Bernard Oriat

Relation entre les 2-groupes des classes d'idéaux au sens ordinaire et restreint de certains corps de nombres

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 301-307

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__301_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 301-307.

RELATION ENTRE LES 2-GROUPES DES CLASSES D'IDÉAUX AU SENS ORDINAIRE ET RESTREINT DE CERTAINS CORPS DE NOMBRES

PAR

BERNARD ORIAT

[Besançon]

RÉSUMÉ. — Les résultats obtenus par J. V. ARMITAGE et A. FRÖHLICH dans un article intitulé *Class Numbers and Unit signatures* sont démontrés d'une autre façon et généralisés. La méthode utilisée ici est issue du *Spiegelungssatz* de H. W. LEOPOLDT.

Soit $K/\mathbf{Q}$ une extension galoisienne, de groupe de Galois G contenant les racines l-ième de l'unité (l premier), et telle que son degré soit premier à l. C'est sous ces hypothèses que LEOPOLDT a énoncé et démontré le *Spiegelungssatz* [4]. Cette propriété repose essentiellement sur l'utilisation de la structure de module sur l'algèbre semi-simple $\mathbf{F}_l[G]$. Le groupe $\mathfrak{H}_l$ des classes h de K telles que $h^l = 1$ est un tel module. Si E est le groupe des unités de K et E_0 le sous-groupe des unités l-primaires de K, E_0/E^l est aussi un tel module. Soit Φ un caractère irréductible de G sur $\mathbf{F}_l$, et si H est un $\mathbf{F}_l[G]$-module soit $\dim_\Phi(H)$ le nombre de sous-modules simples de caractère Φ intervenant dans une décomposition de H en somme directe de modules simples. LEOPOLDT a défini une involution : $\Phi \to \bar{\Phi}$ de l'ensemble des caractères irréductibles de G sur $\mathbf{F}_l$, et a obtenu la majoration suivante :

$$\dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_l) - \dim_\Phi(\mathfrak{H}_l) \leqslant \dim_\Phi(E_0/E).$$

Le cas $l = 2$ n'est pas exclu par LEOPOLDT. Toutefois celui-ci n'a considéré que des classes d'idéaux au sens ordinaire. Il nous a semblé nécessaire d'introduire, dans ce cas, les deux groupes : $\mathfrak{H}_2$ (resp. $\mathfrak{H}_2'$) des classes d'idéaux de K au sens restreint (resp. au sens ordinaire) dont le carré est la classe principale au sens restreint (resp. au sens ordinaire). Nous obtenons alors (G étant supposé d'ordre impair), l'inégalité suivante :

$$\dim_\Phi(\mathfrak{H}_2) - \dim_\Phi(\mathfrak{H}_2') + \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_2) - \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_2') \leqslant \chi(1),$$

où $\chi(1)$ désigne le degré du caractère absolument irréductible dont Φ est issu.

Cette inégalité permet de retrouver et généraliser les résultats d'ARMITAGE et FRÖHLICH [1]. Ceux-ci supposaient G cyclique d'ordre une puissance d'un nombre premier impair.

Dans le cas où G est abélien d'ordre impair, M. TAYLOR a généralisé dans [6] la démonstration de J.-P. SERRE (celle-ci se trouve dans [1]). Il a obtenu les résultats que nous avons noté corollaires 2 a et 2 b.

Georges GRAS m'a guidé vers le *Spiegelungssatz*. Ses conseils m'ont été précieux. Je l'en remercie vivement.

1. Préliminaires

1.1. *Notations.* — On désigne par K un corps de nombres. Le 2-groupe des classes au sens ordinaire (resp. au sens restreint) de K est noté $\mathfrak{H}'$ (resp. $\mathfrak{H}$). De même, l'ensemble des éléments h de $\mathfrak{H}'$ (resp. $\mathfrak{H}$) tel que $h^2=1$ est noté $\mathfrak{H}'_2$ (resp. $\mathfrak{H}_2$). On désigne par P' (resp. P) l'ensemble des idéaux principaux (resp. strictement principaux) de K.

L'extension abélienne d'exposant 2 maximale de K, dans laquelle aucune place (resp. aucun idéal) ne se ramifie, est notée M' (resp. M). Ces extensions sont des extensions de Kummer, et on désigne par W' et W leurs radicaux, c'est-à-dire

$$W' = \{\omega;\ \omega\in M',\ \omega^2\in K\} \qquad \text{et} \qquad W = \{\omega;\ \omega\in M,\ \omega^2\in K\}.$$

Le nombre de places réelles de K est noté r, et l'application $S : K \to \{\pm 1\}^r$ est la signature de K. Le groupe des unités (resp. des unités totalement positives, des unités 2-primaires) de K est noté E (resp. E^+, E_0). On désigne par γ l'application canonique de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{H}'$ qui associe à la classe au sens restreint de l'idéal $\mathfrak{a}$ de K, la classe ordinaire de $\mathfrak{a}$. Enfin $\dim_2 H$ désignera la dimension sur $\mathbf{F}_2$ du $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel H.

1.2. *Rappels.* — En associant à l'idéal de K engendré par x, la classe modulo $S(E)$ de $S(x)$, on définit un isomorphisme

$$(1\,a) \qquad P'/P \cong S(K)/S(E).$$

D'autre part, P'/P est inclus dans $\mathfrak{H}_2$, et on a donc

$$(1\,b) \qquad \gamma(\mathfrak{H}_2) \cong \mathfrak{H}_2/(P'/P).$$

Enfin, en appliquant la théorie de Kummer et la théorie du corps de classe, on obtient les isomorphismes

$$(1\,c) \quad W/K \cong \mathrm{Gal}(M/K) \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2; \qquad W'/K \cong \mathrm{Gal}(M'/K) \cong \mathfrak{H}'/\mathfrak{H}'^2.$$

(On désigne encore par K le groupe multiplicatif de K.)

1.3. *Définition des applications* θ *et* ψ. — Si ω appartient à W, l'extension $K(\omega)/\mathrm{K}$ est non ramifiée pour les idéaux. L'idéal de K engendré par ω^2 est donc le carré d'un idéal $\mathfrak{a}$ de K. En associant à $\omega\, K$ la classe (ordinaire) de $\mathfrak{a}$, on définit un homomorphisme de W/K dans $\mathfrak{H}'_2$. De plus, si ω appartient à W', ω^2 est totalement positif, et la classe de l'idéal $\mathfrak{a}$ appartient à $\gamma(\mathfrak{H}_2)$. Nous avons donc défini un homomorphisme θ :

$$\theta : \quad (W/K)/(W'/K) \to \mathfrak{H}'_2/\gamma(\mathfrak{H}_2),$$

qui associe à $\omega\, K(W'/K)$ la classe, modulo $\gamma(\mathfrak{H}_2)$, de la classe de $\mathfrak{a}$.

Si maintenant $\omega\, K(W'/K)$ appartient au noyau de θ, il existera un élément totalement positif a de K et une unité ε de K tels que : $\omega^2 = a\,\varepsilon$. En associant εE^+ à $\omega\, K(W'/K)$, on définit un homomorphisme injectif ψ :

$$\psi : \quad \operatorname{Ker}\theta \to E/E^+.$$

2. Cas général

On suppose dans ce paragraphe que K est un corps de nombres quelconque. On déduit des isomorphismes (1 *a*), (1 *b*), (1 *c*) les égalités

$$(2\,a) \qquad \dim_2(P'/P) = r - \dim_2(E/E^+),$$

$$(2\,b) \qquad \dim_2(\gamma(\mathfrak{H}_2)) = \dim_2(\mathfrak{H}_2) - \dim_2(P'/P),$$

$$(2\,c) \qquad \dim_2((W/K)/(W'/K)) = \dim_2(\mathfrak{H}_2) - \dim_2(\mathfrak{H}'_2).$$

D'autre part, en utilisant les applications θ et ψ, on obtient :

$$\dim_2((W/K)/(W'/K)) - \dim_2(E/E^+) \leqslant \dim_2(\mathfrak{H}'_2) - \dim_2(\gamma(\mathfrak{H}_2)).$$

En utilisant cette inégalité et les égalités (2 *a*), (2 *b*), (2 *c*), on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Les 2-rangs des groupes* $\mathfrak{H}$ *et* $\mathfrak{H}'$ *sont reliés par*

$$\dim_2(\mathfrak{H}_2) - \dim_2(\mathfrak{H}'_2) \leqslant r/2.$$

COROLLAIRE 1 *a*. — *Les 2-rangs des groupes* $\mathfrak{H}'$ *et* E/E^+ *sont reliés par*

$$\dim_2(\mathfrak{H}'_2) \geqslant r/2 - \dim_2(E/E^+).$$

COROLLAIRE 1 *b*. — *Les 2-rangs des groupes* $\mathfrak{H}'$ *et* E_0/E^2 *sont reliés par*

$$\dim_2(\mathfrak{H}'_2) \geqslant \dim_2(E_0/E^2) - (r/2).$$

Ces corollaires se déduisent du théorème 1. Le premier est obtenu en utilisant (2 *a*) et (2 *b*) et en minorant $\gamma(\mathfrak{H}_2)$ par 0. Pour démontrer le deuxième, on utilise l'injection de E_0/E^2 dans W/K qui associe $\sqrt{\varepsilon}\, K$ à $\varepsilon\, E^2$.

On retrouve ainsi les résultats I, II, III de [1].

3. Cas galoisien

On suppose donc maintenant $K/\mathbf{Q}$ galoisienne de degré impair.

3.1. *Rappels et notations.* — On désignera par G le groupe de Galois de $K/\mathbf{Q}$. Ce groupe est donc d'ordre impair, et l'algèbre $\mathbf{F}_2[G]$ est semi-simple. Soit Φ un caractère irréductible de G sur $\mathbf{F}_2$. Il est le résidu modulo 2 d'un caractère irréductible Φ' de G sur le corps des nombres 2-adiques $\mathbf{Q}_2$. On désignera par χ un caractère de G absolument irréductible au-dessus de Φ'. Si $\mathbf{Q}_2(\chi)$ est le corps des valeurs de χ (c'est-à-dire

$$\mathbf{Q}_2(\chi) = \mathbf{Q}_2(\chi(\sigma))_{\sigma \in G}),$$

on rappelle que $\mathbf{Q}_2(\chi)$ est l'extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_2$ de degré $\Phi'(1)/\chi(1)$, et que Φ' est la trace relative à $\mathbf{Q}_2(\chi)/\mathbf{Q}_2$ de χ.

Posons $1_\Phi = \sum_{\sigma \in G} \Phi(\sigma^{-1})\sigma$. Cet élément de $\mathbf{F}_2[G]$ est l'idempotent central primitif associé à Φ. Il est le résidu modulo 2 de l'idempotent

$$1_{\Phi'} = (\chi(1)/|G|)\sum_{\sigma \in G}\Phi'(\sigma^{-1})\sigma \quad \text{de l'algèbre } \mathbf{Q}_2[G].$$

Si H est un $\mathbf{F}_2[G]$ module, on désignera par H^Φ la composante de H relative à Φ, c'est-à-dire $H^\Phi = H\,1_\Phi$ (ou $H^\Phi = H^{1_\Phi}$ si H est noté multiplicativement). Ce module H est alors somme directe des H^Φ, Φ parcourant l'ensemble des caractères irréductibles de G sur $\mathbf{F}_2$. On désignera par $\dim_\Phi(H)$ le nombre de $\mathbf{F}_2[G]$-modules simples dont H^Φ est somme directe. On a la relation

$$\dim_2(H^\Phi) = \Phi'(1)\dim_\Phi(H).$$

Considérons par exemple E/E^2. Comme les seules racines de 1 contenues dans K sont ± 1, on déduit du théorème de Dirichlet que G opère « régulièrement » sur E/E^2 (c'est-à-dire que le caractère de E/E^2 est le caractère de la représentation régulière de G). On a donc

$$\dim_\Phi(E/E^2) = \chi(1).$$

De plus, E/E^+ est un $\mathbf{F}_2[G]$-module et c'est un quotient de E/E^2. On a donc

$$\dim_\Phi(E/E^+) \leqslant \chi(1).$$

Si on munit $S(K)$ de la structure de $\mathbf{F}_2[G]$-module obtenue en posant $S(x)^\sigma = S(x^\sigma)$ pour tout σ de G, alors G opérera aussi « régulièrement » sur $S(K)$. Les deux isomorphismes (1 *a*) et (1 *b*) sont maintenant des $\mathbf{F}_2[G]$ isomorphismes, et on a

$$(3\,a) \qquad \dim_\Phi(P'/P) = \chi(1) - \dim_\Phi(E/E^+),$$

$$(3\,b) \qquad \dim_\Phi(\gamma(\mathfrak{H}_2)) = \dim_\Phi(\mathfrak{H}_2) - \dim_\Phi(P'/P).$$

L'extension $M/\mathbf{Q}$ est galoisienne, et tout σ appartenant à G admet un prolongement s à M. En posant $(\omega K)^\sigma = \omega^s K$, on définit une structure de $\mathbf{F}_2[G]$-module sur W/K. Dans [4], LEOPOLDT a défini le *Spiegelbild* $\bar{\Phi}$ de Φ. Comme nous sommes dans le cas $l = 2$, on a donc

$$\bar{\Phi}(\sigma) = \Phi(\sigma^{-1}) \quad \text{pour tout } \sigma \text{ de } G.$$

On peut introduire de même $\bar{\Phi}'$ et $\bar{\chi}$. On rappelle que $\bar{\Phi}$ est encore un caractère irréductible de G sur $\mathbf{F}_2$, que $\bar{\bar{\Phi}} = \Phi$ et que $\chi(1) = \bar{\chi}(1)$.

L'isomorphisme (1 *c*) : $W/K \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2$ n'est pas un $\mathbf{F}_2[G]$-isomorphisme, mais il envoie $(W/K)^\Phi$ sur $(\mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2)^{\bar{\Phi}}$. LEOPOLDT a appelé cette propriété : *Spiegelungsrelation*, et en a donné la démonstration dans [4]. Ceci est encore vrai pour W'/K et $\mathfrak{H}'/\mathfrak{H}'^2$.

On en déduit l'égalité

$$(3\,c) \qquad \dim_\Phi((W/K)/(W'/K)) = \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_2) - \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}'_2).$$

3.2. *Utilisation des applications* θ *et* ψ. — *Ces applications sont définies en* 1.3. Ce sont désormais des $\mathbf{F}_2[G]$-homomorphismes. On obtient alors l'inégalité :

$$\dim_\Phi((W/K)/(W'/K)) - \dim_\Phi(E/E^+) \leqslant \dim_\Phi(\mathfrak{H}'_2) - \dim_\Phi(\gamma(\mathfrak{H}_2)).$$

En utilisant (3 *a*), (3 *b*), (3 *c*), on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME 2. — *Les nombres de* $\mathbf{F}_2[G]$*-modules simples de caractère* Φ *ou* $\bar{\Phi}$ *intervenant dans une décomposition de* $\mathfrak{H}_2$ *et* $\mathfrak{H}'_2$ *en somme directe de modules simples sont liés par la relation*

$$\dim_\Phi(\mathfrak{H}_2) - \dim_\Phi(\mathfrak{H}'_2) + \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_2) - \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}'_2) \leqslant \chi(1).$$

On en déduit, en utilisant (3 *a*) (3 *b*) et en minorant $\dim_\Phi(\gamma(\mathfrak{H}_2))$ par O, le résultat suivant.

COROLLAIRE 2 *a* :

$$\dim_\Phi(\mathfrak{H}'_2) + \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}'_2) \geqslant \chi(1) - \dim_\Phi(E/E^+) - \dim_{\bar{\Phi}}(E/E^+).$$

D'autre part, l'injection de E_0/E^2 *dans* W/K, *qui associe* $\sqrt{\varepsilon}\,K$ *à* εE^2 *est un* $\mathbf{F}_2[G]$*-homomorphisme. On a donc*

$$\dim_\Phi(E_0/E^2) \leqslant \dim_\Phi(W/K) = \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_2).$$

On déduit du théorème 2 le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2 *b* :

$$\dim_\Phi(\mathfrak{H}'_2) + \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}'_2) \geqslant \dim_\Phi(E_0/E^2) + \dim_{\bar{\Phi}}(E_0/E^2) - \chi(1).$$

Remarque. — Comme $\dim_\Phi (E/E^2) = \chi(1)$, on a

$$\chi(1)-\dim_\Phi(E/E^+)-\dim_{\bar{\Phi}}(E/E^+) = \dim_\Phi(E^+/E^2)+\dim_{\bar{\Phi}}(E^+/E^2)-\chi(1).$$

On a une relation analogue, obtenue en remplaçant E^+ par E_0.

3.3. *Cas particuliers.*

(i) *Supposons G abélien.* Les caractères irréductibles de G sont alors de degré 1. On a donc $\chi(1) = 1$. Le théorème 2 peut alors s'énoncer :

L'une au moins des différences

$$\dim_\Phi(\mathfrak{H}_2)-\dim_\Phi(\mathfrak{H}_2') \qquad \text{ou} \qquad \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_2)-\dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_2')$$

est égale à 0. *L'autre ne peut valoir que* 0 *ou* 1.

De même, le corollaire 2 *a* peut s'énoncer :

L'une au moins des inégalités

$$\dim_\Phi(\mathfrak{H}_2') \geqslant \dim_\Phi(E^+/E^2) \qquad \text{ou} \qquad \dim_{\bar{\Phi}}(\mathfrak{H}_2') \geqslant \dim_{\bar{\Phi}}(E^+/E^2)$$

est vraie.

Il en est de même pour le corollaire 2 *b*.

Ces corollaires ont été obtenus par M. TAYLOR [6]. On retrouve également ainsi la condition suffisante de parité de [3] (corollaire IV.3).

Les caractères absolument irréductibles de G forment un groupe. Soit g_χ l'ordre de χ. Le corps des valeurs de χ est le corps cyclotomique $\mathbf{Q}_2^{(g_\chi)}$ obtenu en ajoutant à $\mathbf{Q}_2$ les racines g_χ-ième de 1. Le groupe de Galois de $\mathbf{Q}_2^{(g_\chi)}/\mathbf{Q}_2$ est isomorphe au sous-groupe de $(\mathbf{Z}/g_\chi\,\mathbf{Z})^*$ engendré par la classe de 2 modulo g_χ. Ce sous-groupe contient la classe de -1 modulo g_χ si, et seulement si, χ est conjugué de $\bar{\chi} = \chi^{-1}$. Autrement dit, Φ est égal à $\bar{\Phi}$ si, et seulement si, il existe une puissance de 2 congrue à -1 modulo g_χ.

Si cette condition est vérifiée, on aura alors :

$$\begin{aligned} \dim_\Phi(\mathfrak{H}_2) &= \dim_\Phi(\mathfrak{H}_2'), \\ \dim_\Phi(\mathfrak{H}_2') &\geqslant \dim_\Phi(E^+/E^2), \\ \dim_\Phi(\mathfrak{H}_2') &\geqslant \dim_\Phi(E_0/E^2). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 2 *c*. — *Supposons G d'exposant e. On a alors :* -1 *est congru à une puissance de* 2 *modulo e si, et seulement si,* $\Phi = \bar{\Phi}$ *pour tout caractère* Φ *irréductible de G sur* $\mathbf{F}_2$. *Si cette condition est vérifiée, on aura*

$$\begin{aligned} \dim_2(\mathfrak{H}_2) &= \dim_2(\mathfrak{H}_2'), \\ \dim_2(\mathfrak{H}_2') &\geqslant \dim_2(E^+/E^2), \\ \dim_2(\mathfrak{H}_2') &\geqslant \dim_2(E_0/E^2). \end{aligned}$$

Ces dernières relations s'obtiennent en effectuant la somme des précédentes sur les différents caractères Φ de G. On retrouve ainsi les résultats IV et V de [1].

(ii) *Supposons G non communatif d'ordre pq* (p et q étant premiers et impairs). Dans ce cas, nous avons vérifié que $\Phi = \bar{\Phi}$ pour tout caractère Φ irréductible de G sur $\mathbf{F}_2$ si, et seulement si, les ordres de 2 modulo p et q sont pairs. Si cette condition est vérifiée, nous obtenons les inégalités :

$$\dim_2(\mathfrak{H}_2) - \dim_2(\mathfrak{H}_2') \leqslant (p-1)(q-1)/2,$$
$$\dim_2(\mathfrak{H}_2') \geqslant \dim_2(E^+/E^2) - (p-1)(q-1)/2,$$
$$\dim_2(\mathfrak{H}_2') \geqslant \dim_2(E_0/E^2) - (p-1)(q-1)/2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARMITAGE (J.-V.) and FRÖHLICH (A.). — Class numbers and unit signatures *Mathematika*, London, t. 14, 1967, p. 94-98.

[2] GRAS (G. et M.-N.). — Signature des unités cyclotomiques et parité du nombre de classes des extensions cycliques de **Q** de degré premier impair, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 1.

[3] GRAS (G.). — Critère de parité du nombre de classes des extensions abéliennes de **Q** de degré impair, *Bull. Soc. math. France*, t. 103, 1975, p. 177-190.

[4] LEOPOLDT (H.-W.). — Zur Struktur der *l*-Klassengruppe Galoischer Zahlkorper, *J. für die reine und angew. Math.*, t. 199, 1958, p. 165-174.

[5] SERRE (J.-P.). — *Représentations linéaires des groupes finis.* — Paris, Hermann, 1967 (*Collection « Méthodes ». Mathématiques*).

[6] TAYLOR (M.). — *Galois module structure of class groups and units* (à paraître).

(Texte reçu le 19 septembre 1975).

Bernard ORIAT,
Faculté des Sciences,
Mathématiques,
Route de Gray,
25030 Besançon.