BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LAUDENBACH

Submersions sur le cercle

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 417-431
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__417_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 417-431.

SUBMERSIONS SUR LE CERCLE

PAR

FRANÇOIS LAUDENBACH

[Université Paris-Sud, Orsay]

RÉSUMÉ. — Les obstructions de pseudo-isotopie apparaissent dans la classification à isotopie près des formes différentielles de degré 1 non singulières dont la classe de cohomologie est rationnelle.

Grâce à une construction de C.T.C. WALL, on peut donner un théorème de classification à isotopie près des submersions de certaines variétés sur le cercle S^1 (*voir* § 1). L'invariant de classification est de nature pseudo-isotopique. Ce théorème est applicable au tore T^n, $n \geqslant 6$, et alors le calcul du groupe de pseudo-isotopies de T^n, fait par HATCHER-WAGONER, donne les deux théorèmes suivants concernant les formes différentielles de degré 1 fermées non singulières sur T^n :

THÉORÈME 1. — *Si $n \geqslant 6$, dans chaque classe de degré 1 non nulle de la cohomologie rationnelle de T^n, il existe une infinité de classes de conjugaison de formes non singulières.*

THÉORÈME 2. — *Soit $\pi : T^n \to T^n$ un revêtement d'ordre 2. Soit ω une 1-forme non singulière sur T^n dont la classe de cohomologie est rationnelle et non nulle. Si $n \geqslant 6$, $\pi^* \omega$ est linéarisable par isotopie.*

Remarque. — Pour $n = 1, 2, 3$, on prouve que toute 1-forme fermée non singulière est linéarisable par isotopie. Le cas $n = 1$ est un exercice; le cas $n = 2$ est essentiellement une conséquence du théorème de POINCARÉ-BENDIXSON [6]. Pour $n = 3$, la linéarisation par conjugaison est prouvée par ROSENBERG-ROUSSARIE [7]; la classification des difféomorphismes de T^3 [9] permet d'obtenir la linéarisation par isotopie.

Dans ces énoncés, les deux notions de linéarisation ont les sens suivants : une forme linéaire est une forme qui, dans les coordonnées canoniques $x_1, \ldots, x_n$ de T^n, s'écrit $\sum a_i \, dx_i$, où les coefficients a_i sont constants.

Linéariser ω par conjugaison signifie trouver un difféomorphisme φ de T^n tel que $\varphi^* \omega = \alpha$, où α est la forme linéaire cohomologue à ω. Linéariser par isotopie signifie que l'on exige en plus que φ soit isotope à l'identité; d'après MOSER [5], ceci revient à trouver un chemin de formes non singulières, toutes cohomologues, joignant ω et α.

1. Pseudo-isotopies et submersions sur S^1

Le mot submersion est employé à la place du mot fibration pour bien signifier que l'on ne parle pas de la classification usuelle des fibrations sur le cercle dans laquelle la donnée est une fibre type et la classification à conjugaison près. Ici la donnée est l'espace total (source de la submersion) et la classification est faite à isotopie près.

1.1. **La construction de Wall** ([10], p. 140). — Soient E une variété C^∞ fermée de dimension n et $p_0, p_1 : E \to S^1$ deux submersions homotopes dont les fibres-base sont notées F_0 et F_1. Soit $\pi : X \cong F_0 \times \mathbf{R} \cong F_1 \times \mathbf{R} \to E$ le revêtement infini cyclique induit par le morphisme

$$p_{0\#} = p_{1\#} : \quad \pi_1(E) \to \pi_1(S^1).$$

On relève F_0 et F_1 en $\tilde{F}_0$ et $\tilde{F}_1$ isomorphiquement dans X; on choisit ces relèvements pour qu'ils soient disjoints. On a un h-cobordisme $\tilde{W}$ compris entre $\tilde{F}_0$ et $\tilde{F}_1$ (voir *fig.* 1).

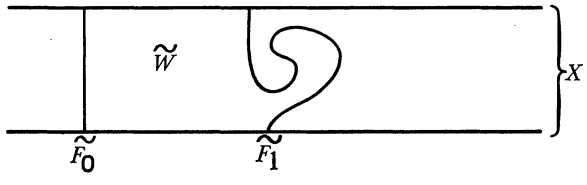

Fig. 1

Faisons l'hypothèse que $\pi_1(X)$ a un premier groupe de Whitehead nul et que $n \geqslant 6$. Alors le théorème du s-cobordisme implique que $\tilde{W}$ est un produit, et en particulier que F_0 est difféomorphe à F_1.

Notons q la projection naturelle $X \cong F_0 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; on a $q(\tilde{F}_0) = 0$, et il existe un entier N tel que $q(\tilde{W})$ soit contenu dans $(0, N)$. Notons alors W' le graphe de la fonction $q/N \mid \tilde{W}$ dans $X \times (0, 1)$ et W'' l'anneau vertical qui relie le graphe de $q/N \mid \tilde{F}_1$ et $\tilde{F}_1 \times \{1\}$. La réunion de ces deux

anneaux le long de l'arête anguleuse constitue un anneau topologique qui a la propriété de ne rencontrer aucun de ses translatés par le groupe du revêtement. De plus, l'arête anguleuse est lissable car le vecteur normal rentrant dans W' n'est jamais vertical, et on peut choisir le lissage pour conserver la propriété précédente, qui assure que l'anneau ainsi construit relève une concordance W de F_0 à F_1 dans $E \times (0, 1)$. On peut faire l'observation que les points critiques de la fonction hauteur sur W proviennent des points critiques de $q \mid \tilde{F}_1$ où le champ *ó/∂ q rentre* dans $\tilde{W}$ (voir *fig.* 2).

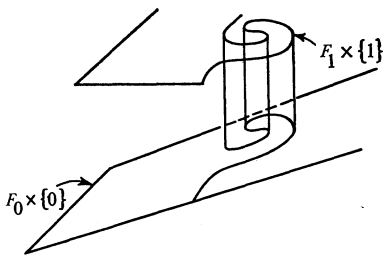

Fig. 2

La construction de W peut être considérée comme canonique à l'isotopie près induite par une rotation de F_0 au-dessus de la base. Nous en parlerons comme de la *concordance de Wall* entre F_0 et F_1. On peut caractériser les concordances de Wall parmi toutes les concordances : un anneau W, difféomorphe à $F_0 \times (0, 1)$ est C^1-proche d'une concordance de Wall, à isotopie verticale près, si et seulement si la projection $W \to E$ est C^1-proche d'une immersion.

1.2. **Redressement de la fibre.** — Si l'on coupe $E \times (0, 1)$ le long de W, on obtient un cobordisme relatif en produit $F_0 \times (0, 1) \times (0, 1)$. Donc il existe une pseudo-isotopie sur E,

$$\Phi : \quad E \times (0, 1) \to E \times (0, 1)$$

telle que $\Phi(F_0 \times (0, 1)) = W$; nous dirons que Φ est *une pseudo-isotopie de Wall* de la paire (p_0, p_1).

Dans la suite, nous noterons $\mathscr{P}(V)$ l'espace des pseudo-isotopies d'une variété V, et $P(V)$ le groupe discret de ses composantes connexes. La classe de Φ dans $P(E)$ comporte une indétermination : la composition à droite par une pseudo-isotopie laissant $F_0 \times (0, 1)$ invariante. En fait, une telle pseudo-isotopie est toujours isotope à une pseudo-isotopie qui est l'identité sur $F_0 \times (0, 1)$. En identifiant à $F_0 \times (0, 1)$ le complémentaire dans E de

l'intérieur d'un voisinage tubulaire de F_0, on voit que l'indétermination sur Φ est gérée par un homomorphisme de suspension

$$\Sigma : \quad P(F_0) \to P(E),$$

composé de l'isomorphisme de suspension usuel

$$P(F_0) \xrightarrow{\cong} P(F_0 \times (0, 1) \bmod F_0 \times \{0, 1\})$$

et du morphisme induit par l'inclusion

$$P(F_0 \times (0, 1) \bmod F_0 \times \{0, 1\}) \to P(E).$$

On a ainsi prouvé la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soient p_0, p_1 : $E^n \to S^1$ deux submersions homotopes de fibres-base respectives F_0 et F_1, variétés fermées de dimension $n-1$. On suppose $n \geqslant 6$ et $\mathrm{Wh}_1(\pi_1(F_0)) = 0$. Alors :*

1° *F_0 et F_1 sont concordantes par la concordance de Wall W;*

2° *il existe une pseudo-isotopie Φ de E, dite de Wall, redressant W. La classe de Φ est bien déterminée dans $P(E)$ modulo l'homomorphisme de suspension $\Sigma : P(F_0) \to P(E)$.*

Remarque. — Les pseudo-isotopies de Wall ne forment pas un sous-groupe.

1.3. **Les invariants de pseudo-isotopie d'une paire de submersions.** — On se place dans les hypothèses de la proposition 1.2, et on considère une pseudo-isotopie de Wall Φ de la paire de submersions (p_0, p_1). Notons $\Phi_1 = \Phi \mid E \times \{1\}$ et $p'_1 = p_1 \Phi_1$. Les submersions p_0 et p'_1 ont pour fibre-base F_0. Si l'on coupe E le long de F_0, on obtient $F_0 \times (0, 1)$, équipé de deux fonctions sans point critique

$$f_0, f_1 : \quad F_0 \times (0, 1) \to (0, 1)$$

induites respectivement par p_0 et p'_1; f_0 est la projection standard. On passe de f_1 à f_0 par une pseudo-isotopie unique φ de F_0 :

$$f_0 = f_1 \varphi. \tag{1.3.1}$$

L'observation suivante est très importante pour la suite : d'une part (p_0, p_1) étant donné, φ est déterminé par Φ; d'autre part, bien que le couple $([\Phi], [\varphi])$ dans $P(E) \times P(F_0)$ soit soumis à une certaine indétermination que nous allons étudier tout de suite, une déformation continue de (p_0, p_1)

se relève en une déformation continue de Φ dans $\mathscr{P}(E)$, à travers les pseudo-isotopies de Wall, et de φ dans $\mathscr{P}(F_0)$.

L'étude de l'indétermination consiste à chercher tous les couples (Φ, φ) que l'on obtient pour la paire (p_0, p_0). Il convient de rappeler que P est à valeurs dans les groupes abéliens [3].

Dire que Φ est une pseudo-isotopie de Wall de (p_0, p_0), c'est dire que Φ laisse $F_0 \times (0, 1)$ invariante; alors elle s'obtient en composant les deux types suivants :

1° Φ induit sur $F_0 \times (0, 1)$ une certaine pseudo-isotopie $\psi \in \mathscr{P}(F_0)$; si $N \cong F_0 \times (0, 1) \times (0, 1)$ désigne un petit voisinage tubulaire de $F_0 \times (0, 1)$ dans $E \times (0, 1)$, Φ est à support dans N et obtenu par suspension de ψ;

2° Φ est l'identité sur $F_0 \times (0, 1)$.

Les deux cas envisagés nécessitent d'introduire certaines relations sur le produit $P(E) \times P(F_0)$. Pour les écrire, il est utile d'introduire quelques notations.

L'homomorphisme-miroir $\mu : P(F_0) \to P(F_0)$ associe à une pseudo-isotopie son miroir : si $f \in \mathscr{P}(F_0)$, $\mu([f]) = [g]$ où $g \in \mathscr{P}(F_0)$ est défini par $g = rfr\,(f_1^{-1} \times \mathrm{Id}_t)$ formule dans laquelle $r(x, t) = (x, 1-t)$ et $f_1(x) = f(x, 1)$.

La monodromie $h_0 = F_0 \to F_0$ prescrit une identification naturelle de $F_0 \times (0, 1)/(h_0(x), 0) = (x, 1)$ avec E; cette identification envoie $F_0 \times \{0\}$ sur $F_0 \subset E$ par l'identité, et $F_0 \times \{1\}$ par h_0.

Relations du premier type : Si Φ est du premier type, on peut couper $E \times (0, 1)$ le long de $F_0 \times (0, 1)$, et regarder Φ comme un difféomorphisme de $F_0 \times (0, 1) \times (0, 1)$. Sur la figure 3, on indique ses valeurs au bord.

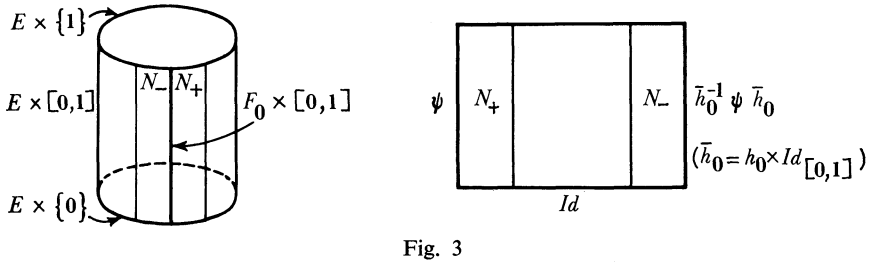

Fig. 3

La pseudo-isotopie φ de la paire (Φ, φ) est l'inverse de celle induite par Φ sur la face supérieure de $F_0 \times (0, 1) \times (0, 1)$. On a alors la formule

$$-[\varphi] = \mu([\psi]) + [\bar{h}_0^{-1}\,\psi\,\bar{h}_0].$$

D'autre part, en tournant d'un demi-tour dans le fibré, on transporte une suspension à support dans N en une suspension à support dans le complémentaire de $F_0 \times (0, 1)$. Précisément, on a la formule

$$[\Phi] = \Sigma([\psi]).$$

On a donc à introduire sur $P(E) \times P(F_0)$ les relations suivantes :

$$\forall a \in P(F_0), \quad (-\Sigma(a), \mu(a) + c_{h_0}(a)) = 0, \tag{1}$$

où c_{h_0} désigne l'automorphisme induit sur $P(F_0)$ par la conjugaison par la monodromie h_0.

Relations du deuxième type : Si Φ est du deuxième type, on peut considérer Φ comme obtenu par une construction de suspension, faite dans le complémentaire de la fibre-base, à partir d'une pseudo-isotopie ψ de F_0. On a alors les formules

$$-[\varphi] = [\psi] + \mu([\psi]),$$
$$[\Phi] = \Sigma([\psi]).$$

Ceci conduit à introduire les relations suivantes :

$$\forall a \in P(F_0), \quad (-\Sigma(a), a + \mu(a)) = 0. \tag{2}$$

THÉORÈME. — *Soit $p_0 : E \to S^1$ une submersion dont la fibre-base F_0 est une variété fermée de dimension $n-1$. On suppose $n \geqslant 6$ et $\mathrm{Wh}_1(\pi_1(F_0)) = 0$. Alors les submersions, homotopes à p_0, sont classifiées à isotopie près par un invariant dans le conoyau R du diagramme*

$$\begin{tikzcd}
 & P(E) \\
P(F_0) \arrow[ur, "\Sigma"] \arrow[r, shift left, "\mu + \mathrm{Id}"] \arrow[r, shift right, "\mu + c_{h_0}"'] & P(F_0)
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, Σ est l'homomorphisme de suspension, μ l'homomorphisme-miroir, et c_{h_0} la conjugaison par la monodromie h_0 de la fibration p_0.

Démonstration. — Dans ce qui précède, on a introduit sur $P(E) \times P(F_0)$ exactement les relations qui permettent d'affirmer que si (Φ, φ) est une paire de pseudo-isotopies associées par la construction de Wall à une paire

de submersions (p_0, p_1) alors la classe de (Φ, φ) dans R ne dépend plus que de (p_0, p_1). Étant donné que les relations (1) et (2) sont géométriques, pour prouver que l'invariant classifie les submersions à isotopie près, il suffit de prouver que $([\Phi], [\varphi]) = (0, 0)$ dans $P(E) \times P(F_0)$ implique p_1 isotope à p_0. La nullité de la première composante signifie que par une première isotopie on fait coïncider les fibres-base. Selon une observation faite plus haut, au cours de cette isotopie de redressement on peut suivre continûment (Φ, φ). En particulier, $[\varphi]$ reste nul, ce qui signifie qu'ayant redressé la fibre-base, on peut alors redresser toutes les fibres.

C. Q. F. D.

Remarque 1. — Le théorème précédent est incomplet puisqu'il ne décrit pas la liste des éléments réalisables comme invariants de pseudo-isotopie de paires de submersions. On ne peut d'ailleurs le faire dans le cadre de la théorie de pseudo-isotopie. Il faut faire intervenir le groupe $\pi_0(\mathrm{Diff}_{\mathrm{PI}}(E))$, où $\mathrm{Diff}_{\mathrm{PI}}$ désigne le groupe des difféomorphismes pseudo-isotopes à l'identité. Pour $E = T^n$, BURGHELEA sait prouver que $\pi_0(\mathrm{Diff}_{\mathrm{PI}}(T^n))$ ne diffère pas, modulo un groupe fini, du conoyau de

$$\mathrm{Id} + \mu : \quad P(T^n) \to P(T^n)$$

lequel est un $\mathbf{Z}_2$-module infini d'après le calcul de Hatcher. Pour obtenir ce résultat, BURGHELEA utilise la théorie de chirurgie (WALL) à paramètres selon la présentation qui en est donnée dans [1] (*voir* l'appendice).

Remarque 2. — Il est néanmoins vrai que tout élément $\varphi \in \mathscr{P}(F_0)$ permet de modifier la fibration p_0 en une fibration p dont l'invariant est $(0, [\varphi])$.

Remarque 3. — En un certain sens, le morphisme c_{h_0} ne dépend pas de la fibration p_0 choisie dans une classe d'homotopie donnée : si p'_0 a la même fibre-base que p_0 et si h'_0 est sa monodromie, on a $c_{h'_0} = c_{h_0}$; ceci tient à l'abélianité de $P(F_0)$.

1.4. **Invariants de conjugaison pour les submersions du n-tore.** — D'une façon générale, une fibration sur le cercle, dont la fibre est isomorphe à une fibre type, fournit un difféomorphisme dit de monodromie de la fibre type, bien défini à conjugaison près; deux fibrations conjuguées ont leur monodromie dans la même classe de conjugaison. Si, comme dans ce qui précède, on travaille sur un espace total fixé, il n'est pas facile de répartir les invariants de pseudo-isotopie en classes d'équivalence correspondant à des monodromies conjuguées. Nous nous limitons donc au cas où la

submersion p_0 est la projection d'une structure produit : la monodromie h_0 est triviale.

Soit p une submersion, classée par $([\Phi], [\varphi])$; alors la classe de conjugaison de la monodromie de p est la classe de conjugaison du difféomorphisme $\varphi_1 = \varphi \mid F_0 \times \{1\}$. Il faut observer que φ_1 est un élément du groupe $\mathrm{Diff}_{\mathrm{PI}}(F_0)$ des difféomorphismes pseudo-isotopes à l'identité, sur lequel $\mathrm{Diff}(F_0)$ agit par conjugaison *extérieure*.

Si $E = T^n$ et si p_0 est la projection naturelle, $F_0 = T^{n-1}$, HATCHER et WAGONER [3] obtiennent que $P(F_0)$ s'identifie en tant que groupe à l'algèbre des parties de $\mathbf{Z}^n - 0$ (1). D'après la remarque 1 de 1.3, $\pi_0(\mathrm{Diff}_{\mathrm{PI}}(F_0))$ s'identifie, à un groupe fini près, à l'algèbre quotient par les parties symétriques par rapport à 0. La conjugaison de $\mathrm{Diff}(F_0)$ correspond à l'action naturelle de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$ sur l'ensemble des parties; cette action a sur l'algèbre quotient une infinité d'orbites. Donc il existe sur T_n une infinité de classes de conjugaison de submersions homotopes à la projection triviale $T^n \to S^1$.

D'après D. TISCHLER [8], si ω est une 1-forme fermée non singulière dans une classe de cohomologie rationnelle, il existe une unique submersion $p : T^n \to S^1$, de fibre connexe, et une constante λ telles que $\omega = p^*(\lambda\, d\theta)$, où $d\theta$ est la forme de Lebesgue du cercle. Linéariser ω par conjugaison revient à conjuguer p à l'unique fibration « linéaire » $p_0 : T^n \to S^1$ qui est homotope à p. Ceci achève de démontrer le théorème 1.

2. Transfert de l'obstruction de pseudo-isotopie dans les revêtements du n-tore

Rappelons la définition introduite par HATCHER [3] pour $\mathrm{Wh}_1(G; \Gamma)$ où G est un groupe, et Γ un G-module; il pose

$$\mathrm{Wh}_1(G; \Gamma) = \Gamma[G]/\{\alpha h - \alpha^g ghg^{-1} = 0;\ \beta e = 0\}.$$

Dans ces relations, g et h sont éléments de G, e est l'élément neutre, α, β appartiennent à Γ, et α^g est le résultat de l'action de g sur α. Puisque $\mathrm{Wh}_2(\mathbf{Z}^n) = 0$, la théorie de HATCHER-WAGONER donne un isomorphisme

$$\Theta : \quad P(T^n) \to \mathrm{Wh}_1(\mathbf{Z}^n; \mathbf{Z}_2),$$

(1) La classification des pseudo-isotopies de T^{n-1}, donnée par HATCHER-WAGONER dans [3] pour $n \geqslant 7$, est en fait valable pour $n = 6$ d'après un étudiant de HATCHER.

lorsque $n \geqslant 5$ (à propos de la dimension *voir* la première note en bas de page).

Soit $\pi : T^n \to T^n$ un revêtement; nous désignerons par G le groupe fondamental de la base, et par H le sous-groupe de G associé à ce revêtement. On a, par relèvement, un homomorphisme $R : P(T^n) \to P(T^n)$, et on se propose de calculer $\Theta \circ R$.

2.2. **Préliminaire algébrique.** — Considérons pour un instant la situation abstraite d'un sous-groupe invariant H d'indice fini dans un groupe G et d'un G-module Γ. Pour g fixé dans G, on considère l'homomorphisme

$$\tau_H(g) : \quad \Gamma[G] \to \Gamma[H],$$

défini par les formules suivantes : soient $\alpha \in \Gamma$ et $h \in G$; on pose

$$\tau_H(g)(\alpha h) = 0 \qquad \text{si} \quad h \notin H,$$
$$\tau_H(g)(\alpha h) = \alpha^g ghg^{-1} \qquad \text{si} \quad h \in H.$$

On choisit des représentants g_i, $i = 1, \ldots, [G : H]$, dans chaque classe de G modulo H, et on pose

$$r = \textstyle\sum_i \tau_H(g_i).$$

On observe que la classe de $r(\alpha h)$ dans $\mathrm{Wh}_1(H; \Gamma)$ est bien définie indépendamment du choix des g_i. D'autre part, on a le lemme suivant :

LEMME. — *La classe de* $r(\alpha h - \alpha^g ghg^{-1})$ *est nulle dans* $\mathrm{Wh}_1(H; \Gamma)$ *pour tout* $g, h \in G$ *et tout* $\alpha \in \Gamma$.

Preuve. — On ne regarde que le cas où $h \in H$. Il existe alors une permutation σ de l'ensemble G/H telle que $g_i\, g = h_i\, g_{\sigma(i)}$, $h_i \in H$. Si on pose $h'_i = g_{\sigma(i)}\, h g^{-1}_{\sigma(i)}$, il vient

$$r(\alpha h - \alpha^g ghg^{-1}) = \textstyle\sum_i \alpha^{g_{\sigma(i)}} h'_i - \alpha^{h_i g_{\sigma(i)}} h_i h'_i h_i^{-1}.$$

De ce lemme, il résulte que r induit un *homomorphisme de transfert*

$$\rho : \quad \mathrm{Wh}_1(G; \Gamma) \to \mathrm{Wh}_1(H; \Gamma).$$

Si $G = \pi_1(T^n)$, H d'indice 2 dans G, et $\Gamma = \mathbf{Z}_2$, l'homomorphisme de transfert est trivial.

2.3. Revenant à la situation des revêtements du n-tore, on a la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Si $n \geqslant 5$, le diagramme ci-dessous est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} P(T^n) & \xrightarrow{R} & P(T^n) \\ \Theta \downarrow & & \downarrow \Theta \\ \mathrm{Wh}_1(G; \mathbf{Z}_2) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{Wh}_1(H; \mathbf{Z}_2) \end{array}$$

COROLLAIRE. — *Si le revêtement est à deux feuillets, l'homomorphisme R est nul. D'autre part, pour chaque pseudo-isotopie de T^n, le relèvement dans un revêtement quelconque d'ordre suffisamment grand est isotope à l'identité.*

Démonstration. — On adopte le point de vue fonctionnel qui consiste à considérer l'espace $\mathscr{E}$ des fonctions sans point critique

$$T^n \times ((0, 1], 0, 1) \to ((0, 1], 0, 1)$$

espace dont le point-base est la projection f_0, $f_0(x, u) = u$, et à identifier $P(T^n)$ et $\pi_0 \mathscr{E}$ (*voir* [2]). *Via* cette identification, R n'est autre que l'application induite par celle qui à une fonction $f : T^n \times (0, 1] \to (0, 1]$ associe $\tilde{f} = f \circ (\pi \times \mathrm{Id} \mid (0, 1])$.

Puisque $\mathrm{Wh}_2(\mathbf{Z}^n) = 0$, si f est une fonction sans point critique, on peut toujours la joindre à f_0 par un chemin de fonctions f_t, $t \in (0, 1]$, du type naissance-élimination, c'est-à-dire que le graphique (= lieu des valeurs critiques dans $(0, 1] \times (0, 1]$) est celui de la figure 4. La classification complète de ces chemins est faite dans [4].

Fig. 4

Quand ils existent, on note $c(t)$, $c'(t)$ la paire de points critiques, d'indices respectifs $i+1$ et i, de la fonction f_t. On fait les choix suivants :

1° un chemin joignant le point-base de $T^n \times \{0\}$ au point de naissance;

2° une famille de champs de pseudo-gradient X_t; pour t voisin des instants de naissance et d'élimination, il n'y a qu'une ligne de champ joignant $c(t)$

et $c'(t)$. D'après [4], il existe une sélection continue de lignes de champ joignant $c(t)$ et $c'(t)$.

3° dans un niveau intermédiaire, $D(t)$ désigne la trace des lignes qui descendent de $c(t)$, et $A(t)$ désigne la trace de celles qui montent de $c'(t)$. On choisit des orientations de $D(t)$ et $A(t)$ pour qu'au point de naissance, on ait $D(t).\ A(t) = +1$. Il en est alors de même au point d'élimination.

Si la famille X_t est générique, l'intersection 1-dimensionnelle

$$\{ D_t \cap A_t;\ t \in (0, 1) \}$$

est une courbe équipée naturellement d'une trivialisation normale; elle fournit une classe de bordisme trivialisé $\omega \in \mathbf{Z}_2[G]$. L'invariant $\Theta(f)$ est alors la classe de ω dans $\mathrm{Wh}_1(G; \mathbf{Z}_2)$.

Quand on relève cette situation dans l'espace total du revêtement, la fonction $\tilde{f}_t$ a des points critiques numérotés $\tilde{c}_i(t)$, $c'_i(t)$, $i = 1, \ldots, [G : H]$ et les points critiques nés ensemble meurent ensemble car le cycle de $T^n \times (0, 1)$ décrit par $(c(t), c'(t))$ est contractile. Notons $\tilde{A}_i(t)$ et $\tilde{D}_i(t)$ les relèvements de $A(t)$ et $D(t)$. Notons $\tilde{\omega}_i$ l'invariant de bordisme dans $\mathbf{Z}_2[H]$ de l'intersection $\{ \tilde{A}_i(t) \cap \tilde{D}_i(t);\ t \in (0, 1) \}$. Alors $\Theta(\tilde{f})$ est la classe de $\sum_i \tilde{\omega}_i$ (la définition générale de Θ est une *trace*). Or le relèvement des invariants de bordisme fournit l'égalité $\tilde{\omega}_i = \tau_H(g_i)(\omega)$.

La proposition suit alors formellement.

C. Q. F. D.

3. Démonstration du théorème 2

Comme il a été dit en 1.4, linéariser une 1-forme non singulière ω de la cohomologie rationnelle revient à linéariser la submersion $p : T^n \to S^1$ qu'elle définit. Soit H le sous-groupe de $G = \pi_1(T^n)$, associé au revêtement à deux feuillets $\pi : T^n \to T^n$. Deux cas se présentent :

Cas 1 : H contient $\ker p_\#$; alors π est induit par p du revêtement à deux feuillets de S^1, c'est-à-dire que l'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} T^n & \xrightarrow{\tilde{p}} & S^1 \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\times 2} \\ T^n & \xrightarrow{p} & S^1 \end{array}$$

La forme $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$ définit la fibration $\tilde{p}$. Si F est la fibre base de p et $\tilde{F}$ celle de $\tilde{p}$, $\pi \mid \tilde{F}$ est un isomorphisme sur F.

Cas 2 : $H \cap \ker p_\#$ est d'indice 2 dans $\ker p_\#$. Dans ce cas, on pose $\tilde{p} = p \circ \pi$; c'est la fibration définie par $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$, et sa fibre base est $\tilde{F} = \pi^{-1}(F)$.

Dans les deux cas, désignons par p_0 et $\tilde{p}_0$ les submersions linéaires homotopes. Soit Φ une pseudo-isotopie de Wall de la paire (p_0, p). Dans les deux cas, son relèvement $\tilde{\Phi}$ est une pseudo-isotopie de Wall de la paire $(\tilde{p}_0, \tilde{p})$. D'après le corollaire 2.3, la classe de $\tilde{\Phi}$ est nulle dans $P(T^n)$.

D'autre part, notons $\Phi_1 = \Phi \mid T^n \times \{1\}$; $p\,\Phi_1$ définit une pseudo-isotopie φ sur T^{n-1} = fibre-base de p_0; de même $\tilde{p}\,\tilde{\Phi}_1$ définit une pseudo-isotopie φ sur T^{n-1} = fibre-base de $\tilde{p}_0$. Dans le cas 1, on a, dans $P(T^{n-1})$, l'égalité

$$[\tilde{\varphi}] = [\varphi] + [\varphi],$$

ce qui donne $[\tilde{\varphi}] = 0$ car $P(T^{n-1})$ est annulé par 2. Dans la cas 2, φ est le relèvement de φ dans le revêtement à deux feuillets induit par π de la fibre-base de $\tilde{p}_0$ sur la fibre-base de p_0. Alors $[\tilde{\varphi}] = 0$ d'après le corollaire 2.3. appliqué à T^{n-1}.

Dans les deux cas, les deux composantes de l'invariant de pseudo-isotopie de la paire $(\tilde{p}_0, \tilde{p})$ sont nulles.

C. Q. F. D.

Remarque. — Pour une 1-forme fermée non singulière sur T^n, la propriété d'être linéarisable par isotopie est une propriété ouverte car s'il existe un champ de vecteurs transversal à deux 1-formes fermées non singulières cohomologues, leurs combinaisons barycentriques sont non singulières cohomologues, et l'on applique le lemme de Moser déjà cité. Soit Ω l'espace des 1-formes fermées non singulières sur T^n; le théorème 2 implique que, pour $n \geqslant 6$, $\pi^* \Omega$ contient un ouvert dense de formes linéarisables. On bute actuellement sur la question de savoir si la linéarisabilité est une propriété fermée.

APPENDICE

Difféomorphismes du tore pseudo-isotopes à l'identité

(d'après D. BURGHELEA)

Pour une variété C^∞ compacte M de dimension n, et pour une sous-variété A de dimension $n-1$ dans son bord, on note Diff $(M \bmod A)$ l'espace muni de la topologie C^∞, des difféomorphismes de M coïncidant

avec l'identité sur A. On posera

$$P(M) = \pi_0(\mathrm{Diff}(M \times [0, 1] \bmod M \times \{0\}))$$

$$P(M \bmod A) = \pi_0(\mathrm{Diff}(M \times [0, 1] \bmod M \times \{0\} \cup A \times [0, 1])).$$

Si $A = \partial M$, on écrira simplement $\mathrm{Diff}(M \bmod \partial)$ ou $P(M \bmod \partial)$. Par restriction à $M \times \{1\}$, on a un morphisme naturel

$$\rho_M : \quad P(M) \to \pi_0(\mathrm{Diff}(M))$$

dont l'image décrit les composantes connexes de difféomorphismes pseudo-isotopes à l'identité.

THÉORÈME. — *Dans le cas du n-tore T^n, $n \geqslant 5$,* l'image de $\rho_{T^n} : P(T^n) \to \pi_0(\mathrm{Diff}(T^n))$ *est infinie.*

Démonstration. — Considérons le diagramme commutatif (1) dans lequel Σ est l'homomorphisme de suspension, D est l'homomorphisme Identité + miroir (*voir* 1.2 et 1.3), et λ est induit par $\rho_{T^n \times [0,1]}$. La suite horizontale est exacte :

$$(1) \quad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_0(\mathrm{Diff}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial))/\pi_1(\mathrm{Diff}\, T^n) \arrow[r, "i"] & P(T^n) \arrow[r, "\rho_{T^n}"] & \pi_0(\mathrm{Diff}(T^n)) \\
& P(T^n \times [0, 1] \bmod \partial) \arrow[u, "\lambda"] & & \\
& P(T^n) \arrow[u, "\Sigma"] \arrow[uurr, "D"'] & &
\end{tikzcd}$$

Il suit des calculs de HATCHER-WAGONER [3] que $P(T^n)$ est un $\mathbf{Z}_2$-module, et que l'image de D est de codimension infinie. Le théorème sera démontré dès que l'on saura que $\mathrm{Im}\, i$ et $\mathrm{Im}\, D$ ne diffèrent que d'un ensemble fini.

Toujours d'après [3], Σ est un isomorphisme. Il ne reste donc qu'à voir la surjectivité de λ à un ensemble fini près. Pour cela on introduit $\widetilde{\mathrm{Diff}}$ le complexe semi-simplicial des concordances de Diff : pour une variété M, un k-simplexe de $\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)$ est un difféomorphisme de $M \times \Delta^k$ respectant les faces. Par exemple une pseudo-isotopie sur $T^n \times [0, 1]$, triviale sur le bord, peut être regardée comme un 1-simplexe de $\widetilde{\mathrm{Diff}}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial)$. On a donc un morphisme

$$\begin{aligned} j : \quad & P(T^n \times [0, 1] \bmod \partial) \\ & \to \pi_1(\widetilde{\mathrm{Diff}}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial), \mathrm{Diff}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial)) \end{aligned}$$

qui par construction même est un épimorphisme. Considérons le diagramme suivant (2) dans lequel Λ relève λ, et où la suite horizontale est exacte :

$$(2)\qquad \begin{tikzcd} \pi_1(\widetilde{\mathrm{Diff}}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial), \mathrm{Diff}) \arrow[r] & \pi_0(\mathrm{Diff}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial)) \arrow[r] & \pi_0(\widetilde{\mathrm{Diff}}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial)). \\ P(T^n \times [0, 1] \bmod \partial) \arrow[u, "j"] \arrow[urr, "\Lambda"'] & & \end{tikzcd}$$

Grâce à la chirurgie à paramètres (*voir* [1]) le calcul de $\widetilde{\mathrm{Diff}}$ se réduit essentiellement à un calcul homotopique; si H désigne le complexe semi-simplicial des équivalences d'homotopie, on a, à un ensemble fini près, un isomorphisme

$$\begin{aligned} \pi_0(\widetilde{\mathrm{Diff}}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial)) &\approx \pi_0(H(T^n \times [0, 1] \bmod \partial)) \\ &\cong \pi_1(H(T^n)) \cong \pi_1(T^n) \end{aligned}$$

(On pense à T^n comme au sous-groupe de $\mathrm{Diff}(T^n)$ formé des rotations.) Il s'ensuit qu'en quotientant par $\pi_1(\mathrm{Diff}\, T^n)$, on a un diagramme (3) de surjections à ensembles finis près :

$$(3)\qquad \begin{tikzcd} \pi_1(\widetilde{\mathrm{Diff}}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial), \mathrm{Diff}) \arrow[r] & \pi_0(\mathrm{Diff}(T^n \times [0, 1] \bmod \partial))/\pi_1(\mathrm{Diff}\, T^n) \\ P(T^n \times [0, 1] \bmod \partial) \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

C. Q. F. D.

RÉFÉRENCES

[1] ANTONELLI (P.), BURGHELEA (D.) and KAHN (P.). — *The concordance-homotopy groups of geometric automorphisms groups.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 215).

[2] CERF (J.). — *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie.* — Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1970. (*Publications mathématiques*, 39, p. 5-173).

[3] HATCHER (A.) and WAGONER (J.). — Pseudo-isotopies of compact manifolds, *Astérisque* n°6, 1973, 275 p. [HATCHER a signalé que son calcul de la seconde obstruction était faux en général. Mais il reste juste en particulier dans le cas du tore.]

[4] CHENCINER (A.) et LAUDENBACH (F.). — Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe, *Annales scient. Ec. Norm. Sup.*, Série 4, t. 3, 1970, p. 409-478.

[5] MOSER (J.). — On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 120, 1965, p. 286-294.

[6] POINCARÉ (H.). — Sur les courbes définies par des équations différentielles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 90, 1880, p. 673-675, et BENDIXSON (I.). — Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, Uppsala, t. 24, 1901, p. 1-88.

[7] ROSENBERG (H.) and ROUSSARIE (R.). — Topological equivalence of Reeb foliations, *Topology*, Oxford, t. 9, 1970, p. 231-242.

[8] TISCHLER (D.). — On fibering certain foliated manifolds over S^1, *Topology*, Oxford, t. 9, 1970, p. 153-154.

[9] WALDHAUSEN (F.). — On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Annals of Math.*, Série 2, t. 87, 1968, p. 56-88.

[10] WALL (C. T. C.). — *Surgery on compact manifolds.* — New York, London, Academic Press, 1970 (*London mathematical Society Monographs*, 1).

(Texte reçu le 28 juin 1976.)

François LAUDENBACH,
Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
91405 Orsay.