BULLETIN DE LA S. M. F.

AYDIN AYTUNA
ANNE-MARIE CHOLLET

Une extension d'un résultat de W. Rudin

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 383-388
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__383_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 383-388.

UNE EXTENSION D'UN RÉSULTAT DE W. RUDIN

par

AYDIN AYTUNA et ANNE-MARIE CHOLLET

[Seattle et Orsay]

RÉSUMÉ. — Soit D un domaine borné strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$.

Pour toute mesure m sur ∂D (resp. sur $\bar{D}$) telle que la mesure superficielle sur ∂D [resp. la mesure volume sur $\bar{D}$] soit absolument continue par rapport à m, on montre que $\mathscr{H}^\infty(m) + \mathbf{C}(\partial D)$ [resp. $\mathscr{H}^\infty(m) + C(\bar{D})$] est une sous-algèbre fermée de $L^\infty(m)$. On note $\mathscr{H}^\infty(m)$ l'adhérence faible-étoile, dans $L^\infty(m)$ des fonctions holomorphes sur D, continues dans $\bar{D}$.

On se propose d'étendre aux domaines strictement pseudo-convexes de $\mathbf{C}^n$ un résultat de D. SARASON [7] pour le disque, et de W. RUDIN [6] pour la boule.

THÉORÈME. — *Soient* $D = \{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n;\ \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1 \}$, ∂D *sa frontière, et* σ *la mesure superficielle sur* ∂D. *Alors* $\mathscr{H}^\infty(\sigma) + C(\partial D)$ *est une sous-algèbre fermée de* $L^\infty(\sigma)$.

$\mathscr{H}^\infty(\sigma)$ désigne ici l'algèbre des fonctions f^* sur ∂D limites radiales de fonctions f holomorphes et bornées dans D.

On obtient des résultats analogues, lorsque D est un domaine borné strictement pseudo-convexe de $\mathbf{C}^n$, pour des mesures m sur ∂D (resp. sur $\bar{D}$) telles que la mesure superficielle sur ∂D (resp. la mesure volume sur $\bar{D}$) soit absolument continue par rapport à m.

Ce résultat n'est plus vrai lorsque D est le polydisque de $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, et ∂D sa frontière distinguée. W. RUDIN a en effet montré que $H^\infty(\sigma) + C(\partial D)$ n'est pas alors une sous-algèbre de $L^\infty(\sigma)$.

La démonstration se fait en deux parties. On établit, en utilisant un théorème de T. W. GAMELIN et J. GARNETT, que $\mathscr{H}^\infty(m) + C$ (supp m) est fermé dans $L^\infty(m)$, puis, en utilisant un lemme de B. COLE et M. RANGE, que $\mathscr{H}^\infty(m) + C$ (supp m) est une algèbre.

Ces résultats ont été établis indépendamment par les auteurs ([1], [2]). Prouvés ici dans $\mathbf{C}^n$, ils s'étendent à des domaines strictement pseudo-convexes dans une variété de Stein.

1. Soient A une algèbre uniforme sur un espace topologique compact X, et ν une mesure positive sur X. On note $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X, et $\mathscr{H}^{\infty}(\nu)$ l'adhérence de A dans $L^{\infty}(\nu)$ pour la topologie faible-étoile, c'est-à-dire la topologie $\sigma[L^{\infty}(\nu), L^{1}(\nu)]$. Pour toute fonction continue u sur X, on note $d(u, A)$ [resp. $d(u, \mathscr{H}^{\infty}(\nu))$] la distance de u à l'algèbre A [resp. à l'algèbre $\mathscr{H}^{\infty}(\nu)$].

PROPOSITION 1. — *Si, pour toute fonction u continue sur X, on a*

$$d(u, A) = d(u, \mathscr{H}^{\infty}(\nu)),$$

alors $\mathscr{H}^{\infty}(\nu) + C(X)$ est fermé dans $L^{\infty}(\nu)$.

Preuve. — On a

$$C(X) \xrightarrow{i} L^{\infty}(\nu) \xrightarrow{\pi} L^{\infty}(\nu)/\mathscr{H}^{\infty}(\nu),$$

où i est l'injection canonique, et π l'application quotient.

L'image réciproque par π dans $L^{\infty}(\nu)$ de $\pi(i[C(X)])$ s'identifie à $\mathscr{H}^{\infty}(\nu) + C(X)$. Elle est fermée dans $L^{\infty}(\nu)$ si $\pi(i[C(X)])$ est fermé dans $L^{\infty}(\nu)/\mathscr{H}^{\infty}(\nu)$. Mais, par hypothèse, les espaces $C(X)/A$ et $\pi(i[C(X)])$ sont isométriquement isomorphes. Puisque $C(X)/A$ est complet, $\pi(i[C(X)])$ l'est aussi, ce qui établit la proposition.

2. Soit $\mathscr{M}$ le spectre de $\mathscr{H}^{\infty}(\nu)$; pour tout point de X, on note $\mathscr{M}_p$ la fibre de $\mathscr{M}$ au-dessus de p, c'est-à-dire, l'ensemble des homomorphismes φ de $\mathscr{M}$ qui vérifient $\varphi(f) = f(p)$ pour tout élément f de A.

On dira que l'algèbre A a la propriété (L) si, pour tout point p du support de ν, pour toute fonction u de $C(X)$, et toute fonction f de $\mathscr{H}^{\infty}(\nu)$ vérifiant $|f| \leqslant u$ presque partout par rapport à ν, on a

$$|\Phi(f)| \leqslant u(p), \quad \text{pour tout } \Phi \text{ de } \mathscr{M}_p.$$

Soit τ une mesure sur X, on dit que τ est absolument continue par rapport à $A^{\perp}$ si, et seulement si, τ est absolument continue par rapport à une mesure sur X orthogonale à A.

THÉORÈME 2. — *Soient A une algèbre uniforme sur un espace topologique compact X, et ν une mesure positive dont le support est X. Si A a la propriété (L) et si, pour toute mesure τ sur X absolument continue par rapport à $A^{\perp}$, l'application restriction de $L^{\infty}(\nu + |\tau|)$ à $L^{\infty}(\nu)$ est une isométrie de $\mathscr{H}^{\infty}(\nu + |\tau|)$ sur $\mathscr{H}^{\infty}(\nu)$, alors, pour toute fonction u continue sur X, on a*

$$d(u, A) = d(u, \mathscr{H}^{\infty}(\nu)).$$

3. Un domaine D de $\mathbf{C}^n$, $n \geqslant 1$, à frontière C^3 strictement pseudo-convexe est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ tel que l'adhérence $\overline{D}$ de D soit compacte et qu'il existe une fonction ρ, à valeurs réelles, de classe C^3 dans un voisinage U de $\overline{D}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1° $D = \{ z ; \rho(z) < 0 \}$,

2° grad $\rho \neq 0$ sur ∂D,

3° ρ est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de ∂D.

On désigne par $\mathscr{H}^\infty(D)$ l'algèbre des fonctions holomorphes et bornées dans D, et par $A(D)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans D, continues dans $\overline{D}$.

Pour toute mesure ν sur $\overline{D}$, on note $\mathscr{H}^\infty(\nu)$ l'adhérence faible-étoile dans $L^\infty(\nu)$ des fonctions de $A(D)$. Si v est la mesure volume sur D, on sait [3] que $\mathscr{H}^\infty(D) = \mathscr{H}^\infty(v)$.

4. Proposition 3. — *Si D est un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbf{C}^n$, et si v est la mesure volume sur $\overline{D}$, alors $\mathscr{H}^\infty(m) + C(\overline{D})$ est un sous-espace fermé de $L^\infty(m)$ pour toute mesure m sur $\overline{D}$ telle que v soit absolument continue par rapport à m.*

Preuve. — Le théorème 2 s'applique avec $A = A(D)$ et $\nu = v$. L'algèbre $\mathscr{H}^\infty(v)$ a en effet la propriété (L). Elle est clairement vérifiée en tout point p de D car $\mathscr{M}_p$ se réduit à l'homomorphisme évaluation au point p. Elle l'est également en tout point p de ∂D. On sait, en effet, [8], que tout point p de la frontière d'un domaine D strictement pseudo-convexe est pic pour $A(D)$, c'est-à-dire qu'en chaque point p de ∂D, il existe une fonction de $A(D)$ égale à 1 au point p et de module strictement inférieur à 1 partout ailleurs. De plus, pour toute mesure τ absolument continue par rapport à $A^\perp$, on conduit d'après un résultat de B. Cole et R. M. Range [3] que l'application restriction de $L^\infty(v + |\tau|)$ à $L^\infty(v)$ est une isométrie de $\mathscr{H}^\infty(v + |\tau|)$ sur $\mathscr{H}^\infty(v)$. On a donc

$$d(u, \mathscr{H}^\infty(v)) = d(u, A(D))$$

pour toute fonction u de $C(\overline{D})$.

Pour toute fonction f de $L^\infty(m)$, soit $\tilde{f}$ la classe d'équivalence de f dans $L^\infty(v)$. On a $\|\tilde{f}\|_\infty^v \leqslant \|f\|_\infty^m$, si on désigne par $\| \ \|_\infty^\mu$ la norme dans $L^\infty(\mu)$.

On déduit de là, pour toute fonction u de $C(\bar{D})$,

$$d(u, \mathscr{H}^\infty(m)) = d(u, A(D)),$$

et la proposition 1 implique le résultat.

PROPOSITION 4. — *Si D est un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbf{C}^n$, et si σ est la mesure superficielle sur ∂D, alors $\mathscr{H}^\infty(m)+C(\partial D)$ est un sous-espace fermé de $L^\infty(m)$ pour toute mesure m sur ∂D telle que σ soit absolument continue par rapport à m.*

Preuve. — En utilisant les résultats correspondants de [3], on reprend la démonstration de la proposition 3.

5. — Dans la suite, il sera fait usage d'un lemme établi dans [3].

LEMME 5. — *Il existe un opérateur linéaire S de l'espace des $(0,1)$-formes bornées $\bar{\partial}$-fermées sur D dans $C(\bar{D})$ qui applique les formes à coefficients C^∞ sur les fonctions de classe C^∞ dans D de sorte que*

(1) *si $u = S(\omega)$, alors $\bar{\partial}u = \omega$ dans D;*

(2) *si $\{\omega_n\}$ converge vers 0 pour la topologie faible-étoile induite par $L^\infty(v)$, alors $S(\omega_n)$ converge uniformément vers 0 dans $C(\bar{D})$.*

On désigne par $C^\infty(\bar{D})$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ dans D dont toutes les dérivées appartiennent à $C(\bar{D})$.

PROPOSITION 6. — *Soit D un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbf{C}^n$, et m une mesure sur $\bar{D}$ telle que v soit absolument continue par rapport à m. Si f appartient à $\mathscr{H}^\infty(m)$, et φ à $C^\infty(\bar{D})$, alors $f\varphi$ appartient à $\mathscr{H}^\infty(m)+C(\bar{D})$.*

Preuve. — Soit Σ l'ensemble des fonctions f de $\mathscr{H}^\infty(m)$ telles que, pour toute fonction φ de $C^\infty(\bar{D})$, φf appartienne à $\mathscr{H}^\infty(m)+C(\bar{D})$. On va prouver qu'il est fermé pour la topologie faible-étoile de $\mathscr{H}^\infty(m)$. D'après une version du théorème de Krejn-Smuljan [4], il suffit de montrer que si une suite (f_n) de Σ converge de manière ponctuelle bornée presque partout (p. p.) m vers une fonction f de $\mathscr{H}^\infty(m)$, alors f appartient à Σ. Soit (f_n) une telle suite. On a donc, si φ appartient à $C^\infty(\bar{D})$,

$$\varphi f_n = h_n + \gamma_n (\text{p. p. } m) \quad \text{avec } h_n \text{ dans } H^\infty(m) \text{ et } \gamma_n \text{ dans } C(\bar{D}).$$

Soit maintenant $\alpha_n = S(\tilde{f}_n \bar{\partial}\varphi)$ où $\tilde{f}_n$ désigne la classe d'équivalence de f_n dans $L^\infty(v)$, et S l'opérateur linéaire du lemme 5. Alors $\varphi\tilde{f}_n = \tilde{g}_n + \alpha_n$

(p. p. v), avec $\tilde{g}_n$ dans $\mathscr{H}^\infty$ (v), et de là, $\alpha_n - \gamma_n$ est égale p. p. v à une fonction G_n de $A(D)$:

$$f_n \varphi - \alpha_n = f_n \varphi - \gamma_n + (\gamma_n - \alpha_n) = h_n - G_n (\text{p. p. } m),$$

donc $f_n \varphi - \alpha_n$ appartient à $\mathscr{H}^\infty$ (m).

Puisque (f_n) converge de manière ponctuelle bornée p. p. m, $(\tilde{f}_n)$ converge vers $\tilde{f}$ pour la topologie faible-étoile de $\mathscr{H}^\infty$ (v) et donc, d'après le lemme 5, (α_n) converge uniformément vers α dans $C(\bar{D})$, avec $\alpha = S(\tilde{f}\,\bar{\partial}\varphi)$. Donc $f_n \varphi - \alpha_n$ converge vers $f\varphi - \alpha$ pour la topologie faible-étoile de L^∞ (m). Puisque $\mathscr{H}^\infty$ (m) est fermé pour cette topologie, $f\varphi - \alpha$ appartient à $\mathscr{H}^\infty$ (m), donc f appartient à Σ. De là, Σ est fermé pour la topologie faible-étoile de L^∞ (m) et, puisqu'il contient $A(D)$, il coïncide avec $\mathscr{H}^\infty$ (m).

THÉORÈME 7. — *Si D est un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbf{C}^n$, alors $\mathscr{H}^\infty$ $(m) + C(\bar{D})$ est une sous-algèbre fermée de L^∞ (m) pour toute mesure m sur D telle que v soit absolument continue par rapport à m.*

Preuve. — Il suffit de montrer que $f\alpha$ appartient à $\mathscr{H}^\infty$ $(m) + \mathrm{C}(\bar{D})$ pour tout f dans $\mathscr{H}^\infty$ (m) et tout α dans $C(\bar{D})$. On approche α uniformément dans D par des fonctions φ_n de $C^\infty(\bar{D})$. Alors $f\varphi_n$ tend vers $f\alpha$ dans L^∞ (m), et on utilise les propositions 4 et 6 pour conclure.

PROPOSITION 8. — *Soit D un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbf{C}^n$, et m une mesure sur ∂D telle que σ soit absolument continue par rapport à m. Si f appartient à $\mathscr{H}^\infty$ (m), et φ à C^∞ $(\bar{D})$, alors $f\varphi$ appartient à $\mathscr{H}^\infty$ $(m) + C(\partial D)$.*

THÉORÈME 9. — *Soit D un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbf{C}^n$, alors $\mathscr{H}^\infty$ $(m) + C(\partial D)$ est une sous-algèbre fermée de L^∞ (m) pour toute mesure m sur ∂D telle que σ soit absolument continue par rapport à m.*

Les preuves de la proposition 8 et du théorème 9 reprennent celles de la proposition 6 et du théorème 7.

Note. — T. W. GAMELIN a signalé aux auteurs des résultats de B. COLE, non publiés, étendant, sous certaines hypothèses, à $A^{**} + C(X)$, le résultat de W. RUDIN; ici A^{**} désigne le bidual de A, une algèbre uniforme sur X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AYTUNA (A.). — *Thèse.* — University of Washington, Seattle.

[2] CHOLLET (A.-M.). — *Une extension d'un résultat de W. Rudin.* — Orsay, Université de Paris-Sud, 1974 (*Publications de l'Université Paris-Sud, Analyse harmonique*, 112).

[3] COLE (B.) and RANGE (R. M.). — A measure on complex manifolds and some applications, *J. funct. Anal.*, t. 11, 1972, p. 393-400.

[4] GAMELIN (T. W.). — *Uniform algebras*. — Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1969.

[5] GAMELIN (T. W.) and GARNETT (J.). — Bounded approximation by rational functions (à paraître).

[6] RUDIN (W.). — Spaces of type $H^\infty + C$, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 25, 1975, p. 99-125.

[7] SARASON (D.). — Algebras of functions on the unit circle, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 79, 1973, p. 286-299.

[8] STEIN (E. M.). — *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*. — Princeton, Princeton University Press, 1972 (*Mathematical Notes*).

(Texte reçu le 24 octobre 1975.)

Aydin AYTUNA,
Department of Mathematics,
University of Washington,
Seattle, Wash. 98105 (États-Unis).

et

Anne-Marie CHOLLET,
Mathématiques, Bâtiment 425,
Université Paris-Sud,
91405 Orsay.