

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL EMSALEM

## **Approximation pondérée sur un corps de nombres $p$ -adiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 104 (1976), p. 409-416

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1976\\_\\_104\\_\\_409\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__409_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## APPROXIMATION PONDÉRÉE SUR UN CORPS DE NOMBRES $p$ -ADIQUES

PAR

MICHEL EMSALEM

[Université Paris-7]

RÉSUMÉ. — Ce texte traite du problème de l'approximation pondérée des fonctions continues par des polynômes sur un corps  $\mathbf{K}$  de nombres  $p$ -adiques : si  $\omega$  de  $\mathbf{R}^+$  dans  $\mathbf{R}^{*+}$  est la fonction poids et si  $\mathcal{C}_\omega$  désigne l'espace des fonctions continues  $f$  de  $\mathbf{K}$  à valeurs dans  $\mathbf{C}_p$  telles que  $|f|_p = o(\omega)$  à l'infini, on veut caractériser l'adhérence de  $\mathbf{C}_p[X]$  dans  $\mathcal{C}_\omega$ . Le théorème 1 établit une dichotomie suivant la croissance de  $\omega$ ; dans un cas, seules les restrictions à  $\mathbf{K}$  de fonctions entières sur  $\mathbf{C}_p$  appartiennent à  $\overline{\mathbf{C}_p[X]}$ ; dans l'autre cas, toute fonction de  $\mathcal{C}_\omega$  est limite d'une suite de polynômes.

Tout le long du texte,  $p$  désigne un nombre premier fixé,  $\mathbf{Q}_p$  le corps des nombres  $p$ -adiques,  $\mathbf{K}$  une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$  plongée dans  $\mathbf{C}_p$  le complété de la clôture algébrique de  $\mathbf{Q}_p$ . La norme  $p$ -adique sur  $\mathbf{K}$ , notée  $|\cdot|_p$ , est normalisée par  $|p|_p = 1/p$ ;  $v_p(\cdot)$  désigne la valuation associée : pour  $x \in \mathbf{K}$ ,  $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ . On note  $e$  et  $f$  respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de  $\mathbf{K}$  sur  $\mathbf{Q}_p$ .

Si  $\omega$  est une fonction de  $\mathbf{R}^+$  dans  $\mathbf{R}^{*+}$  telle que, pour tout  $n$ ,  $\rho^n = o(\omega(\rho))$  à l'infini, on appelle  $\mathcal{C}_\omega$  l'espace de toutes les fonctions continues de  $\mathbf{K}$  dans  $\mathbf{C}_p$ , qui sont  $o(\omega)$  à l'infini, muni de la norme  $\|f\|_\omega$ , définie par

$$\|f\|_\omega = \sup_{\rho \in |\mathbf{K}|} (\sup_{x \in \mathbf{K}, |x|_p = \rho} (|f(x)|_p) \omega^{-1}(\rho)).$$

On cherchera à caractériser, pour un  $\omega$  fixé, la sous-classe de  $\mathcal{C}_\omega$ , adhérence de  $\mathbf{C}_p[X]$  pour la topologie induite sur  $\mathcal{C}_\omega$  par la norme  $\|\cdot\|_\omega$ . On particularise le problème en prenant le poids  $\omega_\alpha(\rho) = p^{\rho^\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ . On notera  $\mathcal{C}_\alpha$  (resp.  $\|\cdot\|_\alpha$ ) l'espace  $\mathcal{C}_{\omega_\alpha}$  (resp. la norme  $\|\cdot\|_{\omega_\alpha}$ ). La réponse à la question posée est contenue dans le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — Soit  $\eta$  le degré de  $\mathbf{K}$  sur  $\mathbf{Q}_p$ .

(i) Si  $\alpha < \eta$ , l'adhérence de  $\mathbf{C}_p[X]$  dans  $\mathcal{C}_\alpha$  est constituée des restrictions à  $\mathbf{K}$  de fonctions entières sur  $\mathbf{C}_p$  qui sont, sur  $\mathbf{C}_p$ ,  $o(p^C |x|_p^\alpha)$  à l'infini, où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $\alpha$ .

(ii) Si  $\alpha > \eta$ , toute fonction de  $\mathcal{C}_\alpha$  est limite dans  $\mathcal{C}_\alpha$  d'une suite de polynômes.

*Remarque.* — Le cas particulier  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_p$  donne un résultat analogue à celui concernant l'approximation pondérée sur  $\mathbf{R}$  : l'exposant limite est  $\alpha = 1$ .

Dans la première partie, on énonce des lemmes qui comparent les valeurs d'un polynôme sur  $\mathbf{K}$  et sur  $\mathbf{C}_p$ ; dans la deuxième partie, on s'occupe du cas  $\alpha < \eta$ , et dans la troisième partie, on traite le cas  $\alpha > \eta$ .

**1. Comparaison des valeurs d'un polynôme sur  $\mathbf{K}$  et sur  $\mathbf{C}_p$**

LEMME 1. — Soit  $P(x)$  un polynôme de degré  $n$  à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$  ayant tous ses zéros dans le disque unité de  $\mathbf{C}_p$  et tel que

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p \leq 1} |P(x)|_p = 1,$$

alors

$$\sup_{x \in \mathbf{K}, |x|_p \leq 1} |P(x)|_p \geq p^{-n/(p^f-1)e}.$$

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite très bien répartie dans l'anneau  $A$  de valuation de  $\mathbf{K}$ ;  $P$  s'écrit

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{j=0}^n b_j (x-u_0) \dots (x-u_{j-1}).$$

Les hypothèses sur  $P$  impliquent que, pour tout  $k$ ,  $|a_k|_p \leq 1$  et que  $|a_n|_p = 1$ ; en particulier,  $|b_n|_p = |a_n|_p = 1$ . On a donc (d'après [1]) :  $\sup_{x \in A} |P(x)|_p \geq \sup_{x \in A} |x-u_0|_p \dots |x-u_{n-1}|_p = p^{-Z/e} \geq p^{-n/(p^f-1)e}$ , avec  $Z = \sum_{k \geq 1} [n/p^{fk}]/e$ .

LEMME 2. — Soit  $P(x)$  un polynôme de degré  $n$ ; alors, pour tout entier  $k \geq 0$ ,

$$\sup_{x \in \mathbf{K}, |x|_p \leq p^{k/e}} |P(x)|_p \geq p^{-n/(p^f-1)e} \sup_{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p \leq p^{k/e}} |P(x)|_p.$$

Il suffit de démontrer le lemme pour  $k = 0$  (on fait le changement de variable  $y = \pi^k x$ , où  $\pi$  est un élément premier de  $\mathbf{K}$ ).  $P$  de degré  $n$ , se décompose en un produit  $P = P_1 P_2$ , où  $P_1$  a tous ses zéros dans le disque  $|x|_p \leq 1$  de  $\mathbf{C}_p$ , et  $P_2$  n'y a aucun zéro. Soit  $x_0 \in \mathbf{K}$  tel que  $|x_0|_p = 1$ .

Pour  $|x|_p \leq 1$ ,  $|P_2(x)|_p$  est constant et vaut  $|P_2(x_0)|_p$ . On a donc

$$\sup_{x \in \mathbf{K}, |x|_p \leq 1} |P(x)|_p = |P_2(x_0)|_p \sup_{x \in \mathbf{K}, |x|_p \leq 1} |P_1(x)|_p$$

et

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p \leq 1} |P(x)|_p = |P_2(x_0)|_p \sup_{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p \leq 1} |P_1(x)|_p.$$

Le lemme 1, appliqué à  $P_1$ , donne le lemme 2.

2. Étude du cas  $\alpha < \eta$

PROPOSITION 1. — Pour tout  $\alpha < \eta$ , il existe une constante  $C(\alpha)$  qui possède la propriété suivante : Si un polynôme  $P \in \mathbb{C}_p[X]$  vérifie, pour tout  $x \in \mathbb{K}$ ,

$$|P(x)|_p \leq p^{|x|_p^\alpha},$$

alors, pour tout  $x \in \mathbb{C}_p$ ,

$$|P(x)|_p \leq p^{C(\alpha) |x|_p^\alpha}.$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. — Si  $\alpha < \eta$ , l'adhérence de  $\mathbb{C}_p[X]$  dans  $\mathcal{C}_\alpha$  est constituée de restrictions à  $\mathbb{K}$  de fonctions entières de  $\mathbb{C}_p$  qui sont  $o(p^{C(\alpha) |x|_p^\alpha})$  sur  $\mathbb{C}_p$ .

Démontrons à présent la proposition 1. — Soit  $P$  le polynôme de la proposition;  $P$  s'écrit

$$P(x) = Q(x) P_1(x) P_2(x) \dots P_k(x),$$

où  $Q$  n'a aucun zéro sur les cercles  $|x|_p = p^{j/e}$  de  $\mathbb{C}_p$  ( $j$  parcourt  $\mathbb{N}$ ), où  $P_i$  de degré  $s_i$  a tous ses zéros sur le cercle  $|x|_p = p^{(i-1)/e}$  de  $\mathbb{C}_p$ , et  $P_i(0) = 1$ . On a

$$B_i = \log_p \sup_{x \in \mathbb{C}_p, |x|_p = p^{i/e}} |Q(x)|_p;$$

la suite  $B_i$  est évidemment croissante. On a les propriétés suivantes :

Pour  $x \in \mathbb{K}$  et  $|x|_p \leq p^{(i-2)/e}$ ,  $|P_i(x)|_p = 1$ ; grâce au lemme 1,

$$\sup_{x \in \mathbb{K}, |x|_p = p^{(i-1)/e}} |P_i(x)|_p \geq p^{-s_i/(p^f-1)e},$$

et pour  $x \in \mathbb{K}$ ,  $|x|_p = p^{j/e}$ , et  $j \geq i$ ,  $|P_i(x)|_p = p^{s_i(j-i+1)/e}$ .

La relation  $|P(x)|_p \leq p^{|x|_p^\alpha}$ , pour  $x \in \mathbb{K}$ , entraîne la suite d'inégalités  $(I_k)$  :

$$(I_k) \left\{ \begin{aligned} 1 &\geq B_0 - \frac{s_1}{(p^f-1)e}, \\ p^{\alpha/e} &\geq B_1 + \frac{s_1}{e} - \frac{s_2}{(p^f-1)e}, \\ &\dots\dots\dots, \\ p^{(k-1)\alpha/e} &\geq B_{k-1} + (k-1) \frac{s_1}{e} + \dots + \frac{s_{k-1}}{e} - \frac{s_k}{(p^f-1)e}, \\ p^{k\alpha/e} &\geq B_k + k \frac{s_1}{e} + \dots + \frac{2s_{k-1}}{e} + \frac{s_k}{e}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Nous allons démontrer que les inégalités  $(I_k)$  entraînent les inégalités  $(II)$  :

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} C \geq B_0, \\ C p^{\alpha/e} \geq B_1 + \frac{S_1}{e}, \\ \dots\dots\dots, \\ C p^{(k-1)\alpha/e} \geq B_{k-1} + (k-1) \frac{S_1}{e} + \dots + \frac{S_{k-1}}{e}, \\ C p^{k\alpha/e} \geq B_k + k \frac{S_1}{e} + \dots + \frac{2S_{k-1}}{e} + \frac{S_k}{e}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Il est alors clair que ces dernières inégalités entraînent la conclusion de la proposition avec une constante  $C(\alpha)$  supérieure à  $C$ .

Nous allons voir que si l'on prend  $C \geq (p^f - 1)/(p^f - p^{\alpha/e}) > 1$ , les inégalités  $(I_k)$  entraînent  $(II)$  (on utilise ici le fait que  $\alpha < fe = \eta$ ).

Raisonnons par l'absurde, et supposons que, pour un indice  $j_0 \leq k-1$ ,

$$B_{j_0} + j_0 \frac{S_1}{e} + \dots + \frac{S_{j_0}}{e} > C p^{j_0\alpha/e}.$$

On aura alors  $s_{j_0+1} > e(p^f - 1)(C - 1) p^{j_0\alpha/e}$ ; d'où

$$\begin{aligned} & B_{j_0+1} + (j_0+1) \frac{S_1}{e} + \dots + \frac{S_{j_0+1}}{e} \\ & \geq B_{j_0} + j_0 \frac{S_1}{e} + \dots + \frac{S_{j_0}}{e} + \frac{S_{j_0+1}}{e} > (C + (C-1)(p^f - 1)) p^{j_0\alpha/e}, \end{aligned}$$

et cette dernière expression est supérieure à  $C p^{(j_0+1)\alpha/e}$  du fait du choix de  $C$ . La récurrence se poursuit jusqu'à  $k$ , où l'on obtient

$$p^{k\alpha/e} \geq B_k + k \frac{S_1}{e} + \dots + \frac{S_k}{e} > C p^{k\alpha/e},$$

ce qui est impossible. On aura donc, pour tout  $j$ ,

$$B_j + j \frac{S_1}{e} + \dots + \frac{S_j}{e} \leq C p^{j\alpha/e},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

3. Étude du cas  $\alpha > n$ .

Dans un premier temps, on essaie de situer l'endroit où  $\sup_{x \in \mathbf{K}} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha}$  est atteint pour un polynôme  $P$ . Voici en fait un résultat plus précis dont nous aurons besoin dans la démonstration de la deuxième partie du théorème 1.

PROPOSITION 2. — *Quel que soit  $\alpha > 0$ , il existe une constante  $K > 0$  telle que, pour tout  $A > 0$  et pour tout polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n$ , on ait*

$$p^{-A\alpha} \sup_{v_p(x) < -\log_p(Kn^{1/\alpha})} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha} \leq \sup_{-\log_p(Kn^{1/\alpha}) \leq v_p(x) \leq -[e \log_p A]/e} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha},$$

les  $x$  figurant en indice des signes sup variant dans  $\mathbf{K}$ .

Le cas particulier  $A = 0$  répond à la question posée plus haut.

THÉORÈME 2. — *Quel que soit  $\alpha > 0$  il existe une constante  $K > 0$  telle que la borne supérieure de  $|P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha}$  lorsque  $x$  parcourt  $\mathbf{K}$  est atteinte sur le disque  $|x|_p \leq Kn^{1/\alpha}$  pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .*

Pour démontrer la proposition 2, nous utiliserons les lemmes suivants :

LEMME 3. — *Pour tout  $a$  et  $b$ ,  $a > b$ , et pour tout polynôme  $P$  de degré au plus  $n$ ,*

$$\sup_{x \in \mathbf{K}, b \leq v_p(x) \leq -[ea]/e} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha} \geq p^{-np^f/e(p^f-1)} \sup_{x \in \mathbf{C}_p, b \leq v_p(x) \leq a} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha}.$$

La démonstration de ce lemme, qui repose sur le lemme 2 et quelques inégalités simples, est laissée au lecteur.

LEMME 4. — *Pour tout  $a$  et  $b$ ,  $a > b$ , et pour tout polynôme  $P \in \mathbf{C}_p[X]$ ,*

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p, b \leq v_p(x) \leq a} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha} \geq p^{-p^{-a\alpha}} \sup_{x \in \mathbf{C}_p, b \leq v_p(x)} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha}.$$

C'est une conséquence immédiate du principe du maximum. Venons-en maintenant à la démonstration de la proposition 2. Soit  $P$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbf{C}_p$  :  $P(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$ . Notons

$$|||P|||_\alpha = \sup_{x \in \mathbf{C}_p} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha},$$

et soit  $M_j = ||| x^j |||_\alpha$ ; la valeur de  $M_j$  est donnée par

$$\log_p M_j = (\log(j/\alpha \log p) - 1)(j/\alpha \log p).$$

On a de plus

$$(1) \quad ||| P |||_\alpha = \sup_{0 \leq j \leq n} |b_j|_p M_j.$$

En effet, les inégalités ultramétriques donnent

$$||| P |||_\alpha \leq \sup_{0 \leq j \leq n} |b_j|_p M_j,$$

et les inégalités de Cauchy sur  $\mathbf{C}_p$  donnent  $\sup_{0 \leq j \leq n} |b_j|_p M_j \leq ||| P |||_\alpha$ . Soit  $K$  une constante que nous fixerons plus tard. Les lemmes 3 et 4 permettent d'écrire :

$$(2) \quad \sup_{x \in \mathbf{K}, -\log_p(Kn^{1/\alpha}) \leq v_p(x) \leq -[e \log_p A]/e} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha} \\ \geq p^{-(A^\alpha - np^f)/e(p^f - 1)} \sup_{x \in \mathbf{C}_p, -\log_p(Kn^{1/\alpha}) \leq v_p(x)} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha}$$

Nous allons déterminer  $K$  de façon que

$$(3) \quad p^{-np^f/e(p^f - 1)} ||| P |||_\alpha > |b_j|_p |x^j|_p p^{-|x|_p^\alpha}, \\ \text{pour } 0 \leq j \leq n \text{ et } |x|_p > Kn^{1/\alpha}.$$

On aura alors

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p > Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha} < p^{-np^f/e(p^f - 1)} \sup_{x \in \mathbf{C}_p} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha}$$

et donc

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p \leq Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha} = ||| P |||_\alpha;$$

il vient finalement

$$\sup_{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p > Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha} \\ < p^{-np^f/e(p^f - 1)} \sup_{x \in \mathbf{C}_p, |x|_p \leq Kn^{1/\alpha}} |P(x)|_p p^{-|x|_p^\alpha},$$

et cette dernière inégalité, alliée à (2), entraîne la proposition.

*Détermination de  $K$ .* — Prenons déjà  $K > (1/\alpha \log p)^{1/\alpha}$  de façon que la fonction  $\rho^j p^{-\rho^\alpha}$  soit décroissante sur l'intervalle  $(Kn^{1/\alpha}, +\infty[$ ; on a alors sur cet intervalle

$$\log_p(|b_j|_p p^j p^{-\rho^\alpha}) \leq \log_p |b_j| + (j \log(K^\alpha n))/\alpha \log p - K^\alpha n \\ \leq \log_p(|b_j| M_j) \\ + (j/\alpha \log p)(\log(K^\alpha n) - \log(j/\alpha \log p) + 1) - n K^\alpha.$$

et d'après (1),

$$|b_j|_p \rho^j p^{-\rho^\alpha} \leq \|P\|_\alpha p^{-\varphi(j)},$$

où  $\varphi(j) = -(j/\alpha \log p) (\log K^\alpha n - \log(j/\alpha \log p) + 1) + K^\alpha n$ .

L'étude de  $\varphi$  montre que

$$\varphi(j) \geq \varphi(n) = n(K^\alpha - (1/\alpha \log p)(\log(\alpha K^\alpha \log p) + 1)).$$

Il suffit pour réaliser (3) que  $\varphi(n) > n p^f/e(p^f - 1)$ , soit encore

$$K^\alpha - (1/\alpha \log p)(\log(\alpha K^\alpha \log p) + 1) > p^f/e(p^f - 1),$$

ce qui est réalisé pour  $K$  assez grand.

*Démonstration du (ii) du théorème 1.* — Dans toute la suite, on suppose  $\alpha > \eta$ . Les fonctions localement constantes à support compact étant denses dans  $\mathcal{C}_\alpha$ , il suffit d'approcher les fonctions de ce type dans  $\mathcal{C}_\alpha$  par des polynômes. Nous allons montrer plus généralement qu'une fonction lipschitzienne  $f$  à support compact est limite dans  $\mathcal{C}_\alpha$  d'une suite de polynômes. L'idée de la méthode consiste à approcher  $f$  sur le compact  $C_n = \{x \in \mathbf{K}; |x|_p \leq K n^{1/\alpha}\}$  par son polynôme de meilleure approximation de degré  $n$ . Une homothétie envoie  $C_n$  dans l'anneau de valuation, et transforme  $f$  en une fonction dont la norme lipschitzienne est inférieure ou égale à  $C n^{1/\alpha}$ , où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $f$  (en gros, sa norme lipschitzienne); à cette fonction on applique [2], et l'on trouve finalement un polynôme  $P_n$  de degré  $n$  tel que  $|f - P_n| = o(1)$  sur  $C_n$  (ici intervient le fait que  $\alpha$  est strictement supérieur à  $\eta$ ). Soit  $A > 0$  tel que le support de  $f$  soit contenu dans  $\{x \in \mathbf{K}; |x|_p < A\}$ . Nous savons que

$$\sup_{x \in \mathbf{K}, A \leq |x|_p \leq K n^{1/\alpha}} |f(x) - P_n(x)| = \sup_{x \in \mathbf{K}, A \leq |x|_p \leq K n^{1/\alpha}} P_n(x) \rightarrow 0$$

lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . La proposition 2 nous dit alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbf{K}, |x|_p > K n^{1/\alpha}} |P_n(x)| p^{-|x|_p^\alpha} = 0,$$

on conclut alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbf{K}} |f(x) - P_n(x)| p^{-|x|_p^\alpha} = 0,$$

et le (ii) du théorème 1 est démontré.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). — Interpolation  $p$ -adique, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 117-180  
(Thèse *Sc. math. Paris*, 1964).
- [2] HELSMOORTEL (E.). — Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, 1970, série A, p. 546-548.

(Texte reçu le 31 juillet 1975.)

Michel ENSALEM,  
Mathématiques,  
Tour 55,  
Université de Paris-7,  
2, place Jussieu,  
75221 Paris Cedex 05.