

# BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD LAUMON

## Degré de la variété duale d'une hypersurface à singularités isolées

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 104 (1976), p. 51-63

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1976\\_\\_104\\_\\_51\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__51_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DEGRÉ DE LA VARIÉTÉ DUALE D'UNE HYPERSURFACE À SINGULARITÉS ISOLÉES

PAR

GÉRARD LAUMON

[E.N.S., Paris]

RÉSUMÉ. — Après avoir défini la notion de pinceaux de Lefschetz pour une hypersurface à singularités isolées sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et après avoir esquissé une démonstration de leur existence, on utilise la fibration donnée par un de ceux-ci pour calculer le degré de la variété duale d'une telle hypersurface. La formule obtenue fait intervenir les invariants locaux de Tessier attachés à une singularité isolée d'hypersurface. On donne une autre démonstration dans le cas des courbes planes.

### 0. Introduction

Soit  $P$  un espace projectif de dimension  $\geq 1$  sur un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p$ , et soit  $X$  une hypersurface projective de  $P$ , de dimension  $n$  et de degré  $d$ , lisse en dehors d'un ensemble fini  $F$  de points fermés. Notons  $\check{P}$  l'espace projectif dual, paramétrant les hyperplans de  $P$ , et  $X^\perp$  l'adhérence dans  $\check{P}$  de la variété des hyperplans tangents à  $X-F$ . Nous supposons que  $X^\perp$  est une hypersurface de  $\check{P}$ . Le degré  $d^\perp$  de  $X^\perp$  est le nombre d'hyperplans tangents à  $X-F$  passant par une sous-variété linéaire assez générale de co-dimension 2 de  $P$ . L'objet de cet article est d'établir (moyennant certaines hypothèses sur le plongement  $X \hookrightarrow P$ , vérifiées en tout cas si  $p = 0$ ) une formule (4.2.1) exprimant  $d^\perp$  à l'aide de  $n$ ,  $d$ , et d'invariants locaux attachés aux points singuliers de  $X$ .

Lorsque  $p = 0$  et que  $X$  est une courbe telle que  $F$  se compose de  $v$  points nodaux ordinaires et  $\gamma$  points cuspidaux ordinaires,  $d^\perp$  est donné par la classique formule de Plücker :

$$(0.1) \quad d^\perp = d(d-1) - 2v - 3\gamma.$$

La caractéristique et la dimension étant à nouveau quelconques, mais  $X$  étant supposée lisse et telle que le « morphisme de Gauss »  $X \rightarrow \check{P}$ ,

$x \mapsto$  (hyperplan tangent à  $X$  en  $x$ ) soit génériquement net,  $d^\perp$  est donné par la formule

$$(0.2) \quad d^\perp = d(d-1)^n,$$

qui découle aisément de la formule de Katz [SGA 7] (XVII, 5.7.3; voir (4.2)).

La formule que nous démontrons ici généralise (0.1) et (0.2). L'idée du calcul est, comme dans [SGA 7] (XVIII, 3.2), de choisir un « pinceau de Lefschetz » pour  $X$  (ce qui nécessite une hypothèse sur le plongement  $X \hookrightarrow P$ ), et d'évaluer la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $X$  à l'aide de la fibration définie par le pinceau : les termes locaux figurant dans  $d^\perp$  apparaissent comme certains « nombres de cycles évanescents » aux points de  $F$ . Lorsque  $p = 0$ , le calcul se simplifie, les termes locaux s'exprimant alors à l'aide de nombres de Milnor intermédiaires, définis par TEISSIER dans [10].

## 1. Variété duale et pinceaux de Lefschetz

1.1. Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Soit  $n$  un entier  $> 0$ , on notera  $\mathbb{P}_k^{n+1}$  (ou  $P$  si aucune confusion n'est à craindre) l'espace projectif de dimension  $n+1$  sur le corps  $k$ . On notera  $\check{\mathbb{P}}_k^{n+1}$  (ou  $\check{P}$ ) l'espace projectif dual de  $P$ , paramétrant les hyperplans de  $P$ .

Soit  $X$  une hypersurface de  $P$ , i. e. pour nous un sous- $k$ -schéma fermé, réduit de  $P$ , purement de codimension 1. Soit  $X_{sg}$  le lieu singulier de  $X$ .

Nous appellerons *variété duale* (stricte) de  $X$ , muni de son plongement projectif  $X \hookrightarrow P$ , et nous noterons  $X^\perp$ , l'adhérence dans  $\check{P}$  de la variété des hyperplans tangents à  $X - X_{sg}$ .

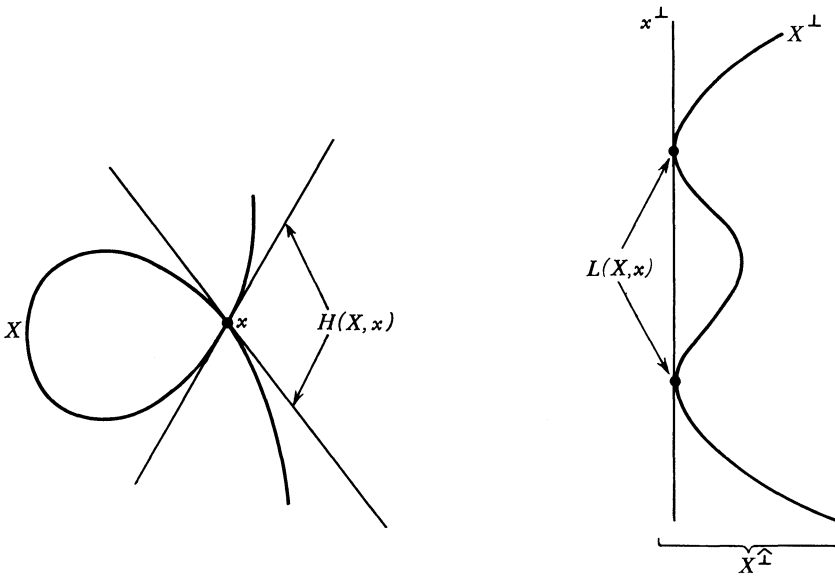
Nous appellerons *variété duale totale* de  $X$ , muni de son plongement projectif  $X \hookrightarrow P$ , et nous noterons  $X^{\hat{\perp}}$ , la variété des hyperplans tangents à  $X$ , i. e. contenus dans l'espace tangent de Zariski de  $X$  en un de leurs points d'intersection avec  $X$ . Pour  $t \in \check{P}$ , nous noterons  $H_t$  l'hyperplan de  $P$  correspondant. Pour  $x \in P$ , nous noterons  $x^\perp$  l'hyperplan de  $\check{P}$  égal à  $\{t \in \check{P}; x \in H_t\}$ . On a alors

$$X^{\hat{\perp}} = X^\perp \cup \left( \bigcup_{x \in X_{sg}} x^\perp \right).$$

Pour tout  $x \in X$ , on pose

$$(1.1.1) \quad L(X, x) = X^\perp \cap x^\perp,$$

$$(1.1.2) \quad H(X, x) = \bigcup_{t \in L(X, x)} H_t,$$



1.2. On rappelle qu'un *pinceau d'hyperplans* de  $P$  est une famille  $(H_t)_{t \in D}$  d'hyperplans de  $P$  paramétrée par une droite  $D$  de  $\check{P}$ . L'axe  $\Delta$  du pinceau est l'intersection de hyperplans du pinceau; c'est une variété linéaire de codimension 2 de  $P$ , et on a  $D = \Delta^\perp$ .

DÉFINITION 1.2.1. — Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit  $X$  une hypersurface 1.1 de  $P$  à singularités isolées. Un pinceau d'hyperplans  $(H_t)_{t \in D}$  de  $P$  sera dit de Lefschetz pour le plongement  $X \hookrightarrow P$  s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1.2.1.1. L'axe  $\Delta$  du pinceau ne rencontre pas  $X_{sg}$  et est transverse au lieu lisse de  $X$ .

1.2.1.2. Il existe un ensemble fini  $S$  de points fermés de  $D$  et une partition  $S_1 \cup S_2$  de  $S$  tels que :

- (i) si  $t \in D - S$ ,  $H_t$  ne rencontre pas  $X_{sg}$  et est transverse à  $X - X_{sg}$ ;
- (ii) si  $s \in S_1$ ,  $H_s$  ne rencontre pas  $X_{sg}$ , et  $X \cap H_s$  a un point singulier  $x_s$ , et un seul, et ce point est une singularité quadratique non dégénérée ([SGA 7], XVII, 1.2);
- (iii) si  $s \in S_2$ ,  $H_s$  rencontre  $X_{sg}$  en un point  $x$ , et un seul, ce point est la seule singularité de  $X \cap H_s$ , et  $s \notin L(X - x_s)$ .

On appellera  $S$  (resp.  $S_1, S_2$ ) l'ensemble *exceptionnel* (resp. *exceptionnel quadratique*, *exceptionnel singulier*) du pinceau.

1.2.2. Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que  $k$  est algébriquement clos de caractéristique 0, et que  $X^\perp$  est une hypersurface de  $P$ .

THÉORÈME 1.2.3. — *Avec les notations et hypothèses de 1.2.1, il existe un ouvert dense  $V$  de Grass  $(1, \check{P})$  (grassmannienne des droites de  $\check{P}$ ) tel que si  $D \in V$ ,  $(H_t)_{t \in D}$  soit un pinceau de Lefschetz pour  $X$ .*

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 1.2.4 (EULER). — *Soit  $Z$  une sous-variété de « l'hyperplan universel »  $\{(x, t) \in P \times \check{P}; x \in H_t\}$  de  $P \times \check{P}$ . Soit  $z = (x, t)$  un point du lieu lisse de  $Z$ , alors si  $T_{Z, z}$  désigne l'espace tangent à  $Z$  en  $z$  et si  $p : P \times \check{P} \rightarrow P$  et  $q : P \times \check{P} \rightarrow P$  sont les projections canoniques, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $p_* T_{Z, z} \subset H_t$ ;
- (ii)  $q_* T_{Z, z} \subset X^\perp$ .

LEMME 1.2.5. — *Pour que  $\Delta$  ne rencontre pas  $X_{sg}$  et soit transverse à la partie lisse de  $X$ , il faut et il suffit que, pour tout point  $t \in D \cap X^\perp$ ,  $D$  ne soit pas contenu dans  $H(X^\perp, t)$  (1.1.2).*

Cela résulte du lemme 1.2.4.

LEMME 1.2.6. — *Pour que  $H_t$  ne rencontre pas  $X_{sg}$  et soit transverse à la partie lisse de  $X$ , il faut et il suffit que  $t \notin X^\perp$ .*

LEMME 1.2.7. — *Pour que  $H_s$  ne rencontre pas  $X_{sg}$  et que  $X \cap H_s$  présente une singularité, et une seule, singularité qui soit quadratique non dégénérée, il faut et il suffit que  $s \in X^\perp \cap$  (lieu lisse de  $X^\perp$ ).*

La démonstration est analogue à celle de [SGA 7] (XVII, 3.5).

LEMME 1.2.8. — *Pour que  $H_s$  rencontre  $X_{sg}$  en un point  $x_s$ , et un seul, que ce point soit la seule singularité de  $X \cap H_s$  et que  $s \notin L(X, x_s)$  (1.1.1), il faut et il suffit que  $s \in (X^\perp - X^\perp) \cap$  (lieu lisse de  $X^\perp$ ).*

Cela résulte des définitions.

PROPOSITION 1.2.9. — *Pour que  $(H_t)_{t \in D}$  soit un pinceau de Lefschetz pour  $X$ , il faut et il suffit que la droite  $D$  ne rencontre pas la partie singulière de  $X^\perp$  et soit transverse à la partie lisse de  $X^\perp$ .*

Cela résulte aussitôt de la définition 1.2.1, et des lemmes 1.2.5, 1.2.6, 1.2.7 et 1.2.8.

COROLLAIRE 1.2.10. — Si  $(H_t)_{t \in D}$  est un pinceau de Lefschetz pour  $X$ , le degré de la variété duale  $X^\perp$  de  $X$  est égal au cardinal de l'ensemble exceptionnel quadratique du pinceau.

1.2.11. — Le théorème 1.2.3 résulte de la proposition 1.2.9 et du fait que la condition «  $D$  ne rencontre pas la partie singulière de  $X^\perp$  et est à la partie lisse de  $X^\perp$  » est ouverte et non vide.

## 2. Une formule de Hurwitz

2.1. Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et soit  $C$  une courbe projective, lisse et connexe sur  $k$ . Soit  $s$  un point fermé de  $C$ , et soit  $C_{(s)}$  le spectre de l'hensélisé strict de  $\mathcal{O}_{C,s}$ . Notons  $\eta_s$  le point générique de  $C_{(s)}$ , et  $\bar{\eta}_s$  un point géométrique au-dessus de  $\eta_s$ . Le groupe d'inertie  $I_s$  de  $C$  en  $s$  est alors  $I_s = \text{gal}(k(\bar{\eta}_s)/k(\eta_s))$ . Soit  $l$  un nombre premier.

2.2. Soit maintenant  $M$  un  $\mathbf{Q}_l$ -faisceau constructible sur  $C$  ([SGA 4] et [SGA 5]), notons  $M_s$  (resp.  $M_{\bar{\eta}_s}$ ) sa fibre au point géométrique  $s$  (resp.  $\bar{\eta}_s$ ) de  $C$ .  $M_s$  est munie de l'action triviale de  $I_s$ , et  $M_{\bar{\eta}_s}$  est munie d'une action continue de  $I_s$ . Posons  $\beta_s(M) = \dim_{\mathbf{Q}_l}(M_{\bar{\eta}_s}) - \dim_{\mathbf{Q}_l}(M_s)$ , on a  $\beta_s(M) = 0$  sauf pour un nombre fini de points fermés de  $C$ .

Notons  $\chi$  les caractéristiques d'Euler-Poincaré pour la topologie étale, on a alors la formule ([5] ou [SGA 5]) :

$$(2.2.1) \quad \chi(C, M) = \chi(C) \dim_{\mathbf{Q}_l}(M_{\bar{\eta}}) - \sum_{s \in C(k)} \beta_s(M),$$

où  $\bar{\eta}$  est un point géométrique générique de  $C$ .

2.3. Soit  $X$  un schéma réduit et propre sur  $k$ . Soit  $f : X \rightarrow C$  un morphisme propre et lisse en dehors d'un ensemble fini  $F$  de points fermés de  $X$ .

De la suite spectrale de Leray pour  $f$  on déduit la formule

$$(2.3.1) \quad \chi(X) = \sum_i (-1)^i \chi(C, R^i f_* \mathbf{Q}_l).$$

Soient  $X_s$  la fibre de  $f$  en  $s$ , et  $F_s = F \cap X_s$ . On sait ([SGA 7] XIII) qu'il existe sur  $X_s$  des faisceaux de  $\mathbf{Q}_l$ -espaces vectoriels constructibles  $\Phi_s^i$  ( $i \geq 0$ ) concentrés sur  $F_s$  tels que l'on ait la suite exacte longue

$$(\star) \quad \dots \rightarrow (R^i f_* \mathbf{Q}_l)_s \rightarrow (R^i f_* \mathbf{Q}_l)_{\bar{\eta}_s} \rightarrow \bigoplus_{x \in F_s} \Phi_{s,x}^i \rightarrow \dots,$$

où  $\Phi_{s,x}^i$  est la fibre de  $\Phi_s^i$  en  $x \in X_s$ .

On appelle ces faisceaux, les faisceaux *des cycles évanescents* de  $f$ . De plus, chaque  $\mathbf{Q}_I$ -vectoriel  $\Phi_{s,x}^i$  ( $s \in C$ ,  $x \in X_s$ ) est de dimension finie ([SGA 7] XIII, 2.4.2) et muni d'une action continue de  $I_s$ . Si  $H^* = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^i$  est une somme directe de  $\mathbf{Q}_I$ -espaces vectoriels de dimension finie, on pose

$$\dim_{\mathbf{Q}_I}(H^*) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{Q}_I}(H^i).$$

Avec ces notations, on déduit de la suite exacte longue ( $\star$ ) la relation

$$(2.3.2) \quad \dim_{\mathbf{Q}_I}((R^i f_* \mathbf{Q}_I)_{\bar{\eta}_s}) - \dim_{\mathbf{Q}_I}((R^i f_* \mathbf{Q}_I)_s) = \sum_{x \in F_s} \dim_{\mathbf{Q}_I}(\Phi_{s,x}^i).$$

On déduit de (2.2.1), (2.3.1) et (2.3.2) le résultat suivant (cf. [SGA 7] XVI) :

$$(2.3.3) \quad \chi(X) = \chi(C) \chi(X_{\bar{\eta}}) - \sum_{x \in F} \dim_{\mathbf{Q}_I}(\Phi_{f(x)}^*).$$

### 3. Les termes locaux

3.1. Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soient  $\mathbf{A}_k^{n+1}$  l'espace affine de dimension  $n+1$  sur  $k$ , et  $X \subset \mathbf{A}_k^{n+1}$  une hypersurface affine réduite, d'équation  $f(x_0, \dots, x_n) = 0$  (où  $(x_0, \dots, x_n)$  sont des coordonnées sur  $\mathbf{A}_k^{n+1}$ ) et présentant en  $x = (0, \dots, 0)$  une singularité isolée; ceci signifie que l'idéal de  $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^{n+1}, x}$ , engendré par les dérivées partielles  $\partial f / \partial x_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) est primaire pour l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^{n+1}, x}$ , et donc que la dimension

$$\mu_x(f) = \dim_k \left( \mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^{n+1}, x} \left/ \left( \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right. \right)$$

est finie. On peut voir que  $\mu_x(f)$  ne dépend pas de l'équation locale de  $X$  en  $x$  choisie; on posera

$$(3.1.1) \quad \mu_x^{(n+1)}(X) = \mu_x(f)$$

(l'exposant  $n+1$  rappelant la dimension de l'espace ambiant). L'entier  $\mu_x^{(n+1)}(X)$  est appelé le *nombre de Milnor* de  $X$  en  $x$  (cf. [4]).

Considérons alors le morphisme  $f : \mathbf{A}_k^{n+1} \rightarrow \mathbf{A}_k^1$  donné par une équation de  $X$ . On peut supposer que  $f$  est lisse en dehors de  $x$ . On dispose alors sur  $X = f^{-1}(0)$  des « faisceaux de cycles évanescents »  $\Phi^i$  ( $i \geq 0$ ). Ceux-ci sont concentrés en  $x$ , leurs fibres  $\Phi_x^i$  sont des  $\mathbf{Q}_I$ -espaces vectoriels de dimension finie, et l'on a une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow (R^i f_* \mathbf{Q}_I)_0 \rightarrow (R^i f_* \mathbf{Q}_I)_{\bar{\eta}} \rightarrow \Phi_x^i \rightarrow \dots,$$

où  $\bar{\eta}$  est un point géométrique générique de  $\mathbf{A}_k^1$ . On a de plus le résultat suivant ([SGA 7] XVI, 2.4) :

$$(3.1.2) \quad \mu_x^{(n+1)}(X) = (-1)^n \dim_{\mathbf{Q}}(\Phi_x^*).$$

3.2. Soit encore  $X \subset \mathbf{A}_k^{n+1}$  une hypersurface réduite d'équation  $f(x_0, \dots, x_n) = 0$  présentant en  $x$  une singularité isolée. En complétant  $X$  projectivement, on peut définir  $L(X, x) = X^\perp \cap x^\perp \subset x^\perp \simeq \mathbf{P}_k^n$ ; il est clair que  $L(X, x) \subset \mathbf{P}_k^n$  ne dépend pas de la complétion projective choisie. Pour  $t \in x^\perp \simeq \mathbf{P}_k^n$ ,  $H_t$  est un hyperplan projectif passant par  $x$ , on note encore  $H_t$  sa trace dans  $\mathbf{A}_k^{n+1}$ . TEISSIER a montré ([10], II.1.6) (sur  $\mathbf{C}$  seulement, mais on passe facilement de là au cas où la caractéristique de  $k$  est nulle) que le nombre de Milnor en  $x$  de  $X \cap H_t \subset H_t \cong \mathbf{A}_k^n$  ne dépend pas de  $t$  lorsque  $t$  parcourt  $\mathbf{P}_k^n - L(X, x)$ , aussi on peut poser

$$\mu_x^{(n)}(X) = \mu_x^{(n)}(X \cap H_t) \quad \text{pour } t \in \mathbf{P}_k^n - L(X, x).$$

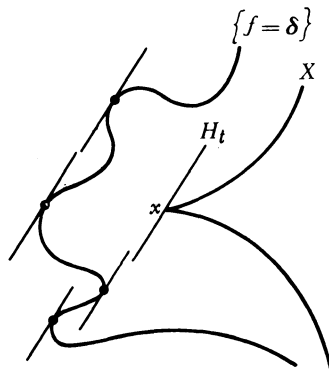
3.3. Le terme local que nous avons en vue est le suivant

$$(3.3.1) \quad \varepsilon_x(X) = \mu_x^{(n+1)}(X) + \mu_x^{(n)}(X).$$

TEISSIER a montré dans [10] que si  $f(x_0, \dots, x_n) = 0$  est une équation locale de  $X$  ou  $x$ , on a

$$(3.3.2) \quad \varepsilon_x(X) = e_{\mathcal{O}_{x,x}} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \mathcal{O}_{x,x} \right),$$

où  $e_{\mathcal{O}_{x,x}}$  est la multiplicité dans l'anneau local  $\mathcal{O}_{x,x}$ . Géométriquement, si  $k = \mathbf{C}$ , on peut montrer que  $\varepsilon_x(X)$  est le nombre d'hyperplans tangents à l'hypersurface  $\{f(x_0, \dots, x_n) = \delta\}$ , en des points voisins de  $x$ , et parallèles à un hyperplan  $H_t$ , où  $\delta \in \mathbf{C}$  est de module suffisamment petit, et où  $t \in \mathbf{P}_k^n - L(X, x)$ .





#### 4. Le calcul du degré

4.1. Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et  $X \subset P$  une hypersurface réduite à singularités isolées. Soit  $X^\perp \subset P^\vee$  sa variété duale que l'on suppose être une hypersurface. Choisissons un pinceau  $(H_t)_{t \in D}$  de Lefschetz pour  $X$  (l'existence d'un tel pinceau résulte du théorème 1.2.3). Soit

$$\tilde{X} = \{(x, t) \in X \times D; x \in H_t\}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{r} & X \\ \pi \downarrow & & \\ D & & \end{array}$$

les projections canoniques. Le morphisme  $\pi$  est propre et plat, et sa fibre en  $t \in D$  n'est autre que  $H_t \cap X$ , donc elle est lisse pour  $t \notin S$ , où  $S$  est l'ensemble exceptionnel du pinceau. On peut donc appliquer à  $\pi : X \rightarrow D$  la formule (2.3.3). Elle s'écrit

$$(4.1.1) \quad \chi(\tilde{X}) = \chi(D)\chi(X \cap H_{\bar{\eta}}) - \sum_{s \in S} \dim_{\mathbf{Q}_t}(\Phi_{s, x_s}^{\bullet})$$

(où  $\bar{\eta}$  est un point générique géométrique de  $D$ ,  $X \cap H_{\bar{\eta}}$  désignant en fait le produit fibré  $X \times_{k(\bar{\eta})} H_{\bar{\eta}}$ , et où les  $\Phi^i$  sont les faisceaux des cycles évanescents de  $\pi$  sur  $X_s$ , ceux-ci étant concentrés en  $x_s$ ).

D'autre part, on a  $\chi(D) = \chi(\mathbf{P}_k^1) = 2$ , et on a ([SGA 7] XVIII, 2.3) :

$$(4.1.2) \quad \chi(\tilde{X}) = \chi(X) + \chi(\Delta \cap X).$$

Calculons les termes locaux. Soient  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) l'ensemble exceptionnel quadratique (resp. singulier) du pinceau. Nous distinguerons deux cas :

(a)  $s \in S_1$  : alors  $X$  est lisse en  $x_s$  donc localement isomorphe à  $\mathbf{A}_k^n$ , par suite, on a (3.1.2) :

$$(-1)^{n-1} \dim_{\mathbf{Q}_t}(\Phi_{s, x_s}^{\bullet}) = \mu_{x_s}^{(n)}(\pi^{-1}(s)).$$

Or  $\pi^{-1}(s) = X \cap H_s$  présente en  $x_s$  une singularité quadratique non dégénérée, donc  $\mu_{x_s}^{(n)}(\pi^{-1}(s)) = 1$ . Par suite, tenant compte du corollaire 1.2.10, on a

$$(4.1.3) \quad \sum_{s \in S_1} \dim_{\mathbf{Q}_t}(\Phi_{s, x_s}^{\bullet}) = (-1)^{n-1} d(X^\perp),$$

où  $d(X^\perp)$  est le degré de la variété duale  $X^\perp$  de  $X$ .

(b)  $s \in S_2$  : choisissons des coordonnées homogènes  $(\bar{x}_0 : \dots : x_{n+1})$  sur  $P$  telle que  $x_{n+1}(x_s) \neq 0$  et  $x_i(x_s) = 0$  pour  $i = 0, \dots, n$ .

Soit  $f(x_0, \dots, x_{n+1}) = 0$  une équation homogène de  $X$ , elle est de degré  $d$  égal au degré de  $X$ . Soit, pour  $u \in \mathbf{A}_k^1$ ,  $X_u$  l'hypersurface d'équation  $f(x_0, \dots, x_{n+1}) - ux_{n+1}^d = 0$ . On a donc  $X_0 = X$ .

Posons  $(\mathcal{B}, b_0) = (D \times_k \mathbf{A}_k^1, (s, 0))$ , et soit

$$\mathcal{Z} = \{(u, t, x) \in \mathcal{B} \times P; x \in X_u \cap H_t\}.$$

Notons  $G : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{B}$  le morphisme restriction de la projection canonique  $\mathcal{B} \times P \rightarrow \mathcal{B}$ .

Soit  $B$  l'hensélisé, strict de  $\mathcal{B}$  en  $b_0$ , on note encore  $b_0$  le point fermé de  $B$ . Soient  $B_1 = B \times_{\mathcal{B}} \mathbf{A}_k^1$  et  $B_2 = B \times_{\mathcal{B}} D$ , où les flèches  $\mathbf{A}_k^1 \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $D \rightarrow \mathcal{B}$  sont respectivement  $u \mapsto (s, u)$ ,  $t \mapsto (t, 0)$ . Soient  $\eta_j$  le point générique de  $B_j$ , et  $\bar{\eta}_j$  un point géométrique au-dessus de  $\eta_j$  (pour  $j \neq 1, 2$ ).

Nous noterons  $g : Z \rightarrow B$  le morphisme déduit de  $G : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{B}$  par le changement de base  $B \rightarrow \mathcal{B}$ , et  $g_j : Z_j \rightarrow B_j$  le morphisme déduit de  $g : Z \rightarrow B$  par le changement de base  $B_j \rightarrow B$  ( $j = 1, 2$ ). Le morphisme  $g_1 : Z_1 \rightarrow B_1$  est localement isomorphe sur  $B_1$  pour la topologie étale au morphisme  $\{(u, x) \in \mathbf{A}_k^1 \times H_s; x \in X_u\} \rightarrow \mathbf{A}_k^1$ , restriction de la projection canonique. En particulier, soient  $\Phi^i(g_1)$  ses faisceaux de cycles évanescents sur  $X \cap H_s$ , ils sont concentrés en  $x_s$  et on a, d'après (3.1.2),

$$(-1)^{n-1} \dim_{\mathbf{Q}_t}(\Phi^*(g_1)_{x_s}) = \mu_{x_s}^{(n)}(X \cap H_s),$$

et comme  $s \notin L(X, x_s)$ , on a, par 3.2,

$$(-1)^{n-1} \dim_{\mathbf{Q}_t}(\Phi^*(g_1)_{x_s}) = \mu_{x_s}^{(n)}(X).$$

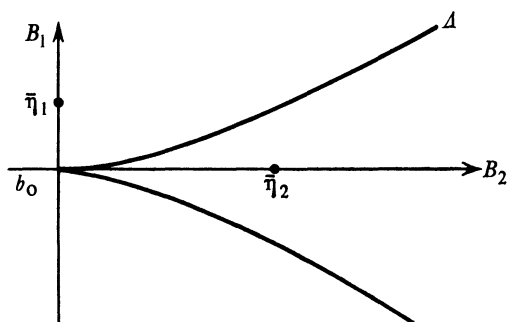
Le morphisme  $g_2 : Z_2 \rightarrow B_2$  est localement isomorphe sur  $B_2$  pour la topologie étale à  $\pi : \tilde{X} \rightarrow D$  et donc, si  $\Phi^i(g_2)$  sont ses faisceaux de cycles évanescents sur  $X \cap H_s$ , ils sont concentrés en  $x_s$ , et on a

$$\dim_{\mathbf{Q}_t}(\Phi^*(g_2)_{x_s}) = \dim_{\mathbf{Q}_t}(\Phi_{s, x_s}^*),$$

où les  $\Phi_{s, x_s}^i$  sont ceux définis en 4.1.

Soit  $\Gamma$  le lieu de non lissité dans  $Z$  du morphisme  $g$ ; par hypothèse,  $\Gamma \cap g^{-1}(b_0) = \{x_s\}$ . D'après [1],  $\dim_{x_s}(\Gamma) = 1$  et  $g|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow B$  est un morphisme fini, donc si on note  $\Delta$  l'image de  $g|_{\Gamma}$ ,  $\Delta$  est une courbe algè-

brique dans  $B$  (appelée *diagramme de Cerf de  $G$* ). De plus, le cône tangent à  $\Delta$  en  $b_0$  est  $B_2$  [3] :



En particulier  $\bar{\eta}_1 \notin \Delta$ . D'autre part, on sait que  $\bar{\eta}_2 \notin \Delta$  puisque  $X \cap H_{\bar{\eta}_2}$  est lisse par hypothèse sur le pinceau. On déduit alors du théorème d'acyclicité locale des morphismes propres et lisses ([SGA 4] XVI, 2.5) que, pour tout  $i \geq 0$ , les  $\mathbf{Q}_l$ -vectoriels  $(R^i g_* \mathbf{Q}_l)_{\bar{\eta}_j}$  ( $j = 1, 2$ ) sont isomorphes. On en déduit aussitôt

$$\dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^*(g_1)_{x_s}) = \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^*(g_2)_{x_s})$$

et donc, d'après ce qui précède, on a, pour tout  $s \in S_2$ ,

$$(4.1.4) \quad \dim_{\mathbf{Q}_l}(\Phi^*_{s, x_s}) = (-1)^{n-1} \mu_{x_s}^n(X).$$

On peut alors énoncer le résultat principal de cet article :

**THÉOREME 4.1.5.** — Soient  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0,  $n$  un entier positif,  $P = \mathbf{P}_k^{n+1}$ ,  $X \subset P$  une hypersurface réduite à singularités isolées, et  $X^\perp \subset \check{P}$  sa variété duale, supposée être une hypersurface. Soient  $H$  un hyperplan de  $P$ , et  $\Delta$  une sous-variété linéaire de codimension 2 de  $P$ , tous deux ne rencontrant pas  $X_{sg}$ , et transverses à la partie lisses de  $X$ . Alors si  $d(X^\perp)$  est le degré de  $X^\perp$ , on a

$$d(X^\perp) = (-1)^n [\chi(X) + \chi(X \cap \Delta) - 2\chi(X \cap H)] - \sum_{x \in X_{sg}} \mu_x^{(n)}(X).$$

En effet,  $\chi(X \cap \Delta)$  et  $\chi(X \cap H)$  ne dépendent pas de  $\Delta$  et  $H$  s'ils sont assez généraux, donc le théorème 4.1.5 résulte de (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) et (4.1.4).

**COROLLAIRE 4.2.1.** — Si  $k$ ,  $n$ ,  $X$  sont comme dans le théorème 4.1.5, et si  $d$  est le degré de  $X$ , alors le degré  $d(X^\perp)$  de  $X^\perp$  est donné par la formule

$$(4.2.1) \quad d(X^\perp) = d(d-1)^n - \sum_{x \in X_{sg}} \varepsilon_x(X),$$

où les  $\varepsilon_x(X)$  sont ceux de 3.3.

En effet, avec les notations de 4.1, soit  $f : \{ (u, x) \in B_1 \times P; x \in X_u \} \rightarrow B_1$  la restriction de la projection canonique  $B_1 \times P \rightarrow B_1$ . On déduit alors de la suite exacte longue de 3.1 et de (3.1.2) la formule

$$\chi(X) = \chi(X_{\eta_1}) + (-1)^n \sum_{x \in X_{sg}} \mu_x^{(n+1)}(X).$$

Or si  $V_n$  est une hypersurface projective lisse de degré  $d$  et de dimension  $n$ , on a la formule de Hirzebruch [2] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_p \chi(V_n, \Omega^p) y^p z^{n+1} = \frac{1}{(1+yz)(1-z)} \frac{(1+yz)^d - (1-z)^d}{(1+yz)^d + y(1-z)^d}.$$

Or  $\sum (-1)^p \chi(V_n, \Omega^p) = \chi(V_n)$  car  $k$  est de caractéristique nulle. Après un développement limité en  $y = -1$ , on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi(V_n) z^{n+1} = \frac{d \cdot z}{(1-z)^2 (1+(d-1)z)}.$$

On en déduit  $\chi(V_n)$  en fonction de  $n$  et  $d$ , et en appliquant ceci à  $X_{\eta_1}$ ,  $X \cap H$  et  $X \cap \Delta$ , on en déduit (4.2.1).

### 5. Autre démonstration pour une courbe plane

Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et soit  $X$  une courbe plane réduite de degré  $d$  (i. e. une hypersurface réduite  $X \subset \mathbb{P}_k^2$  de degré  $d$ ). Soit  $(H_t)_{t \in D}$  un pinceau de Lefschetz pour  $X$ , son axe  $\Delta$  est réduit à un point encore notée  $\Delta$ , n'appartenant pas à  $X$ , et les hyperplans du pinceau sont juste les droites de  $\mathbb{P}_k^2$  passant par ce point. La projection donnée par le pinceau fournit donc un revêtement de degré  $d$ ,  $\pi : X \rightarrow D$ . Soit  $q : \tilde{X} \rightarrow X$  la normalisation de  $X$ , et  $\tilde{\pi} = \pi \circ q : \tilde{X} \rightarrow D$  le revêtement composé; il est de degré  $d$ , et son ensemble de points de ramification dans  $D$  est contenu dans l'ensemble exceptionnel  $S$  du pinceau. Pour tout  $s \in S$ , soit  $v_s$  la valuation en  $s$  du discriminant de l'extension  $k(\tilde{X})/k(D)$ . D'après [7], si pour  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ,  $e_{\tilde{x}}$  est l'indice de ramification du revêtement  $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow D$  en  $\tilde{x}$ , on a, pour  $s \in S$ ,

$$v_s = \sum_{\tilde{x} \in \tilde{\pi}^{-1}(s)} (e_{\tilde{x}} - 1);$$

or dans  $\pi^{-1}(s) \subset X$ , seul  $x_s$  est un point de ramification de  $\pi : X \rightarrow D$ , par suite,

$$v_s = \sum_{\tilde{x} \in q^{-1}(x_s)} (e_{\tilde{x}} - 1).$$

Il est clair alors que

$$\sum_{\tilde{x} \in q^{-1}(x_s)} e_{\tilde{x}} = (X \cdot H_s)_{x_s},$$

où  $(X \cdot H_s)_{x_s}$  est la multiplicité d'intersection de  $X$  et  $H_s$  en  $x_s$ . Par suite, vue les hypothèses faites sur le pinceau, on a, avec les notations de la définition 1.2.1,

$$\begin{cases} v_s = 1 & \text{si } s \in S_1, \\ v_s = m_{x_s}(X) - r_{x_s}(X) & \text{si } s \in S_2, \end{cases}$$

où  $m_{x_s}(X)$  est la multiplicité de  $X$  en  $x_s$  et où  $r_{x_s}(X)$  est le cardinal de  $q^{-1}(x_s)$ .

Appliquons alors la formule d'Hurwitz pour les revêtements à  $\tilde{\pi}$ , on obtient

$$\chi(\tilde{X}) = \deg(\tilde{\pi}) \cdot \chi(D) - \sum_{s \in S} v_s.$$

Or  $\deg(\tilde{\pi}) = d, \chi(D) = 2$  et, si  $g$  est le genre de  $X$ , on a

$$\chi(\tilde{X}) = 2 - 2g \quad \text{et} \quad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{x \in X} \delta_x(X),$$

où  $\delta_x(X) = \dim_k((q_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} / \mathcal{O}_X)_x)$  (cf. [8]). Comme  $\delta_x(X) = 0$ , sauf si  $x$  est une singularité de  $X$ , la formule d'Hurwitz se récrit

$$\text{card}(S_1) = d(d-1) - \sum_{s \in S_2} (2\delta_{x_s}(X) + m_{x_s}(X) - r_{x_s}(X)).$$

Or on sait [6] que, pour tout  $s \in S_2$ ,  $2\delta_{x_s}(X) = \mu_{x_s}^{(2)}(X) + r_{x_s}(X) - 1$ , donc comme  $\mu_{x_s}^{(1)}(X) = m_{x_s}(X) - 1$ , on en déduit

$$2\delta_{x_s}(X) + m_{x_s}(X) - r_{x_s}(X) = \varepsilon_x(X)$$

et donc, tenant compte du corollaire 1.2.10, on en déduit

$$d(X^\perp) = d(d-1) - \sum_{x \in X} \varepsilon_x(X),$$

ce qui n'est autre que (4.2.1) dans le cas particulier envisagé.

Si  $x$  est un point nodal ordinaire (resp. un point cuspidal ordinaire), alors  $\varepsilon_x(X) = 2$  (resp.  $\varepsilon_x(X) = 3$ ), et l'on retrouve la classique formule de Plücker citée dans l'introduction.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] HAMM (H. A.) et LÊ DŨNG TRÁNG. — Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t. 6, 1973, p. 317-355.
- [2] HIRZEBRUCH (F.). — *Topological methods in algebraic geometry*. 3rd ed. — Berlin, Springer-Verlag, 1966 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 131).

- [3] LÊ DŨNG TRÁNG. — *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*. — Paris, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1973.
- [4] MILNOR (J.). — *Singular points of complex hypersurfaces*. — Princeton, Princeton University Press, 1968 (*Annals of Mathematics Studies*, 61).
- [5] RAYNAUD (M.). — Caractéristiques d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, *Séminaire Bourbaki*, 17<sup>e</sup> année, 1964/1965, n<sup>o</sup> 286, 19 p.
- [6] RISLER (J.-J.). — Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane, *Bull. Soc. math. France*, t. 99, 1971, p. 305-311.
- [7] SERRE (J.-P.). — *Corps locaux*. — Paris, Hermann, 1962 (*Act. scient. et ind.*, 1296; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 8).
- [8] SERRE (J.-P.). — *Groupes algébriques et corps de classes*. — Paris, Hermann, 1959 (*Act. scient. et ind.*, 1264; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 7).
- [9] SERRE (J.-P.). — *Représentations linéaires des groupes finis*. — Paris, Hermann 1967 (*Collection Méthodes*).
- [10] TEISSIER (B.). — Cycles évanescents, sections planes,... « Singularités à Cargèse », *Astérisque*, 7-8, 1973, p. 285 à 362.
- [SGA 4] Séminaire de géométrie algébrique, 1963/1964 : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, tome 3. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 305).
- [SGA 5] Séminaire de géométrie algébrique (à paraître).
- [SGA 7] Séminaire de géométrie algébrique, 1967-1969 : *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*. — Berlin, Spinger-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 340).

(Texte reçu le 5 mars 1975.)

Gérard LAUMON,  
Mathématiques,  
École Normale Supérieure,  
45, rue d'Ulm,  
75230 Paris Cedex 05.