BULLETIN DE LA S. M. F.

VAZGAIN AVANISSIAN

ROGER GAY

Sur une transformation des fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 341-384

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__341_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 341-384.

SUR UNE TRANSFORMATION DES FONCTIONNELLES ANALYTIQUES ET SES APPLICATIONS AUX FONCTIONS ENTIÈRES DE PLUSIEURS VARIABLES

PAR

VAZGAIN AVANISSIAN et ROGER GAY
[Strasbourg]

A André Martineau

RÉSUMÉ. — A toute fonctionnelle analytique T portable par un convexe compact K de C^d, on associe une fonction analytique $G_K(T)(z)$ par recollement. On étudie le problème d'inversion et son lien avec la transformée de Fourier-Borel $\hat{T}$. Au produit de composition $T_1 \star T_2$ est associé le produit de composition d'Hadamard des germes à l'origine des $G_K(T_1)$, $G_K(T_2)$. La méthode développée est appliquée ensuite à l'étude des fonctions entières arithmétiques et à un problème de division dans l'algèbre $\mathcal{O}$ des germes à l'origine des fonctions holomorphes pour la convolution d'Hadamard.

Introduction

Dans ce travail nous étudions, par une méthode unifiée, certains problèmes concernant les fonctions entières arithmétiques de type exponentiel et le quotient des exponentielle-polynômes de plusieurs variables complexes.

Dans le cas d'une variable, un théorème de G. POLYA [17] affirme qu'une fonction entière $f(z)$ de type exponentiel $< \log 2$ et arithmétique (i. e. $f(\mathbf{N}) \subset \mathbf{Z}$) est un polynôme; A. SELBERG [21] a montré ensuite que si f est de type exponentiel $< \log 2 + 1/1\,500$ et arithmétique alors f est de la forme $P_1(z) + P_2(z) \exp(z \log 2)$, P_1 et P_2 étant des polynômes. Charles PISOT [16] étend ce résultat aux fonctions non nécessairement entières, et obtient, en particulier le résultat suivant :

Soient S_α le disque fermé de centre O et de rayon α du plan complexe, et U_α son transformé par l'application $l_+ : \zeta \mapsto \exp \zeta$; le diamètre transfini $\tau(U_\alpha)$ de U_α croît avec α, et est égal à 1 *pour* $\alpha = \alpha_0 = 0{,}843\ldots$

Si f est une fonction entière arithmétique de type exponentiel $\alpha < \alpha_0$, alors f est une exponentielle-polynôme de la forme

$$f(z) = P_1(z)\exp(z\log\alpha_1)+\ldots+P_k(z)\exp(z\log\alpha_k),$$

où les P_j sont des polynômes, et les α_j des entiers algèbriques situés, ainsi que tous leurs conjugués, dans U_α.

Dans son article [8], C. R. Buck a étudié systématiquement les fonctions entières arithmétiques d'une variable. (Pour une référence détaillée, *voir*, par exemple, R. Boas [6], chap. 9. Dans le cas de plusieurs variables, le premier travail concernant ce genre de problème est dû à P. Lelong [12].)

Le problème de la factorisation des exponentielle-polynômes remonte à J. F. Ritt [18]. Celui-ci a démontré que si le quotient f/g de deux exponentielle-polynômes à coefficients constants de la forme

$$a_1 \exp(\alpha_1 z)+\ldots+a_n \exp(\alpha_n z) \; (\alpha_j, a_j \in \mathbf{C})$$

est une fonction entière, alors celle-ci est aussi une exponentielle-polynôme.

A. Shield [22] généralise ce résultat toujours dans le cas d'une variable, au cas où f est à coefficients polynômes (i. e. est de la forme

$$P_1(z)\exp(\alpha_1 z)+\ldots+P_k(z)\exp(\alpha_k z),$$

où les P_j sont des polynômes, et $\alpha_j \in \mathbf{C}$). Remarquons que l'énoncé est inexact lorsque f et g sont tous les deux à coefficients polynômes ($f(z) = \sin z$, $g(z) = z$) (*voir* aussi [9]).

Les auteurs ci-dessus font usage, dans une large mesure de la transformation de Borel dans le plan.

Le présent travail (¹) généralise les résultats ci-dessus au cas de plusieurs variables en utilisant les propriétés des fonctionnelles analytiques.

Dans le chapitre I, à toute fonctionnelle analytique T, portable par un convexe compact de $\mathbf{C}^d$, nous associons une fonction analytique $G_K(T)$ par recollement. On étudie le problème d'inversion et son lien avec la transformée de Fourier-Borel. L'introduction de la fonction $G_K(T)$ permet d'étudier, d'une manière systématique, les problèmes envisagés.

Au chapitre II, on associe à la convolution $T_1 \star T_2$ de deux fonctionnelles analytiques (au sens de A. Martineau [14]) le produit de composition d'Hadamard des germes à l'origine des $G_K(T_1)$, $G_K(T_2)$.

(¹) L'essentiel du présent travail a été résumé dans deux notes aux *Comptes rendus* ([2], [3]).

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des fonctions entières arithmétiques. Enfin, le quatrième chapitre étudie un problème de division dans l'anneau des germes à l'origine de $\mathbf{C}^d$ pour le produit de composition d'Hadamard et étend à plusieurs variables le théorème de J. F. RITT et A. SHIELD sur le quotient des exponentielle-polynômes (*voir* aussi [5] et [11]).

CHAPITRE I

Problème d'inversion

1.1. Quelques rappels sur les fonctionnelles analytiques

1.1.1. Soit $\mathcal{H}(\mathbf{C}^d)$ l'espace des fonctions entières sur $\mathbf{C}^d$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbf{C}^d$. Les fonctionnelles analytiques que nous considérons sont les éléments de $\mathcal{H}'(\mathbf{C}^d)$ dual topologique de $\mathcal{H}(\mathbf{C}^d)$.

Pour tout compact, non vide, K de $\mathbf{C}^d$, on désigne par q_K la semi-norme $q_K(f) = \sup_{z \in K} |f(z)|$ pour $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C}^d)$. Une forme linéaire T sur $\mathcal{H}(\mathbf{C}^d)$ est une fonctionnelle analytique si, et seulement si, il existe un compact non vide K de $\mathbf{C}^d$, une constante $M_K \geqslant 0$ tels que, pour tout $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C}^d)$:

$$|\langle T, f\rangle| \leqslant M_K\, q_K(f). \tag{1}$$

Une fonctionnelle analytique T est dite portable par l'ensemble compact K de $\mathbf{C}^d$ si, pour tout voisinage relativement compact ω de K, il existe une constante $M_\omega \geqslant 0$ telle que

$$|\langle T, f\rangle| \leqslant M_\omega \sup_{z \in \omega} |f(z)| \qquad (f \in \mathcal{H}(\mathbf{C}^d)). \tag{2}$$

La condition (1) implique qu'une fonctionnelle analytique est portable par au moins un compact de $\mathbf{C}^d$. On remarquera que si T est portable par le compact K, elle est portable par tout compact $K_1 \supset K$ et, en particulier, par l'enveloppe convexe de K.

Dire que T est portable par le compact K signifie que, pour tout ouvert ω contenant K, la fonctionnelle analytique T se prolonge en une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{H}(\omega)$ des fonctions holomorphes dans ω muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de ω (par Hahn-Banach). En particulier, si ω est un domaine de *Runge* (i. e. ω est un domaine d'holomorphie, et le sous-espace $\mathcal{H}(\mathbf{C}^d)$ de $\mathcal{H}(\omega)$ est dense dans $\mathcal{H}(\omega)$), ce prolongement est unique.

1.1.2. Le théorème de Hahn-Banach et le théorème de Riesz impliquent en outre que si la fonctionnelle analytique T est portable par le compact K, pour tout ouvert $\omega \supset K$, il existe une mesure μ, à support compact dans ω, telle que $\langle T, f \rangle = \int f(\zeta)\, d\mu(\zeta)$ pour tout $f \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$. Il n'y a pas unicité de la mesure μ. Cependant, lorsque ω est un domaine de Runge, toute mesure représentant T représentera aussi l'unique prolongement de T à $\mathscr{H}(\omega)$.

1.1.3. *Transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique.* — Si T est une fonctionnelle analytique, la fonction

$$\hat{T}: \quad z \mapsto \hat{T}(z) = \langle T, \exp \langle \xi, z \rangle \rangle \text{ de } \mathbf{C}^d \text{ dans } \mathbf{C} (\langle \zeta, z \rangle = \zeta_1 z_1 + \ldots + \zeta_d z_d)$$

est appelée la transformée de Fourier-Borel de T. Comme

$$\exp \langle \zeta, z \rangle = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \frac{z^\nu \zeta^\nu}{\nu!} \quad (z^\nu = z_1^{\nu_1} \ldots z_d^{\nu_d},\ \nu! = \nu_1! \ldots \nu_d!)$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbf{C}^d$,

$$\hat{T}(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} (\langle \mathrm{T}, \zeta^\nu \rangle / \nu!)\, z^\nu.$$

Cette dernière série étant convergente pour tout $z \in \mathbf{C}^d$, la fonction $\hat{T}$ est une fonction entière. La connaissance de $\hat{T}$ implique la connaissance des nombres complexes $\langle T, \zeta^\nu \rangle$ $(\nu \in \mathbf{N}^d)$, donc de $\langle T, P \rangle$ pour tout polynôme P et, finalement, de $\langle T, f \rangle$ pour toute $f \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$.

En outre, si T est portable par le compact K de $\mathbf{C}^d$ et $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_\varepsilon \geqslant 0$ telle que

$$|\hat{T}(z)| \leqslant M_\varepsilon \exp(H_K(z) + \varepsilon \| z \|), \tag{3}$$

où $H_K(z) = \sup_{\zeta \in K} \operatorname{Re} \langle \zeta, z \rangle$ est la fonction d'appui du compact K, et $\| \ \|$ désigne une norme sur $\mathbf{C}^d$.

Si K est un compact convexe, on a

$$K = \{ \zeta \in \mathbf{C}^d ; \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle \leqslant H_K(z) (\forall z \in \mathbf{C}^d) \}.$$

Réciproquement, si K est un compact convexe, et f une fonction entière satisfaisant à l'inégalité (3) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonctionnelle analytique T, portable par K, telle que $\hat{T} = f$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle analytique T soit portable par le polydisque

$$C(0, r_1, \ldots, r_d) = \{ z \in \mathbf{C}_d; \, |z_j| \leqslant r_j, \, 1 \leqslant j \leqslant d \}$$

est que, pour tou $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_\varepsilon \geqslant 0$ telle que

$$(4) \quad |\hat{T}(z)| \leqslant M_\varepsilon \exp((r_1+\varepsilon)|z_1| + \ldots + (r_d+\varepsilon)|z_d|).$$

L'espace vectoriel des fonctionnelles analytiques portables par le compact K sera noté A'_K.

Enfin, rappelons qu'une fonctionnelle analytique T est dite représentable par une distribution à support compact S si, et seulement si, pour toute $h \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$, $\langle T, h \rangle = \langle S, h \rangle$.

Pour tout ce qui concerne les fonctionnelles analytiques, on renvoie à à [10], [13], [14], [24].

1.2. Notations

– L'espace $\tilde{\mathbf{C}}$ est le compactifié de $\mathbf{C}$ par adjonction du point ∞, et $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C} \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$.

– $U = \{ z \in \mathbf{C}; \, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi \}$; $\Omega = U^d$.

– L'application $\zeta \mapsto \exp \zeta$ de U dans $\mathbf{C}_0$ est notée l_+ ; on a $l_+(U) = \mathbf{C}_0$. L'application réciproque de $\mathbf{C}_0$ dans U est la détermination de $\log z$ telle que $\log 1 = 0$. L'application $\zeta \mapsto \exp(-\zeta)$ de U dans $\mathbf{C}_0$ sera notée l_-.

– pr_j désigne l'application $z = (z_1, \ldots, z_d) \mapsto z_j$ de $\mathbf{C}^d$ dans $\mathbf{C}$.

– Si K est un compact de Ω, on pose

$$K_j = \mathrm{pr}_j(K),$$
$$\Omega(K) = \textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\mathbf{C} \setminus l_-(K_j)),$$
$$\tilde{\Omega}(K) = \textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\tilde{\mathbf{C}} \setminus l_-(K_j)).$$

On remarquera que $\Omega(K)$ est un ouvert dense dans $\tilde{\Omega}(K)$.

– L'ensemble des fonctions continues dans $\tilde{\Omega}(K)$, holomorphes dans $\Omega(K)$ et nulle dans $\tilde{\Omega}(K) \setminus \Omega(K)$, sera notée $\mathscr{H}_0(\Omega(K))$.

1.3. **Transformation** G_K

Soit K un convexe compact de $\mathbf{C}^d$; K étant polynômialement convexe, il existe un système fondamental de voisinages de K, ouverts, relativement compacts, qui sont des domaines de Runge.

1.3.1. THÉORÈME. — *Soient K un convexe compact contenu dans Ω, et T une fonctionnelle analytique portable par K.*

Il existe une fonction $G_K(T)$ analytique dans $\Omega(K)$, nulle à l'infini (i. e. $G_K(T) \in \mathscr{H}_0(\Omega(K))$), telle que, pour tout système fondamental de voisinages ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$ de K formé de domaines de Runge d'adhérence compacte contenue dans Ω et, pour tout $i \in I$, $G_K(T)$ restreinte à $\Omega(\overline{\omega}_i)$ soit égale à $G_K(T_i)$, où T_i est l'unique prolongement de T à $\mathscr{H}(\omega_i)$ et

$$G_K(T_i)(z) = \left\langle T_i, \frac{1}{(1-z_1 \exp \zeta_1) \dots (1-z_d \exp \zeta_d)} \right\rangle.$$

La fonction $G_K(T)$ se développe au voisinage de l'origine selon

$$G_K(T)(z) = \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \hat{T}(\nu)\, z^\nu,$$

et à l'infini selon

$$G_K(T)(z) = (-1)^d \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d,\ \nu_j \geqslant 1} \hat{T}(-\nu)\, z^{-\nu}.$$

Démonstration.

1.3.2. LEMME. — *Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ comme dans l'énoncé du théorème* 1.3.1. *Pour tout z fixé dans $\Omega(\overline{\omega}_i) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\mathbf{C} \setminus l_-(\mathrm{pr}_j(\overline{\omega}_i)))$ la fonction :*

$$\theta_i(z) : \quad \zeta \mapsto \textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \dfrac{1}{1 - z_j \exp \zeta_j}$$

est holomorphe dans ω_i.

La fonction

$$G_K(T_i) : \quad z \mapsto \left\langle T_i, \frac{1}{(1-z_1 \exp \zeta_1) \dots (1-z_d \exp \zeta_d)} \right\rangle$$

est un élément de $\mathscr{H}_0(\Omega(\overline{\omega}_i))$.

Démonstration. — La première partie résulte de l'hypothèse

$$z_j \notin l_-(\mathrm{pr}_j(\overline{\omega}_i)).$$

Soit μ_i une mesure à support compact dans ω_i représentant la fonctionnelle T_i (*cf.* 1.1.2). On a

$$G_K(T_i)(z) = \int \frac{d\mu_i(\zeta)}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d}(1 - z_j \exp \zeta_j)} \qquad (z \in \Omega(\overline{\omega}_i)).$$

Il est classique que la fonction $G_K(T_i)$ est holomorphe en $z \in \Omega(\overline{\omega}_i)$. Montrons que cette fonction se prolonge à $\tilde{\Omega}(\overline{\omega}_i)$ en une fonction continue et nulle dans $\tilde{\Omega}(\overline{\omega}_i) \setminus \Omega(\omega_i)$. Il suffit de montrer que la limite de l'intégrale lorsque $z \in \Omega(\overline{\omega}_i)$ tend vers $z^0 \in \tilde{\Omega}(\overline{\omega}_i) \setminus \Omega(\omega_i)$ est nulle. Or il existe $a > 0$, et, pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$, un voisinage V_j de z_j^0 (dans $\tilde{\mathbf{C}} \setminus l_-(\mathrm{pr}_j(\overline{\omega}_i))$) tel que, si $z_j \in V_j$ et $\zeta \in \overline{\omega}_i$, on ait $|1 - z_j \exp \zeta_j| \geqslant a$. Les constantes étant μ_i-intégrables, on conclut par le théorème de convergence bornée.

1.3.3. LEMME. — $\Omega(K) = \bigcup_{i \in I} \Omega(\overline{\omega}_i)$.

Démonstration. — Elle est élémentaire.

1.3.4. LEMME — *Toutes les fonctions $G_K(T_i)$ admettent comme développement de Taylor à l'origine le développement*

$$G_K(T_i)(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \hat{T}(\nu) z^\nu,$$

où $\hat{T}$ est la transformée de Fourier-Borel de T. En outre ces fonctions admettent à l'infini le développement.

$$G_K(T_i)(z) = (-1)^d \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d, \nu_j \geqslant 1} \hat{T}(-\nu) z^{-\nu}.$$

Démonstration. — Pour tout $i \in I$, soit $\rho_j(i)$ la distance de l'origine à l'ensemble compact $l_-(\mathrm{pr}_j(\overline{\omega}_i)) \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Pour $|z_j| < \rho_j(i)$ et $\zeta \in \omega_i$, on a $|z_j \exp(\zeta_i)| < 1$. D'où

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \frac{1}{1 - z_j \exp \zeta_j} = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} z^\nu \exp \langle \zeta, \nu \rangle. \tag{5}$$

La série du second membre qui, pour ζ fixé dans ω_i, est uniformément convergente sur tout compact du polydisque ouvert $C(0, \rho_1(i), \ldots, \rho_d(i))$ est aussi, pour z fixé dans ce polydisque, uniformément convergente en ζ sur tout compact de ω_i; en effet, soit L un compact de ω_i, et a_j la distance de l'origine à $l_-(\mathrm{pr}_j(L))$, $a_j > \rho_j(i)$. On en déduit que, pour $\nu \in \mathbf{N}^d$,

$$|z^\nu \exp \langle \zeta, \nu \rangle| \leqq \left(\frac{\rho_1(i)}{a_1}\right)^{\nu_1} \ldots \left(\frac{\rho_d(i)}{a_d}\right)^{\nu_d} \quad \text{pour } \zeta \in L$$

ce qui implique la convergence normale de la série (5). Il en résulte que

$$G_K(T_i)(z) = \langle T_i, \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} z^\nu \exp \langle \zeta, \nu \rangle\rangle = \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} z^\nu \langle T_i, \exp \langle \zeta, \nu \rangle\rangle.$$

Comme la restriction de T_i à $\mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$ est égale à T et que

$$\langle T, \exp \langle \zeta, \nu \rangle\rangle = \hat{T}(\nu),$$

on a

$$G_K(T_i)(z) = \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \hat{T}(\nu)\, z^\nu.$$

Le développement à l'infini s'obtient de manière analogue. D'où le lemme.

La démonstration du théorème 1.3.1 s'achève si on montre que :

1° Pour tout $i, j \in I$, les restrictions de $G_K(T_i)$ et $G_K(T_j)$ à $\Omega(\overline{\omega}_i) \cap \Omega(\overline{\omega}_j)$ sont égales.

2° La fonction $G_K(T)$, obtenue pour recollement des $(G_K(T_i))_{i \in I}$, ne dépend pas du système $(\omega_i)_{i \in I}$ choisi.

3° $G_K(T)$ est un élément de $\mathscr{H}_0(\Omega(K))$.

(*a*) Soit $\omega_k \subset \omega_i \cap \omega_j$ $(k \in I)$. On a $\Omega(\overline{\omega}_k) \supset \Omega(\overline{\omega}_i)$ et $\Omega(\overline{\omega}_k) \supset \Omega(\omega_j)$. D'après le lemme 1.3.4, les fonctions $G_K(T_k)$, $G_K(T_i)$, $G_K(T_j)$ ont le même développement de Taylor à l'origine. Les ouverts $\Omega(\overline{\omega}_i)$ et $\Omega(\overline{\omega}_j)$ étant connexes les fonctions $G_K(T_i)$ et $G_K(T_j)$ sont, respectivement, les restrictions de $G_K(T_k)$ à ces ouverts. En particulier $G_K(T_i)$ et $G_K(T_j)$ coïncident sur $\Omega(\overline{\omega}_i) \cap \Omega(\overline{\omega}_j)$.

(*b*) La propriété 2° résulte de ce que $\Omega(K)$ est connexe et que, quel que soit le système $(\omega_i)_{i \in I}$ considéré, la fonction $G_K(T)$ obtenue a pour développement de Taylor à l'origine le développement $\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} T(\nu)\, z^\nu$.

(*c*) Soit $z^0 \in \Omega(K) \setminus \Omega(K)$. Il suffit, pour conclure que $G_K(T)$ se prolonge à $\tilde{\Omega}(K)$ en une fonction continue nulle sur $\tilde{\Omega}(K) \setminus \Omega(K)$, de remarquer qu'il existe $i \in I$ avec $z^0 \in \tilde{\Omega}(\overline{\omega}_i) \setminus \Omega(\overline{\omega}_i)$.

1.4. Injectivité de G_K

Le théorème 1.3.1 permet d'associer à tout couple (K, T) une fonction $G_K(T)$ élément de $\mathscr{H}_0(\Omega(K))$. On se propose d'exprimer le nombre $\langle T, h \rangle$, $h \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$, en fonction de $G_K(T)$ et de h.

1.4.1. THÉORÈME. — *On a, si* $h \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$,

$$\langle T, h \rangle = \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d} G_K(T)(z) \times h(-\log z_1, \ldots, -\log z_d) \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_d}{z_d}, \tag{6}$$

où Γ_j $(1 \leqslant j \leqslant d)$ *est une courbe simple fermée continûment différentiable par morceaux entourant* $l_-(\mathrm{pr}_j(K))$ *contenue dans* $\mathbf{C}_0$ *et orientée au sens usuel.*

Démonstration. — La démonstration se fait en deux étapes :

(*a*) Soit (ω_i) un système fondamental de voisinages de K relativement compacts contenus dans Ω et constitué de domaines de Runge. Dans cette première étape, nous montrons que l'intégrale figurant dans (6) reste inchangée si on remplace $G_K(T)$ par une certaine $G_K(T_{i_0})$. En effet, soit c_j la composante connexe bornée de $U \setminus \gamma_j$, où $\gamma_j = l_-^{-1}(\Gamma_j)$; c_j est un voisinage ouvert de $\mathrm{pr}_j(K)$; l'intersection

$$V = \bigcap\nolimits_{1 \leqslant j \leqslant d} (U^{j-1} \times c_j \times U^{d-j})$$

est un voisinage ouvert de K contenue dans Ω. Il existe $i_0 \in I$ tel que $\bar{\omega}_{i_0} \subset V$. Alors $\mathrm{pr}_j(\bar{\omega}_{i_0}) \subset c_j$ et $l_-(\mathrm{pr}_j(\bar{\omega}_{i_0})) \subset l_-(c_j)$. Par suite,

$$\Gamma_j \subset \mathbf{C} \setminus l_-(\mathrm{pr}_j(\bar{\omega}_{i_0})),$$

et il en résulte que $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d \subset \Omega(\bar{\omega}_{i_0})$. D'après la définition de $G_K(T)$, la restriction de cette fonction à $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d$ est égale à la restriction à cet ensemble de $G_K(T_{i_0})$.

(*b*) Soit μ_{i_0} une mesure à support compact contenu dans ω_{i_0} représentant T_{i_0}. On a

$$G_K(T_{i_0})(z) = \int \frac{d\mu_{i_0}(\zeta)}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d}(1 - z_j \exp \zeta_j)} \qquad (z \in \Omega(\bar{\omega}_{i_0})),$$

l'intégrale du second membre de (6) est alors égale à

$$\frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d} \left(\int \frac{d\mu_{i_0}(\zeta)}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d}(1 - z_j \exp \zeta_j)} \right) \times h(-\log z_1, \ldots, -\log z_d) \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_d}{z_d}, \tag{7}$$

Les conditions d'application du théorème de Fubini étant réunies, on peut intervertir les deux intégrations. Il vient :

$$\frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d}\int d\mu_{i_0}(\zeta) \times \int_{\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_d} \frac{h(-\log z_1, \ldots, -\log z_d)}{\prod_{1\leqslant j\leqslant d}(1-z_j\exp\zeta_j)}\,\frac{dz_1}{z_1}\ldots\frac{dz_d}{z_d}.$$

Un calcul de résidus donne

$$\frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d}\int_{\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_d} \frac{h(-\log z_1, \ldots, -\log z_d)}{\prod_{1\leqslant j\leqslant d}(1-z_j\exp\zeta_j)} \times \frac{dz_1}{z_1}\ldots\frac{dz_d}{z_d} = h(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$$

Finalement, l'intégrale du second membre de (6) est égale à

$$\int h(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)\,d\mu_{i_0}(\zeta) = \langle T_{i_0}, h\rangle = \langle T, h\rangle,$$

d'où le théorème.

1.4.2. Corollaire. — *La transformée de Fourier-Borel* $\hat{T}(\zeta)$ *de la fonctionnelle analytique* T *s'obtient à partir de la fonction* $G_K(T)$ *par*

$$(8)\ \hat{T}(\zeta) = \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \times \int_{\Gamma_1\times\ldots\times\Gamma_d} G_K(T)(z)\exp(-(\zeta_1\log z_1+\ldots+\zeta_d\log z_d))\frac{dz_1}{z_1}\ldots\frac{dz_d}{z_d}.$$

1.4.3. Proposition. — *Soit* K *un convexe compact de* Ω. *L'application linéaire* $G_K : A'_K \to \mathscr{H}_0(\Omega(K))$ *est injective.*

En effet, l'égalité (8) implique que si $G_K(T) = 0$, alors $\hat{T}$ est nulle et, par suite, que $T = 0$.

1.4.4. Proposition. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctionnelles analytiques* T_1 *et* T_2, *portables respectivement par* K_1, K_2 *compacts de* Ω, *soient égales est que* $\hat{T}_1(\nu) = \hat{T}_2(\nu)$ *pour tout* $\nu \in \mathbf{N}^d$.

Démonstration. — Soit K l'enveloppe convexe de $K_1 \cup K_2$. L'égalité $T_1 = T_2$ équivaut à l'égalité $G_K(T_1) = G_K(T_2)$ elle-même équivalente à $\hat{T}_1(\nu) = \hat{T}_2(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbf{N}^d$ (*cf.* 1.3.4).

1.5. **Inversion de G_K**

Dans ce paragraphe, on donne une condition suffisante pour que l'application G_K soit bijective. Soit $K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_d$ un produit de convexes compacts de U. Pour $\varepsilon > 0$, soient $V_{j,\varepsilon}$ l'ε-voisinage de K_j et $\omega_\varepsilon = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} V_{j,\varepsilon}$. L'ouvert convexe ω_ε est un domaine de Runge, et il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\omega_\varepsilon \subset \Omega$. La famille $(\omega_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ est un système fondamental de voisinages de K contenus dans Ω relativement compacts et constitué de domaines de Runge. On a alors le théorème d'inversion.

1.5.1. THÉORÈME D'INVERSION. — *L'application $G_K : A'_K \to \mathscr{H}_0(\Omega(K))$ est bijective lorsque $K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_d$ est un produit de convexes compacts de U.*

Démonstration. — Elle sera faite en deux étapes :

(*a*) L'application G_K est injective d'après 1.4.3. Montrons qu'elle est surjective. Soit $\varphi \in \mathscr{H}_0(\Omega(K))$; la forme linéaire $T : \mathscr{H}(\mathbf{C}_d) \to \mathbf{C}$:

$$h \mapsto \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \times \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d} \varphi(z)\, h(-\log z_1, \ldots, -\log z_d) \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_d}{z_d} \tag{9}$$

est manifestement continue sur $\mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$, et définit une fonctionnelle analytique portable par K. Les Γ_j, comme dans le théorème 1.4.1, sont des courbes simples fermées, continûment différentiables par morceaux, entourant les $l_-(\mathrm{pr}_j(K)) = l_-(K_j)$ contenues dans $\mathbf{C}_0$ et orientées au sens usuel. Soit ω un ouvert relativement compact contenant K; il suffit de montrer qu'il existe une constante $M_\omega \geqslant 0$ telle que, pour tout $h \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$:

$$|\langle T, h \rangle| \leqslant M_\omega \sup_{z \in \omega} |h(z)|.$$

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\omega_\varepsilon \subset \omega \cap \Omega$. Soient c_j une courbe fermée simple, continûment différentiable par morceaux, entourant K_j, contenue dans $V_{j,\varepsilon}$ et $C_j = l_-(c_j)$ orientée dans le sens usuel; Γ_j et C_j sont homotopes dans $\mathbf{C} \setminus l_-(K_j)$. En raisonnant sur chaque variable séparément, on constate que l'on peut remplacer, dans (9), $\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d$ par $C_1 \times \ldots \times C_d$

ce qui donne, après le changement de variables $z_j = \exp(-\zeta_j)$:

$$|\langle T, h\rangle| = \frac{1}{(2\pi)^d} \times \left| \int_{c_1\times\ldots\times cd} \varphi(\exp(-\zeta_1), \ldots, \exp(-\zeta_d))\, h(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)\, d\zeta_1 \ldots d\zeta_d \right|,$$

on en déduit :

$$|\langle T, h\rangle| \leqslant \sup_{\zeta\in c_1\times\ldots\times c_d} |h(\zeta)| \times \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{c_1\times\ldots\times c_d} |\varphi(\exp(-\zeta_1), \ldots, \exp(-\zeta_d))|\, d|\zeta_1| \ldots d|\zeta_d|,$$

d'où

$$|\langle T, h\rangle| \leqslant M_\omega \sup_{z\in\omega} |h(z)|,$$

avec

$$M_\omega = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{c_1\times\ldots\times c_d} |\varphi(\exp(-\zeta)_1, \ldots, \exp(-\zeta_d))|\, d|\zeta_1| \ldots d|\zeta_d|,$$

ce qui montre que T est une fonctionnelle analytique portable par K.

(*b*) Montrons que $G_K(T) = \varphi$. Il suffit d'établir que, pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, la restriction de $G_K(T)$ à $\Omega(\overline{\omega}_\varepsilon)$ est égale à la restriction de φ à cet ensemble. Considérons $\omega_\varepsilon = \prod_{1\leqslant j\leqslant d} V_{j,\varepsilon}$. Soient c_j une courbe comme plus haut contenue dans $V_{j,\varepsilon}$, et $C_j = l_-(c_j)$. Pour $u \in \Omega(\overline{\omega}_\varepsilon)$, la fonction $\zeta \mapsto 1/(\prod_{1\leqslant j\leqslant d}(1-u_j \exp\zeta_j))$ est holomorphe dans ω_ε. Cet ouvert étant un domaine de Runge, il existe une suite $(h_n(\zeta))_{n\geqslant 1}$ de fonctions entières qui converge uniformément sur tout compact de ω_ε vers $1/(\prod_{1\leqslant j\leqslant d}(1-u_j \exp\zeta_j)$. Soit T_ε l'unique prolongement de T à $\mathscr{H}(\omega_\varepsilon)$. On a, pour chaque h_n :

$$\langle T_\varepsilon, h_n\rangle = \langle T, h_n\rangle = \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \times \int_{C_1\times\ldots\times C_d} \varphi(z)\, h_n(-\log z_1, \ldots, -\log z_d) \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_d}{z_d},$$

d'après la première étape; d'où, par passage à la limite,

$$G_K(T_\varepsilon)(u) = \left\langle T_\varepsilon, \frac{1}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d}(1-u_j \exp \zeta_j)} \right\rangle$$
$$= \frac{(-1)^d}{(2 i \pi)^d}$$
$$\times \int_{C_1 \times \ldots \times C_d} \frac{\varphi(z)}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d}(1-u_j \exp(-\log z_j))} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_d}{z_d},$$

or

$$\exp(-\log z_j) = \frac{1}{z_j} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-u_j \exp(-\log z_j)) z_j} = \frac{1}{z_j - u_j},$$

donc

$$G_K(T_\varepsilon)(u) = \frac{(-1)^d}{(2 i \pi)^d}$$
$$\times \int_{C_1 \times \ldots \times C_d} \frac{\varphi(z)}{(z_1-u_1) \ldots (z_d-u_d)} dz_1 \ldots dz_d.$$

φ appartenant à $\mathscr{H}_0(\Omega(K))$ un raisonnement élémentaire montre que l'intégrale du second membre est égale à $\varphi(u)$, d'où le théorème.

1.6. Cas d'un polydisque

Nous allons appliquer les résultats des paragraphes précédents au cas où le compact convexe K est un polydisque de centre O et contenu dans Ω. Auparavant, nous allons introduire quelques notations.

Soient :

– S_α le disque fermé de centre O et de rayon α.

– Pour $0 \leqslant \alpha < \pi$, $U_\alpha = l_+(S_\alpha) = l_-(S_\alpha)$.

– $C(\alpha)$ la couronne $\{ z \in \mathbf{C};\ \exp(-\alpha) \leqslant |z| \leqslant \exp(\alpha) \}$.

Si $z \in \mathbf{C}$

$$\theta(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| < 1, \\ \dfrac{1}{z} & \text{si } |z| > 1, \end{cases} \qquad \varepsilon(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1. \\ 1 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

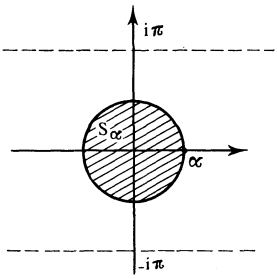
Pour tout d-uple $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d)$, où $\varepsilon_j = 0$ ou 1, et tout d-uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, où $0 \leqslant \alpha_j < \pi$, $1 \leqslant j \leqslant d$, $\Omega^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d}$ désigne l'ensemble

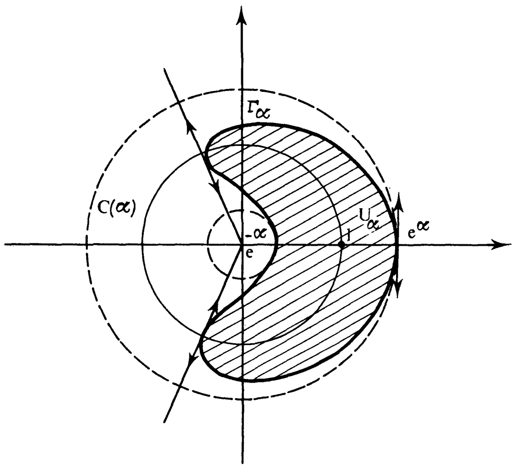
$$\{z = (z_1, \ldots, z_d) \in \textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\mathbf{C} \setminus C(\alpha_j));\ \varepsilon(z_j) = \varepsilon_j,\ 1 \leqslant j \leqslant d\}.$$

On a :

$$\textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\mathbf{C} \setminus C(\alpha_j)) = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant d,\ \varepsilon_j \in \{0,1\}} \Omega^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d}.$$

(Le second membre est une réunion de 2^d ouverts connexes.)





1.6.1. Proposition. — *Pour tout fonctionnelle analytique $T \in A'_K$, où $K = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} S_{\alpha_j}$ $(0 \leqslant \alpha_j < \pi,\ 1 \leqslant j \leqslant d)$ la fonction $G_K(T)$ admet, dans $\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\mathbf{C} \setminus C(\alpha_j))$, le développement*

$$(10) \qquad \begin{aligned} G_K(T)(z) &= (-1)^{\varepsilon(z_1)+\ldots+\varepsilon(z_d)} \\ &\times \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d,\ \nu_j \geqslant \varepsilon(z_j)} \hat{T}((-1)^{\varepsilon(z_1)}\nu_1, \ldots, (-1)^{\varepsilon(z_d)}\nu_d) \\ &\times (\theta(z_1))^{\nu_1} \ldots (\theta(z_d))^{\nu_d}, \end{aligned}$$

la convergence est uniforme sur l'ensemble

$$K_0 = \tilde{K}_0 \cap \textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\mathbf{C} \setminus C(\alpha_j)),$$

où $\tilde{K}_0$ est un compact quelconque de $\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\tilde{\mathbf{C}} \setminus C(\alpha_j))$.

Démonstration. — Il suffit d'établir le développement pour $z \in \Omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d}^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d}$ et sa convergence uniforme sur $\tilde{K}_0 \cap \Omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d}^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d}$. Il existe

$$0 < \rho < \inf_{1 \leqslant j \leqslant d}(\pi - \alpha_j)$$

tel que $\tilde{K}_0 \cap \Omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d}^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d} \subset \Omega_{\alpha_1+\rho \ldots, \alpha_d+\rho}^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d}$. Soit $z \in \tilde{K}_0 \cap \Omega_{\alpha_1, \ldots, \alpha_d}^{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_d}$. Si

$$\varepsilon_j = \varepsilon(z_j) = 0,$$

on a $|z_j| < \exp(-(\alpha_j + \rho))$ et $|z_j \exp(\zeta_j)| < 1$ pour ζ_j élément de l'intérieur de $S_{\alpha_j+\rho}$, donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - z_j \exp \zeta_j} &= \textstyle\sum_{\nu_j=0}^{\infty} z_j^{\nu_j} \exp(\nu_j \zeta_j) \\ &= (-1)^{\varepsilon(z_j)} \textstyle\sum_{\nu_j \geqslant \varepsilon(z_j)} (\theta(z_j))^{\nu_j} \exp((-1)^{\varepsilon(z_j)} \nu_j \zeta_j).\end{aligned}$$

Si $\varepsilon_j = \varepsilon(z_j) = 1$, on a $|z_j| > \exp(\alpha_j + \rho)$ et $|z_j \exp \zeta_j| > 1$ pour ζ_j élément de l'intérieur de $S_{\alpha_j+\rho}$, donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - z_j \exp \zeta_j} &= -\textstyle\sum_{\nu_j=1}^{\infty} z^{-\nu_j} \exp(-\nu_j \zeta_j) \\ &= (-1)^{\varepsilon(z_j)} \textstyle\sum_{\nu_j \geqslant \varepsilon(z_j)} (\theta(z_j))^{\nu_j} \exp((-1)^{\varepsilon(z_j)} \nu_j \zeta_j).\end{aligned}$$

Les séries ci-dessus étant normalement convergentes pour ζ_j appartenant à un compact de l'intérieur de $S_{\alpha_j+\rho}$ (z fixé), on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(1 - z_j \exp \zeta_1) \ldots (1 - z_d \exp \zeta_d)} \\ &= (-1)^{\varepsilon(z_1) + \ldots + \varepsilon(z_d)} \\ &\quad \times \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d,\, \nu_j \geqslant \varepsilon(z_j)} \exp((-1)^{\varepsilon(z_1)} \nu_1 \zeta_1 + \ldots \\ &\quad + (-1)^{\varepsilon(z_d)} \nu_d \zeta_d)(\theta(z_1))^{\nu_1} \ldots (\theta(z_d))^{\nu_d}).\end{aligned}$$

Cette dernière série est normalement convergente pour ζ appartenant à un compact du polydisque ouvert

$$\omega_\rho = \{ z \in \mathbf{C}^d;\ |z_j| < \alpha_j + \rho,\ 1 \leqslant j \leqslant d \},$$

si T_ρ est l'unique prolongement de T à $\mathscr{H}(\omega_p)$, on obtient :

$$\begin{aligned}G_K(T)(z) &= G_K(T_\rho)(z) \\ &= \left\langle T_\rho, \frac{1}{(1 - z_1 \exp \zeta_1) \ldots (1 - z_d \exp \zeta_d)} \right\rangle \\ &= (-1)^{\varepsilon(z_1) + \ldots + \varepsilon(z_d)} \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d,\, \nu_j \geqslant \varepsilon(z_j)} \hat{T}((-1)^{\varepsilon(z_1)} \nu_1, \ldots, \\ &\qquad (-1)^{\varepsilon(z_d)} \nu_d)(\theta(z_1))^{\nu_1} \ldots (\theta(z_d))^{\nu_d}).\end{aligned}$$

La convergence uniforme sur $K_0 \cap \Omega^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d}_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}$ résulte des considérations classiques sur les séries entières.

1.6.2. COROLLAIRE (analogue à la proposition 1.4.4). — *Une condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctionnelles analytiques, portables par le polydisque* $K = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} S_{\alpha_j}$, *soient égales est qu'il existe* $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$ ($\varepsilon_j = 0$ *ou* 1, $1 \leqslant j \leqslant d$) *tels que, pour tout* $\nu \in \mathbf{N}^d$,

$$\hat{T}_1((-1)^{\varepsilon_1}\nu_1, \dots, (-1)^{\varepsilon_d}\nu_d) = \hat{T}_2((-1)^{\varepsilon_1}\nu_1, \dots, (-1)^{\varepsilon_d}\nu_d).$$

En effet, si cette condition est réalisée, $G_K(T_1)$ et $G_K(T_2)$ admettent le même développement dans $\Omega^{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d}_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}$ qui est un ouvert non vide de l'ouvert connexe $\Omega(K)$. Par conséquent, $G_K(T_1) = G_K(T_2)$, d'où $T_1 = T_2$.

1.7. Fonctionnelles analytiques représentables par des distributions à support compact discret contenu dans Ω

Dans ce paragraphe, on caractérise par leur transformée $G_K(T)$ les fonctionnelles analytiques représentables par des distributions à support L compact discret contenu dans Ω (K étant le produit des enveloppes convexes de $\mathrm{pr}_j(L)$).

1.7.1. THÉORÈME. — *Soit T une fonctionnelle analytique portable par un convexe compact K_0 de Ω.*

(A) *Si la fonctionnelle analytique T est représentable par la distribution* $\sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \sum_{|\nu| \leqslant l_k} \lambda_{k,\nu} \delta^{\nu}_{\alpha_k}$ *de support*

$$L = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \; (\alpha_k = (\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,d}) \in \Omega,$$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \mathbf{N}^d$, $\lambda_{k,\nu} \in \mathbf{C}$), *alors les conditions suivantes sont vérifiées* :

1° $G_{K_0}(T)$ *est une fonction rationnelle* $A(z)/(B_1(z_1) \dots B_d(z_d))$ *élément de* $\mathscr{H}_0(\Omega(K_0))$.

2° *Pour tout* $1 \leqslant j \leqslant d$, B_j *est un polynôme en la variable* z_j *de la forme*

$$B_j(z_j) = \prod_{k_j \in I_j} (1 - z_j \exp \alpha_{k_j, j})^{\mu_{k_j, j}}$$

avec I_j *sous-ensemble non vide de* $\{1, \dots, p\}$ *et* $\mu_{k_j, j} \in \mathbf{N}^*$.

Réciproquement, si $G_K(T)$ *vérifie* 1° *et* 2°, *alors* $T = \sum_{\beta} \sum_{|\nu| \leqslant l_\beta} \lambda_{\beta,\nu} \delta^{\nu}_{\beta}$, *avec* $\beta \in \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \{ \alpha_{k_j, j}, k_j \in I_j ; \alpha_{k_j, j} \in \mathrm{pr}_j(K_0) \}$.

(B) *En particulier T est représentable par une mesure à support compact discret $\subset \Omega$ si, et seulement si, pour tout j, $B_j(z_j)$ a ses racines simples.*

Démonstration.

Les conditions sont nécessaires :

(A) Si T est représentable par $\sum_{1\leqslant k\leqslant p}\sum_{|\nu|\leqslant l_k}\lambda_{k,\nu}\,\delta^{\nu}_{\alpha_k}$ pour $|z_j|$ suffisamment grand, on a

$$G_{K_0}(T)(z)=\left\langle \sum_{1\leqslant k\leqslant p}\sum_{|\nu|\leqslant l_k}\lambda_{k,\nu}\,\delta^{\nu}_{\alpha_k},\ \frac{1}{\prod_{1\leqslant j\leqslant d}(1-z_j\exp\zeta_j)}\right\rangle$$
$$=\sum_{1\leqslant k\leqslant p}\sum_{|\nu|\leqslant l_k}(-1)^{|\nu|}\lambda_{k,\nu}\prod_{1\leqslant j\leqslant d}$$
$$\times\left[\frac{d^{\nu_j}}{d\zeta^{\nu_j}}\left(\frac{1}{1-z_j\exp\zeta}\right)\right](\alpha_{k,j}).$$

En remarquant que

$$\frac{d^n}{d\zeta^n}\,\frac{1}{1-z_j\exp\zeta}=\frac{P_n(z_j\exp\zeta)}{(1-z_j\exp\zeta)^{n+1}},$$

où P_n est un polynôme de degré $\leqslant n$, on obtient :

$$G_{K_0}(T)(z)=\sum_{1\leqslant k\leqslant p}\sum_{|\nu|\leqslant l_k}(-1)^{|\nu|}\lambda_{k,\nu}$$
$$\times\frac{P_{\nu_1}(z_1\exp\alpha_{k,1})\ldots P_{\nu_d}(z_d\exp\alpha_{k,d})}{(1-z_1\exp\alpha_{k,1})^{\nu_1+1}\ldots(1-z_d\exp\alpha_{k,d})^{\nu_d+1}}.$$

D'où le résultat en prenant pour $B_j(z_j)$ le p. p. c. m. des facteurs $((1-z_j\exp\alpha_{k,j})^{\nu_j+1})_{1\leqslant k\leqslant p,\,|\nu|\leqslant l_k}$.

(B) Si T est représentable par $\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,\delta_{\alpha_k}$, on obtient, par un calcul analogue,

$$G_{K_0}(T)(z)=\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{(1-z_1\exp\alpha_{k,1})\ldots(1-z_d\exp\alpha_{k,d})},$$

et $B_j(z_j)$ sera encore le p. p. c. m. des facteurs $((1-z_j\exp\alpha_{k,j}))_{1\leqslant k\leqslant p}$.

Les conditions sont suffisantes :

(A). Soit $R(z_1,\ldots,z_d)=A(z_1,\ldots,z_d)/B_1(z_1)\ldots B_d(z_d)$ une fraction rationnelle satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Pour chaque j, considérons l'enveloppe convexe K_j de l'ensemble $\mathrm{pr}_j(L)$. L'ensemble K_j est un compact de U. Soit $K = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} K_j$. Par hypothèse, R est holomorphe dans $\Omega(K)$. D'après le théorème 1.5.1, R définit une fonctionnelle analytique $T = G_K^{-1}(R)$ portable par K. Afin de déterminer T, nous allons exprimer sa transformée de Fourier-Borel $\hat{T}$ au moyen de l'énoncé suivant :

1.7.2. LEMME. — *Soit $\sum_{\mu \in \mathbf{N}^d} a_\mu W^\mu$ le développement dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^d$ de la fraction rationnelle (holomorphe dans un voisinage de O) :*

$$R(W) = \frac{A(W)}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (1 - c_{j,1} W_j)^{\delta_{j,1}} \dots (1 - c_{j,e_j} W_j)^{\delta_{j,e_j}}},$$

où $c_{j,k} \in \mathbf{C} \setminus \{ 0 \}$ et $\delta_{j,k} \in \mathbf{N}$.

Il existe des entiers $M_1, \dots, M_d$ et des nombres $A_{k_1, l_1}, \dots, {}_{k_d, l_d}$ ($k_j \leqslant e_j$; $l_j \leqslant \delta_{j,k_j}$; $k_j, l_j \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant j \leqslant d$) tels que, pour $\mu_j \geqslant M_j$, on ait

$$a_\nu = \sum_{1 \leqslant k_j \leqslant e_j,\, 1 \leqslant l_j \leqslant \delta_{j,k_j},\, 1 \leqslant j \leqslant d} A_{k_1, l_1, \dots, k_d, l_d} \binom{\nu_1 + l_1 - 1}{l_1 - 1} \times \dots \\ \times \binom{\nu_d + l_d - 1}{l_d - 1} c_{1,k_1}^{\nu_1} \dots c_{d,k_d}^{\nu_d}.$$

Si $R \in \mathscr{H}_0(\Omega(K))$ pour un certain convexe compact $K \subset \Omega$, on peut prendre $M_j = 0$ pour tout j.

Le lemme se démontre par récurrence sur d en utilisant la décomposition standard en éléments simples des fractions rationnelles d'une variable.

Revenons au théorème 1.7.1. D'après le théorème 1.3.1, on a

$$G_{K_0}(T)(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \hat{T}(\nu) z^\nu$$

dans un voisinage de l'origine. $G_{K_0}(T)$ étant élément de $\mathscr{H}_0(\Omega(K_0))$ en vertu du lemme 1.7.2, pour tout $\nu \in \mathbf{N}^d$:

$$\hat{T}(\nu) = \sum_{k_j \in I_j,\, 1 \leqslant l_j \leqslant \mu_{k_j, j},\, 1 \leqslant j \leqslant d} A_{k_1, l_1 \dots, k_d, l_d} \binom{\nu_1 + l_1 - 1}{l_1 - 1} \times \dots \\ \times \binom{\nu_d + l_d - 1}{l_d - 1} \exp(\nu_1 \alpha_{k_1, 1}) \dots \exp(\nu_d \alpha_{k_d, d}).$$

Posons

$$F(z_1, \dots, z_d) = \sum_{k_j \in I_j,\, 1 \leqslant l_j \leqslant \mu_{k_j, j},\, 1 \leqslant j \leqslant d} A_{k_1, l_1, \dots, k_d, l_d} \binom{z_1 + l_1 - 1}{l_1 - 1} \times \dots \\ \times \binom{z_d + l_d - 1}{l_d - 1} \exp(\alpha_{k_1,1} z_1 + \dots + \alpha_{k_d,d} z_d),$$

F est une exponentielle-polynôme qui coïncide avec $\hat{T}$ sur $\mathbf{N}^d$. Or, cette exponentielle-polynôme est la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique représentable par une distribution S de la forme $\sum_\beta \sum_{|\nu| \leqslant l_\beta} \lambda_{\beta,\nu}\, \delta_\beta^\nu$. Mais $\hat{S}(\nu) = \hat{T}(\nu)$ pour $\nu \in \mathbf{N}^d$, donc T est représentable par S d'après la proposition 1.4.4.

(B) Enfin si $R(z_1, \ldots, z_d) = A(z_1, \ldots, z_d)/(\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} B_j(z_j))$, *où*

$$B_j(z_j) = \prod_{k_j \in I_j} (1 - z_j \exp \alpha_{k_j, j}).$$

Les coefficients du développement à l'origine de R sont donnés par

$$a_\nu = \sum_{k_j \in I_j,\, 1 \leqslant j \leqslant k} A_{k_1, \ldots, k_d} \times \exp(\alpha_{k_1,1} \nu_1) \ldots \exp(\alpha_{k_d,d} \nu_d),$$

donc $\hat{T}$ est une exponentielle-polynôme à coefficients constants, et T est représentable par une distribution de la forme $\sum_\beta \lambda_\beta\, \delta_\beta$, d'où le théorème.

Remarque. — Sous les hypothèses (A) (resp. (B)), T est une exponentielle-polynôme (resp. exponentielle-polynôme à coefficients constants).

CHAPITRE II

Convolution d'Hadamard

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des germes de fonctions analytiques dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^d$. Le produit de composition $\gamma_1 \star \gamma_2$ de deux éléments γ_1, γ_2 de $\mathcal{O}$, de représentants respectifs $f_1(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} a_\nu z^\nu$, $f_2(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} b_\nu z^\nu$, est le germe défini par la fonction $(f_1 \star f_2)(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} a_\nu b_\nu z^\nu$, analytique dans un voisinage de zéro. L'espace vectoriel $\mathcal{O}$, muni du produit $\star$, est une algèbre commutative unitaire non intègre. En particulier, pour tout $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \in \mathcal{O}$:

- $\gamma_1 \star \gamma_2 = \gamma_2 \star \gamma_1$;
- $\gamma_1 \star (\gamma_2 \star \gamma_3) = (\gamma_1 \star \gamma_2) \star \gamma_3$;
- $\gamma_1 \star (\gamma_2 + \gamma_3) = \gamma_1 \star \gamma_2 + \gamma_1 \star \gamma_3$.

L'élément unité pour $\star$ est le germe de la fonction

$$\frac{1}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (1 - z_j)} = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} z^\nu \qquad (|z_j| < 1,\ 1 \leqslant j \leqslant d).$$

On a

$$(f_1 \star f_2)(z) = \frac{1}{(2i\pi)^d} \int_{|t_j| = r_j} f_1\left(\frac{z_1}{t_1}, \ldots, \frac{z_d}{t_d}\right) \times f_2(t_1, \ldots, t_d) \frac{dt_1}{t_1} \ldots \frac{dt_d}{t_d}$$

pour z dans un voisinage de l'origine et r_j assez petit (*cf.* par exemple [23]).

2.1. **Transformation $\mathscr{G}$**

L'ensemble $A'_\Omega = \bigcup_{K \subset \Omega} A'_K$ des fonctionnelles analytiques portables par un convexe compact de Ω est un espace vectoriel. Considérons l'application $\mathscr{G}$ qui à $T \in A'_\Omega$ portable par K associe le germe à l'origine de $G_K(T)$. On remarquera que ce germe est indépendant du compact K (*cf.* 1.3.1).

2.1.1. PROPOSITION. — *L'application $\mathscr{G} : A'_\Omega \to \mathcal{O}$ est linéaire injective.*

En effet, si T_i ($i = 1, 2$) est portable par K_i et $\alpha_i \in \mathbf{C}$, $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ est portable par l'enveloppe convexe $\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)$ de $K_1 \cup K_2$ qui est un convexe compact de Ω, et $\mathscr{G}(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)$ est le germe de

$$G_{\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)}(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) = \alpha_1 G_{\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)}(T_1) + \alpha_2 G_{\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)}(T_2).$$

Enfin, on remarque que le germe de $G_{\operatorname{conv}(K_1 \cup K_2)}(T_i)$ est égal à celui de $G_{K_i}(T_i)$, d'où la linéarité.

D'autre part, si $\mathscr{G}(T) = 0$, alors $G_K(T) = 0$, d'où $T = 0$ d'après 1.4.3.

2.1.2. PROPOSITION. — *Soient T_i ($i = 1,2$) portables par K_i convexes compacts de Ω; si $K_1 + K_2 \subset \Omega$, alors :*

$$\mathscr{G}(T_1 \star T_2) = \mathscr{G}(T_1) \star \mathscr{G}(T_2).$$

Démonstration. — Le produit de composition de T_1 et T_2, défini dans [14], est portable par $K_1 + K_2$. D'après 1.3.4, $\mathscr{G}(T_i)$ admet comme représentant la série $\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \hat{T}_i(\nu) z^\nu$ et $\mathscr{G}(T_1 \star T_2)$ admet le représentant $\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \widehat{T_1 \star T_2}(\nu) z^\nu$. On remarque enfin que $\widehat{T_1 \star T_2}(z) = \hat{T}_1(z) . \hat{T}_2(z)$.

2.1.3. LEMME. — *Soient T_i ($i = 1,2$) portables par K_i convexes compacts de Ω tels que $K_1 + K_2 \subset \Omega$ et $K_1 - K_1 + K_2 \subset \Omega$. On peut trouver :*

Un polygone convexe c_j entourant $\mathrm{pr}_j(K_1)$ *et contenu dans U (on notera d_j le domaine convexe bordé par c_j).*

Un polygone convexe γ_j *entourant le compact convexe* $d_j + \mathrm{pr}_j(K_2)$ *et contenu dans U de telle sorte que, pour tout j, l'ensemble*

$$\gamma_j - c_j = \{ \sigma - \tau ; \sigma \in \gamma_j, \tau \in c_j \}$$

soit contenu dans U.

Démonstration. — Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, tels que, pour tout j, le 3ε-voisinage de $\mathrm{pr}_j(K_1 - K_1 + K_2)$ et l'ε-voisinage de $\mathrm{pr}_j(K_1)$ soient contenus dans U. On peut choisir un polygone convexe c_j entourant $\mathrm{pr}_j(K_1)$ et inclus dans l'ε-voisinage de $\mathrm{pr}_j(K_1)$, puisque ce voisinage est convexe. En choisissant ε suffisamment petit, on peut enfin assurer que U contient l'ε-voisinage de $d_j + \mathrm{pr}_j(K_2)$. On prendra alors γ_j contenu dans ce dernier voisinage. La condition $\gamma_j - c_j \subset U$ est alors réalisée; en effet, $\sigma \in \gamma_j$ peut s'écrire $k_1 + k_2 + u + v$, où $k_1 \in \mathrm{pr}_j(K_1)$, $k_2 \in \mathrm{pr}_j(K_2)$, $|u| < \varepsilon$, $|v| < \varepsilon$, et $\tau \in c_j$ peut s'écrire $k'_1 + w$, où $k'_1 \in \mathrm{pr}_j(K_1)$ et $|w| < \varepsilon$; alors, $\sigma - \tau = k_1 - k'_1 + k_2 + u + v + w$ est un élément du 3ε-voisinage de

$$\mathrm{pr}_j(K_1 - K_1 + K_2) \subset U.$$

Les polygones convexes c_j et γ_j étant comme dans le lemme 2.1.3, on pose $C_j = l_-(c_j)$ et $\Gamma_j = l_-(\gamma_j)$; D_j sera le domaine bordé par C_j $(D_j = l_-(d_j))$.

Si $t_j \in C_j$ et $z_j \notin l_-(d_j + \mathrm{pr}_j(K_2)) = D_j . l_-(\mathrm{pr}_j(K_2))$, alors

$$z_j / t_j \notin l_-(\mathrm{pr}_j(K_2)),$$

et on peut considérer, pour z fixé dans $A = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \complement (D_j . l_-(\mathrm{pr}_j(K_2)))$, la fonction

$$(t_1, \ldots, t_d) \in C_1 \times \ldots \times C_d \mapsto G_{K_2}(T_2)\left(\frac{z_1}{t_1}, \ldots, \frac{z_d}{t_d}\right)$$

qui est continue, donc intégrable, sur $C_1 \times \ldots \times C_d$. Il en résulte que l'intégrale

$$\frac{(-1)^d}{(2 i \pi)^d} \int_{C_1 \times \ldots \times C_d} G_{K_1}(T_1)(t_1, \ldots, t_d) \times G_{K_2}(T_2)\left(\frac{z_1}{t_1}, \ldots, \frac{z_d}{t_d}\right) \frac{dt_1}{t_1} \ldots \frac{dt_d}{t_d}$$

a un sens. En outre, cette intégrale définit un élément de

$$\mathscr{H}_0 (\Omega (\textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (d_j + \mathrm{pr}_j(K_2)))).$$

2.1.4. THÉORÈME. — *Soient T_i ($i = 1,2$) deux fonctionnelles analytiques portables par K_i convexes compacts de Ω. Si $K_1 + K_2 \subset \Omega$, $K_1 - K_1 + K_2 \subset \Omega$, on a :*

(1)
$$G_{K_1+K_2}(T_1 \star T_2)(z) = \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \int_{C_1 \times \ldots \times C_d} G_{K_1}(T_1)(t_1, \ldots, t_d) \times G_{K_2}(T_2)\left(\frac{z_1}{t_1}, \ldots, \frac{z_d}{t_d}\right) \frac{dt_1}{t_1} \ldots \frac{dt_d}{t_d}$$

pour $z_j \in \complement (D_j . l_- (\mathrm{pr}_j (K_2)))$, les C_j, D_j étant définis plus haut.

Démonstration. — Le second membre de (1) provient d'une fonctionnelle analytique portable par $K = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (d_j + \mathrm{pr}_j (K_2))$ d'après le théorème 1.5.1. Comme $T_1 \star T_2$ est portable par $K_1 + K_2 \subset K$, $T_1 \star T_2$ est aussi portable par K. Pour conclure, il suffit de montrer que $T = T_1 \star T_2$ ce qui peut se faire en assurant $\hat{T} = \hat{T}_1 . \hat{T}_2$. D'après le corollaire 1.4.2, on a

$$\hat{T}(\zeta) = \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \times \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d} \left(\frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \int_{C_1 \times \ldots \times C_d} G_{K_1}(T_1)(t)\, G_{K_2}(T_2)\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{t}\right) \times \exp(-(\zeta_1 \log z_1 + \ldots + \zeta_d \log z_d)) \frac{dz}{z},$$

où

$$\frac{dz}{z} = \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_d}{z_d}, \qquad \frac{dt}{t} = \frac{dt_1}{t_1} \ldots \frac{dt_d}{t_d},$$

$$t = (t_1, \ldots, t_d) \quad \text{et} \quad \frac{z}{t} = \left(\frac{z_1}{t_1}, \ldots, \frac{z_d}{t_d}\right).$$

Posons

$$z_j = \exp(-\sigma_j) \in \Gamma_j \quad \text{avec } \sigma_j \in \gamma_j,$$
$$t_j = \exp(-\tau_j) \in C_j \quad \text{avec } \tau_j \in c_j,$$

alors,

$$\log z_j = -\sigma_j = -(\sigma_j - \tau_j) - \tau_j = \log(\exp(-(\sigma_j - \tau_j))) + \log(\exp(-\tau_j))$$
$$= \log \frac{\exp(-\sigma_j)}{\exp(-\tau_j)} + \log(\exp(-\tau_j)) = \log \frac{z_j}{t_j} + \log t_j$$

(on remarquera que les conditions $\gamma_j - c_j \subset U$ sont intervenues ici). Il vient, après permutation des intégrales (ce qui est légitime),

$$\hat{T}(\zeta) = \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \times \int_{C_1 \times \ldots \times C_d} G_{K_1}(T_1)(t) \exp(-\langle \zeta, \log t \rangle) \times \left(\frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d} G_{K_2}(T_2)\left(\frac{z}{t}\right) \exp\left(-\left\langle \zeta, \log \frac{z}{t} \right\rangle\right) \frac{dz}{z} \right) \frac{dt}{t},$$

où

$$\langle \zeta, \log a \rangle = \zeta_1 \log a_1 + \ldots + \zeta_d \log a_d.$$

Pour t_j fixé dans C_j ($1 \leqq j \leqq d$), calculons l'intégrale

$$J(t_1, \ldots, t_d, \zeta) = \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \times \int_{\Gamma_1 \times \ldots \times \Gamma_d} G_{K_2}(T_2)\left(\frac{z_1}{t_1}, \ldots, \frac{z_d}{t_d}\right) \times \exp\left(-\left(\zeta_1 \log \frac{z_1}{t_1} + \ldots + \zeta_d \log \frac{z_d}{t_d}\right)\right) \frac{dz_1}{z_1} \ldots \frac{dz_d}{z_d}.$$

Lorsque z_j parcourt Γ_j, z_j/t_j parcourt une courbe semblable Γ'_j entièrement située dans $\mathbf{C}_0 \cap (\complement\, l_-(\mathrm{pr}_j(K_2))$. Effectuons le changement de variables $u_j = z_j/t_j$. On obtient :

$$J(t_1, \ldots, t_d, \zeta) = \frac{(-1)^d}{(2i\pi)^d} \times \int_{\Gamma'_1 \times \ldots \times \Gamma'_d} G_{K_2}(T_2)(u_1, \ldots, u_d) \times \exp\left(-\left(\zeta_1 \log u_1 + \ldots + \zeta_d \log u_d\right)\right) \frac{du_1}{u_1} \ldots \frac{du_d}{u_d}.$$

D'après le corollaire 1.4.2, on a

$$J(t_1, \ldots, t_d, \zeta) = \hat{T}_2(\zeta).$$

Il en résulte que

$$
\begin{aligned}
\hat{T}(\zeta) = \hat{T}_2(\zeta)\frac{(-1)^d}{(2\,i\,\pi)^d} \\
\times \int_{C_1\times\ldots\times C_d} G_{K_1}(T_1)(t_1,\ldots,t_d) \\
\times \exp\left(-\left(\zeta_1 \log t_1 + \ldots + \zeta_d \log t_d\right)\right)\frac{dt_1}{t_1}\ldots\frac{dt_d}{t_d}.
\end{aligned}
$$

Soit $\hat{T}(\zeta) = \hat{T}_1(\zeta).\hat{T}_2(\zeta)$. D'où le théorème.

CHAPITRE III

Fonctions entières arithmétiques de type exponentiel

On étudie dans ce chapitre les fonctions entières f de type exponentiel vérifiant $f(\mathbf{N}^d) \subset \mathbf{Z}$ en utilisant l'application G_K introduite dans le chapitre I. La méthode utilisée permet d'établir, directement dans $\mathbf{C}^d$, les énoncés connus dans le cas $d = 1$ (*voir*, par exemple [6]).

3.1. Espace A_Ω

On note A_Ω l'espace vectoriel des fonctions entières de type exponentiel transformées de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique portable par un convexe compact de Ω.

3.1.1. THÉORÈME. — *Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C}^d)$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M_\varepsilon \geqslant 0$ pour laquelle*

$$
(1) \qquad |f(\zeta)| \leqslant M_\varepsilon \exp(H_K(\zeta)+\varepsilon\,||\zeta||) \qquad (\zeta\in\mathbf{C}^d),
$$

où K est un convexe compact non vide de Ω, H_K la fonction d'appui de K, et $||\ \ ||$ une norme sur $\mathbf{C}^d$. Si $f(\nu) = 0$, pour tout $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbf{N}^d$, tels que $\nu_j \geqslant m_j$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$, où les m_j sont des entiers $\geqslant 0$, alors $f = 0$.

Démonstration. — L'inégalité (1) exprime que f est la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique portable par K (*cf.* [10], théorème 4.5.3). La sous-additivité de H_K et de $||\ \ ||$ impliquent que la fonction $h(\zeta) = f(\zeta+m)$ vérifie une inégalité analogue à (1); h est alors la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique T portable par K. D'après 1.3.4, on a

$$\begin{aligned} G_K(T)(z) &= \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \hat{T}(\nu)\, z^\nu \\ &= \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} h(\nu)\, z^\nu = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} f(\nu+m)\, z^\nu = 0 \end{aligned}$$

dans un voisinage de zéro. Donc $G_K(T) = 0$ et, d'après l'injectivité de G_K (1.4.3), T $= 0$; d'où $h = 0$ et, par conséquent $f = 0$, d'où le théorème.

3.1.2. Corollaire. — *Le réseau* $\mathbf{N}^d$ *privé d'un nombre fini d'éléments est un ensemble d'unicité pour la classe* A_Ω.

3.1.3. Proposition. — *Soit* ω *un domaine de Runge convexe contenu dans* Ω. *Pour tout multi-entier,* $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbf{N}^d$, *le système* $(\exp \langle \nu, \zeta \rangle)_{\nu \in \mathbf{N}^d, \nu_j \geqslant m_j}$ *est total dans* $\mathscr{H}(\omega)$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que si μ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{H}(\omega)$ nulle pour tout élément du système considéré, alors $\mu = 0$. La forme μ définit une fonctionnelle analytique T portable par un compact convexe $K \subset \omega$. En effet, d'après la continuité de μ, il existe un compact $L \subset \omega$ et une constante $M_L \geqslant 0$ tels que, pour tout $g \in \mathscr{H}(\omega)$;

$$|\langle \mu, g \rangle| \leqslant M_L \sup_{z \in L} |g(z)|.$$

Alors, si K est l'enveloppe convexe de L, K est un compact convexe contenu dans ω et, *a fortiori,*

$$|\langle \mu, g \rangle| \leqslant M_L \sup_{z \in K} |g(z)| \qquad (g \in \mathscr{H}(\omega)).$$

Dans ces conditions, la restriction T de μ au sous-espace $\mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$ de $\mathscr{H}(\omega)$ vérifie

$$|\langle T, h \rangle| \leqslant M_L \sup_{z \in K} |h(z)| \qquad (h \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^d)).$$

Si ω' est un voisinage relativement compact de K, on a

$$|\langle T, h \rangle| \leqslant M_{\omega'} \sup_{z \in \omega'} |h(z)| \qquad (h \in \mathscr{H}(\mathbf{C}^d)),$$

où $M_{\omega'} = M_L$. Ainsi T est portable par K, et l'hypothèse implique que la fonction $\hat{T} \in A_\Omega$ vérifie $\hat{T}(\nu) = 0$ pour tout $\nu \in \mathbf{N}^d$ tels que $\nu_j \geqslant m_j$. D'après le théorème 3.1.1, $\hat{T} = 0$, donc $T = 0$. Comme μ est l'unique prolongement de T à $\mathscr{H}(\omega)$, on a $\mu = 0$, d'où la proposition.

La proposition 3.1.3 est à rapprocher d'un résultat de Ronkin [19].

3.2. **Espace** $\mathscr{E}(K)$

3.2.1. Définition. — *Une fonction entière de type exponentiel f est dite arithmétique si* $f(\mathbf{N}^d) \subset \mathbf{Z}$.

3.2.2. Notation. — Si K est un convexe compact de Ω, on note $\mathscr{E}(K)$ l'ensemble des fonctions entières arithmétiques transformées de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique portable par K.

Nous nous proposons d'étendre à plusieurs variables, et par une méthode directe, certains résultats figurant dans un travail de C. Buck [8].

3.2.3. Théorème. — *Soit K un convexe compact tel que, pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant d$, $L_j = l_+ (\mathrm{pr}_j (K))$ soit un compact de diamètre transfini $\tau(L_j) < 1$. Alors tout élément de $\mathscr{E}(K)$ est de la forme*

$$(2) \qquad \begin{aligned} & f(z_1, \ldots, z_d) \\ & = \textstyle\sum_{1 \leqslant k_j \leqslant q_j,\, 1 \leqslant j \leqslant d} P_{k_1, \ldots, k_d}(z_1, \ldots, z_d)\, c_{1,k_1}^{z_1} \ldots c_{d,k_d}^{z_d}, \end{aligned}$$

où $P_{k_1}, \ldots, k_d$ est un polynôme, et $c_{j,k}$ un entier algébrique situé, ainsi que tous ses conjugués, dans L_j.

Démonstration. — Soit T la fonctionnelle analytique élément de A'_K telle que $\hat{T} = f$. Considérons la forme linéaire $\check{T}$ sur $\mathscr{H}(\mathbf{C}^d)$, définie par $\langle \check{T}, h \rangle = \langle T, \check{h} \rangle$, où $\check{h}(\zeta) = h(-\zeta)$; $\check{T}$ est une fonctionnelle analytique portable par $-K$; en effet, l'inégalité $|\check{T}(\zeta)| \leqslant M_\varepsilon \exp(H_K)(\zeta) + \varepsilon \|\zeta\|$, implique $|(\check{T})^\wedge(\zeta)| \leqslant M_\varepsilon \exp(H_{-K}(\zeta) + \varepsilon \|\zeta\|)$. On a $(\check{T})^\wedge(\zeta) = \check{\hat{f}}(\zeta)$. La fonction $G_{-K}(\check{T})(z)$ élément de $\mathscr{H}_0(\Omega(-K))$ admet à l'infini le développement

$$\begin{aligned}(-1)^d G_{-K}(\check{T})(z) &= \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d,\, \nu_j \geqslant 1} \dfrac{(\check{T})^\wedge(-\nu)}{z^\nu} \\ &= \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d,\, \nu_j \geqslant 1} \dfrac{\check{f}(-\nu)}{z^\nu} = \textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d,\, \nu_j \geqslant 1} \dfrac{f(\nu)}{z^\nu}.\end{aligned}$$

Un résultat de Martineau-Šeinov ([15], [20]) affirme que *si une fonction holomorphe dans $\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \complement_{\mathbf{C}} F_j$ (où F_j est un compact polynômialement convexe de diamètre transfini $\tau(F_j) < 1$) nulle à l'infini et admet, à l'infini un développement à coefficients entiers, alors cette fonction est une fraction* *rationnelle de la forme*

$$\frac{A(z_1, \ldots, z_d)}{B_1(z_1) \ldots B_d(z_d)}, \tag{3}$$

où A et les B_j sont des polynômes à coefficients entiers, les B_j étant de plus unitaires.

On peut remarquer aussi que les racines des polynômes B_j sont des entiers algébriques situés dans V_j.

Il en résulte, ainsi que des hypothèses faites sur f et sur K, que la fonction $G_{-K}(\check{T})$ est une fraction rationnelle de la forme (3), les racines $c_{j,k}$ des B_j (qui sont des entiers algébriques) se trouvant dans $l_-(\mathrm{pr}_j(-K)) = l_+(\mathrm{pr}_j(K))$ (donc non nuls).

Soit

$$\begin{aligned} B_j(z_j) &= z_j^{m_j} + a_{j,m_j-1} z_j^{m_j-1} + \ldots + a_{j,1} z_j + a_{j,0} \qquad (a_{j,k} \in \mathbf{Z}) \\ &= (z_j - c_{j,1})^{\delta_{j,1}} \ldots (z_j - c_{j,q_j})^{\delta_{j,q_j}} \\ &= B_j(0)(1-\gamma_{j,1} z_j)^{\delta_{j,1}} \ldots (1-\gamma_{j,q_j} z_j)^{\delta_{j,q_j}}, \end{aligned}$$

où

$$\gamma_{j,k} = \frac{1}{c_{j,k}}.$$

Ainsi,

$$G_{-K}(\check{T})(z) = \frac{A(z_1, \ldots, z_d)}{(\prod_{1 \leq j \leq d} B_j(0))(\prod_{1 \leq j \leq d}(1-\gamma_{j,1} z_j)^{\delta_{j,1}} \ldots (1-\gamma_{j,q_j} z_j)^{\delta_{j,q_j}})}.$$

D'après le théorème 1.3.1, le développement à l'origine de $G_{-K}(\check{T})$ est

$$G_{-K}(\check{T})(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} (\check{T})^{\wedge}(\nu) z^{\nu} = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \check{f}(\nu) z^{\nu} = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} f(-\nu) z^{\nu}.$$

Il résulte alors du théorème 1.7.1 que

$$\check{f}(z) = (\check{T})^{\wedge}(z) = \sum_{1 \leq k_j \leq q_j,\, 1 \leq l_j \leq k_j,\, 1 \leq j \leq d} A_{k_1, l_1, \ldots, k_d, l_d} \binom{z_1 + l_1 - 1}{l_1 - 1} \times \ldots \times \binom{z_d + l_d - 1}{l_d - 1} \gamma_{1,k_1}^{z_1} \ldots \gamma_{d,k_d}^{z_d},$$

d'où

$$f(z) = \sum_{1 \leq k_j \leq q_j,\, 1 \leq l_j \leq k_j,\, 1 \leq j \leq d} A_{k_1, l_1, \ldots, k_d, l_d} \binom{-z_1 + l_1 - 1}{l_1 - 1} \times \ldots \times \binom{-z_d + l_d - 1}{l_d - 1} c_{1,k_1}^{z_1} \ldots c_{d,k_d}^{z_d};$$

on en déduit la relation (2), en posant

$$P_{k_1, \ldots, k_d}(z_1, \ldots, z_d) = \sum_{1 \leqslant l_j \leqslant k_j,\, 1 \leqslant j \leqslant d} A_{k_1, l_1, \ldots, k_d, l_d} \binom{-z_1+l_1-1}{l_1-1} \cdots \binom{-z_d+l_d-1}{l_d-1},$$

d'où le théorème.

3.2.4. COROLLAIRE. — *Si K est un convexe compact de Ω tel que pour tout j, il existe $m_j \geqslant 2$ pour lequel $\mathrm{pr}_j(K)$ est contenu dans l'intérieur du convexe $E_{m_j} = \{ z \in U ; | e^z - m_j | \leqslant 1 \}$, alors tout élément de $\mathscr{E}(K)$ est de la forme*

$$f(z_1, \ldots, z_d) = P(z_1, \ldots, z_d)\, m_1^{z_1} \ldots m_d^{z_d},$$

où P est un polynôme.

La démonstration utilise le lemme suivant.

3.2.5. LEMME (*cf.* [8]). — *Si $P(z)$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et $S = \{ z \in \mathbf{C} ; | P(z) | < 1 \}$, les seuls entiers algébriques contenus, ainsi que tous leurs conjugués, dans S sont les zéros de P. Les seuls entiers algébriques contenus, ainsi que tous leurs conjugués, dans $\overline{S}$ sont les zéros de P et les racines de $P^m = 1$ pour un certain $m \in \mathbf{N}$.*

Le compact $L_j = l_+(\mathrm{pr}_j(K))$ est contenu dans le disque ouvert centré en m_j et de rayon 1, donc le diamètre transfini de cet ensemble est < 1 (on rappelle que le diamètre transfini d'un disque fermé de rayon r est égal à r). Les entiers algébriques pouvant être situés ainsi que leurs conjugués dans L_j sont à choisir dans ceux se trouvant dans le disque ouvert centré en m_j et de rayon 1. Le lemme 2.2.5, appliqué au polynôme $z - m_j$, permet de conclure que le seul entier algébrique possible est m_j, d'où le corollaire.

3.2.6. LEMME. — *Soit $F_\varepsilon(a) = \{ z \in \mathbf{C} ; | z - a | \leqslant 1$ et $\mathrm{Re}\, z > a - 1 + \varepsilon \}$, où $a \in \mathbf{R}$ et $0 < \varepsilon < 1$.*

Le diamètre transfini de $F_\varepsilon(a)$ est < 1.

En effet, le diamètre transfini τ de $F_\varepsilon(a)$ est égal à sa capacité logarithmique, celle-ci est égale à la capacité analytique $\gamma = \gamma(F_\varepsilon(a))$ de $F_\varepsilon(a)$

$$\gamma \leqslant \frac{1}{2\pi} l < \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

où l est la longueur du bord de $F_\varepsilon(a)$ (*cf.* [25], app. I, prop. 3.6 et 3.8).

3.2.7. COROLLAIRE. — *Si K est un convexe compact de Ω tel que, pour tout j,* $\mathrm{pr}_j(K) \subset E_0 = \{ z \in U; |e^z| < 1 \}$, *alors les $c_{j,k}$ de* (2) *vérifient* $c_{j,k}^{p_{j,k}} = 1$ *avec $p_{j,k} \in \mathbf{N}$.*

En effet, il existe $0 < \varepsilon < 1$ tel que, pour tout j, $L_j = l_+ (\mathrm{pr}_j(K)) \subset F_\varepsilon(0)$, donc le diamètre transfini $\tau(L_j) < 1$ d'après 3.2.6, et toute $f \in \mathscr{E}(K)$ est de la forme (2) d'après 3.2.3. Les seuls entiers algébriques situés ainsi que tous leurs conjugués, dans L_j sont à choisir parmi ceux se trouvant dans le disque de centre O et de rayon 1. Le lemme 3.2.5, appliqué au polynôme $P(z) = z$, permet de conclure.

3.2.8. COROLLAIRE. — *Si K est un convexe compact de Ω tel que, pour tout j,* $\mathrm{pr}_j(K) \subset E_1 = \{ z \in U; |e^z - 1| \leqslant 1 \}$ *alors les $c_{j,k}$ de* (2) *sont de la forme* $1 + \exp(2 i \pi r_{j,k})$ *avec $r_{j,k}$ rationnel de* $]-1/2, 1/2[$.

Même démonstration que ci-dessus en remplaçant $F_\varepsilon(0)$ par $F_\varepsilon(1)$ et en prenant $P(z) = z - 1$. Remarquons que les racines différentes de O de $P^n(z) = 1$ sont $1 + \exp(2 ik \pi/n)$ $(-n/2 < k < n/2)$.

3.2.9. COROLLAIRE. — *Soit f une fonction entière arithmétique vérifiant*

$$|f(z_1, \ldots, z_d)| \leqslant M \exp(\alpha_1 |z_1| + \ldots + \alpha_d |z_d|),$$

avec

$$0 \leqslant \alpha_j < \alpha_0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant d), \quad M = \mathrm{Cte} > 0.$$

Alors f est de la forme (2).

Si $\alpha_j < 0{,}8$, $c_{j,k}$ est un élément de $\{ 1, 2, (3 + i\sqrt{3})/2, (3 - i\sqrt{3})/2 \}$ *pour tout k.*

Si $\alpha_j < |\log (3 + i\sqrt{3})/2|$, *$c_{j,k}$ est un élément de* $\{ 1, 2 \}$ *pour tout k.*

Si $\alpha_j < \log 2$, $c_{j,k} = 1$ pour tout k.

En particulier, si $\alpha_j < \log 2$ pour tout j, f est un polynôme.

Pour la première partie, remarquons que la fonction f est la transformée de Fourier-Borel d'une fonctionnelle analytique T portable par le polydisque $K = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} S_{\alpha_j}$, où $S_{\alpha_j} = \{ z \in \mathbf{C}; |z| \leqslant \alpha_j \}$. En effet, la fonction d'appui de K est $H_K(z) = \alpha_1 |z_1| + \ldots + \alpha_d |z_d|$, et l'hypothèse faite sur f implique l'inégalité $|f(z)| \leqslant M_\varepsilon (\exp \ H_K(z) + \varepsilon \|z\|)$, où $M_\varepsilon = M$ pour tout ε; d'où l'affirmation ci-dessus (*cf.* Introduction). Le diamètre transfini de $L_j = l_+ (\mathrm{pr}_j(K)) = l_+ (S_{\alpha_j}) = U_{\alpha_j}$ est < 1 pour $\alpha_j < \alpha_0$ (*cf.* Introduction et [16]). Le théorème 3.2.3 s'applique. La seconde partie résulte des calculs faits par CHARLES PISOT [16] dans le cas d'une variable. Le résultat ci-dessus est à rapprocher d'un énoncé de A. BAKER [4].

3.3. **Espace $\mathscr{H}_{\log 2}(\mathbf{C}^d)$**

On note $\mathscr{H}_{\log 2}(\mathbf{C}^d)$ l'ensemble des fonctions entières vérifiant

$$|f(z_1, \ldots, z_d)| \leqslant M \exp(\alpha_1 |z_1| + \ldots + \alpha_d |z_d|),$$

avec

$$0 \leqslant \alpha_j < \log 2 \qquad (1 \leqslant j \leqslant d), \quad M = \text{Cte} > 0.$$

3.3.1. PROPOSITION. — *Toute $f \in \mathscr{H}_{\log 2}(\mathbf{C}^d)$ se développe selon*

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} \Delta_\nu(f) \, P_\nu(z), \tag{3}$$

développement uniformément convergeant sur tout compact de $\mathbf{C}^d$, où

$$P_\nu(z) = P_{\nu_1}(z_1) \ldots P_{\nu_d}(z_d),$$

avec

$$P_n(u) = \frac{u(u-1)\ldots(u-n+1)}{n!}.$$

$$\Delta_\nu(f) = \sum_{0 \leqslant \beta_j \leqslant \nu_j,\, 1 \leqslant j \leqslant d} \binom{\nu}{\beta} (-1)^{|\nu| - |\beta|} f(\beta) \qquad (\nu, \beta \in \mathbf{N}^d).$$

Pour tout $\max_{1 \leqslant j \leqslant d} \alpha_j < \alpha < \log 2$, *il existe* $M_\alpha \geqslant 0$ *telle que* $|\Delta_\nu(f)| \leqslant M_\alpha (e^\alpha - 1)^{|\nu|}$ $(\nu \in \mathbf{N}^d)$.

Démonstration. — On a

$$\exp\langle \zeta, z \rangle = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} (\exp \zeta_1 - 1)^{\nu_1} \ldots (\exp \zeta_d - 1)^{\nu_d} P_\nu(z), \tag{4}$$

où la série converge, pour z fixé, uniformément sur tout compact de l'intérieur du polydisque $C(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. Cela résulte du développement analogue établi (par exemple dans [6]) pour le cas d'une variable et la possibilité de multiplier des séries absolument convergentes.

Soit T la fonctionnelle analytique portable par le convexe compact $C(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ telle que $\hat{T} = f$. Si $\max \alpha_j < \alpha < \log 2$ on a, pour un $M_\alpha \geqslant 0$,

$$|\langle T, h \rangle| \leqslant M_\alpha \sup_{|z_j| \leqslant \alpha,\, 1 \leqslant j \leqslant d} |h(z)|. \tag{5}$$

En particulier, si $h(\zeta) = \exp < \zeta, z >$, l'égalité (4) implique la relation (3), et l'inégalité (5) donne

$$\begin{aligned} |\Delta_\nu(f)| &= |\langle T, \textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\exp \zeta_j - 1)^{\nu_j} \rangle| \\ &\leqslant M_\alpha \sup_{|\zeta_j| \leqslant \alpha,\, 1 \leqslant j \leqslant d} |\textstyle\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\exp \zeta_j - 1)^{\nu_j}|, \end{aligned}$$

d'où

$$|\Delta_\nu(f)| \leqslant M_\alpha (e^\alpha - 1)^{|\nu|}.$$

Remarque. — Dans le cas particulier où f est arithmétique, élément de $\mathscr{H}_{\log 2}(\mathbf{C}^d)$, on retrouve le dernier point du corollaire 3.2.9. En effet, $\Delta_\nu(f)$ est un entier, dont la valeur absolue est < 1 dès que $M_\alpha (e^\alpha - 1)^{|\nu|} < 1$

3.4. Cas où f est périodique

3.4.1. THÉORÈME. — *Toute fonction $f \in A_\Omega$, périodique par rapport à chaque variable z_j et de période $m_j \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, est de la forme :*

$$f(z) = \sum_{(-m_j/2) < k_j < (m_j/2),\ 1 \leqslant j \leqslant d} A_{k_1, \ldots, k_d} \exp\left(-\sum_{p=1}^{d} \frac{2 i \pi k_p z_p}{m_p}\right).$$

Démonstration. — Soit T la fonctionnelle analytique portable par un convexe compact K de Ω telle que $\hat{T} = f$. Le développement à l'origine de la fonction $G_K(T)$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} G_K(T)(z) &= \sum_{\nu \in N^d} f(\nu) z^\nu \\ &= \sum_{0 \leqslant \nu_j < m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant d} \sum_{\beta \in \mathbf{N}^d} \\ &\quad \times f(\nu_1 + \beta_1 m_1, \ldots, \nu_d + \beta_d m_d) z_1^{\nu_1 \times \beta_1 m_1} \ldots z_d^{\nu_d \times \beta_d m_d} \\ &= \sum_{0 \leqslant \nu_j < m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant d} f(\nu) z^\nu \sum_{\beta \in \mathbf{N}^d} (z_1^{m_1})^{\beta_1} \ldots (z_d^{m_d})^{\beta_d} \\ &= \sum_{0 \leqslant \nu_j < m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant d} f(\nu) z^\nu \\ &\quad / (1 - z_1^{m_1}) \ldots (1 - z_d^{m_d}). \end{aligned}$$

Rappelons que la fonction $G_K(T)$ est holomorphe dans

$$\Omega(K) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \complement (l(\mathrm{pr}_j(K))).$$

3.4.2. LEMME. — *Dans l'ouvert $V = (\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\mathbf{C} \setminus E_j)) \cap \Omega(K)$ (où E_j est l'ensemble des racines m_j-ièmes de l'unité), la fraction rationnelle*

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sum_{0 \leqslant \nu_j < m_j,\ 1 \leqslant j \leqslant d} f(\nu) z^\nu}{(1 - z_1^{m_1}) \ldots (1 - z_d^{m_d})}$$

est égale à $G_K(T)$.

Démonstration. — L'ensemble V est connexe; en effet, il s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} (\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \complement E_j) \cap (\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \complement l_-(\mathrm{pr}_j(K))) &= \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} [(\complement E_j) \cup (\complement l_-(\mathrm{pr}_j(K)))] \\ &= \prod_{1 \leqslant j \leqslant d} \complement (E_j \cup l_-(\mathrm{pr}_j(K))) \end{aligned}$$

qui est un produit d'ensembles connexes. Les fonctions $G_K(T)$ et P/Q sont holomorphes dans V, et coïncident dans un voisinage de O contenu dans V, d'où le résultat.

On en déduit deux lemmes.

3.4.3. LEMME. — *La fraction rationnelle P/Q est holomorphe dans $\Omega(K)$.*

3.4.4. LEMME. — *On peut écrire :*

$$\frac{P}{Q} = \frac{A(z_1, \ldots, z_d)}{\prod_{1 \leq j \leq d} \prod_{(-m_j/2) < k_j < (m_j/2)} (1 - \exp(-2\, i k_j \pi / m_j)\, z_j))},$$

où A est un polynôme.

Si m_j est impair,

$$1 - z_j^{m_j} = \prod_{(-m_j/2) < k_j < (m_j/2)} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\, i k_j \pi}{m_j}\right) z_j\right).$$

Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ sont les indices j tels que m_j soit pair, on constate que

$$A(z_1, \ldots, z_d) = \frac{\sum_{0 \leq \nu_j < m_j,\, 1 \leq j \leq d} f(\nu)\, z^\nu}{(1 + z_{\alpha_1}) \ldots (1 + z_{\alpha_p})}$$

est un polynôme. En effet, dans un voisinage convenable V_1 du point $(-1, -1, \ldots, -1) \in \Omega(K)$, la fonction A est holomorphe dans V_1 privé de l'ensemble analytique

$$W = \{ z \in V_1 ;\, (1 + z_{\alpha_1}) \ldots (1 + z_{\alpha_p}) = 0 \},$$

et admet comme prolongement holomorphe dans V_1 la fonction

$$G_K(T)(z) \prod_{1 \leq j \leq d} \prod_{(-m_j/2) < k_j < (m_j/2)} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\, i k_j \pi}{m_j}\right) z_j\right),$$

on en déduit alors aisément que A est un polynôme.

D'après le lemme 1.7.2, on peut écrire :

$$(6) \qquad \begin{cases} f(\nu) = \sum_{(-m_j/2) < k_j < (m_j/2),\, 1 \leq j \leq d} A_{k_1, \ldots, k_d} \\ \qquad \times \exp\left(-\sum_{p=1}^{d} \left(\frac{2\, i k_p \pi}{m_p}\right) \nu_p\right) (\nu \in \mathbf{N}^d). \end{cases}$$

Soit $h(z)$ la fonction obtenue en remplaçant ν_p par z_p $(1 \leqslant p \leqslant d)$ dans le second membre de (6); h coïncide avec f sur $\mathbf{N}^d$, et

$$|h(z)| \leqslant M \exp(\alpha_1 |z_1| + \ldots + \alpha_d |z_d|) \qquad (M = \text{Cte} > 0),$$

avec $\alpha_j = \max_{(-m_j/2) < k_j < (m_j/2)} (2 |k_j| \pi)/m_j < \pi$. On conclut par le théorème 3.1.1.

CHAPITRE IV

Quotient d'exponentielle-polynômes

4.1. Un problème de division pour la convolution d'Hadamard

Afin de résoudre le problème de division des fonctions exponentielle-polynômes, nous allons étudier tout d'abord un problème de division dans l'algèbre $\mathcal{O}$ des germes à l'origine des fonctions holomorphes pour la convolution d'Hadamard.

4.1.1. THÉORÈME. — *Soient donnés :*

(*a*) $0 < \alpha_j < \pi/4$ $(1 \leqslant j \leqslant d)$;

(*b*) γ_R *le germe à l'origine de la fraction rationnelle*

$$R(z) = \frac{A(z)}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (1 - c_{j,1} z_j)^{\delta_{j,1}} \ldots (1 - c_{j,p_j} z_j)^{\delta_{j,p_j}}} \not\equiv 0,$$

où $c_{j,k} \in U_{\alpha_j} = l_-(S_{\alpha_j})$ $(S_{\alpha_j} = \{ u \in \mathbf{C};\ |u| < \alpha_j \})$, *et le degré du polynôme* A *par rapport à* z_j *est inférieur à* $\delta_{j,1} + \ldots + \delta_{j,p_j}$ *pour tout* j;

(*c*) γ_S *le germe à l'origine de la fraction rationnelle*

$$S(z) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{\mu_l}{(1 - z_1 \exp \beta_{l,1}) \ldots (1 - z_d \exp \beta_{l,d})} \not\equiv 0,$$

où $\mu_l \neq 0$ *et* $\exp(\beta_{l,k}) \in U_{\alpha_k}$ *pour tout* k;

(*d*) γ_H *le germe à l'origine d'une fonction* $H \in \mathscr{H}_0(\Omega(\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} S_{\alpha_j}))$, $H \not\equiv 0$, *telle que :*

$$\gamma_R = \gamma_S \star \gamma_H.$$

Alors H *est une fraction rationnelle de la forme*

$$\frac{C(z)}{Q_1(z_1) \ldots Q_d(z_d)}, \tag{1}$$

avec $Q_j(z_j) = \prod_{1 \leqslant l_j \leqslant m_j} (z_j - \zeta_{j,\,l_j})^{s_j}$ *où l'ensemble* $\{\zeta_{j,\,1}, \ldots, \zeta_{j,m_j}\}$ *est l'ensemble des* $(\exp \beta_{k,\,j})/c_{j,\,r} \in U_{\alpha_j}$, $s_j = \max_{1 \leqslant k_j \leqslant p_j} \delta_{j,\,k_j}$ *et* $\partial^\circ C$ *en la variable* z_j *est strictement inférieure au degré de* $Q_j = m_j s_j$.

Démonstration. — Nous commençons par étudier le cas d'une variable.

On notera :

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1-c_1 z)^{\delta_1} \ldots (1-c_p z)^{\delta_p}}, \tag{2}$$

$$S(z) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{\mu_l}{1 - z \exp \beta_l} \qquad (l \neq l' \Rightarrow \beta_l \neq \beta_{l'}), \tag{3}$$

et on écrirera α au lieu de α_1.

Soit $C = l_-(c')$, où c' est un polygone convexe contenant S_α dans son intérieur et contenu dans l'intérieur de $S_{\alpha+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ tel que $2\alpha+\varepsilon < \pi$. Pour tout z fixé, $|z| < \exp(-(2\alpha+\varepsilon))$, la fonction $t \mapsto H(z/t)$ est holomorphe dans l'intérieur de $U_{\alpha+\varepsilon}$ et continue sur $U_{\alpha+\varepsilon}$.

Les fonctions S, R, H étant holomorphes dans $\complement U_\alpha$, et nulles à l'infini, d'après le théorème d'inversion 1.5.1, il existe des fonctionnelles analytiques T_S, T_R, T_H, portables par $K = S_\alpha$, telles que $G_K(T_S) = S$, $G_K(T_R) = R$, $G_K(T_H) = H$ dans $\complement U_\alpha$. Or $S_\alpha - S_\alpha + S_\alpha = S_{3\alpha} \subset U$. D'après le théorème 2.1.4 :

$$G_{S_{2\alpha}}(T_S \star T_H)(z) = \frac{(-1)}{2i\pi} \int_C G_{S_\alpha}(T_S)(t)\, G_{S_\alpha}(T_H)\left(\frac{z}{t}\right) \frac{dt}{t}, \tag{4}$$

pour $z \notin U_{2\alpha+\varepsilon}$, condition impliquant $z \notin D.\, l_-(S_\alpha)$, où D est le domaine bordé par C.

4.1.2. Lemme. — *L'égalité* $\gamma_S \star \gamma_H = \gamma_R$ *implique*

$$G_{S_{2\alpha}}(T_S \star T_H)(z) = G_{S_\alpha}(T_R)(z)$$

pour $z \in \complement U_{2\alpha}$.

En effet, en considérant l'application $\mathcal{G}$ introduite dans le paragraphe 2.1, la première égalité peut s'écrire $\mathcal{G}(T_S) \star \mathcal{G}(T_H) = \mathcal{G}(T_R)$. D'après la proposition 2.1.2, $\mathcal{G}(T_S) \star \mathcal{G}(T_H) = \mathcal{G}(T_S \star T_H)$, la condition $S_\alpha + S_\alpha \subset U$ sur les porteurs étant vérifiée. En vertu de l'injectivité de l'application $\mathcal{G}$ (proposition 2.1.1), on a $T_S \star T_H = T_R$, d'où le lemme.

La relation (4) peut s'écrire :

$$GS_{2_\alpha}(T_R)(z) = \frac{(-1)}{2i\pi}\int_C G_{S_\alpha}(T_S)(t)\, G_{S_\alpha}(T_H)\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t} \qquad (z \notin U_{2\alpha+\varepsilon})$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad R(z) = \frac{(-1)}{2i\pi}\int_C S(t)\, H\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t}.$$

La fonction sous le signe somme est, pour tout $|z| < \exp(-2\alpha+\varepsilon)$ fixé, méromorphe en t dans $U_{\alpha+\varepsilon}$, et ses pôles sont les pôles de S qui se trouvent tous dans U_α. Compte tenu de (3), l'intégrale (5) se calcule par la méthode des résidus, et l'on obtient :

$$(6) \qquad R(z) = \textstyle\sum_{1 \leqslant l \leqslant q} \mu_l H(z \exp \beta_l), \qquad |z| < \exp(-2\alpha+\varepsilon).$$

Remarquons que les deux membres de (6) sont holomorphes dans $\complement U_{2\alpha}$.

L'égalité (6) qui a été démontrée dans le disque $|z| < \exp(-2\alpha+\varepsilon)$ est encore vérifiée dans $\complement U_{2\alpha}$, car ce dernier ensemble est connexe et contient le disque ci-dessus (nous verrons plus loin qu'elle est vérifiée partout).

4.1.3. Lemme fondamental. — *La fonction H se prolonge en une fraction rationnelle dans C, ses pôles étant dans U_α.*

Démonstration. — Si l'ensemble des $t_j = \exp(-\beta_j)$, $1 \leqslant j \leqslant q$, est réduit à un point, le lemme est évident d'après (6).

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des $\beta \geqslant 0$ tels que, pour tout $\beta' > \beta$, il existe une fonction $M_{\beta'}$ méromorphe dans $\complement U_{\beta'}$ telle que les restrictions de $M_{\beta'}$ et H coïncident dans $(\complement U_\alpha) \cap (\complement U_{\beta'})$; $\mathscr{F}$ est évidemment non vide, et on vérifie aisément que $\mathscr{F} = [a, +\infty[$, où a est la borne inférieure de $\mathscr{F}$. Envisageons les deux cas possibles $a = 0$ et $a > 0$.

(A) *Cas* $a = 0$. — Dans ce cas, H est méromorphe dans $\mathbf{C}\setminus\{1\}$; soient $t_j = \exp(-\beta_j) = \rho_j \exp i\theta_j$ $(-\alpha \leqslant \theta_j \leqslant \alpha)$. Posons $t_{j_0} = \rho_0 \exp i\theta_0$ avec $\rho_0 = \max \rho_j$ et $\theta_0 = \max\{\theta_i;\ \rho_i = \rho_0\}$. Alors, pour $j \neq j_0$, $u_j = t_{j_0}/t_j \neq 1$, et H est méromorphe en u_j. Le premier membre de (6) étant défini et holomorphe dans le complémentaire de $\{c_1^{-1}, \ldots, c_p^{-1}\}$ et le deuxième membre dans le complémentaire de $\{t_1, \ldots, t_q\}$, la relation (6) est vérifiée dans le complémentaire de $E = \{c_p^{-1}, \ldots, c_p^{-1}, t_1, \ldots, t_q\}$ pour $t_{j_0} z \notin E$, on a

$$R(t_{j_0} z) = \mu_{j_0} H(z) + \textstyle\sum_{j \neq j_0,\, 1 \leqslant j \leqslant q} \mu_j H\left(\frac{t_{j_0} z}{t_j}\right),$$

d'où

$$H(z) = \frac{1}{\mu_{j_0}} R(t_{j_0} z) - \sum_{j \neq j_0, 1 \leqslant j \leqslant q} \frac{\mu_j}{\mu_{j_0}} H\left(\frac{t_{j_0} z}{t_j}\right),$$

relation valable dans un voisinage convenable du point $\{1\}$. Il en résulte que H est méromorphe dans un voisinage de $\{1\}$. D'où le lemme, dans le cas $a = 0$, en vertu du fait qu'une fonction, méromorphe dans $\mathbf{C}$ et nulle a l'infini, est une fraction rationnelle.

(B) *Cas* $a > 0$. — Nous éliminons cette possibilité au moyen des deux lemmes qui suivent (leur démonstration étant standard).

4.1.4. LEMME. — *Si, pour tout* z_0 *appartenant à la frontière* ∂U_a *de* $U_a = l_{\pm}(S_a)$, *il existe un disque ouvert non vide* $C(z_0)$ *centré en* z_0 *tel que* H *se prolonge en une fonction méromorphe* $H_{z_0}(z)$ *dans* $(\complement U_a) \cup C(z_0)$, *alors* H *se prolonge en une fonction méromorphe dans* $\complement U_\beta$ *pour un* $\beta < a$.

4.1.5. LEMME. — *Pour tout* $z_0 \in \partial U_a$, *il existe un disque ouvert non vide* $C(z_0)$ *centré en* z_0 *et un prolongement méromorphe* H_{z_0} *de* H *à l'ouvert* $(\complement U_a) \cup C(z_0)$.

4.1.6. *Fin de la démonstration du théorème* 4.1.1 *dans le cas d'une variable.* — La fraction rationnelle $H(z)$ de l'énoncé du théorème 4.1.1 dans le cas d'une variable se décompose en éléments simples selon

$$H(z) = \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant r} \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant \tau_\nu} \frac{A_{\nu,\mu}}{(z-\alpha_\nu)^\mu},$$

avec $\alpha_{\nu_1} \neq \alpha_{\nu_2}$ si $\nu_1 \neq \nu_2$ et $A_{\nu,\tau_\nu} \neq 0$. En outre, les conditions suivantes sont vérifiées :

1° Pour tout $1 \leqslant \nu \leqslant r$, il existe l et t tels que $\alpha_\nu = \exp(\beta_l)/c_t$.

2° $\tau_\nu \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant p} \delta_k = s$.

(Ces dernières conditions permettent d'écrire la fraction $H(z)$ sous la forme $C(z)/Q(z)$ annoncée dans le théorème 4.1.1, où

$$Q(z) = \prod_{1 \leqslant l \leqslant m} (z-\zeta_l)^s$$

avec $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_m\}$ l'ensemble des $\exp(\beta_l)/c_t \in U_\alpha$.)

(A) *Démonstration de la condition* 1°. — D'après l'étude faite antérieurement, on a l'égalité

$$R(z) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant q} \mu_l H(z \exp \beta_l)$$

pour tout z distincts des pôles de R. Il vient donc :

$$R(z)=\frac{A(z)}{(1-c_1 z)^{\delta_1}\dots(1-c_p z)^{\delta_p}}$$
$$=\sum_{1\leqslant \nu\leqslant r,\ 1\leqslant \mu\leqslant \tau_\nu,\ 1\leqslant l\leqslant q}\frac{\mu_l \exp(-\mu\,\beta_l)\,A_{\nu,\mu}}{(z-\exp(-\beta_l)\,\alpha_\nu)^\mu}.$$

Si la condition 1° n'est pas vérifiée, on peut trouver ν_0 tel que, pour tout l, $\alpha_{\nu_0}\exp(-\beta_l)$ ne soit pas l'un des $1/c_k$. Soit $I=\{\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n\}$ l'ensemble des ν qui vérifieraient cette dernière propriété. Alors :

$$R(z)=\sum_{\nu\in I,\ 1\leqslant\mu\leqslant\tau_\nu,\ 1\leqslant l\leqslant q}\frac{\mu_l \exp(-\mu\,\beta_l)\,A_{\nu,\mu}}{(z-\exp(-\beta_l)\,\alpha_\nu)^\mu}$$
$$+\sum_{\nu\notin I,\ 1\leqslant\mu\leqslant\tau_\nu,\ 1\leqslant l\leqslant q}\frac{\mu_l \exp(-\mu\,\beta_l)\,A_{\nu,\mu}}{(z-\exp(-\beta_l)\,\alpha_\nu)^\mu}$$
$$=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

Le Σ_1 représente une fraction rationnelle sans pôle, et nulle à l'infini, donc identiquement nulle.

Posons

$$H_0(z)=\sum_{\nu\notin I,\ 1\leqslant\mu\leqslant\tau_\nu}\frac{A_{\nu,\mu}}{(z-\alpha_\nu)^\mu};\qquad H_0\in\mathscr{H}_0(\Omega(S_\alpha)),$$

il existe une fonctionnelle analytique T_{H_0} (d'après le théorème d'inversion 1.5.1) portable par S_α telle que $H_0=G_{S_\alpha}(T_{H_0})$. Par un argument analogue à celui utilisé dans le lemme 4.1.2, on voit que

$$G_{S_{2\alpha}}(T_{H_0}\star T_S)(z)$$
$$=\frac{(-1)}{2i\pi}\int_C G_{S\alpha}(T_S)(t)\,G_{S\alpha}(T_{H_0})\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t}\qquad(|z|<\exp(-2\alpha+\varepsilon))$$
$$=\sum_{1\leqslant l\leqslant q}\mu_l H_0(z\exp\beta_l).$$

Cette dernière expression est égale à $\Sigma_2=R(z)$. Donc, en considérant les germes à l'origine de $R(z)$ et de $G_{S_{2\alpha}}(T_{H_0}\star T_S)$, on obtient :

$$\mathscr{G}(T_{H_0}\star T_S)=\mathscr{G}(T_R)=\mathscr{G}(T_H\star T_S),$$

d'où, puisque $\mathscr{G}$ est injective (2.1.1) :

$$T_{H_0}\star T_S=T_H\star T_S.$$

Par la transformation de Fourier-Borel, il vient :

$$\hat{T}_{H_0} . \hat{T}_S = \hat{T}_H . \hat{T}_S.$$

L'anneau des fonctions entières étant intègre et $\hat{T}_S \neq 0$, on en déduit $\hat{T}_{H_0} = \hat{T}_H$, donc $T_{H_0} = T_H$ et $H_0 = H$. D'où une contradiction avec le fait que $\alpha_{\nu_0}, \ldots, \alpha_{\nu_n}$ sont des pôles effectifs de H.

(B) *Démonstration de la condition* 2°. — On vient donc d'établir que, pour tout ν, il existe un σ tel que $\alpha_{\nu_0} = \zeta_\sigma$, par suite la fraction H peut s'écrire,

$$H(z) = \sum_{\sigma \in j} \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant \tau_\sigma} \frac{B_{\sigma, \mu}}{(z-\zeta_\sigma)^\mu},$$

où J est l'ensemble des indices σ ($1 \leqslant \sigma \leqslant m$) tels que ζ_σ soit un pôle de H, et $B_{\sigma, \tau_\sigma} \neq 0$ pour $\sigma \in J$.

Si la condition (2) n'est pas vérifiée, le sous-ensemble K de J des σ tels que $\tau_\sigma > s$ est non vide. La relation fonctionnelle

$$R(z) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant q} \mu_l H(\exp(\beta_l) z)$$

devient :

$$\begin{aligned} R(z) &= \sum_{\sigma \in j,\, 1 \leqslant \mu \leqslant \tau_\sigma,\, 1 \leqslant l \leqslant q} \frac{\mu_l \exp(-\mu \beta_l) \beta_{\sigma, \mu}}{(z-\exp(-\beta_l)\zeta_\sigma)^\mu} \\ &= \Sigma'_{\sigma \in J \setminus K,\, 1 \leqslant \mu \leqslant \tau_\sigma \leqslant s,\, 1 \leqslant l \leqslant q} \\ &\quad + \Sigma''_{\sigma \in K,\, 1 \leqslant \mu \leqslant s,\, 1 \leqslant l \leqslant q} \\ &\quad + \Sigma'''_{\sigma \in K,\, s < \mu \leqslant \tau_\sigma,\, 1 \leqslant l \leqslant q}. \end{aligned}$$

Σ''' est une fraction rationnelle nulle à l'infini et sans pôle. En effet, un $\exp(-\beta_l)\zeta_\sigma$, $\sigma \in K$, s'il est pôle de R ne peut figurer dans le second membre qu'à un ordre $\leqslant s$ et, s'il n'est pas pôle de R, c'est un pôle fictif de $\Sigma' + \Sigma''$ et Σ'''.

Comme précédemment, posons

$$H_0(z) = \sum_{\sigma \in J \setminus K,\, 1 \leqslant \mu \leqslant \tau_\sigma \leqslant s} \frac{B_{\sigma, \mu}}{(z-\zeta_\sigma)^\mu} + \sum_{\sigma \in K,\, 1 \leqslant \mu \leqslant s} \frac{B_{\sigma, \mu}}{(z-\zeta_\sigma)^\mu}.$$

Les mêmes calculs que ceux faits pour la démonstration de la condition 1° conduisent à l'égalité $H = H_0$, d'où le théorème 4.1.1 dans le cas d'une variable.

4.1.7. *Démonstration du théorème* 4.1.1 (*cas général*). — On raisonne par induction; l'amorce de la récurrence venant d'être faite dans le cas d'une variable.

Soient :

$$S(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} a_\nu z^\nu, \qquad H(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} b_\nu z^\nu, \qquad R(z) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} c_\nu z^\nu,$$

les développements respectifs de S, R, H dans un voisinage de O ($|z_j| < \exp(-\alpha_j)$, $1 \leqslant j \leqslant d$ convient).

La relation $\gamma_R = \gamma_S \star \gamma_H$ se traduit par

$$\sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} c_\nu z^\nu = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^d} a_\nu b_\nu z^\nu.$$

Fixons $(z_2, \ldots, z_d)$, et ordonnons en z_1; en notant ν' un élément de $\mathbf{N}^{d-1}$, $\nu' = (\nu_2, \ldots, \nu_d)$ et $z' = (z_2, \ldots, z_d) \in \mathbf{C}^{d-1}$, on obtient :

(8) $$\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu'} c_{(\nu_1, \nu')} (z')^{\nu'}\right) z_1^{\nu_1} = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu'} a_{(\nu_1, \nu')} b_{(\nu_1, \nu')} (z')^{\nu'}\right) z_1^{\nu_1}.$$

On en déduit :

(9) $$\begin{aligned} \sum_{\nu'} c_{(\nu_1, \nu')} (z')^{\nu'} &= \sum_{\nu'} a_{(\nu_1, \nu')} b_{(\nu_1, \nu')} (z')^{\nu'} \\ &= \left(\sum_{\nu'} a_{(\nu_1, \nu')} (z')^{\nu'}\right) \star \left(\sum_{\nu'} b_{(\nu_1, \nu')} (z')^{\nu'}\right). \end{aligned}$$

pour tout $\nu_1 \in \mathbf{N}$.

D'autre part, soit

$$P_j(z_j) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant pj} (1 - c_{j, k_j} z_j)^{\delta_j, k_j},$$

on a

$$P_2(z_2) \ldots P_d(z_d) R(z_1, \ldots, z_d) = \sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant p_1} \sum_{1 \leqslant l_1 \leqslant \delta_1, k_1} \frac{A_{1, k_1, l_1}(z')}{(1 - c_{1, k_1} z_1)^{l_1}},$$

où $A_{1\ k_1, l_1}(z')$ est un polynôme en z' dont le degré pour la variable z_j ($2 \leqslant j \leqslant d$) est inférieur au degré de P_j.

Dans un voisinage de zéro, on a donc

(10) $$\begin{aligned} &R(z_1, \ldots, z_d) \\ &= \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant p_1,\, 1 \leqslant l_1 \leqslant \delta_1, k_1} \frac{A_{1, k_1, l_1}(z')}{P_2(z_2) \ldots P_d(z_d)} \\ &\times \binom{\nu_1 + l_1 - 1}{l_1 - 1} c_{1, k_1}^{\nu_1} \Bigg) z_1^{\nu_1}. \end{aligned}$$

De même, on peut écrire :

(11) $$\begin{aligned} &S(z_1, \ldots, z_d) \\ &= \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \frac{\mu_j \exp \nu_1 \beta_{j, 1}}{(1 - z_2 \exp \beta_{j, 2}) \ldots (1 - z_d \exp \beta_{j, d})} \right) z_1^{\nu_1}. \end{aligned}$$

En comparant (8), (9), (10), (11) et en remarquant que le coefficient de $z_1^{\nu_1}$, dans le développement de S ordonné selon z_1, est :

$$\textstyle\sum_{\nu \in \mathbf{N}^{d-1}} a_{(\nu_1, \nu')}(z')^{\nu'} \qquad (|z_j| < \exp(-\alpha_j),\ 2 \leqslant j \leqslant d),$$

il vient, pour tout $\nu_1 \in \mathbf{N}$:

$$(12)\quad \frac{\sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant p_1,\ 1 \leqslant l_1 \leqslant \delta_1,\ k_1} A_{1, k_1, l_1}(z') \binom{\nu_1 + l_1 - 1}{l_1 - 1} c_{1, k_1}^{\nu_1}}{P_2(z_2) \dots P_d(z_d)}$$
$$= \left(\textstyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant q} \dfrac{\mu_j \exp(\nu_1, \beta_{j,1})}{(1 - z_2 \exp \beta_{j,2}) \dots (1 - z_d \exp \beta_{j,d})}\right) \star \left(\textstyle\sum_{\nu'} b_{(\nu_1, \nu')}(z')^{\nu'}\right).$$

Les deux premiers $\sum$ figurant dans (12) représentent des fractions rationnelles R_{ν_1} et S_{ν_1} de la forme générale considérée dans l'énoncé du théorème pour $d-1$ variables $z' = (z_2, \dots, z_d)$. Pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence, il suffit de prouver que le dernier $\sum$ figurant dans (12) est le développement au voisinage de l'origine d'une fonction

$$H_{\nu_1}(z') \in \mathscr{H}_0(\Omega(\textstyle\prod_{2 \leqslant j \leqslant d} S_{\alpha_j})).$$

Or, d'après la formule de Cauchy, on a, si $|z_j| < \exp(-\alpha_j)$ $(2 \leqslant j \leqslant d)$,

$$\textstyle\sum_{\nu'} b_{(\nu_1, \nu')}(z')^{\nu'} = \dfrac{1}{2 i \pi} \displaystyle\int_{|z_1| = \rho < \exp(-\alpha_1)} \frac{H(z_1, z')}{z_1^{\nu_1 + 1}} dz_1.$$

L'intégrale figurant au second membre de (13) définie une fonction $H_{\nu_1}(z')$ élément de $\mathscr{H}_0(\Omega(\prod_{2 \leqslant j \leqslant d} S_{\alpha_j}))$ (arguments classiques). L'hypothèse de récurrence est donc applicable, et H_{ν_1} est une fraction rationnelle, élément de $\mathscr{H}_0(\Omega(\prod_{2 \leqslant j \leqslant d} S_{\alpha_j}))$, de la forme

$$(14)\qquad \frac{C_{\nu_1}(z')}{Q_2(z_2) \dots Q_d(z_d)}.$$

On a

$$H(z_1, \dots, z_d) = \textstyle\sum_{\nu_1 = 0}^{\infty} H_{\nu_1}(z') z_1^{\nu_1} \qquad (|z_j| < \exp(-\alpha_j),\ 1 \leqslant j \leqslant d)$$
$$= \frac{1}{Q_2(z_2) \dots Q_d(z_d)} \textstyle\sum_{\nu_1 = 0}^{\infty} C_{\nu_1}(z') z_1^{\nu_1}.$$

La dernière série converge uniformément sur tout compact du polydisque $\{|z_j| < \exp(-\alpha_j),\ 2 \leqslant j \leqslant d\}$ pour z_1 fixé $|z_1| < \exp(-\alpha_1)$. Les coefficients $C_{\nu_1}(z')$ étant des polynômes dont le degré en z_j $(2 \leqslant j \leqslant d)$ est inférieur au degré de Q_j la somme de cette série représente un polynôme

$P_{z_1}(z')$ vérifiant cette dernière inégalité sur les degrés. Évidemment on a la même conclusion par rapport à chaque variable.

On en déduit que H est, dans le polydisque $|z_j| < \exp(-\alpha_j)$ une fraction rationnelle séparément par rapport à chaque variable. Il en résulte que H est, dans ce polydisque, une fraction rationnelle X par rapport à l'ensemble des variables en vertu d'un énoncé bien connu (*cf.* [7], chap. IX, th. 5). Cela implique que H est une fraction rationnelle partout. En effet, H et X coïncident dans l'ouvert connexe Ω $(\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} S_{\alpha_j})$, et X prolonge H en dehors de cet ouvert.

De plus, $Q_1(z_1)\, Q_2(z_2) \ldots Q_d(z_d)\, H(z_1, \ldots, z_d)$ est un polynôme par rapport à chaque variable et, par conséquent, est un polynôme $c(z)$ de l'ensemble des variables, donc

$$H(z_1, \ldots, z_d) = \frac{c(z)}{Q_1(z_1) \ldots Q_d(z_d)},$$

d'où le théorème 4.1.1.

4.2. Quotient d'exponentielle-polynômes

4.2.1. Théorème. — *Soient*

$$f(z_1, \ldots, z_d) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant q} p_k(z_1, \ldots, z_d) \exp\langle a_k, z\rangle$$
$$(a_k = (a_{k,1}, \ldots, a_{k,d}))$$

et

$$g(z_1, \ldots, z_d) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant p} \mu_l \exp\langle \beta_l, z\rangle (\beta_l = (\beta_{l,1}, \ldots, \beta_{l,d})),$$

deux exponentielle-polynômes la seconde étant à coefficients constants ($\mu_l \neq 0$, $1 \leqslant l \leqslant p$). *Si le quotient*

$$h(z_1, \ldots, z_d) = \frac{f(z_1, \ldots, z_d)}{g(z_1, \ldots, z_d)}$$

est une fonction entière, alors h est une exponentielle-polynôme.

Démonstration. — Soit θ une fonction entière dans $\mathbf{C}^d$ et $\lambda > 0$. On pose

$$\theta_\lambda(z) = \theta(\lambda z).$$

Si

$$\theta(z) = \sum_l Q_l(z) \exp\langle b_l, z\rangle \qquad (b_l = (b_{l,1}, \ldots, b_{l,d}) \in \mathbf{C}^d)$$

alors

$$\theta_\lambda(z) = \sum_l Q_l(\lambda z) \exp\langle \lambda b_l, z \rangle$$

est aussi une exponentielle-polynôme pour tout $\lambda > 0$.

Par ailleurs, si θ est une fonction entière de type exponentiel $\leqslant \tau$, θ_λ est de type exponentiel $\leqslant \lambda \tau$.

Sous les hypothèses du théorème, la fonction $h = f/g$ est une fonction entière de type exponentiel d'après un théorème de Lindelöf (*cf.* par exemple [1]). Pour montrer que h est une exponentielle-polynôme, il suffit de démontrer que, pour un certain $\lambda > 0$, h_λ en est une.

On choisit λ assez petit pour pouvoir appliquer le théorème 4.1.1. Si

$$|h(z)| \leqslant M \exp B(|z_1| + \ldots + |z_d|)$$

et

$$M' = \max_{k,j,l}[|a_{k,j}|, |\beta_{l,j}|],$$

on prend $\lambda_0 > 0$ de telle sorte que

$$\max(\lambda_0 M', \lambda_0 B) = \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

On a alors :

$$|h_{\lambda_0}(z)| \leqslant M \exp \alpha(|z_1| + \ldots + |z_d|) \leqslant M \exp(H_K(z) + \varepsilon \|z\|)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ avec $K = S_\alpha \times \ldots \times S_\alpha$ et H_α fonction d'appui de ce polydisque ($H_K(z) = \alpha(|z_1| + \ldots + |z_d|)$). Par suite, il existe des fonctionnelles analytiques T_1, T_2, T_3 portables par K telles que $\hat{T}_1 = f_{\lambda_0}$, $\hat{T}_2 = g_{\lambda_0}$ et $\hat{T}_3 = h_{\lambda_0}$. En effet, ceci est clair pour h_{λ_0} (*cf.* introduction); d'autre part, il est bien connu que

$$f_{\lambda_0}(z) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant q} P_k(\lambda_0 z) \exp\langle \lambda_0 a_k, z \rangle$$

et

$$g_{\lambda_0}(z) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant p} \mu_l \exp\langle \lambda_0 \beta_l, z \rangle$$

sont des transformées de Fourier-Borel de distributions dont les supports sont, respectivement, $(\lambda_0 a_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ et $(\lambda_0 \beta_l)_{1 \leqslant l \leqslant p}$ contenus dans K. L'égalité $f_{\lambda_0} = g_{\lambda_0} h_{\lambda_0}$ se traduit par $T_1 = T_2 \star T_3$. D'après la proposition 2.1.2, on a

$$\mathcal{G}(T_1) = \mathcal{G}(T_2 \star T_3) = \mathcal{G}(T_2) \star \mathcal{G}(T_3),$$

les conditions sur les supports étant vérifiées.

La fonction $R = G_K(T_1)$ est, d'après le théorème 1.7.1, une fraction rationnelle de la forme considérée dans le théorème 4.1.1 et son germe à l'origine est $\gamma_R = \mathscr{G}(T_1)$.

De même, la fonction $S = G_K(T_2)$ est une fraction rationnelle de la forme considérée dans 4.1.1 et son germe γ_S est $\mathscr{G}(T_2)$.

Enfin, la fonction $H = G_K(T_3)$ a pour germe à l'origine $\mathscr{G}(T_3) = \gamma_H$.

Les conditions d'application du théorème 4.1.1 sont vérifiées avec

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_d = \alpha < \frac{\pi}{4}.$$

Par suite, H est une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{c(z)}{Q_1(z_1)\ldots Q_d(z_d)},$$

où

$$Q_j(z_j) = \prod\nolimits_{1 \leqslant l_j \leqslant m_j} (z_j - \zeta_{j,\,l_j})^{s_j},$$

avec

$$\zeta_{j,\,l_j} \in U_\alpha \qquad (\zeta_{j,\,l_j} = \exp(-\alpha_{j,\,l_j}),\ \alpha_{j,\,l_j} \in S_\alpha).$$

Il en résulte que H s'écrit :

$$H(z) = \frac{D(z)}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant d} (\prod_{1 \leqslant l_j \leqslant m_j} (1 - \exp(\alpha_{j,\,l_j})\, z_j)^{s_j}))},$$

où D est un polynôme.

D'après le théorème 1.7.1, h_{λ_0} est une exponentielle-polynôme, d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Avanissian (V.). — Fonctions plurisousharmoniques, différences de deux fonctions plurisousharmoniques de type exponentiel, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 252, 1961, p. 499-500.

[2] Avanissian (V.) et Gay (R.). — Sur une transformation des fonctionnelles analytiques portables par des convexes compacts de C^d et la convolution d'Hadamard, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, 1974, Série A, p. 133-136.

[3] Avanissian (V.) et Gay (R.). — Sur les fonctions entières arithmétiques de type exponentiel et le quotient d'exponentielle-polynômes de plusieurs variables, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, 1974, Série A, p. 161-164.

[4] Baker (A.). — A note on integral integer valued functions of several variables, *Proc. Cambr. phil. Soc.*, t. 63, 1967, p. 715-720.

[5] Berenstein (C. A.) and Dostal (M. A.). — A lover estimate for exponential sums, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 80, 1974, p. 687-691.

[6] Boas (R.). — *Entire functions*. — New York, Academic Press, 1954 (*Pure and applied Mathematics, Academic Press*, 5).

[7] Bochner (S.) and Martin (W.). — *Several complex variables.* — Princeton, Princeton University Press, 1948 (*Princeton mathematical Series*, 10).

[8] Buck (C. R.). — Integral valued entire functions, *Duke math. J.*, t. 15, 1948, p. 879-891.

[9] Gordon (A. Ja.) and Levin (B. Ja.). — On the division of quasi-polynomials, *Funct. Anal. and Appl.*, t. 5, 1971, p. 19-25; [in Russian] *Funck. Anal.*, t. 5, 1971, p. 22-29.

[10] Hörmander (L.). — *An introduction to complex analysis in several variables.* — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (*University Series in higher Mathematics*).

[11] Kitagawa (K.). — Sur les polynômes exponentiels, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. 13, 1974, p. 489-496.

[12] Lelong (P.). — Sur les séries de Taylor $F(x, y)$ ayant des coefficients entiers, *Publ. Math.*, Debrecen, t. 2, 1950, p. 209-221.

[13] Lelong (P.). — *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables).* — Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1968 (*Séminaire de Mathématiques supérieures*, Été 1967, 28).

[14] Martineau (A.). — Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1963).

[15] Martineau (A.). — Extension en n variables d'un théorème de Polya-Carlson concernant les séries de puissances à coefficients entiers, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, 1971, Série A, p. 1127-1128.

[16] Pisot (C.). — Sur les fonctions arithmétiques analytiques à croissance exponentielle, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 222, 1946, p. 988-990.

[17] Polya (G.). — Über ganze ganzwertige Funktionen, *Göttingen Nachr.*, 1920, p. 1-10.

[18] Ritt (J. F.). — A factorization theory for functions $\sum_{i=1}^{n} a_i \exp(\alpha_i x)$, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 29, 1927, p. 584-596.

[19] Ronkin (L. I.). — Some questions of completeness and uniqueness for functions of several variables, *Funct. Anal. and Appl.*, t. 7, 1973, p. 37-45; [in Russian] *Funkc. Anal.*, t. 7, 1973, p. 45-55.

[20] Šeinov (V. P.). — Transfinite diametre and some theorems of Polya in the case of several complex variables, *Siberian math. J.*, t. 12, 1971, p. 999-1004; [in Russian] *Sibirsk, mat. Ž.*, t. 12, 1971, p. 1382-1389.

[21] Selberg (A.). — Über ganzwertige ganze transzendente Funktionen, *Arch. Math. og Naturvid.*, Kobenhavn, t. 44, 1941, p. 45-52.

[22] Shields (A.). — On quotients of exponential polynomials, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 16, 1963, p. 27-31.

[23] Smell-Small (T.). — On the convolution of analytic functions. *J. für reine und angew. Math.*, t. 258, 1973, p. 137-152.

[24] Trèves (F.). — *Linear partial differential equations with constant coefficients.* — New York, Gordon and Breach, 1966 (*Mathematics and its Applications*, 6).

[25] Zalcman (L.). — *Analytique capacity and rational approximation.* — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 50).

(Texte reçu le 2 juillet 1974.)

Vazgain Avanissian et Roger Gay,
Institut de Recherche mathématique avancée,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.