On peut supposer U connexe, et, comme E est σ-convexe, il existe une topologie T' métrisable moins fine que la topologie initiale T de E telle que U soit un ouvert de (E, T'); notons i l'application identique $(E, T) \to (E, T')$.

Nous dirons qu'un point frontière $x \in \partial U$ est *séquentiellement accessible* s'il est la limite d'une suite de points de U. Dans un elc l'ensemble des points séquentiellement accessibles de ∂U est dense : en effet, soit V un ouvert convexe tel que $V \cap \partial U \neq \emptyset$, il existe un point x_1 de $V \cap U$, et un point x_2 de $V \cup \complement U$. Par convexité le segment $]x_1, x_2[$ est contenu dans V, et il existe un point x de ce segment tel que $x \in \partial U$ et $]x_1, x[\subset U$; ce point x est donc accessible.

Soit donc x un point séquentiellement accessible de ∂U; d'après le lemme 1, on peut supposer qu'il est la limite dans (E, T), donc dans (E, T'), d'une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de points de $U \cap E_{\infty}$; le théorème 1 entraîne qu'il existe une fonction G-analytique et T'-continue dans U telle que $\sup_n |f(x_n)| = +\infty$. La fonction $f \circ i$ est donc analytique dans l'ouvert U

de (E, T), et ne peut pas se prolonger au voisinage du point x. Ceci termine la démonstration de la première partie du théorème 2.

Remarquons qu'en général l'ensemble des points séquentiellement accessibles de U n'est pas séparable.

LEMME 2. — *Soit E un elc séparable, et soit U un ouvert régulier. Il existe dans U une suite dense de points séquentiellement accessibles.*

Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dense dans E, E_n le sous-espace engendré par $a_1 \dots a_n$, et $E_{\infty} = \bigcup E_n$. Pour tout n, on a $\partial_{\mathrm{E}_n}(U \cap E_n) \subset \partial U$. Si V est un ouvert convexe tel que $V \cap \partial U \neq 0$, on a $V \cap U \neq 0$ et $V \cap \complement U \neq 0$, donc $V \cup \complement \overline{U} \neq 0$ (en effet, U régulier équivaut à $\complement \overline{\overline{U}} = \complement U$ et, si A et B sont deux ouverts, la condition $A \cap \overline{B} \neq 0$ entraîne $A \cap B \neq 0$). L'ensemble E_{∞} étant dense, il existe x' dans $E_{n_0} \cap V \cap U$, et x'' dans $V \cap E_{n_0} \cap \complement \overline{U}$, pour un certain n_0, et donc il existe un point $x_0 \in V \cap \partial_{\mathrm{E}_{n_0}}(U \cap E_{n_0})$. Pour tout n fixé, il existe une suite $(z_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ dense dans $\partial_{\mathrm{E}_n}(U \cap E_n)$, donc chaque $z_{n,m}$ est un point séquentiellement accessible de $(\partial_{\mathrm{E}_n}(U \cap E_n)$, donc de ∂U.

La démonstration de la partie (b) du théorème 2 se fait alors en appliquant le théorème 1 ainsi que le raisonnement de la partie (a) du théorème 2 à la suite $(z_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$.

DÉFINITION 2. — On dit qu'un elc est *fortement séparable* si la frontière de tout ouvert connexe admet une suite dense de points séquentiellement accessibles.

Un tel espace est séparable : en effet, tout sous-espace fermé étant la frontière d'un ouvert connexe (son complémentaire) est séparable et toute somme directe d'espaces séparables est séparable.

Une adaptation immédiate des raisonnements précédents conduit au résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Si E est un elc σ-convexe et fortement séparable possédant une base de Schauder équicontinue, tout ouvert pseudo-convexe est un ouvert d'existence d'une fonction analytique.*

Rappelons d'abord que l'on appelle espace polonais un espace topologique séparé muni d'une distance qui en fait un espace métrique complet et séparable. Un espace topologique séparé X est dit souslinien (de Souslin) s'il existe un espace polonais Y et une surjection continue φ de Y sur X.

PROPOSITION 2. — *Tout elc souslinien est σ-convexe et fortement séparable.*

Démonstration. — D'abord il est immédiat qu'un espace souslinien est de Lindelöf héréditaire, donc σ-convexe. Montrons qu'il est fortement séparable : si U est un ouvert de E, T, sa frontière ∂U étant fermée est un espace souslinien; soient Y l'espace polonais, et φ la surjection continue de Y sur ∂U, on a vu plus haut que l'ensemble H_0 des points séquentiellement accessibles de ∂U est dense dans ∂U. Soit $H'_0 = \varphi^{-1}(H_0)$, et H' l'adhérence de H'_0 dans Y. H' étant un sous-espace fermé de Y est un espace polonais pour la topologie induite, sa topologie admet donc une base dénombrable $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ d'ouverts. Comme, pour tout n, $H'_0 \cap V_n$ est non vide, on peut choisir un élément x_n dans $H'_0 \cap V_n$. L'ensemble $A' = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ est dénombrable et dense dans H'. Les inclusions suivantes sont conséquence du fait que l'application φ est continue et surjective :

$$\overline{\varphi(A')} \supset \varphi(\overline{A'}) = \varphi(H') \supset \varphi(H'_0) = \varphi \circ \varphi^{-1}(H_0) = H_0.$$

L'ensemble $A = \varphi(A')$ est donc dénombrable, dense dans ∂U, et constitué de points séquentiellement accessibles. La proposition 3 est démontrée.

On peut aussi prouver plus directement qu'un elc E est σ-convexe et fortement séparable s'il existe une suite croissante (A_n) de sous-ensembles convexes, métrisables et séparables tels que les injections $A_n \hookrightarrow E$ soient continues et $E = \bigcup A_n$.

Exemples d'espace σ-convexe et fortement séparable (*voir* [18] pour des exemples d'espaces de Souslin) :

1° Toute limite inductive stricte d'une suite d'elc métrisables et séparables, en particulier les espaces $\mathscr{L}\,\mathscr{F}$ séquentiellement séparables, les elc de dimension dénombrable.

2° Tout dual d'un espace de Fréchet séparable, muni de la topologie de la convergence compacte, en particulier les espaces $\mathscr{D}\mathscr{F}\mathscr{M}$, $\mathscr{D}\mathscr{F}\mathscr{S}$.

Remarquons pour terminer que la notion de limite surjective ouverte permet d'obtenir de nombreux exemples d'espaces σ-convexes qui ne sont pas fortement séparables, en particulier, la limite surjective ouverte d'espaces métrisables et séparables n'est pas nécessairement fortement séparable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dineen (S.) et Noverraz (P.). — Le problème de Lévi dans certains espaces vectoriels topologiquement localement convexes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, 1974, Série A, p. 693-695.

[2] Dineen (S.) et Hirschowitz (A.). — Sur le théorème de Lévi banachique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, 1971, Série A, p. 1245-1247.

[3] Dineen (S.). — Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces II. Pseudo-convex domains, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 23, 1973, p. 155-185.

[4] DINEEN (S.). — Surjective limits of locally convex spaces and their application to infinite dimensional holomorphy, *Bull. Soc. math. France*, 103, 1975, p. 441-509.
[5] DINEEN (S.). — Holomorphically complete locally convex topological vector spaces, « *Séminaire Pierre Lelong* », 12e année, 1971/72, p. 77-111. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 332).
[6] GRUMAN (L.). — The Lévi problem in certain infinite dimensional vector spaces, *Illinois J. Math.*, t. 18, 1974, p. 20-26.
[7] GRUMAN (L.). et KISELMAN (C. O.). — Le problème de Lévi dans les espaces de Banach à base, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, Série A, p. 1296-1298.
[8] HIRSCHOWITZ (A.). — Sur le non-prolongement des variétés analytiques banachiques réelles, *C. R. Acad. Sc.* Paris, t. 269, 1969, Série A, p. 844-846.
[9] HORVATH (J.). — *Topological vector spaces*, vol. 1. — Reading, Addison-Wesley, 1966 (*Addison-Wesley Series in Mathematics*).
[10] JOSEFSON (B.). — A counterexample in the Lévi problem, "*Proceedings on infinite dimensional holomorphy*", p. 168-177. — Berlin, Springer-Verlag, 1974 (*Lecture Notes in Mathematics*, 364).
[11] KALTON (J. N.). — Schauder decomposition in lcs, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 68, 1970, p. 377.
[12] NOVERRAZ (P.). — *Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphie en dimension infinie.* — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1973 (*North-Holland Mathematics Studies*, 3; *Notas de Matematica*, 48).
[13] NOVERRAZ (P.). — Sur le théorème de Cartan-Thullen-Oka en dimension infinie, « *Séminaire Pierre Lelong* », 12e année, 1971/1972, p. 59-68. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 332) et *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, Série A, p. 313-315.
[14] NOVERRAZ (P.). — Pseudo-convexité et base de Schauder dans les e.l.c., « Séminaire Pierre Lelong», 14e année, 1973/74, p. 63-82. — Berlin, Springer-Verlag (*Lecture Notes in Mathematics*, 474).
[15] POMES (R.). — Le problème de Lévi dans les espaces de Silva, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, 1974, Série A, p. 707-710.
[16] POPA (N.). — Sur le problème de Lévi, *C.R. Acad. Sc.* Paris, t. 277, Série A, p. 211-214.
[17] SCHOTTENLOHER (M.). — *Das Leviproblem in unendlichdimensionalen Räumen mit Schauderzerlegung*, Habilitationchrift, Munich, 1974.
[18] SCHWARTZ (L.). — *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures.* — Bombay, Oxford University, Press, 1973 (*Tala Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics*, 6).

(Texte reçu le 6 février 1975)

Seán DINEEN,
University College, Department of Mathematics,
Belfield, Dublin 4 (Irlande);
Philippe NOVERRAZ,
Université de Nancy I, U.E.R. Sciences mathématiques,
Case officielle 140, 54037 Nancy Cedex (France);
Martin SCHOTTENLOHER,
Mathematisches Institut der Universität München,
D-8 München 2, Theresienstrasse 39 (Allemagne fédérale).