JACQUES DIXMIER

Polarisation dans les algèbres de Lie. II

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 145-164
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__145_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 145 à 164.

POLARISATIONS DANS LES ALGÈBRES DE LIE, II

par

JACQUES DIXMIER

[Université Pierre-et-Marie-Curie (Univ. Paris-VI)]

RÉSUMÉ. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe, et d la dimension maximale des orbites du groupe adjoint opérant dans $\mathfrak{g}^*$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Si l'orbite de f est de dimension d, on sait que f admet une polarisation résoluble. Si maintenant l'orbite de f est de dimension $d' < d$, et si f est polarisable, on prouve qu'il existe une polarisation en f dont la partie semi-simple peut être « majorée » en fonction de $d' - d$.

Introduction

Dans cet article, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Les espaces vectoriels considérés sont supposés de dimension finie sur k.

(A) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on note B_f la forme bilinéaire alternée $(x, y) \mapsto f([x, y])$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a}$ est une partie de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{a}^f$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ pour B_f. En particulier, le noyau $\mathfrak{g}^f$ de B_f est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. On appelle *polarisation* de $\mathfrak{g}$ en f une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui est un sous-espace vectoriel totalement isotrope maximal pour B_f. On dit que f est polarisable s'il existe une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f.

Soit $m_{\mathfrak{g}} = \inf_{f \in \mathfrak{g}^*} \dim \mathfrak{g}^f$. (Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $m_{\mathfrak{g}}$ est le rang de $\mathfrak{g}$.) On dit que f est une forme régulière sur $\mathfrak{g}$ si $\dim \mathfrak{g}^f = m_{\mathfrak{g}}$. Les formes régulières sur $\mathfrak{g}$ constituent une partie de $\mathfrak{g}^*$ ouverte pour la topologie de Zariski. Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on appellera *irrégularité* de f, et l'on notera $\operatorname{irr}(f)$, le nombre *pair* $\dim \mathfrak{g}^f - m_{\mathfrak{g}}$.

On appellera *partie semi-simple* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ le quotient $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{h}$ par son radical. On notera $\gamma(\mathfrak{h})$ le nombre d'éléments du système de racines de $\mathfrak{h}_1$, c'est-à-dire $\dim \mathfrak{h}_1 - \operatorname{rang} \mathfrak{h}_1$; c'est un entier pair qui, pour nous, mesurera la « grandeur » de $\mathfrak{h}_1$.

(B) Si $f \in \mathfrak{g}^*$ est régulière, on sait que f admet une polarisation résoluble. Quand $\operatorname{irr}(f)$ augmente, les parties semi-simples des polarisations en f ont tendance à augmenter. Par exemple, si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $\gamma(\mathfrak{p}) = \operatorname{irr}(f)$

pour toute polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ en f [*cf.* 1.2 (iii)]. Bien entendu, si $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\gamma(\mathfrak{p}) = 0$ pour toute polarisation. Nous établirons le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie, f un élément polarisable de* $\mathfrak{g}^*$. *Il existe une polarisation* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$ *en* f *possédant la propriété suivante t écrivons la partie semi-simple de* $\mathfrak{p}$ *sous la forme* $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \ldots \times \mathfrak{d}$, *où* $\mathfrak{c}_i$ *est produit d'algèbres simples de type* C_i, *et où aucun facteur simple de* $\mathfrak{d}$ *n'es: de type C. Alors*

$$\gamma(\mathfrak{c}_1)+\textstyle\sum_{i\geqslant 2}\dfrac{i-1}{i}\gamma(\mathfrak{c}_i)+\gamma(\mathfrak{d}) \leqslant \operatorname{irr}(f).$$

(Rappelons que $C_1 = A_1$, $C_2 = B_2$.)

Ce théorème est en un sens le meilleur possible [*cf.* 3.7].

COROLLAIRE. — *Soit f un élément polarisable de* $\mathfrak{g}^*$ *tel que* $\operatorname{irr}(f) = 2$ (resp. 4). *Il existe une polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* f *dont la partie semi-simple est nulle ou de type* A_1 (*resp. nulle ou de l'un des types* A_1, $A_1 \times A_1$, C_2).

(C) Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. Le résultat de (B) concerne la partie semi-simple d'une polarisation *bien choisie* de $\mathfrak{g}$ en f. Il serait souhaitable d'avoir des renseignements concernant la partie semi-simple de *toute* polarisation de $\mathfrak{g}$ en f. Ici nos résultats sont très partiels. Lorsque le radical de $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Heisenberg, nous prouverons en 2.8, pour toute polarisation de $\mathfrak{g}$ en f, l'inégalité affaiblie $\sum_{i\geqslant 2}(i-1/i)\,\gamma(\mathfrak{c}_i)+\gamma(\mathfrak{d}) \leqslant \operatorname{irr}(f)$ (avec les notations de (B)). Le rôle spécial de A_1 est dans la nature des choses. En effet, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dont le radical est une algèbre de Heisenberg, une forme f régulière sur $\mathfrak{g}$, et une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f dont la partie semi-simple est de type $A_1 \times A_1 \times \ldots \times A_1$ avec n facteurs (cela résulte de 3.5). D'autre part, il existe des algèbres de Lie pour lesquelles même l'inégalité affaiblie peut être mise en défaut (*cf.* 4.3).

(D) Malgré le résultat cité en (C), les exemples laissent supposer que. pour *presque toute f* régulière, *toute* polarisation en f est résoluble. Nous établirons ce point lorsque le radical de $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Heisenberg (2.7).

NOTATIONS. — On emploiera les notations introduites ci-dessus, et les suivantes. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Si $x \in \mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}^x$ le commutant dans $\mathfrak{g}$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module. On dit que V est symplectique (resp. orthogonal) si l'on s'est donné sur V une forme bilinéaire alternée (resp. symétrique) non dégénérée $\mathfrak{g}$-invariante; terminologie analogue pour les représentations. Quand on dit que V admet une orbite ouverte, on se réfère à l'action dans V d'un groupe algébrique irréductible d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (supposant par exemple $\mathfrak{g}$ semi-simple).

1. Lemmes sur les algèbres de Lie semi-simples

1.1. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple,* $f \in \mathfrak{g}^*$, x *l'image de* f *dans* $\mathfrak{g}$ *par l'isomorphisme de Killing,* $\mathfrak{q}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$ *le radical nilpotent de* $\mathfrak{q}$. *On suppose* $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}^f$.

(i) $\mathfrak{q}$ *est une sous-algèbre parabolique de* $\mathfrak{g}$;

(ii) $[x, \mathfrak{q}^f] = \mathfrak{n}$.

(Lorsque $\mathfrak{q}$ est une polarisation en f, ce lemme a été prouvé dans [7] pour $k = \mathbf{C}$, et généralisé pour k quelconque par P. TAUVEL (non publié). La démonstration ci-dessous suit pas à pas celle de TAUVEL.)

On a $x \in \mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{q}^f \subset \mathfrak{q}$.

Soient K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{s}$ l'orthogonal de $\mathfrak{q}$ dans $\mathfrak{g}$ pour K. On a $K([x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{q}) = K(x, [\mathfrak{q}^f, \mathfrak{q}]) = f([\mathfrak{q}^f, \mathfrak{q}]) = 0$, donc

$$[x, \mathfrak{q}^f] \subset \mathfrak{s}. \tag{1}$$

L'application $y \mapsto [x, y]$, où y parcourt $\mathfrak{q}^f$, a pour noyau $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^f$, donc $\dim [x, \mathfrak{q}^f] = \dim \mathfrak{q}^f - \dim \mathfrak{g}^f = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{q} = \dim \mathfrak{s}$. La relation (1) entraîne alors

$$[x, \mathfrak{q}^f] = \mathfrak{s}. \tag{2}$$

On a $K([[x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{q}], \mathfrak{q}) = K([x, \mathfrak{q}^f], [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]) \subset K([x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{q}) = 0$, donc $[[x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{s} = [x, \mathfrak{q}^f]$, de sorte que $\mathfrak{s} = [x, \mathfrak{q}^f]$ est un idéal de $\mathfrak{q}$.

Soient ρ la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, T l'ensemble des endomorphismes t de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ tels que $[t, \rho(\mathfrak{q})] \subset \rho(\mathfrak{s})$. Soit $z \in \mathfrak{q}^f$. Pour tout $u \in T$, on a

$$\mathrm{Tr}(u\,\rho([x, z])) = \mathrm{Tr}([u, \rho(x)]\,\rho(z)) \in \mathrm{Tr}(\rho(\mathfrak{s})\,\rho(\mathfrak{q})) = K(\mathfrak{s}, \mathfrak{q}) = 0.$$

Par ailleurs, $\rho([x, z]) \in \rho(\mathfrak{s}) \subset T$. D'après [2] (p. 68, lemme 3), $[x, z]$ est nilpotent dans $\mathfrak{g}$.

Comme $[x, \mathfrak{q}^f]$ est un idéal de $\mathfrak{q}$, donc une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et une base du système de racines $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ telles que, si l'on note $\mathfrak{y}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ correspondant aux racines positives, on ait $[x, \mathfrak{q}^f] \subset \mathfrak{y}$. Alors

$$0 = K(\mathfrak{y}, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{y}) \supset K([x, \mathfrak{q}^f], \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{y}) = f(\mathfrak{q}^f, \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{y}),$$

donc $\mathfrak{h} + \mathfrak{y} \subset (\mathfrak{q}^f)^f = \mathfrak{q}$. On a prouvé (i). On sait qu'alors $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}$, donc (ii) résulte de (2).

1.2. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}$, f, x, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{n}$ *comme dans* 1.1. *Soit de plus* $\mathfrak{m}$ *le radical de* $\mathfrak{q}$.

(i) $\mathfrak{q}^f \supset \mathfrak{m}$;

(ii) $\dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{n}) = \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^f)+\dim \mathfrak{g}^x$;

(iii) $\gamma(\mathfrak{q}) = \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^f)+\operatorname{irr}(f)$.

Soit K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On a

$$\begin{aligned} 0 &= K(x, \mathfrak{n}) \text{ car } \mathfrak{q} \text{ est parabolique et } x \in \mathfrak{q}, \\ &= K(x, [\mathfrak{q}, \mathfrak{m}]), \\ &= f([\mathfrak{q}, \mathfrak{m}]), \end{aligned}$$

d'où (i). D'après 1.1 (ii), on a $\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{q}^f - \dim \mathfrak{g}^x$, d'où (ii). Soit r le rang de $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathfrak{q}/\mathfrak{n}$ est réductive de rang r, donc

$$\begin{aligned} \gamma(\mathfrak{q}) &= \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{n}) - r, \\ &= \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^f)+\dim \mathfrak{g}^f - r \text{ d'après (ii)}, \\ &= \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^f)+\operatorname{irr}(f). \end{aligned}$$

1.3. LEMME. — *Soient* $m \geqslant 3$, $n \geqslant 1$ *des entiers. Soit* $V = k^m \otimes k^{2n}$. *Le groupe* $\mathrm{SO}(m) \times \mathrm{Sp}(2n)$, *opérant de manière évidente dans* V, *n'a pas d'orbite ouverte.*

Supposons $2n \leqslant m$. Le stabilisateur d'un point générique de V se calcule grâce à [6] (théorème 5). Il est produit d'un sous-groupe $\mathrm{SO}(m')$ de $\mathrm{SO}(m)$ et d'un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{Sp}(2n)$; il est donc réductif, d'où le lemme dans ce cas.

Supposons $2n > m$. Si m est impair, le stabilisateur d'un point générique de V est donné par [6] (table 4); il n'est pas produit semi-direct d'un groupe semi-simple et d'un radical unipotent, d'où le lemme dans ce cas ([8], théorème 2). Si m est pair, le stabilisateur d'un point générique de V a pour composante neutre le produit d'un sous-groupe $\mathrm{Sp}(2n')$ de $\mathrm{Sp}(2n)$ et d'un sous-groupe de Cartan de $\mathrm{SO}(m)$ ([6], théorème 6, et [5] table 2, cas de C_n et de $m R(\varphi_1)$); il est donc réductif, d'où le lemme dans ce cas.

1.4. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie semi-simple,* ρ *une représentation simple injective symplectique de* $\mathfrak{g}$ *dans un espace* V *de dimension* $2n$, *admettant une orbite ouverte. Alors, à isomorphisme près,* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n,k)$ *et* ρ *est la représentation identique de* $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_r$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en facteurs simples. Alors $\rho = \rho_1 \otimes \ldots \otimes \rho_r$, où ρ_i est une représentation simple injective de $\mathfrak{g}_i$. Les ρ_i sont symplectiques ou orthogonales, un nombre impair d'entre elles étant symplectiques. On peut donc supposer que ρ_1 est symplectique, et $\rho_2 \otimes \ldots \otimes \rho_r$ orthogonale. Si $r > 1$, le lemme 1.3 prouve que ρ n'a pas d'orbite ouverte, d'où contradiction.

Ainsi, $\mathfrak{g}$ est simple. D'après [1], l'indice de ρ est < 1, et $\dim \rho < \dim \mathfrak{g}$ (ce point résulte aussi des premières lignes de la démonstration de 3.5). On trouve dans [5], pour toute algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, la liste des représentations simples de dimension $< \dim \mathfrak{g}$, avec, pour chaque cas, le stabilisateur d'un point générique. Les seuls cas où ce stabilisateur n'est pas réductif sont les suivants :

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(q, k)$ et ρ est la représentation identique de $\mathfrak{g}$; cette représentation n'est symplectique que si $q = 2$, et l'on trouve un des cas du lemme;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2q+1, k)$ et $\rho = \Lambda^2 \rho_1$, où ρ_1 est la représentation identique de $\mathfrak{g}$; cette représentation n'est jamais symplectique;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2q, k)$ et ρ est la représentationidenti que de $\mathfrak{g}$; on trouve un des cas du lemme;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(10, k)$ et ρ est l'une des représentations semi-spinorielles de $\mathfrak{g}$; cette représentation n'est pas symplectique.

1.5. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ *des algèbres de Lie simples,* ρ *une représentation injective symplectique de* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_r$ *dans un espace* V, *admettant une orbite ouverte.*

(i) *Il existe une décomposition* $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ *de* V *en sous-*$\mathfrak{g}$*-modules deux à deux orthogonaux, avec la propriété suivante : pour tout* i, $\mathfrak{g}_i$ *s'identifie à l'algèbre de Lie symplectique de* V_i *opérant identiquement dans* V_i, *et opère trivialement dans* $V_{i'}$ *pour* $i' \neq i$;

(ii) 0 *n'est pas poids de* V.

Soit $V = \bigoplus_{j \in J} W_j$ une décomposition de V en sous-$\mathfrak{g}$-modules simples. S'il existe $j, j' \in J$ tels que $j \neq j'$ et que les $\mathfrak{g}$-modules W_j et W_j' soient duaux, il existe sur $W_j \oplus W_{j'}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\mathfrak{g}$-invariante, donc une fonction polynomiale homogène non nulle du second degré $\mathfrak{g}$-invariante, ce qui contredit l'existence d'une orbite ouverte. Donc W_j et $W_{j'}$ sont non duaux pour $j \neq j'$. D'après [3] (lemme 4), V est somme de sous-modules simples deux à deux non isomorphes, deux à deux orthogonaux, symplectiques. Pour tout $j \in J$, il existe $i \in \{ 1, \ldots, r \}$ tel que $\mathfrak{g}_i$ s'identifie à l'algèbre de Lie symplectique de W_j opérant identiquement dans W_j, et que $\mathfrak{g}_{i'}$ opère trivialement dans W_j

pour $i' \neq i$ (lemme 1.4). Comme les sous-modules simples de V sont deux à deux non isomorphes et que ρ est injective, on définit ainsi une bijection de J sur $\{1, \ldots r\}$, d'où (i). L'assertion (ii) résulte aussitôt de (i) (et peut d'ailleurs s'établir directement).

1.6. LEMME. — *Pour $i = 1, 2, \ldots, r$, soit $\mathfrak{c}_i$ une algèbre de Lie produit d'algèbres simples de type C_i. Soit $\mathfrak{d}$ une algèbre de Lie semi-simple dont aucun facteur simple n'est de type C. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \ldots \times \mathfrak{c}_r \times \mathfrak{d}$, et ρ une représentation symplectique de $\mathfrak{g}$ admettant une orbite ouverte. On a*

$$\dim \rho \leqslant \gamma(\mathfrak{c}_1) + \frac{1}{2}\gamma(\mathfrak{c}_2) + \frac{1}{3}\gamma(\mathfrak{c}_3) + \ldots + \frac{1}{r}\gamma(\mathfrak{c}_r). \tag{3}$$

Si ρ est injective, cette inégalité devient une égalité.

Il suffit d'envisager le cas où ρ est injective. Grâce à 1.5, on se ramène au cas où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie symplectique d'un espace V de dimension $2n$, $\mathfrak{g}$ opérant identiquement dans V. Le deuxième membre de (3) est alors $1/n . 2n^2 = 2n$.

2. Cas où le radical est une algèbre de Heisenberg

2.1. Dans cette partie, le rôle principal sera tenu par les algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ possédant la propriété suivante :

(RH) $\mathfrak{g}$ *est produit semi-direct d'une algèbre réductive et d'une algèbre de Heisenberg $\mathfrak{n}$, le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{n}$ étant tel que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{c}] = 0$.*

Par exemple, si le radical de $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Heisenberg $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{g}$ est produit semi-direct d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$ et de $\mathfrak{n}$, et $\mathfrak{s}$ opère trivialement dans le centre de $\mathfrak{n}$ puisque celui-ci est de dimension 1. Donc $\mathfrak{g}$ vérifie (RH).

2.2. LEMME. — *Soient W, X des espaces vectoriels munis de formes bilinéaires alternées B_W, B_X. Soient $G = W \oplus X$, B_G la somme directe de B_W et B_X. Soient P un sous-espace vectoriel totalement isotrope maximal de G, Q et R les projections de P sur W et X (pour la décomposition $G = W \oplus X$), $Q' = P \cap W \subset Q$, $R' = P \cap X \subset R$.*

(i) *Q et Q' sont l'orthogonal l'un de l'autre pour B_W;*

(ii) *R et R' sont l'orthogonal l'un de l'autre pour B_X;*

(iii) *la correspondance entre W et X associée à P admet Q pour ensemble de définition, R pour ensemble des valeurs, et définit par passage au quotient une bijection linéaire de Q/Q' sur R/R'.*

Soient N_W, N_X, N_G les noyaux de B_W, B_X, B_G. On a $N_W \oplus N_X = N_G \subset P$, donc

(4) $$N_W \subset Q' \subset Q, \qquad N_X \subset R' \subset R.$$

Soit Q_1 l'orthogonal de Q pour B_W. On a

$$Q_1 = \{ x \in W;\ B_G(x, P) = 0 \} = W \cap P = Q'.$$

Compte tenu de (4), l'orthogonal de Q' pour B_W est donc Q. On a prouvé (i), et (ii) s'en déduit par symétrie. L'assertion (iii) (qui n'a rien à voir avec les formes alternées) est évidente.

2.3. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{n}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$ *qui est une algèbre de Heisenberg,* $\mathfrak{c}$ *le centre de* $\mathfrak{n}$, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{x} = (\operatorname{Ker} f) \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{w} = \{ y \in \mathfrak{g};\ [y, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{x} \}$, *et* $g = f \mid \mathfrak{w}$. *On suppose que* $f \mid \mathfrak{c} \neq 0$.

(i) *La restriction de* B_f *à* $\mathfrak{x}$ *est non dégénérée;*

(ii) $\mathfrak{w}$ *est l'orthogonal de* $\mathfrak{x}$ *pour* B_f, *et c'est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *contenant* $\mathfrak{c}$;

(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{x}$;

(iv) $\mathfrak{g}^f = \mathfrak{w}^g$;

(v) $\operatorname{irr}(g) = \operatorname{irr}(f)$.

Les assertions (i) à (iv) sont très faciles, et signalées dans [3] (lemme 1). Soit g_1 un élément régulier de $\mathfrak{w}^*$ non nul sur $\mathfrak{c}$. Soit $f_1 \in \mathfrak{g}^*$ le prolongement de g_1 qui s'annule sur $\mathfrak{x}$. On a

$$\operatorname{irr}(g) = \dim \mathfrak{w}^g - \dim \mathfrak{w}^{g_1} = \dim \mathfrak{g}^f - \dim \mathfrak{g}^{f_1} \leqslant \operatorname{irr}(f).$$

Soient f_2 un élément régulier de $\mathfrak{g}^*$ non nul sur $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{x}' = (\operatorname{Ker} f_2) \cap \mathfrak{n}$, $\mathfrak{w}' = \{ x \in \mathfrak{g};\ [x, \mathfrak{x}'] \subset \mathfrak{x}' \}$, et $g' = f_2 \mid \mathfrak{w}'$. Il existe $n \in \mathfrak{n}$ tel que $(\exp \operatorname{ad} n)(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}'$, d'où $(\exp \operatorname{ad} n)(\mathfrak{w}) = \mathfrak{w}'$. Il existe donc $g_2 \in \mathfrak{w}^*$ tel que $\dim \mathfrak{w}^{g_2} = \dim \mathfrak{w}'^{g'}$. Alors

$$\operatorname{irr}(f) = \dim \mathfrak{g}^f - \dim \mathfrak{g}^{f_2} = \dim \mathfrak{w}^g - \dim \mathfrak{w}'^{g'} = \dim \mathfrak{w}^g - \dim \mathfrak{w}^{g_2} \leqslant \operatorname{irr}(g).$$

2.4. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{c}$, f, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{w}$, g *comme en* 2.3. *Soient* $\mathfrak{p}$ *une polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* f, $\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{r}$ *les projections de* $\mathfrak{p}$ *sur* $\mathfrak{w}$ *et* $\mathfrak{x}$ (*pour la décomposition* $\mathfrak{g} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{x}$), $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{w} \subset \mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{x} \subset \mathfrak{r}$. *On suppose* $\mathfrak{c}$ *central dans* $\mathfrak{g}$.

(i) $\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{q}'$ *sont l'orthogonal l'un de l'autre dans* $\mathfrak{w}$ *pour* B_g, *et sont des sous-algèbres de* $\mathfrak{w}$ *contenant* $\mathfrak{c}$;

(ii) $\mathfrak{r}$ *et* $\mathfrak{r}'$ *sont l'orthogonal l'un de l'autre dans* $\mathfrak{x}$ *pour* $B_f \mid \mathfrak{x} \times \mathfrak{x}$, *et* $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'] = 0$;

(iii) *on a* $[\mathfrak{q}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}, [\mathfrak{q}, \mathfrak{r}'] \subset \mathfrak{r}'$, *de sorte que* $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ *peut être considéré comme un* $\mathfrak{q}$*-module grâce à la représentation adjointe; la forme alternée non dégénérée sur* $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ *déduite de* B_f *est* $\mathfrak{q}$*-invariante;*

(iv) *soit* $u : \mathfrak{q} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ *la surjection de noyau* $\mathfrak{q}'$ *associée à* $\mathfrak{p}$ (*cf.* 2.2 (iii))*; alors* u *est un cocycle de* $\mathfrak{q}$ *à valeurs dans* $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$*;*

(v) *le radical de* $\mathfrak{p}$ *contient* $\mathfrak{r}'$, *et sa projection sur* $\mathfrak{w}$ *est le radical de* $\mathfrak{q}$*; les parties semi-simples de* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{q}$ *sont isomorphes.*

Appliquons le lemme 2.2 avec $W = \mathfrak{w}$, $X = \mathfrak{x}$, $G = \mathfrak{g}$, $P = \mathfrak{p}$, $B_G = B_f$. On voit que $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ sont l'orthogonal l'un de l'autre pour B_g, et que $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ sont l'orthogonal l'un de l'autre pour $B_f \mid \mathfrak{x}\times\mathfrak{x}$. On a $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}_f = \mathfrak{w}_g \subset \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$.

Il est clair que $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{w}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{w}$. D'autre part, $\mathfrak{q}/\mathfrak{c}$ est la projection de $\mathfrak{p}/\mathfrak{c}$ sur $\mathfrak{w}/\mathfrak{c}$ pour la décomposition $\mathfrak{g}/\mathfrak{c} = (\mathfrak{w}/\mathfrak{c}) \oplus (\mathfrak{n}/\mathfrak{c})$, et $\mathfrak{n}/\mathfrak{c}$ est un idéal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, donc $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{w}$.

On a $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'] \subset \mathfrak{c}$, et $f([\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']) = B_f(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') = 0$, donc $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'] = 0$. Les assertions (i) et (ii) sont démontrées.

Considérons $\mathfrak{x}$ comme un $\mathfrak{w}$-module pour la représentation adjointe. On a, pour $x \in \mathfrak{w}$, $y \in \mathfrak{x}$ et $z \in \mathfrak{x}$:

$$[x.y, z]+[y, x.z] = [[x, y], z]+[y, [x, z]] = [x, [y, z]] \in [x, \mathfrak{c}] = 0;$$

donc $B_f(x.y, z)+B_f(y, x.z) = 0$. Autrement dit, $B_f \mid \mathfrak{x}\times\mathfrak{x}$ est $\mathfrak{w}$-invariante.

On a $[\mathfrak{q}, \mathfrak{r}'] \subset [\mathfrak{p}+\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'] = [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}'] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, et $[\mathfrak{q}, \mathfrak{r}'] \subset [\mathfrak{w}, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{x}$, donc $[\mathfrak{q}, \mathfrak{r}'] \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{x} = \mathfrak{r}'$. Comme $B_f \mid \mathfrak{x}\times\mathfrak{x}$ est $\mathfrak{q}$-invariante, on en déduit que $[\mathfrak{q}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$. L'assertion (iii) est démontrée.

Soient $x, y \in \mathfrak{p}$. Ecrivons $x = x'+x''$, $y = y'+y''$ avec $x', y' \in \mathfrak{q}$, $x'', y'' \in \mathfrak{r}$. On a

$$[x', y']+[x', y'']+[x'', y'] = [x, y]-[x'', y''] \in \mathfrak{p}+\mathfrak{c} = \mathfrak{p},$$
$$[x', y'] \in \mathfrak{q},$$
$$[x', y'']+[x'', y'] \in [\mathfrak{q}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r},$$

donc $u([x', y'])$ est la classe modulo $\mathfrak{r}'$ de $[x', y'']-[y', x'']$, c'est-à-dire $x'.u(y'')-y'.u(x'')$. Cela prouve (iv). L'assertion (v) est immédiate.

2.5. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{n}$ *une algèbre de Heisenberg,* $\mathfrak{c}$ *son centre,* $\mathfrak{g}$ *un produit semi-direct d'une algèbre de Lie réductive et de* $\mathfrak{n}$, *tel que* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{c}] = 0$. *Soient* f, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, u *comme en* 2.3 *et* 2.4. *Soient* $\mathfrak{l}$ *le radical de* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ *le radical de* $\mathfrak{q}$.

(i) *On a* $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}', \mathfrak{l} = \mathfrak{m}+\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{q}'+\mathfrak{r}'$*;*

(ii) *il existe* $\xi \in \mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ *tel que* $u(x) = x.\xi$ *pour tout* $x \in \mathfrak{q}$*;*

(iii) *si* $\mathfrak{q}''$ *est un idéal de* $\mathfrak{q}$ *contenu dans* $\mathfrak{q}'$, *on a* $\mathfrak{q}''.(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') = 0$; *en particulier*, $\mathfrak{m}.(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') = 0$, *de sorte que* $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ *peut être considéré comme un* $(\mathfrak{q}/\mathfrak{m})$-*module symplectique; ce module admet une orbite ouverte;*

(iv) *on a* $\gamma(\mathfrak{p}) = \dim(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}')+\operatorname{irr}(f)$.

L'algèbre $\mathfrak{w}$ est produit de $\mathfrak{c}$ et d'une algèbre réductive, donc est elle-même réductive. Soit $g = f \mid \mathfrak{w}$. On a $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}^g$ (2.4 (i)), donc $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}'$ (1.2 (i)). Si $x \in \mathfrak{l}$, soit $x = y+z$ avec $y \in \mathfrak{q}$, $z \in \mathfrak{r}$; on a $y \in \mathfrak{m}$ (2.4 (v)), donc $y \in \mathfrak{q}'$, $u(y) = 0$, $z \in \mathfrak{r}'$, $x \in \mathfrak{m}+\mathfrak{r}'$. Cela prouve que $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{m}+\mathfrak{r}'$. Si $x' \in \mathfrak{m}$, soit $x' = y'+z'$ avec $y' \in \mathfrak{l}$, $z' \in \mathfrak{r}$; on a

$$z' \in (\mathfrak{l}+\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{x} \subset (\mathfrak{m}+\mathfrak{r}') \cap \mathfrak{x} = \mathfrak{r}' \subset \mathfrak{l},$$

donc $x' \in \mathfrak{l}$. Cela prouve que $\mathfrak{m}+\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{l}$.

Le cocycle u s'annule sur $\mathfrak{m}$ d'après (i); c'est donc un cobord, ce qui prouve (ii). Soit $\mathfrak{q}''$ un idéal de $\mathfrak{q}$ contenu dans $\mathfrak{q}'$. Si $y \in \mathfrak{q}''$ et $x \in \mathfrak{q}$, on a

$$y.u(x) = x.u(y)-u([x, y]) \subset x.u(\mathfrak{q}'')+u(\mathfrak{q}'') \subset x.u(\mathfrak{q}')+u(\mathfrak{q}') = 0;$$

comme u est surjectif, on en déduit que $\mathfrak{q}''.(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') = 0$. Le fait que u est surjectif entraîne aussi, avec les notations de (ii), que $\mathfrak{q}.\xi = \mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$, de sorte que le $(\mathfrak{q}/\mathfrak{m})$-module $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ admet une orbite ouverte. Enfin, on a

$$\begin{aligned}\gamma(\mathfrak{p}) &= \gamma(\mathfrak{q}) && (2.4(\text{v}))\\ &= \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^g)+\operatorname{irr}(g) && (1.2(\text{iii}))\\ &= \dim(\mathfrak{q}/\mathfrak{q}')+\operatorname{irr}(f) && (2.3(\text{v}))\\ &= \dim(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}')+\operatorname{irr}(f) && (2.2(\text{iii})).\end{aligned}$$

2.6. Lemme. — *On reprend les hypothèses de* 2.5. *Soient* $\mathfrak{w}_1$ *l'algèbre semi-simple* $[\mathfrak{w}, \mathfrak{w}]$, $g_1 = f \mid \mathfrak{w}_1$, x *l'élément de* $\mathfrak{w}_1$ *correspondant à* g_1 *par l'isomorphisme de Killing. Si* x *est régulier semi-simple dans* $\mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{p}$ *est résoluble.*

Si x est régulier semi-simple, $\mathfrak{w}_1^{g_1}$ est une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{w}_1$. On a $\mathfrak{h} = \mathfrak{w}_1^{g_1} \subset \mathfrak{w}^{f \mid \mathfrak{w}} \subset \mathfrak{q}'$, donc u s'annule sur $\mathfrak{h}$. Avec les notations de 2.5 (ii), ξ est donc de poids 0. D'après 1.5 (ii), on a $\xi = 0$, donc $u = 0$, donc $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. Alors $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{w}_1$ est une polarisation de $\mathfrak{w}_1$ en g_1. Comme x est régulier, $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{w}_1$ est résoluble, donc $\mathfrak{q}$ est résoluble, donc $\mathfrak{p}$ est résoluble.

2.7. Proposition. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie vérifiant la condition* (RH). *Il existe une partie ouverte non vide* U *de* $\mathfrak{g}^*$ *telle que, pour toute* $f \in U$, *toute polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* f *soit résoluble.*

Soient $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{c}$ comme dans (RH), $\mathfrak{z}$ l'algèbre semi-simple $[\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathfrak{g}/\mathfrak{n}]$, U' l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ telles que $f \mid \mathfrak{c} \neq 0$. Si $f \in U'$, soient $\mathfrak{w}$ comme en 2.3, g_f la forme linéaire sur $\mathfrak{z}$ correspondant à $f \mid [\mathfrak{w}, \mathfrak{w}]$ par l'isomorphisme $[\mathfrak{w}, \mathfrak{w}] \to [\mathfrak{g}/\mathfrak{n}, \mathfrak{g}/\mathfrak{n}]$, et x_f l'image de g_f dans $\mathfrak{z}$ par l'isomorphisme de Killing. L'application $f \mapsto x_f$ de U' dans $\mathfrak{z}$ est régulière. L'ensemble U des $f \in U'$ tels que x_f soit régulier semi-simple dans $\mathfrak{z}$ et donc une partie ouverte de $\mathfrak{g}^*$, évidemment non vide. Pour $f \in U$, toute polarisation de $\mathfrak{g}$ en f est résoluble d'après 2.6.

2.8. Proposition. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie vérifiant la condition* (RH). *Soient* $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{p}$ *une polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* f. *Ecrivons la partie semi-simple de* $\mathfrak{p}$ *sous la forme* $\mathfrak{c}_1 \times \mathfrak{c}_2 \times \ldots \times \mathfrak{c}_r \times \mathfrak{d}$, *où* $\mathfrak{c}_i$ *est produit d'algèbres simples de type* C_i *et où aucun facteur simple de* $\mathfrak{d}$ *n'est de type C. Alors*

$$\sum_{i \geqslant 2} \frac{i-1}{i} \gamma(\mathfrak{c}_i) + \gamma(\mathfrak{d}) \leqslant \operatorname{irr}(f).$$

Introduisons les notations de 2.5. D'après 2.4 (v), 2.5 (iii) et 1.6, on a

$$\dim(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') \leqslant \gamma(\mathfrak{c}_1) + \frac{1}{2}\gamma(\mathfrak{c}_2) + \ldots + \frac{1}{r}\gamma(\mathfrak{c}_r).$$

Alors, d'après 2.5 (iv) :

$$\gamma(\mathfrak{c}_1) + \gamma(\mathfrak{c}_2) + \ldots + \gamma(\mathfrak{c}_r) + \gamma(\mathfrak{d}) \leqslant \gamma(\mathfrak{c}_1) + \frac{1}{2}\gamma(\mathfrak{c}_2) + \ldots + \frac{1}{r}\gamma(\mathfrak{c}_r) + \operatorname{irr}(f),$$

d'où la proposition.

2.9. Lemme. — *On reprend les notations de* 2.5. *Soit* $\mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{t}_a$ *une décomposition en facteurs simples d'une sous-algèbre de Levi de* $\mathfrak{q}$. *Soit* $\mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{s}_a$ *une décomposition en facteurs simples d'une sous-algèbre de Levi de* $\mathfrak{p}$, *telle que la projection sur* $\mathfrak{q}$ *parallèlement à* $\mathfrak{x}$ *définisse un isomorphisme de* $\mathfrak{s}_1$ *sur* $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{s}_a$ *sur* $\mathfrak{t}_a$ ($\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_a$ *existent*). *Soit* $\mathfrak{j}$ *un supplémentaire de* $\mathfrak{r}'$ *dans* $\mathfrak{r}$ *stable pour* $\mathfrak{t}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{t}_a$ ($\mathfrak{j}$ *existe*). *Après renumérotation de* $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_a$, *il existe une décomposition* $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{j}_b$ ($b \leqq a$) *en sous-*($\mathfrak{t}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{t}_a$)*-modules simples, telle que* $\mathfrak{t}_i$ *opère trivialement dans* $\mathfrak{j}_{i'}$ *pour* $i \neq i'$, *et que* $\mathfrak{t}_i$ *opère injectivement dans* $\mathfrak{j}_i$ *avec orbite ouverte pour* $i = 1, \ldots, b$ (1.5 (i)).

(i) *On a* $u(\mathfrak{t}_1) = \mathfrak{j}_1, \ldots, u(\mathfrak{t}_b) = \mathfrak{j}_b$, $u(\mathfrak{t}_{b+1}) = \ldots = u(\mathfrak{t}_a) = 0$ (*on identifie* $\mathfrak{j}$ *à* $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$)*;*

(ii) *on a* $\mathfrak{s}_1 \subset \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{j}_1 + \mathfrak{r}'$, $\ldots$, $\mathfrak{s}_b \subset \mathfrak{t}_b + \mathfrak{j}_b + \mathfrak{r}'$, $\mathfrak{s}_{b+1} \subset \mathfrak{t}_{b+1} + \mathfrak{r}'$, $\ldots$, $\mathfrak{s}_a \subset \mathfrak{t}_a + \mathfrak{r}'$*;*

(iii) *pour* $i \neq i'$, *on a*

$$[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i'}] = [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'}] = [\mathfrak{j}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = 0$$

$$[\mathfrak{t}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}' \qquad [\mathfrak{j}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}'.$$

L'assertion (i) résulte de 2.5 (ii); elle entraîne (ii). Soit $i \neq i'$. Evidemment, $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i'}] = [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'}] = 0$. Les sous-espaces $\mathfrak{j}_1, \ldots, \mathfrak{j}_b$ sont deux à deux orthogonaux pour la forme alternée $(\mathfrak{q}/\mathfrak{m})$-invariante sur $\mathfrak{j}$ (identifié à $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$), donc $[\mathfrak{j}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = 0$. On a $\mathfrak{t}_i . \mathfrak{j}_{i'} = 0$, donc $[\mathfrak{t}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = 0$. Comme $[\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'}] = [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{j}_{i'}] = 0$, on a $[\mathfrak{t}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}'$ d'après (ii). On voit de même que $[\mathfrak{j}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}'$.

2.10. Lemme. — *On reprend les notations de* 2.9. *Soit* $c \in \{1, 2, \ldots, b\}$. *Pour* $i = 1, \ldots, c$, *soient* $\mathfrak{v}_i$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{t}_i$ *et* $\mathfrak{k}_i$ *un sous-espace vectoriel totalement isotrope de* $\mathfrak{j}_i$ *tels que* $\mathfrak{v}_i . \mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{k}_i$. *Soit*

$$\mathfrak{p}_* = \mathfrak{v}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{v}_c \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{s}_{c+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{s}_a \oplus \mathfrak{l}.$$

(i) $\mathfrak{p}_*$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$;

(ii) $\mathfrak{k}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{l}$ *est un idéal résoluble de* $\mathfrak{p}_*$;

(iii) *si* $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_c$ *sont résolubles, le radical de* $\mathfrak{p}_*$ *est*

$$\mathfrak{v}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{v}_c \oplus \mathfrak{k}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{l};$$

(iv) *si* $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_c$ *sont totalement isotropes pour* B_f, $\mathfrak{p}_*$ *est totalement isotrope pour* B_f;

(v) *si* $\dim \mathfrak{v}_i + \dim \mathfrak{k}_i = \dim \mathfrak{t}_i$ *pour* $i = 1, \ldots, c$, *on a* $\dim \mathfrak{p}_* = \dim \mathfrak{p}$.

1° On a $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_i] \subset \mathfrak{v}_i$, $[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_i] = B_f(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_i) = 0$, $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i] \subset \mathfrak{s}_i$, $B_f(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_i) \subset B_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$, $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$, $B_f(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \subset B_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$.

2° Si $i \neq i'$, on a $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_{i'}] \subset [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'}] = 0$, donc $B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_{i'}) = 0$.

3° On a $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{k}_i] = \mathfrak{v}_i . \mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{k}_i$, $B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{k}_i) \subset B_f(\mathfrak{w}, \mathfrak{x}) = 0$, et, pour $i \neq i'$, $[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{k}_{i'}] \subset \mathfrak{t}_i . \mathfrak{j}_{i'} = 0$, donc $B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{k}_{i'}) = 0$.

4° Pour $i = 1, \ldots, c$ et $i' = c+1, \ldots, a$, on a

$$[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset [\mathfrak{t}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset \mathfrak{r}' \subset \mathfrak{l}, \qquad \text{et} \qquad B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{s}_{i'}) \subset B_f(\mathfrak{t}_i, \mathfrak{t}_{i'} + \mathfrak{x}) = 0.$$

5° On a

$$[\mathfrak{v}_i, \mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{q}, \mathfrak{m} + \mathfrak{r}'] \subset \mathfrak{m} + \mathfrak{r}' = \mathfrak{l}\,(2.5\,(\mathrm{i})),$$

et

$$B_f(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{l}) \subset B_f(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' + \mathfrak{r}') = 0.$$

6° Si $i \neq i'$, $\mathfrak{k}_i$ et $\mathfrak{k}_{i'}$ sont orthogonaux, donc $[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_{i'}] = 0 = B_f(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{k}_{i'})$.

7° Pour $i = 1, \ldots, c$ et $i' = c+1, \ldots, a$, on a

$$[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{s}_{i'}] \subset [\mathfrak{k}_i, \mathfrak{t}_{i'} + \mathfrak{j}_{i'} + \mathfrak{r}'] = \mathfrak{t}_{i'} . \mathfrak{k}_i = 0 \qquad \text{donc} \qquad B_f(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{s}_{i'}) = 0.$$

8° On a

$$[\mathfrak{k}_i, \mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{r}, \mathfrak{m}+\mathfrak{r}'] = [\mathfrak{m}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}' \subset \mathfrak{l}, \qquad \text{et} \qquad B_f(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{l}) \subset B_f(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}+\mathfrak{r}') = 0.$$

9° Si $i \neq i'$, on a $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i'}] = 0$, donc $B_f(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_{i'}) = 0$.

10° On a $[\mathfrak{s}_i, \mathfrak{l}] \subset [\mathfrak{p}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}$, et $B_f(\mathfrak{s}_i, \mathfrak{l}) \subset B_f(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) = 0$.

Cela prouve les assertions (i) à (iv). L'assertion (v) est évidente.

2.11. Lemme. — *On reprend les notations de* 2.9. *On suppose la numérotation des* $\mathfrak{t}_i$ *telle que* $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_c$ *soient de type* $A_1 = C_1$, *et que* $\mathfrak{t}_{c+1}, \ldots, \mathfrak{t}_b$ *ne soient pas de type* A_1. *Pour* $i = 1, \ldots, c$, *il existe une sous-algèbre résoluble* $\mathfrak{v}_i$ *de* $\mathfrak{t}_i$, *totalement isotrope pour* B_f, *de dimension* 2; *il existe ensuite une droite* $\mathfrak{k}_i$ *de* $\mathfrak{j}_i$ *telle que* $\mathfrak{v}_i.\mathfrak{k}_i \subset \mathfrak{k}_i$. *Définissons alors* $\mathfrak{p}_*$ *comme en* 2.10.

(i) $\mathfrak{p}_*$ *est une polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* f.

(ii) *Définissons* $\mathfrak{q}_*$, $\mathfrak{q}'_*$, $\mathfrak{r}_*$, $\mathfrak{r}'_*$ *relativement à* $\mathfrak{p}_*$ *comme* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ *ont été définis relativement à* $\mathfrak{p}$. *Alors les facteurs simples de type* A_1 *de la partie semi-simple de* $\mathfrak{q}_*$ *opèrent trivialement dans* $\mathfrak{r}_*/\mathfrak{r}'_*$.

L'assertion (i) résulte aussitôt de 2.10. (Le rôle spécial de A_1 apparaît dans l'égalité $\dim \mathfrak{v}_i + \dim \mathfrak{k}_i = \dim \mathfrak{t}_i$).

D'après 2.10 (iii), $\mathfrak{s}_{c+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{s}_a$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}_*$, donc $\mathfrak{t}_{c+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{t}_a$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{q}_*$. Pour $i = c+1, \ldots, b$ $\mathfrak{t}_i$ n'est pas de type A_1. Pour $i = b+1, \ldots, a$, on a $\mathfrak{t}_i \subset \mathfrak{q}'$, donc $\mathfrak{t}_i + \mathfrak{m} \subset \mathfrak{q}'$, donc l'idéal $\mathfrak{t}_i + \mathfrak{m}$ de $\mathfrak{q}$ opère trivialement dans $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$ (2.5 (iii)). Or $\mathfrak{r}'_* = \mathfrak{p}_* \cap \mathfrak{x} \supset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{x} = \mathfrak{r}'$, donc $\mathfrak{r}_* \subset \mathfrak{r}$, et $\mathfrak{t}_i$ opère trivialement dans $\mathfrak{r}_*/\mathfrak{r}'_*$.

2.12. Lemme. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie vérifiant la condition* (RH). *Alors le théorème de l'introduction est vrai.*

On reprend les notations de 2.10. En choisissant bien $\mathfrak{p}$, on peut supposer, d'après 2.11, que $\mathfrak{c}_1$ opère trivialement dans $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}'$. Alors, dans la démonstration de 2.8, la première inégalité est remplacée par

$$\dim(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}') \leqslant \frac{1}{2}\gamma(\mathfrak{c}_2) + \ldots + \frac{1}{r}\gamma(\mathfrak{c}_r),$$

et la démonstration s'achève comme celle de 2.8.

3. Cas général

3.1. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, f *un élément de* $\mathfrak{g}^*$ *tel que* $f(\mathfrak{a}) = 0$, f' *l'élément de* $\mathfrak{g}'^*$ *déduit de* f *par passage au quotient. On a* $\operatorname{irr}(f') \leqq \operatorname{irr}(f)$.

On a $\mathfrak{g}_f \supset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}^f/\mathfrak{a} = \mathfrak{g}'^{f'}$, d'où très facilement le lemme.

3.2. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{a}$ *un idéal commutatif de* $\mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}'$ *la sous-algèbre* $\mathfrak{a}^f$, $f' = f \mid \mathfrak{g}'$. *Soient* $\mathfrak{a}'$ *le noyau de* $f \mid \mathfrak{a}$ (*qui est un idéal de* $\mathfrak{g}'$), $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{a}'$, f'' *l'élément de* $\mathfrak{g}''^*$ *déduit de* f' *par passage au quotient. On a* $\operatorname{irr}(f'') \leqq \operatorname{irr}(f)$.

Si $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, le lemme résulte de 3.1. Supposons $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$. Soit U l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{g}''$ dont le noyau ne contient pas $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'$. Il existe un élément f_1'' de U qui est une forme régulière sur $\mathfrak{g}''$. Soit f_1' la forme correspondante sur $\mathfrak{g}'$, et $f_1 \in \mathfrak{g}^*$ un prolongement de f_1'. On a $f_1(\mathfrak{a}) \neq 0$ et $f_1(\mathfrak{a}') = 0$, donc il existe $\lambda \in k - \{0\}$ tel que $f_1 \mid \mathfrak{a} = \lambda f \mid \mathfrak{a}$. Par suite $\mathfrak{a}^{f_1} = \mathfrak{a}^f = \mathfrak{g}'$. Comme $\mathfrak{g}'$ est l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ pour B_f, on a

$$\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^f = \dim \mathfrak{g}' + \dim \mathfrak{g}'^{f'}.$$

De même,

$$\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^{f_1} = \dim \mathfrak{g}' + \dim \mathfrak{g}'^{f_1'}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{irr}(f'') &= \dim \mathfrak{g}''^{f''} - \dim \mathfrak{g}''^{f_1''} \\ &= \dim \mathfrak{g}'^{f'} - \dim \mathfrak{g}'^{f_1'} \\ &= \dim \mathfrak{g}^f - \dim \mathfrak{g}^{f_1} \leqslant \operatorname{irr}(f). \end{aligned}$$

3.3. LEMME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{a}$ *un idéal commutatif de* $\mathfrak{g}$, f *un élément polarisable de* $\mathfrak{g}^*$. *Il existe une polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* f *contenant* $\mathfrak{a}$.

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f, $\mathfrak{h}' = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f) + \mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ subordonnée à f. Posons $\dim(\mathfrak{a}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) = q$. On a $\dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^f) \leqq q$, d'où $\dim \mathfrak{h}' \geqq \dim \mathfrak{h}$. Cela entraîne aussitôt le lemme.

3.4. *Démonstration du théorème de l'introduction.* — Le théorème est évident si $\mathfrak{g} = 0$. On raisonne par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$.

1° Supposons qu'il existe un idéal commutatif $\mathfrak{a} \neq 0$ de $\mathfrak{g}$ tel que $f(\mathfrak{a}) = 0$. Soient $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, π le morphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$, f' la forme linéaire sur $\mathfrak{g}'$ telle que $f = f' \circ \pi$. Toute polarisation en f contient $\mathfrak{a}$. Puisque f est polarisable, f' est polarisable. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une polarisation $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{g}'$ en f' telle que, avec des notations évidentes

$$\gamma(\mathfrak{c}_1') + \textstyle\sum_{i \geqslant 2} \dfrac{i-1}{i} \gamma(\mathfrak{c}_i') + \gamma(\mathfrak{d}') \leqslant \operatorname{irr}(f').$$

Alors $\mathfrak{p} = \pi^{-1}(\mathfrak{p}')$ est une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f dont la partie semi-simple est isomorphe à celle de $\mathfrak{p}'$. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme 3.1.
(H_1) *Nous supposerons donc désormais que f ne s'annule sur aucun idéal commutatif de $\mathfrak{g}$ distinct de* 0.

2° Supposons qu'il existe un idéal commutatif $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) \neq 0$. Introduisons $\mathfrak{g}', f', \mathfrak{a}', \mathfrak{g}'', f''$ comme en 3.2. Puisque f est polarisable, il existe une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f qui contient $\mathfrak{a}$ (3.3); cette polarisation est contenue dans $\mathfrak{a}^f = \mathfrak{g}'$, donc est une polarisation de $\mathfrak{g}'$ en f'. Donc f'' est polarisable. On a $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une polarisation $\mathfrak{p}''$ de $\mathfrak{g}''$ en f'' telle que, avec des notations évidentes,

$$\gamma(\mathfrak{c}_1'')+\textstyle\sum_{i\geqslant 2}\dfrac{i-1}{i}\gamma(\mathfrak{c}_i'')+\gamma(\mathfrak{d}'') \leqslant \operatorname{irr}(f'').$$

Soit $\mathfrak{p}'$ l'image réciproque de $\mathfrak{p}''$ dans $\mathfrak{g}'$. Alors $\mathfrak{p}'$ est une polarisation de $\mathfrak{g}'$ en f' dont la partie semi-simple est isomorphe à celle de $\mathfrak{p}''$. Comme $\dim \mathfrak{g}+\dim \mathfrak{g}^f = \dim \mathfrak{g}'+\dim \mathfrak{g}'^{f'}$, $\mathfrak{p}'$ est une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme 3.2.
(H_2) *Nous supposerons donc désormais que, pour tout idéal commutatif $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$, on a $f([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]) = 0$.*

3° Comme dans [3] (p. 325), les hypothèses (H_1) et (H_2) entraînent qu'on est dans l'un des trois cas suivants :

(*a*) $\mathfrak{g}$ est semi-simple;

(*a'*) $\mathfrak{g}$ est produit d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre de dimension 1;

(*b*) le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Heisenberg, le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{n}$ est central dans $\mathfrak{g}$, et $f(\mathfrak{c}) \neq 0$.

Le cas (*a'*) se ramène au cas (*a*), qui résulte de 1.2. Plaçons-nous désormais dans le cas (*b*).

4° Adoptons les notations de 2.3. D'après [3] (lemme 3), il existe une décomposition en somme directe $\mathfrak{w} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{c}$, telle que $\mathfrak{s}$ soit une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$ et que $[\mathfrak{s}, \mathfrak{t}] = 0$, $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{c}$. Alors $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2$, où $\mathfrak{t}_2$ est une algèbre de Lie commutative et où $\mathfrak{t}_1+\mathfrak{c}$ est une algèbre de Heisenberg (éventuellement réduite à $\mathfrak{c}$) permutable à $\mathfrak{t}_2$. Si $\mathfrak{t}_1 = 0$, $\mathfrak{g}$ vérifie la condition (RH) et le théorème résulte de 2.12. Supposons désormais $\mathfrak{t}_1 \neq 0$. Soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}_2 \oplus \mathfrak{n}$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{t}_1$, $[\mathfrak{t}_1, \mathfrak{s}+\mathfrak{t}_2] = 0$, et $f([\mathfrak{t}_1, \mathfrak{n}]) \subset f([\mathfrak{w}, \mathfrak{x}]) = 0$, donc $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{t}_1$ sont orthogonaux pour B_f. D'autre part, $B_f \mid \mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{t}_1$ est non dégénérée. Donc $\mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{a}$.

On a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{s}+\mathfrak{t}+\mathfrak{n}, \mathfrak{s}+\mathfrak{t}+\mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{s}+\mathfrak{t}, \mathfrak{s}+\mathfrak{t}]+\mathfrak{n} \subset \mathfrak{s}+\mathfrak{n}$. Soit $\mathfrak{g}_1$ la somme de $\mathfrak{a}$ et d'un sous-espace vectoriel $\mathfrak{t}'_1$ de codimension 1 dans $\mathfrak{t}_1$. Puisque $\mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{s}+\mathfrak{n} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}_1$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soit $f_1 = f \mid \mathfrak{g}_1$. Alors $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_1$, et l'orthogonal de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}_1$ est

$$\mathfrak{w}_1 = \{ x \in \mathfrak{g}_1 \mid [x, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{x} \} = \mathfrak{w} \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{s}+\mathfrak{t}'_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{c}.$$

L'algèbre $\mathfrak{w}$ (resp. $\mathfrak{w}_1$) est produit des algèbres $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}+\mathfrak{c}$ (resp. $\mathfrak{t}'_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{c}$). Soit $g_1 = f_1 \mid \mathfrak{w}_1 = f \mid \mathfrak{w}_1$. Comme $f(\mathfrak{c}) \neq 0$, on a $\operatorname{irr}(f \mid \mathfrak{t}+\mathfrak{c}) = 0$ et $\operatorname{irr}(f \mid \mathfrak{t}'_1+\mathfrak{t}_2+\mathfrak{c}) = 0$, donc, d'après 2.3,

$$\operatorname{irr}(f) = \operatorname{irr}(g) = \operatorname{irr}(g \mid \mathfrak{s}) = \operatorname{irr}(g_1 \mid \mathfrak{s}) = \operatorname{irr}(g_1) = \operatorname{irr}(f_1). \tag{5}$$

Il existe un élément t de $\mathfrak{t}_1 - \{ 0 \}$ tel que $\mathfrak{g}_1$ soit l'orthogonal de t dans $\mathfrak{g}$. Soit G le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$. Considérons l'enveloppe algébrique de $k\,(\operatorname{ad} t)$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$; c'est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique irréductible commutatif G_1 de G. Comme $[t, \mathfrak{s}] = [t, \mathfrak{c}] = 0$ et que $[t, \mathfrak{x}] \subset \mathfrak{x}$, G_1 laisse fixe $f \mid \mathfrak{s}+\mathfrak{n}$, donc $f \mid [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donc B_f, donc laisse stable l'ensemble P des polarisations de $\mathfrak{g}$ en f. Or P est une sous-variété algébrique complète d'une grassmannienne de $\mathfrak{g}$. Par hypothèse, $P \neq \emptyset$. Il existe donc une polarisation $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{g}$ en f telle que $[t, \mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}'$.

Puisque $\mathfrak{g}^f \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}_1$, la dimension des sous-espaces vectoriels totalement isotropes maximaux est la même pour B_f et B_{f_1} ([4], 1.12.2). Si $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{p}'$ est une polarisation de $\mathfrak{g}_1$ en f_1. Sinon, on a $t \notin \mathfrak{p}'$; comme $[t, \mathfrak{p}'] \subset \mathfrak{p}'$, $kt+\mathfrak{p}'$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$; comme $kt+(\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{g}_1)$ est totalement isotrope de même dimension que $\mathfrak{p}'$, $kt+(\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{g}_1)$ est une polarisation de $\mathfrak{g}_1$ en f_1. Dans les deux cas, on voit que f_1 est polarisable. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une polarisation $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}_1$ en f_1 telle que, avec des notations évidentes

$$\gamma(\mathfrak{c}_1)+\textstyle\sum_{i \geqslant 2} \dfrac{i-1}{i}\, \gamma(\mathfrak{c}_i)+\gamma(\mathfrak{d}) \leqslant \operatorname{irr}(f_1).$$

Or $\mathfrak{p}$ est une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f. Compte tenu de (5), cela achève la démonstration.

3.5. LEMME. — *Soit V un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée B. Soit $\mathfrak{n} = V \oplus k$, muni du crochet $[\xi+\lambda, \xi'+\lambda'] = B(\xi, \xi')$ pour $\xi, \xi' \in V$, $\lambda, \lambda' \in k$ (c'est une algèbre de Heisenberg). Soit $\mathfrak{s}$ une algèbre de Lie qui opère dans V en laissant B invariante. Faisons opérer trivialement $\mathfrak{s}$ dans k, de sorte que $\mathfrak{s}$ opère par dérivations dans $\mathfrak{n}$. Soit $\mathfrak{g}$ le produit semi-direct correspondant de $\mathfrak{s}$ par $\mathfrak{n}$.*

Soit $\xi \in V$. *Soit* g *la forme linéaire sur* $\mathfrak{s}$ *telle que* $g(x) = (1/2)\,B(\xi, x.\xi)$ *pour* $x \in \mathfrak{s}$. *Soit* f *la forme linéaire sur* $\mathfrak{g}$ *telle que* $f \mid \mathfrak{s} = g$, $f \mid V = 0$, *et* $f(\lambda) = \lambda$ *pour* $\lambda \in k$.

(i) *On a* $g([x, y]) = -B(x\,\xi, y\,\xi)$ *pour* $x, y \in \mathfrak{s}$;

(ii) *on a* $\mathfrak{g}^f = \mathfrak{s}^g + k$;

(iii) *supposons* $\mathfrak{s}.\xi = V$. *Alors*

$$\mathfrak{s}^g = \{x \in \mathfrak{s},\ x.\xi = 0\} \qquad et \qquad \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^f) = 1 + \dim \mathfrak{s};$$

(iv) *pour* $\lambda \in k$, *soit* $\mathfrak{s}_\lambda = (\exp \operatorname{ad} \lambda\xi)(\mathfrak{s})$. *On a*

$$\lambda = \pm 1 \;\Rightarrow\; \mathfrak{s}_\lambda \textit{ est subordonnée à } f;$$

(v) *supposons* $\mathfrak{s}.\xi = V$. *Alors*

$$\lambda = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{s}_\lambda + k \textit{ est une polarisation de } \mathfrak{g} \textit{ en } f.$$

Pour $x, y \in \mathfrak{s}$, on a

$$\begin{aligned} 2g([x, y]) &= B(\xi, xy\,\xi) - B(\xi, yx\,\xi) \\ &= -B(x\,\xi, y\,\xi) + B(y\,\xi, x\,\xi) \\ &= -2B(x\,\xi, y\,\xi), \end{aligned}$$

d'où (i). L'assertion (ii) résulte de 2.3 (iv). Supposons $\mathfrak{s}.\xi = V$. On a $\mathfrak{s}^g = \{x \in \mathfrak{s};\ x.\xi = 0\}$ d'après (i), donc, compte tenu de (ii),

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^f &= \dim \mathfrak{s} + \dim V + 1 + \dim \mathfrak{s} - \dim V + 1 \\ &= 2(1 + \dim \mathfrak{s}) \end{aligned}$$

d'où (iii). Pour $x \in \mathfrak{s}$, on a

$$\begin{aligned} (\exp \operatorname{ad} \lambda\xi)(x) &= x - \lambda x.\xi + \frac{1}{2} B(\lambda\xi, -\lambda x.\xi) \\ &= x - \lambda x.\xi - \lambda^2 g(x), \end{aligned}$$

d'où, pour $x, y \in \mathfrak{s}$,

$$f((\exp \operatorname{ad} \lambda\xi)[x, y]) = -(1-\lambda^2)\,B(x\,\xi, y\,\xi). \tag{6}$$

Cela prouve (iv). Supposons $\mathfrak{s}.\xi = V$. Alors $\mathfrak{s}_{\pm 1} + k$ est une polarisation en f d'après (iii) et (iv). Si $\mathfrak{s}_\lambda + k$ est une polarisation en f, on a $\lambda = \pm 1$ d'après (6).

3.6. Lemme. — *On conserve les notations de* 3.5, *avec les hypothèses supplémentaires suivantes :* $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ *ou les* V_i *sont deux à deux orthogonaux et de dimension* $\geqq 4$; $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \times \ldots \times \mathfrak{s}_r$; $\mathfrak{s}_i$ *opère trivialement* *dans* $V_{i'}$ *pour* $i \neq i'$, *et s'identifie à l'algèbre de Lie symplectique de* V_i; *si* ξ_i *désigne la projection de* ξ *sur* V_i, *on a* $\xi_i \neq 0$ *pour tout* i.

(i) f *admet exactement deux polarisations, sommes de* k *et de sous-algèbres de Levi de* $\mathfrak{g}$.

(ii) *Posons* $\dim V_i = 2\,n_i$. *On a*

$$\operatorname{irr}(f) = \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \dfrac{n_i - 1}{n_i}\,\gamma(\mathfrak{s}_i).$$

D'après 3.5, f admet au moins deux polarisations, sommes de k et de sous-algèbres de Levi de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{p}$ une polarisation en f, et utilisons les notations de 2.4. On a $\mathfrak{x} = V$, $\mathfrak{c} = k$, $\mathfrak{w} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{c}$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{\sim} \oplus k$, où $\mathfrak{q}^{\sim}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{s}$, donc de la forme $\mathfrak{q}_1 \times \ldots \times \mathfrak{q}_r$, où $\mathfrak{q}_i$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{s}_i$. Soit $g_i = f \mid \mathfrak{s}_i$. Comme $\mathfrak{q}$ contient son orthogonal pour $B_f \mid \mathfrak{w} \times \mathfrak{w}$, on a

$$\mathfrak{q}_i \supset \mathfrak{q}_i^{g_i} \supset \mathfrak{s}_i^{g_i} = \{x \in \mathfrak{s}_i;\ x.\xi_i = 0\}.$$

Or, les seules sous-algèbres de $\mathfrak{s}_i$ contenant $\{x \in \mathfrak{s}_i;\ x.\xi_i = 0\}$ sont $\mathfrak{s}_i$, $\mathfrak{s}_i^{g_i}$ et $\mathfrak{s}'_i = \{x \in \mathfrak{s}_i;\ x.\xi_i \in k\,\xi_i\}$; on a

$$\dim \mathfrak{s}'_i/\mathfrak{s}_i^{g_i} = 1 < \frac{1}{2}\dim V_i = \frac{1}{2}\dim \mathfrak{s}_i/\mathfrak{s}_i^{g_i} \qquad \text{puisque} \quad \dim V_i \geqslant 4;$$

comme $\mathfrak{q}_i \supset \mathfrak{q}_i^{g_i}$, on voit que $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{s}_i$, d'où $\mathfrak{q} = \mathfrak{w}$, $\dim \mathfrak{q}/\mathfrak{q}' = \dim V$, $\dim \mathfrak{r}/\mathfrak{r}' = \dim V$, $\mathfrak{r} = V$ et $\mathfrak{r}' = 0$. Cela prouve que $\mathfrak{p}$ est somme de $\mathfrak{c}$ et d'une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$, donc de la forme $\mathfrak{c} \oplus (\exp \operatorname{ad} \xi')(\mathfrak{s})$, où $\xi' \in V$. Comme en outre $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{s}^g = \{x \in \mathfrak{s};\ x.\xi\} = 0$, on a

$$x.\xi = 0 \ \Rightarrow\ x.\xi' = 0 \qquad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{s},$$

donc ξ' est proportionnel à ξ. Alors $\mathfrak{p}$ est de la forme $\mathfrak{s}_\lambda + k$ pour un $\lambda \in k$. D'après 3.5 (v), $\mathfrak{p}$ est l'une des 2 polarisations signalées plus haut. Cela prouve (i). D'autre part,

$$\begin{aligned}
\operatorname{irr}(f) &= \dim \mathfrak{s}^g + 1 - (\operatorname{rang} \mathfrak{s} + 1)\\
&= \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \dim \mathfrak{s}_i^{g_i} - \operatorname{rang} \mathfrak{s}_i\\
&= \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \dim \mathfrak{s}_i - \dim V_i - \dfrac{1}{2}\dim V_i\\
&= \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} (2\,n_i^2 + n_i) - 3\,n_i\\
&= \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \dfrac{n_i - 1}{n_i}\,.\,2\,n_i^2 = \textstyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \dfrac{n_i - 1}{n_i}\,\gamma(\mathfrak{s}_i).
\end{aligned}$$

3.7. PROPOSITION. — *Soient* $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_r$, $\mathfrak{d}$ *des algèbres de Lie semi-simples, où* $\mathfrak{c}_i$ *est produit de facteurs simples de type* C_i, *et où aucun facteur simple de* $\mathfrak{d}$ *n'est de type C. Il existe une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *et une forme linéaire polarisable* f *sur* $\mathfrak{g}$ *telles que :*

1° $\gamma(\mathfrak{c}_1)+\sum_{i\geqslant 2}(i-1/i)\,\gamma(\mathfrak{c}_i)+\gamma(\mathfrak{d}) = \mathrm{irr}(f)$;

2° *pour toute polarisation* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$ *en* f, *la partie semi-simple de* $\mathfrak{p}$ *est isomorphe à* $\mathfrak{c}_1\times\ldots\times\mathfrak{c}_r\times\mathfrak{d}$.

Soient $\mathfrak{h}$ une algèbre de Lie, $f'\in\mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}\times\mathfrak{c}_1\times\mathfrak{d}$, f la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ qui prolonge f' et s'annule sur $\mathfrak{c}_1\times\mathfrak{d}$. On a $\mathrm{irr}(f) = \mathrm{irr}(f')+\gamma(\mathfrak{c}_1)+\gamma(\mathfrak{d})$. D'autre part, $\mathfrak{g}^f\supset\mathfrak{c}_1\times\mathfrak{d}$, donc toute polarisation en f est de la forme $\mathfrak{p}\times\mathfrak{c}_1\times\mathfrak{d}$, où $\mathfrak{p}$ est une polarisation de $\mathfrak{h}$ en f'. On est donc ramené au cas où $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{d} = 0$, et il suffit alors d'appliquer 3.6.

4. Quelques contre-exemples

4.1. La construction de 3.5 et 3.6 fournit aussi un contre-exemple pour une conjecture assez naturelle. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{n}$ un idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, et $f\in\mathfrak{g}^*$. D'après un résultat de DUFLO ([4], 10.3.1), si f admet une polarisation résoluble $\mathfrak{p}$, f admet une polarisation résoluble $\mathfrak{p}'$ telle que $\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{n}$ soit polarisation de $\mathfrak{n}$ en $f\,|\,\mathfrak{n}$. D'après 3.6, on ne peut, dans cet énoncé, supprimer l'hypothèse que $\mathfrak{p}$ est résoluble, même si l'on n'exige pas que $\mathfrak{p}'$ soit résoluble. (Par contre, quand $\mathfrak{n}$ est commutatif, *cf.* 3.3).

4.2. Reprenons l'algèbre $\mathfrak{g}$ de 3.6. L'étude des polarisations aux différents points de $\mathfrak{g}^*$ est intéressante. Nous allons en signaler un cas particulier. Prenons $r = 1$, $n_1 = 2$. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$, (α, β) une base de $R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h})$, de telle sorte que

$$R(\mathfrak{s}, \mathfrak{h}) = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta)\}.$$

Soit e la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ telle que : 1° $e\,|\,V = 0$; 2° $e(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda\in k$; 3° $e\,|\,\mathfrak{s} = e'$ correspond par l'isomorphisme de Killing à un élément x_0 de $\mathfrak{h}-\{0\}$ tel que $\beta(x_0) = 0$. Soit $\mathfrak{p}$ une polarisation de $\mathfrak{g}$ en e. On a $\mathfrak{s}^{e'} = \mathfrak{h}+\mathfrak{s}^{\beta}+\mathfrak{s}^{-\beta}$, donc $\dim\mathfrak{g}^e = 5$ et $\dim\mathfrak{p} = (1/2)\,(5+15) = 10$. D'après 2.4 (ii), $1\leqslant\dim(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{n})\leqslant 3$. Soit $\mathfrak{p}'$ la projection de $\mathfrak{p}$ sur $\mathfrak{s}$ correspondant à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}$. On a $\dim\mathfrak{p}' = 10-\dim(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{n})$. Or une sous-algèbre de $\mathfrak{s}$ est de dimension 10 ou $\leqslant 7$. On voit que $\dim(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{n}) = 3$ et que $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}\cap\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre parabolique distincte de $\mathfrak{s}$ contenant $\mathfrak{s}^{\beta}$ et $\mathfrak{s}^{-\beta}$. Or, dans la représentation identique de $\mathfrak{s}$, une sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{s}^{\beta}$ et $\mathfrak{s}^{-\beta}$ ne laisse stable aucun sous-espace totalement isotrope de dimension 2. Donc e n'est pas polarisable. On obtient ainsi, en faisant varier $\alpha(x_0)$, une infinité d'éléments de $\mathfrak{g}^*$, deux à deux non conjugués par le groupe adjoint, qui sont non polarisables. Si l'on prend $\beta(x_0) \neq 0$ et $\alpha(x_0) = 0$, on montre que f est polarisable. Si l'on prend $x_0 = 0$, on montre que f est non polarisable. La structure de l'ensemble des éléments non polarisables de $\mathfrak{g}^*$ est donc assez compliquée.

4.3. Montrons que *la proposition* 2.8 *ne se généralise pas aux algèbres de Lie quelconques*. Soit $\mathfrak{g}$ le produit semi-direct de $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(n, k)$ par l'idéal commutatif k^n, défini par la représentation identique de $\mathfrak{s}$ $(n \geqslant 3)$. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ tel que $f \mid \mathfrak{s} = 0$ et $f \mid k^n \neq 0$. Si $x \in k^n - \{0\}$, il existe $y \in \mathfrak{s}$ tel que $[y, x] = y.x \notin \operatorname{Ker} f$; donc $\mathfrak{s}$ est totalement isotrope maximal pour B_f, et par suite est une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f. Pour cette polarisation, la quantité $\sum_{i \geqslant 2} (i - 1/i)\, \gamma(\mathfrak{c}_i) + \gamma(\mathfrak{d})$ de la proposition 2.8 est $\gamma(\mathfrak{s}) = n^2 - n$. D'autre part, $\dim \mathfrak{g}^f = 2 \dim \mathfrak{s} - \dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{s} - \dim k^n = n^2 - n - 1$. Comme $\dim \mathfrak{g} = n^2 - 1 + n$ est impair, l'indice m_g de $\mathfrak{g}$ est $\geqq 1$ (en fait, on peut montrer par récurrence sur n que $m_{\mathfrak{g}} = 1$). Donc

$$\operatorname{irr}(f) \leqslant n^2 - n - 2 < \gamma(\mathfrak{s}).$$

4.4. Reprenons l'algèbre $\mathfrak{g}$ de 3.5, avec $\dim V = 2$ et $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(V)$. Il existe des bases (e, h, f), (u, v), (w) de $\mathfrak{s}$, V, k telles que

$$[e, f] = h,\ [h, e] = 2e,\ [h, f] = -2f,\ [e, u] = 0,$$
$$[e, v] = u,\ [h, u] = u,\ [h, v] = -v,$$
$$[f, u] = v,\ [f, v] = 0,\ [u, v] = w,\ [\mathfrak{g}, w] = 0.$$

Soit φ la forme linéaire $e^* + w^*$ sur $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{g}^f = \mathbf{C}f + \mathbf{C}\,w$ (on prend $k = \mathbf{C}$). En appliquant 3.5 (ou directement), on trouve que, si $\mathfrak{s}'$ désigne la sous-algèbre de Levi

$$\mathbf{C}(e - i\sqrt{2}u - w) + \mathbf{C}(h + i\sqrt{2}v) + \mathbf{C}f,$$

alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{s}' + \mathbf{C}\,w$ est une polarisation en φ. Par ailleurs,

$$\mathfrak{p}_1 = \mathbf{C}h + \mathbf{C}f + \mathbf{C}v + \mathbf{C}w$$

est une polarisation résoluble en φ. Posons $\rho = \operatorname{ind}^{\sim}(\varphi \mid \mathfrak{p}, \mathfrak{g})$, $\rho_1 = \operatorname{ind}^{\sim}(\varphi \mid \mathfrak{p}_1, \mathfrak{g})$, représentations qui opèrent dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} \mathbf{C}$, $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} \mathbf{C}$. Soit

$$z = 4efw + h^2 w + 2ev^2 - 2fu^2 + 2huv - 3hw \in U(\mathfrak{g}).$$

On vérifie facilement que z est central dans $U(\mathfrak{g})$, et que

$$\rho(z)(1 \otimes 1) = 0, \qquad \rho_1(z)(1 \otimes 1) = -(1/4)(1 \otimes 1).$$

Comme $1 \otimes 1$ est générateur pour ρ et ρ_1, on en déduit que $\rho(z) = 0$, $\rho_1(z) = -1/4$, d'où $\operatorname{Ker} \rho \neq \operatorname{Ker} \rho_1$. Ainsi,, *dans le théorème de Duflo sur l'indépendance vis-à-vis de la polarisation* ([4], 10.3.3 (ii)), *l'hypothèse qu'on utilise des polarisations résolubles est essentielle.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREEV (E. M.), VINBERG (E. B.) and ELASHVILI (A. G.). — Orbits of greatest dimension in semi-simple linear Lie groups, *Funct. Anal. and its Appl.*, t. 1, 1967, p. 257-261.

[2] BOURBAKI (N.). — *Algèbres de Lie*, 2ᵉ éd. — Paris, Hermann, 1971 (*Act. scient. et Ind.*, 1285).

[3] DIXMIER (J.). — Polarisations dans les algèbres de Lie, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 4, 1971, p. 321-335.

[4] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes.* — Paris, Gauthier-Villars, 1974. (*Cahiers scientifiques*, 37).

[5] ELASHVILI (A. G.). — Canonical forms and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups, *Funct. Anal. and its Appl.*, t. 6, 1972, p. 44-53.

[6] ELASHVILI (A. G.). — Stationary subalgebras of points of the common state for irreducible linear Lie groups, *Funct. Anal. and its Appl.*, t. 6, 1972, p. 139-148.

[7] OZEKI (H.) and WAKIMOTO (M.). — On polarizations of certain homogeneous spaces, *Hiroshima math. J.*, t. 2, 1972, p. 445-482.

[8] VUST (T.). — Sur le type principal d'orbites d'un module rationnel, *Comment. Math. Helv.*, t. 49, 1974, p. 408-416.

(Texte reçu le 13 octobre 1975.)

Jacques DIXMIER,
64, rue Gay-Lussac,
75005 Paris.