Bulletin de la S. M. F.

Bernard Aupetit

Sur les conjectures de Hirschfeld et Zelazko dans les algèbres de Banach

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 185-193
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__185_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 185-193.

SUR LES CONJECTURES DE HIRSCHFELD ET ŻELAZKO DANS LES ALGÈBRES DE BANACH

PAR

BERNARD AUPETIT

[Québec]

RÉSUMÉ. — On donne quelques solutions partielles aux conjectures de Hirschfeld et Żelazko sur la commutativité des algèbres de Banach, et on étend un théorème de commutativité des $C^{\star}$-algèbres à une classe un peu plus vaste d'algèbres involutives.

Introduction et notations

Dans [6], HIRSCHFELD et ŻELAZKO énoncèrent les deux conjectures suivantes :

CONJECTURE 1. — *Soit A une algèbre de Banach complexe, si pour toute sous-algèbre commutative B il existe $k > 0$ tel que $\rho(x) \geqslant k \| x \|$ pour tout x dans B, alors A est commutative.*

CONJECTURE 2. — *Si A est une algèbre de Banach complexe, sans éléments quasi nilpotents, dont le rayon spectral est continu, alors A est commutative.*

Aucune de ces conjectures n'est actuellement résolue. L'objet de cet article est de donner quelques réponses partielles, et de citer un résultat sur certaines algèbres qui, utilisant le calcul fonctionnel, généralise le « folk theorem » sur les $C^{\star}$-algèbres, énoncé par exemple par KAPLANSKY dans [7], p. 132 : Toute $C^{\star}$-algèbre sans éléments nilpotents est commutative.

Dans tout ce qui suit, A est une algèbre de Banach complexe, $\| \ \|$ est la norme, ρ est le rayon spectral, $\operatorname{Sp} x$ est le spectre de x, un élément $x \neq 0$ est dit quasi nilpotent si $\rho(x) = 0$, Δ est la distance de Hausdorff pour les compacts de $\mathbf{C}$, définie par

$$\Delta(K_1, K_2) = \max(\sup_{u \in K_2} d(u, K_1), \sup_{u \in K_1} d(u, K_2)),$$

où

$$d(u, K) = \inf_{v \in K} |u - v|.$$

DÉFINITION 1. — *La fonction* $x \longrightarrow \mathrm{Sp}\, x$ *est dite continue* (*resp. uniformément continue*) *sur une partie de* A *si elle l'est pour* Δ.

DÉFINITION 2. — *La fonction* $x \longrightarrow \mathrm{Sp}\, x$ *est dite localement uniformément continue en* a *s'il existe* $r > 0$ *tel qu'elle soit uniformément continue sur la boule* $B(a, r) = \{ x ; \| x-a \| < r \}$.

On peut supposer dans tous les résultats ultérieurs que A a une unité, car sinon, en raisonnant dans $\tilde{A}$, l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité, on aura

$$k \| x+\lambda \| \leqslant k(\| x \| + | \lambda |) \leqslant \rho(x) + | \lambda | \leqslant 3\rho(x+\lambda)$$

(*voir* [1], lemme 2), chaque fois que $k \| x \| \leqslant \rho(x)$.

1. Sur la première conjecture

THÉORÈME 1.1. — *Si, quel que soit* $a \in A$, *il existe* $k > 0$ *tel que* $\rho(x) \geqslant k \| x \|$ *pour tout* $x \in C(a)$, *où* $C(a)$ *est la sous-algèbre fermée engendrée par* a, *alors la fonction* $x \longrightarrow \mathrm{Sp}\, x$ *est localement uniformément continue sur un ouvert partout dense de* A.

Démonstration. — Soit

$$A_N = \left\{ a ; \rho((a-\lambda)^{-1}) \geqslant \frac{1}{N} \| (a-\lambda)^{-1} \|, \lambda \notin \mathrm{Sp}\, a \right\}$$

pour N entier $\geqslant 1$. Montrons que A_N est fermé.

Soient $a_k \in A_N$, (a_k) tendant vers a, et $\lambda \notin \mathrm{Sp}\, a$. D'après la semi-continuité supérieure du spectre il existe k_0 tel que

$$\mathrm{Sp}\, a_k \subset \mathrm{Sp}\, a + B(0, \varepsilon) \qquad \text{si} \quad k \geqslant k_0.$$

Soit $\lambda_k \in \mathrm{Sp}\, a_k$ tel que $| \lambda_k - \lambda | = d(\lambda, \mathrm{Sp}\, a_k)$, alors il existe $\mu_k \in \mathrm{Sp}\, a$ tel $| \lambda_k - \mu_k | < \varepsilon$, ainsi

$$| \lambda - \mu_k | \leqslant d(\lambda, \mathrm{Sp}\, a_k) + \varepsilon,$$

soit

$$d(\lambda, \mathrm{Sp}\, a) \leqslant d(\lambda, \mathrm{Sp}\, a_k) + \varepsilon,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{\rho((a-\lambda)^{-1})} \leqslant \frac{1}{\rho((a_k-\lambda)^{-1})} + \varepsilon \leqslant \frac{N}{\| (a_k-\lambda)^{-1} \|} + \varepsilon.$$

Il existe aussi k_1 tel que pour $k \geqslant k_1$ on ait

$$\| (a_k - \lambda)^{-1} \| \geqslant \| (a - \lambda)^{-1} \| - \varepsilon,$$

donc, pour $k \geqslant \max(k_0, k_1)$:

$$\frac{1}{\rho((a-\lambda)^{-1})} \leqslant \varepsilon + \frac{N}{\| (a-\lambda)^{-1} \| - \varepsilon},$$

ce qui prouve le résultat, puisque c'est vrai quel que soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse, $A = \bigcup_{N=1}^{\infty} A_N$; donc, d'après le théorème de Baire, il existe un ouvert U et $k > 0$ tels que si $x \in U$, alors $\rho((x-\lambda)^{-1}) \geqslant k \| (x-\lambda)^{-1} \|$, pour $\lambda \in \operatorname{Sp} x$.

Montrons que $\Delta(\operatorname{Sp} x, \operatorname{Sp} y) \leqslant 1/k \| x-y \|$, pour $x, y \in U$, d'où il résulte que le spectre est uniformément continu sur U. Supposons par exemple que $\lambda \in \operatorname{Sp} x$ avec $d(\lambda, \operatorname{Sp} y) > 1/k \| x-y \|$ auquel cas d'ailleurs $\lambda \notin \operatorname{Sp} y$. Cela signifie que $1/\rho((y-\lambda)^{-1}) > \| x-y \|/k$.

Mais

$$\lambda - x = \lambda - y + y - x = (\lambda - y)[1 + (\lambda - y)^{-1}(y-x)]$$

et

$$\| (\lambda-y)^{-1}(y-x) \| \leqslant \| (\lambda-y)^{-1} \| . \| y-x \| < \frac{1}{k} \rho((\lambda-y)^{-1}) \| y-x \| < 1,$$

donc $\lambda - x$ est inversible, ce qui est contradictoire.

Considérons l'ouvert V sur lequel le spectre est localement uniformément continu. V est partout dense dans A, car sinon $F = A \setminus V$ est fermé à intérieur non vide, et alors comme $\mathring{F} = \bigcup_{N=1}^{\infty} (\mathring{F} \cap A_N)$ est un espace de Baire, comme ouvert d'un espace complet, il existe un ouvert W et $m > 0$ tels que :

$$\varnothing \neq W \cap \mathring{F} \subset \mathring{F} \cup A_m \subset A_m,$$

ce qui implique que le spectre est uniformément continu sur $W \cap \mathring{F}$, donc localement uniformément continu sur $V \cup (W \cap \mathring{F})$, ce qui est absurde.

Malheureusement nous n'avons pu conclure ni à la continuité sur A, ce qui aurait ramené la première conjecture à la deuxième, ni *a fortiori* à l'uniforme continuité sur tout A qui, d'après [1], aurait impliqué que A est commutative.

THÉORÈME 1.2. — *Si, quel que soit $x \in A$, il existe $a \in A$ et $k > 0$ tels que $x \in C(a)$, $\operatorname{Sp} a$ est sans points intérieurs, ayant un nombre fini de trous et $\rho(y) \geqslant k \| y \|$ pour tout $y \in C(a)$, alors A est commutative.*

Démonstration. — Comme A est sans éléments quasi nilpotents, A est sans radical. Supposons A non commutative, elle admet une représentation irréductible Π de dimension supérieure à 1, donc il existe $a \in A$ tel que $\operatorname{Sp} \Pi(a)$ a au moins deux éléments α, β, avec $\operatorname{Sp} a$ sans points intérieurs, ayant un nombre fini de trous et tel que $\rho(y) \geqslant k \| y \|$ pour tout $y \in C(a)$. Comme $\operatorname{Sp} \Pi(a) \subset \operatorname{Sp} a$, on a $\alpha, \beta \in \operatorname{Sp} a$. Il existe deux fonctions continues f, g telles que

$$\begin{cases} f(\alpha) = 1 \\ f(\lambda) = 0 & \text{si} \quad |\lambda - \alpha| > \dfrac{1}{3} |\alpha - \beta|, \end{cases}$$
$$\begin{cases} g(\beta) = 1 \\ g(\lambda) = 0 & \text{si} \quad |\lambda - \beta| > \dfrac{1}{3} |\alpha - \beta|. \end{cases}$$

D'après le théorème d'approximation rationnelle de Mergelian, il existe deux suites de fractions rationnelles ayant leurs pôles hors de $\operatorname{Sp} a$, $(p_n(\lambda))$ et $(q_n(\lambda))$ qui convergent respectivement vers f et g, uniformément sur $\operatorname{Sp} a$.

Si X désigne l'ensemble des caractères de $C(a)$, alors :

$$\begin{aligned} \rho(p_n(a) - p_m(a)) &= \max_{\chi \in X} | \chi(p_n(a) - p_m(a)) | \\ &= \max_{\chi \in X} | p_n(\chi(a)) - p_m(\chi(a)) | \end{aligned}$$

tend vers zéro, quand $m, n \to \infty$. Donc puisque $\rho(x) \geqslant k \| x \|$ sur $C(a)$, il résulte que $(p_n(a))$ est une suite de Cauchy qui converge dans $C(a)$ vers un élément qu'on notera $f(a)$. Il n'est pas difficile de voir que ce $f(a)$ est indépendant du choix des p_n, pourvu qu'ils convergent uniformément vers f. D'une façon identique on définit $g(a)$.

Comme $\operatorname{Sp}_{C(a)} f(a) g(a) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{Sp}_{C(a)} p_n(a) q_n(a) = \{0\}$, on a $f(a) g(a) = 0$, d'où $g(a) A f(a) = 0$, puisque A est sans éléments de carré nul, soit $\Pi(g(a)) \Pi(A) \Pi(f(a)) = 0$.

D'après le théorème de transitivité des algèbres irréductibles, on déduit immédiatement que $\Pi(f(a)) = 0$ ou $\Pi(g(a)) = 0$. D'après le théorème de Johnson, Π est continue (*voir* [3], p. 128-129), donc :

$$\Pi(f(a)) = \lim_{n \to \infty} \Pi(p_n(a)) = \lim_{n \to \infty} p_n(\Pi(a)).$$

Comme $\alpha \in \operatorname{Sp} \Pi(a)$, si $\Pi(f(a)) \neq 0$, alors $p_n(\alpha)$ tend vers zéro ce qui est absurde puisque $f(\alpha) = 1$. Même contradiction si $\Pi(g(a)) = 0$.

Remarque 1. — Si dans l'énoncé du théorème, on suppose que $\operatorname{Sp} a$ est de mesure nulle dans **C**, le résultat est aussi vrai, d'après le théorème d'Hartogs-Rosenthal. D'une façon générale, cela marche pourvu que Sp a vérifie la condition analytique de Vitouchkine pour l'approximation rationnelle.

Remarque 2. — Si on pose l'hypothèse plus forte que, quel que soit $x \in A$, Sp x est sans points intérieurs, ayant un nombre fini de trous et $\rho(y) \geqslant k \| y \|$ pour tout $y \in C(x)$, alors il est facile de voir que $C(x) \simeq \mathscr{C}_{\mathbf{C}}(\mathrm{Sp}\, x)$, ce qui exige que $f(\mathrm{Sp}\, x)$ est sans points intérieurs et ayant un nombre fini de trous pour toute fonction continue, ce qui, comme me l'a fait remarquer le rapporteur de cet article, implique que Sp x est dénombrable. Mais alors ce résultat devient un corollaire du théorème 3.1.

2. Sur le calcul fonctionnel dans certaines algèbres involutives

Etant donné une algèbre de Banach quelconque A, a un élément de A, f une fonction continue sur Sp a, on n'est pas capable, en général, de définir $f(a)$, sauf dans quelques particuliers : f holomorphe dans un voisinage de Sp a, A possède la propriété du théorème 1.1, et f est holomorphe à l'intérieur de Sp a. Dans le cas des $C^{\star}$-algèbres, c'est faisable pour les éléments hermitiens et normaux; c'est ce qu'on appelle le calcul fonctionnel des $C^{\star}$-algèbres.

La démonstration du précédent théorème nous montre qu'une telle définition est possible pour les éléments de A dont le spectre est sans points intérieurs, et a un nombre fini de trous, vérifiant $\rho(y) \geqslant k \| y \|$ pour $y \in C(a)$.

On va donc, être capable de démontrer une généralisation du théorème classique de commutativité sur les $C^{\star}$-algèbres. Cependant il y a une difficulté : on utilise, dans la démonstration, le fait que si P est un idéal primitif alors A/P est involutive; mais, contrairement aux $C^{\star}$-algèbres, un idéal primitif d'une algèbre involutive n'est pas en général involutif. Il va falloir s'y prendre de façon différente en utilisant le lemme suivant.

LEMME. — *Si* $\delta(x)$ *désigne le diamètre du spectre de* x, *et* $\lambda \to h(\lambda)$ *une fonction analytique de* $\mathbf{C}$ *dans* A, *alors* $\lambda \to \log \delta(h(\lambda))$ *est sous-harmonique sur* $\mathbf{C}$.

Démonstration. — Elle est technique et essentiellement basée sur la sous-harmonicité du rayon spectral prouvée par E. VESENTINI (*voir* [1]) et les propriétés des fonctions sous-harmoniques.

THÉORÈME 2.1. — *Soient* A *involutive, et* $k > 0$, *tels que pour tout* h *hermitien on ait* $\rho(h) \geqslant k \| h \|$, *ainsi que* Sp h *sans points intérieurs et ayant* *un nombre fini de trous. Alors, si A n'a pas d'éléments nilpotents, A est commutative.*

Démonstration. — Si $x = h+ik \in \operatorname{rad} A$ alors $h, k \in \operatorname{rad} A$, donc $\rho(h) = \rho(k) = 0$, ce qui implique $h = k = 0$, donc A est sans radical. Supposons que A admet une représentation irréductible Π de dimension supérieure à 1. Alors $\Pi(A) = \Pi(H)+i\,\Pi(H)$, donc il existe un élément hermitien h tel que le spectre de $\Pi(h)$ a au moins deux éléments α, β. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\# \operatorname{Sp} \Pi(h) = 1$, donc $\delta(\Pi(h)) = 0$, quel que soit h hermitien; soit alors $x = h+ik \in A$ quelconque, considérons la fonction analytique $\lambda \to \Pi(h)+\lambda\,\Pi(k)$ de $\mathbf{C}$ dans $\Pi(A)$; d'après le lemme, $\lambda \to \log \delta(\Pi(h)+\lambda\,\Pi(k))$ est sous-harmonique donc, d'après le théorème de Cartan, l'ensemble des λ, où elle vaut $-\infty$, est de capacité extérieure nulle ou bien, sinon, cette fonction est identique à $-\infty$. Mais cet ensemble contient $\mathbf{R}$, d'après l'hypothèse de départ, donc n'est pas de capacité extérieure nulle, ainsi $\delta(\Pi(h)+\lambda\,\Pi(k)) = 0$, soit en faisant $\lambda = i$, $\# \operatorname{Sp} \Pi(x) = 1$ quel que soit x, c'est-à-dire que $\Pi(A) = \mathbf{C}$, soit $\dim \Pi = 1$, ce qui est absurde. Comme dans la démonstration du théorème 1.2, on construit une suite de $p_n(h)$ qui sont normaux, or si $x = h_1+ih_2$ est normal, on a

$$\|x\| \leqslant \|h_1\|+\|h_2\| \leqslant \frac{1}{k}(\rho(h_1)+\rho(h_2)) \leqslant \frac{2}{k}\rho(x),$$

donc cette suite converge dans $C(h)$, et la suite de la démonstration se fait de la même façon.

Remarque 3. — Le théorème s'applique évidemment si $\rho(h) \geqslant k\,\|h\|$ et $\operatorname{Sp} h \subset \mathbf{R}$ sur H, ce qui n'est qu'une apparente généralisation du théorème sur les $C^\star$-algèbres, car on peut alors montrer qu'il existe une norme équivalente pour laquelle l'algèbre est une $C^\star$-algèbre.

En modifiant quelque peu la démonstration de BEHNCKE donnée dans [2], à l'aide des idées précédentes et en rectifiant, sans grandes difficultés, la fin du raisonnement qui est incorrecte, on peut obtenir le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — *Soient A involutive et $k > 0$ tels que, pour tout h hermitien, on ait $\rho(h) \geqslant k\,\|h\|$ et $\operatorname{Sp} h$ sans points intérieurs et ayant un nombre fini de trous. Alors si A est sans éléments quasi nilpotents non nilpotents, A a toutes ses $\star$-représentations hilbertiennes irréductibles qui sont de dimension finie.*

Démonstration. — Soit Π une $\star$-représentation hilbertienne de dimension infinie. Comme $\Pi(A)$ est une $C^\star$-algèbre, dont on peut supposer le spectre de ses éléments hermitiens non totalement discontinu, il existe h hermitien dans A tel que $\operatorname{Sp}\Pi(h) = [0, 1]$. On construit alors les fonctions continues

$$f_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |z| \leqslant \dfrac{1}{n+1}, \\ \text{lineaire} & \text{si} \quad \dfrac{1}{n+1} \leqslant |z| \leqslant \dfrac{3n+1}{3n(n+1)}, \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{si} \quad \dfrac{3n+1}{3n(n+1)} \leqslant |z| \leqslant \dfrac{3n+2}{3n(n+1)}, \\ \text{lineaire} & \text{si} \quad \dfrac{3n+2}{3n(n+1)} \leqslant |z| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{si} \quad |z| \geqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Comme dans la démonstration du théorème 1.2, on définit $a_n = f_n(h)$, qui n'est pas nul puisque $[0, 1] \subset \operatorname{Sp} h$, et on a $a_n a_m = 0$ pour $n \neq m$. Tout le reste de la démonstration se termine comme dans [2], où on vérifie que

$$q = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n a_{n+1} \qquad \text{avec} \quad \| b_n \| \leqslant \dfrac{k}{2}$$

est quasi nilpotent non nilpotent, puisque

$$\| a_n \| \leqslant \frac{2}{k} \rho(a_n) \leqslant \frac{2}{kn^2}.$$

3. Sur la deuxième conjecture

Voici quelques idées qui peut-être aideront les futurs investigateurs. De multiples exemples d'algèbres de Banach sans éléments quasi nilpotents sont connus ([4], [5]). Dans une de ses lettres H. BEHNCKE me suggère, comme contrexemple de considérer $l^1(S)$, où S est le semigroupe des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad a, b, c \text{ entiers.}$$

Malheureusement, jusqu'à maintenant, dans ces différents exemples je n'ai pas été capable de voir si le spectre est continu ou non.

Il serait également intéressant de savoir si la conjecture plus faible qui suit, et qui n'est pas sans rapport avec le théorème 2.2, est vraie.

CONJECTURE 3. — *Si A est une algèbre de Banach complexe, sans éléments quasi nilpotents, dont toutes les représentations irréductibles sont de dimension finie, alors A est commutative.*

Dans le cas où le spectre est totalement discontinu pour chaque $x \in A$, on sait, d'après le théorème de Newburgh, que $x \rightarrow \mathrm{Sp}\, x$ est continue. Dans ce cas, on peut alors obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Si, quel que soit $x \in A$, $\mathrm{Sp}\, x$ est totalement discontinu et si A est sans éléments quasi nilpotents, alors A est commutative.*

Démonstration. — Supposons que A admet une représentation irréductible Π de dimension plus grande que 1, alors il existe $x \in A$ tel que $\mathrm{Sp}\, \Pi(x)$ a plus de un point. Soient α, $\beta \in \mathrm{Sp}\, \Pi(x) \subset \mathrm{Sp}\, x$, comme ce spectre est totalement discontinu il existe un ouvert-fermé C de $\mathrm{Sp}\, x$, contenant α et ne contenant pas β. C et $\mathrm{Sp}\, x \setminus C$ sont alors deux fermés non vides disjoints de $\mathbf{C}$, donc il existe deux ouverts disjoints U_1, U_2 tels que $C \subset U_1$, $\mathrm{Sp}\, x \setminus C \subset U_2$. Considérons les fonctions holomorphes $f_i(z)$ $(i = 1, 2)$, définies sur $U_1 \cup U_2$ par

$$f_i(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z \in U_i. \\ 0 & \text{si} \quad z \notin U_i. \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{Sp} f_1(x) f_2(x) = 0$, donc que $f_1(x) f_2(x) = 0$ avec $f_i(x) \neq 0$. Ainsi $(f_2(x) A f_1(x))^2 = 0$, donc $f_2(x) A f_1(x) = 0$, soit $\Pi(f_2(x)) \Pi(A) \Pi(f_1(x)) = 0$. Mais comme Π est irréductible, cette représentation est strictement dense, donc $\Pi(f_1(x)) = 0$ ou $\Pi(f_2(x)) = 0$, ce qui est absurde puisque leurs spectres contiennent 1.

Ce résultat s'applique en particulier aux algèbres quasi algébriques au sens de HALMOS, c'est-à-dire aux algèbres de Banach telles que $\mathrm{Sp}\, x$ est de capacité nulle, quel que soit $x \in A$.

Je tiens à remercier le rapporteur de la première version de cet article qui, non seulement a découvert de nombreuses erreurs ou ommissions qui figuraient dans ce travail, mais aussi, par ses conseils, m'a permis d'améliorer certains résultats,

Additif sur épreuves (1/7/76). — La plupart des résultats de cet article ont été améliorés dans mon ouvrage à paraître : *Propriétés spectrales des algèbres de Banach.* En particulier, le théorème 2.2 est vrai pour toutes les représentations irréductibles, même non hilbertiennes. De plus, les deuxième et troisième conjectures sont fausses.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aupetit (B.). — Caractérisation spectrale des algèbres de Banach commutatives, *Pacific J. Math.* (à paraître).

[2] Behncke (H.). — Nilpotent elements in Banach algebra, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 37, 1973, p. 137-141.

[3] Bonsall (F. F.) and Duncan (J.). — *Complete normed algebras.* — New York, Springer — Verlag, 1973.

[4] Duncan (J.) and Tullo (A. W.). — Finite dimensionality, nilpotents and quasinilpotents in Banach algebras, *Proc. Edinburgh math. Soc.*, t. 19, 1974, p. 45-49.

[5] Hirschfeld (R. A.) and Rolewicz (S.). — A class of non-commutative Banach algebras without divisors of zero. *Bull. Acad. polon. Sc.*, t. 17, 1969, p. 751-753.

[6] Hirschfeld (R. A.) and Żelazko (W.). — On spectral norm Banach algebras, *Bull. Acad. polon. Sc.*, t. 16, 1968, p. 195-199.

[7] Kaplansky (I.), — *Rings of operators.* — New York, W. A. Benjamin, 1968.

(Texte reçu le 8 septembre 1975.)

Bernard Aupetit,
Département de Mathématiques,
Université Laval,
Québec G 1 K 7 P 4 (Canada).