BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL EVRARD

Fibrations de petites catégories

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 241-265
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__241_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 241-265.

FIBRATIONS DE PETITES CATÉGORIES

PAR

MARCEL EVRARD

[Université de Paris VII]

RÉSUMÉ. — On donne une démonstration nouvelle et entièrement algébrique des théorèmes A et B de QUILLEN.

I. — Les groupes π_n (I)

Dans ce paragraphe, et dans les deux suivants, on donne la construction des groupes d'homotopie $\pi_n(\mathbf{I})$ ($n \geqslant 1$) d'une petite catégorie pointée **I** ainsi que quelques propriétés de ces groupes. Les démonstrations parfois longues de ces propriétés, qui ont été omises ici, se trouvent dans [1].

1° **C** (**C***) désigne la catégorie dont les objets sont les petites catégories (pointées) et dont les morphismes sont les foncteurs covariants (conservant les points).

Si **I** est une petite catégorie, un *chemin de* **I** *de longueur m* (*m* entier) est un diagramme de **I** de la forme :

$$\bar{I} = \bar{I}_0 \to I_1 \leftarrow \bar{I}_1 \to \ldots \to I_m \leftarrow \bar{I}_m.$$

On désigne par $K\Lambda(\mathbf{I})_m$ la petite catégorie dont les objets sont les chemins de **I** de longueur m et dont les morphismes de $\bar{I}$ dans $\bar{J}$ sont les suites

$$\bar{u} = (u_1, \ldots, u_m; \bar{u}_0; \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m),$$

rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bar{I} = \bar{I}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\bar{u}_0"] & I_1 \arrow[d, "u_1"] & \bar{I}_1 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\bar{u}_1"] & \ldots \arrow[r] & I_m \arrow[d, "u_n"] & \bar{I}_m \arrow[l] \arrow[d, "\bar{u}_m"] \\
\bar{J} = \bar{J}_0 \arrow[r] & J_1 & \bar{J}_1 \arrow[l] \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & J_m & \bar{J}_m \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Cette construction définit évidemment un foncteur

$$\mathbf{C} \xrightarrow{K\Lambda_m} \mathbf{C}.$$

De plus, si $\mathbf{\Delta}_m$ est la catégorie dont les objets sont les entiers de l'intervalle $[0, 2m]$ et dont les morphismes sont de la forme $2p \to 2p-1$, $2p \to 2p+1$:

$$K\Lambda(\mathbf{I})_m = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{C}}(\mathbf{\Delta}_m, \mathbf{I}).$$

K Λ_m commute donc en particulier aux produits fibrés.

On pose

$$K\Lambda(\mathbf{I}) = \oplus_{m \in \mathbf{N}} K\Lambda(\mathbf{I})_m.$$

Si $\bar{I}$ est un chemin de $\mathbf{I}$ de longueur m, comme ci-dessus, et si

$$[1, m] \xrightarrow{\varphi} [1, p]$$

est une application strictement croissante, on pose

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{I}) = \underset{\substack{o\text{-ième}\\ \text{place}}}{\bar{I}_0} \to \bar{I}_0 \leftarrow \ldots \leftarrow \bar{I}_0 \to \bar{I}_1 \leftarrow \underset{\substack{\varphi(1)\text{-ième}\\ \text{place}}}{\bar{I}_1} \to \bar{I}_1 \leftarrow \ldots\\ \ldots \leftarrow \bar{I}_{m-1} \to \bar{I}_m \leftarrow \underset{\substack{\varphi(1)\text{-ième}\\ \text{place}}}{\bar{I}_m} \to \ldots \to \bar{I}_m \leftarrow \underset{\substack{p\text{-ième}\\ \text{place}}}{\bar{I}_p}\end{aligned}$$

et on désigne par $\Lambda(\mathbf{I})$ la petite catégorie dont les objets sont les chemins de $\mathbf{I}$ et dont les morphismes d'un chemin $\bar{I}$ de longueur m dans un chemin $\bar{J}$ de longueur p sont les couples $(\varphi, \bar{u})$, où $\bar{u}$ est un morphisme de K $\Lambda(\mathbf{I})_p$, de $\varphi(\bar{I})$ dans $\bar{J}$. $\Lambda(\mathbf{I})$ est la *catégorie des chemins de* $\mathbf{I}$. Cette construction définit un foncteur

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{C}$$

qui cette fois ne commute plus aux produits.

Si $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ sont des sous-catégories de $\mathbf{I}$, on définit de manière analogue la catégorie $\Lambda(\mathbf{I}; \mathbf{J}, \mathbf{K})$ des chemins de $\mathbf{I}$, d'origine dans $\mathbf{J}$ et d'extrémité dans $\mathbf{K}$.

En particulier, si $\mathbf{I}$ est pointée en I_0, on note $\Omega(\mathbf{I})$ la *catégorie des lacets de* $\mathbf{I}$. Cette catégorie est pointée en I_0. Cette construction définit de nouveau un foncteur

$$\mathbf{C}^* \xrightarrow{\Omega} \mathbf{C}^*$$

qui ne commute pas non plus aux produits.

2° Pour tout entier $n > 0$, on définit par induction des foncteurs

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\Lambda^n} \mathbf{C} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{C}^* \xrightarrow{\Omega^n} \mathbf{C}^*,$$

où

$$\Lambda^n(\mathbf{I}) = \Lambda(\Lambda^{n-1}(\mathbf{I})) \qquad \text{et} \qquad \Omega^n(\mathbf{I}) = \Omega(\Omega^{n-1}(\mathbf{I})).$$

Si $\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}}$ ($\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}}$) désigne le foncteur qui associe à tout chemin de $\mathbf{I}$ son origine (son extrémité), l'ensemble $\pi_0(\mathbf{I})$ des composantes connexes de $\mathbf{I}$ est le quotient de $\mathrm{Ob}(\mathbf{I})$ par la relation :

$(I \sim J) \Leftrightarrow$ (il existe $\bar{I}$ appartenant à $\Lambda(\mathbf{I})$ tel que $\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}}(\bar{I}) = I$ et $\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}}(\bar{I}) = J$).

On pose, pour tout $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}^*$ et tout $n > 0$,

$$\pi_n(\mathbf{I}) = \pi_0(\Omega^n(\mathbf{I})).$$

$\pi_1(\mathbf{I})$, donc aussi $\pi_n(\mathbf{I})$, est un groupe pour la composition naturelle des lacets; de plus, $\pi_n(\mathbf{I})$ est abélien pour $n > 1$ ([1], A, corollaire III.6).

On déduit immédiatement de cette définition les propriétés suivantes :

(*a*) Si $\mathbf{J} = \mathbf{I}(\mathrm{Fl}(\mathbf{I})^{-1})$ désigne la catégorie des fractions de $\mathbf{I}$ ([2], I, § 1.1), l'application naturelle

$$\mathrm{Ob}(\Omega(\mathbf{I})) \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{J}}(I_0),$$

où $\mathbf{I}$ est pointée en I_0, induit un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(\mathbf{I}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\mathbf{J}}(I_0).$$

(*b*) Si $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ et $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'$ sont deux morphismes de $\mathbf{C}^*$, et si U est une transformation naturelle de $\mathbf{u}$ dans $\mathbf{v}$ telle que $U(I_0) = \mathrm{id}$, $\Omega^n(U)$ est une transformation naturelle de $\Omega^n(\mathbf{u})$ dans $\Omega^n(\mathbf{v})$ pour tout $n \geqslant 1$; comme $\pi_0(\mathbf{u}) = \pi_0(\mathbf{v})$, on en déduit le résultat suivant.

PROPOSITION I.1. — *Pour tout couple* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *et* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'$ *de morphismes de* $\mathbf{C}^*$ *tel qu'il existe une transformation naturelle* U *de* $\mathbf{u}$ *dans* $\mathbf{v}$ *vérifiant* $U(I_0) = \mathrm{id}$, *et pour tout entier* $n \geqslant 0$, $\pi_n(\mathbf{u}) = \pi_n(\mathbf{v})$.

En particulier, si un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}^*$ *possède un adjoint à gauche ou à droite,* $\pi_n(\mathbf{u})$ *est un isomorphisme pour tout* $n \geqslant 0$.

(*c*) Deux morphismes $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ et $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$ sont dits *homotopes* s'il existe un morphisme de $\mathbf{C}^*$: $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{r}} \Lambda(\mathbf{I}')$ tel que $\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}'} \circ \mathbf{r} = \mathbf{u}$ et $\mathbf{p}_1^{\mathbf{I}'} \circ \mathbf{r} = \mathbf{v}$. Une catégorie $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}^*$ pointée en I_0 est alors dite *contractile* si $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{id}} \mathbf{I}$ est homotope au morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{k}_{I_0}} \mathbf{I}$ de valeur constante I_0. La proposition I.1 se généralise alors comme ci-dessous :

PROPOSITION I.2. — *Pour tout couple* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *et* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'$ *de morphismes homotopes de* $\mathbf{C}^*$ *et pour tout entier* $n \geqslant 0$, $\pi_n(\mathbf{u}) = \pi_n(\mathbf{v})$, *En particulier, toute catégorie contractile est homotopiquement triviale.*

3° Le nerf $N_*(\mathbf{I})$ d'une petite catégorie $\mathbf{I}$ est le complexe semi-simplicial défini par :

(*a*) $N_n(\mathbf{I}) = \{ I_0 \xrightarrow{u_0} I_1 \xrightarrow{u_1} \ldots \xrightarrow{u_{n-1}} I_n;\ u_0, u_1, \ldots, u_{n-1} \in \mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \}$.

(*b*) $d_i(I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_{n+1}) = I_0 \to I_1 \to \ldots \to \hat{I}_i \to \ldots \to I_{n+1}$, où désigne l'omission.

(*c*) $s_i(I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_n) = I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_i \xrightarrow{\mathrm{id}} I_i \to \ldots \to I_n$.

La réalisation géométrique de $N_*(\mathbf{I})$ s'appelle *l'espace classifiant* de $\mathbf{I}$, et se note $B(\mathbf{I})$; dans le cas d'un groupe G, si $\mathbf{G}$ désigne la catégorie associée à G ($\mathrm{Ob}(\mathbf{G}) = \star$, $\mathrm{Fl}(\mathbf{G}) = G$), $B(\mathbf{G})$ est l'espace classifiant habituel $B(G)$ du groupe G. ([4], p. 107 par exemple).

Lorsque $\mathbf{I}$ est pointée, on sait définir les groupes d'homotopie de $N_*(\mathbf{I})$ (ou plutôt du complexe de Kan associé), et ceux-ci sont isomorphes aux groupes d'homotopie de $B(\mathbf{I})$.

On démontre dans [1] que $\pi_n(\mathbf{I}) \simeq \pi_n(N_*(\mathbf{I}))$ pour tout n.

II. — Fibrations de petites catégories

1° Pour toute petite catégorie $\mathbf{I}$ et tout entier n, on construit par induction une sous-catégorie $(J\Lambda)^n(\mathbf{I})$ de $\Lambda^n(\mathbf{I})$, ayant mêmes objets que $\Lambda^n(\mathbf{I})$, de la façon suivante :

(*a*) Les morphismes de $(J\Lambda)(\mathbf{I})$ sont de la forme (φ, id).

(*b*) Les morphismes de $(J\Lambda)^n(\mathbf{I})$ sont de la forme $(\varphi, \bar{u})$ où $u = (u_1, \ldots, u_m; \bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_m)$ est une suite de morphismes de $(J\Lambda)^{n-1}(\mathbf{I})$.

Ces catégories possèdent les deux propriétés suivantes :

(*a*) Pour tout couple $I \xrightarrow{u_1} I_1$, $I \xrightarrow{u_2} I_2$ de morphismes de $(J\,\Lambda)^n(\mathbf{I})$, on peut construire des morphismes $I_1 \xrightarrow{V_1} J$, $I_2 \xrightarrow{V_2} J$ de $(J\,\Lambda)^n(\mathbf{I})$ tels que $v_1 \circ u_1 = v_2 \circ u_2$ ([1], A, proposition II.3).

(*b*) Pour tout I de $\Lambda^n(\mathbf{I})$, on peut construire un morphisme $I \xrightarrow{u} J$ de $(J\,\Lambda)^n(\mathbf{I})$ tel que J appartient à $(K\,\Lambda)^n(\mathbf{I})$ ([1], A, proposition II.4).

On définit alors dans $\mathrm{Ob}(\Lambda^n(\mathbf{I}))$ la relation d'équivalence suivante :

$$(I_1 \equiv I_2) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{il existe } I_1 \xrightarrow{v_1} J \text{ et } I_2 \xrightarrow{v_2} J \text{ appartenant à } (J\,\Lambda)^n(\mathbf{I})).$$

DÉFINITION II.1. — *Un morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{u} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}$ *est fibré s'il possède la propriété suivante pour tout* $n \geqslant 0$:

(F_n) : *Pour tout couple d'objets* (I, J') *de* $\Lambda^n(\mathbf{I}) \times \Lambda^{n+1}(\mathbf{I}')$ *tels que*

$$\Lambda^n(\mathbf{u})(I) \equiv \mathbf{p}_0^{\Lambda^n(\mathbf{I}')}(J'),$$

il existe un objet J *de* $\Lambda^{n+1}(\mathbf{I})$ *tel que*

$$\Lambda^{n+1}(\mathbf{u})(J) \equiv J' \qquad et \qquad \mathbf{p}_0^{\Lambda^n(\mathbf{I})}(J) \equiv I,$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{n+1}(\mathbf{I}) & \xrightarrow{\Lambda^{n+1}(\mathbf{u})} & \Lambda^{n+1}(\mathbf{I}') \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{p}_0^{\Lambda^n(\mathbf{I})}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{p}_0^{\Lambda^n(\mathbf{I}')}} \\ \Lambda^n(\mathbf{I}) & \xrightarrow{\Lambda^n(\mathbf{u})} & \Lambda^n(\mathbf{I}') \end{array}$$

Compte tenu de la propriété (*b*) ci-dessus, on peut dans la condition (F_n) remplacer partout Λ par $K\,\Lambda$. En pratique, les seuls morphismes dont on aura à vérifier qu'ils sont fibrés sont ceux vérifiant une propriété (P) telle que :

(*a*) $(P) \Rightarrow (F_0)$;

(*b*) $K\,\Lambda(\mathbf{u})$ vérifie (P).

Nous donnerons aux 5° et 6° des exemples de morphismes fibrés.

2° Si $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ est un morphisme de $\mathbf{C}$, pour tout objet I' de $\mathbf{I}'$, on pose :

(*a*) $\mathbf{u}^{-1}(I')$ = sous-catégorie de $\mathbf{I}$ formée des objets I tels que $\mathbf{u}(I) = I'$ et des morphismes f tels que $\mathbf{u}(f) = \mathrm{id}$:

$\mathbf{u}^{-1}(I')$ est *la fibre de* $\mathbf{u}$ *au-dessus de* I'.

(*b*) $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ = catégorie des couples $(I, \mathbf{u}(I) \xrightarrow{f'} I')$ et dont les morphismes de (I, f') dans (J, g') sont les flèches $I \xrightarrow{v} J$ telles que $g' \circ \mathbf{u}(v) = f'$:

$\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ sera dite la *fibre à gauche de* $\mathbf{u}$ *au-dessus de* I'.

On définit de même, en inversant les flèches, $\mathbf{u}_d^{-1}(I')$.

(*c*) $\mathbf{u}_h^{-1}(I') = \mathbf{I} \times_{\mathbf{I}'} \Lambda(\mathbf{I}';\ \mathbf{I}',\ I')$:

$\mathbf{u}_h^{-1}(I')$ est la *fibre homotopique de* $\mathbf{u}$ *au-dessus de* I'.

Ces fibres s'insèrent naturellement dans un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{u}_g^{-1}(I') \arrow[dr] & \\ \mathbf{u}^{-1}(I') \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{u}_h^{-1}(I') \\ & \mathbf{u}_d^{-1}(I') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

3° Un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$ est fibré s'il ext fibré comme morphisme de $\mathbf{C}$. Si $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$ sont pointées en I_0 et I_0, on désigne par $\mathbf{i}$ l'inclusion de $\mathbf{u}^{-1}(I'_0)$ dans $\mathbf{I}$ et par ∂_n l'homomorphisme défini par le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(\mathbf{I}') \arrow[rr, "\partial_n"] & & \pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I'_0)) \\ & \pi_n(\Lambda(\mathbf{I};\ \mathbf{u}^{-1}(I'_0), I_0)) \arrow[ul, "\wr"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On montre alors, comme dans le cas classique ([1], A, théorème IV.14) le résultat suivant.

PROPOSITION II.2. — *Pour tout morphisme fibré* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}^*$, *la suite suivante est exacte*

$$\ldots \to \pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I'_0)) \xrightarrow{\pi_n(\mathbf{i})} \pi_n(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_n(\mathbf{u})} \pi_n(\mathbf{I}') \xrightarrow{\partial_{n-1}} \pi_{n-1}(\mathbf{u}^{-1}(I'_0)) \to \ldots$$
$$\ldots \to \pi_0(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_0(\mathbf{u})} \pi_0(\mathbf{I}').$$

Le système d'homotopie $(\pi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est caractérisé par les trois propriétés suivantes :

(*a*) $\pi_0(\mathbf{I})$ = ensemble des composantes connexes de $\mathbf{I}$.

(*b*) $\pi_n(\mathbf{I}) = \star$ si $\mathbf{I}$ est contractile.

(*c*) La suite d'homotopie d'un morphisme fibré est exacte.

En effet, on peut alors construire les groupes $\pi_n(\mathbf{I})$ par décalage à l'aide de la formule

$$\pi_n(\mathbf{I}) = \pi_{n-1}(\Omega(\mathbf{I})),$$

en utilisant la fibration $\Lambda(\mathbf{I}; \mathbf{I}, I_0) \xrightarrow{\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}}} \mathbf{I}$ de fibre $\Omega(\mathbf{I})$ et en remarquant que $\Lambda(\mathbf{I}; \mathbf{I}, I_0)$ est contractile.

Il résulte de ceci que, pour tout $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}^*$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$\pi_n(\mathbf{I}) \simeq \pi_n(\mathbf{I}^0).$$

Ainsi, à toute propriété faisant intervenir la fibre $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$, correspondra une propriété duale faisant intervenir $\mathbf{u}_d^{-1}(I')$.

En outre, on a le résultat suivant.

PROPOSITION II.3. — *Toute petite catégorie filtrante à gauche ou à droite est homotopiquement triviale.*

En effet, si $\mathbf{I}$ est filtrante à droite, $\Omega(\mathbf{I})$, donc aussi $\Omega^n(\mathbf{I})$ $(n > 1)$, est filtrante à droite; comme $\mathbf{I}$ est connexe, $\pi_n(\mathbf{I}) = \star$ pour tout n. Si $\mathbf{I}$ est filtrante à gauche, $\mathbf{I}$ est filtrante à droite...

4° Pour tout morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$, où $\mathbf{I}'$ est pointée en I'_0, construisons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \xrightarrow{\quad\mathbf{u}\quad} & \mathbf{I}' \\ \uparrow{\scriptstyle \mathbf{p}'} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{p}_0^{\mathbf{I}'}}, \\ \mathbf{I}_h = \mathbf{I} \times_{\mathbf{I}'} \Lambda(\mathbf{I}') & \xrightarrow{\mathbf{u}'} & \Lambda(\mathbf{I}') \end{array}$$

Le morphisme $\mathbf{p}_0^{\mathbf{I}'}$ est fibré de fibre contractile; il en est donc de même de $\mathbf{p}'$. De plus, si on pose $\mathbf{u}_n = \mathbf{p}_0^{\mathbf{I}'} \circ \mathbf{u}'$, ce morphisme $\mathbf{I}_h \xrightarrow{\mathbf{u}_h} \mathbf{I}'$ est fibré de fibre $\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)$. On déduit donc de la proposition II.2 une nouvelle proposition.

PROPOSITION II.4. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}^*$, *il existe une suite exacte :*

$$\to \pi_n(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)) \to \pi_n(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_n(\mathbf{u})} \pi_n(\mathbf{I}') \to \pi_{n-1}(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)) \to \ldots \to \pi_0(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_0(\mathbf{u})} \pi_0(\mathbf{I}').$$

Bien entendu, si $\mathbf{u}$ est fibré, $\pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I'_0)) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0))$ pour tout $n \geqslant 0$.

PROPOSITION II.5. — *Pour tout morphisme fibré* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}$ *et tout entier* n :

(*a*) *Pour tout* I' *de* $\mathbf{I}'$, $\pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I'))$.

(*b*) *Pour tout* $I' \xrightarrow{f'} J'$ *de* $\mathbf{I}'$, $\pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(J'))$.

Preuve. — Construisons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} & \xrightarrow{\quad\mathbf{u}\quad} & \mathbf{I}' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{I} \times_{\mathbf{I}'} \mathbf{id}_g^{-1}(I') & \rightarrow & \mathbf{id}_g^{-1}(I') \end{array}$$

Comme $\mathbf{I} \times_{\mathbf{I}'} \mathbf{id}_g^{-1}(I') = \mathbf{u}_g^{-1}(I')$, le morphisme $\mathbf{u}_g^{-1}(I') \rightarrow \mathbf{id}_g^{-1}(I')$ est fibré de fibre $\mathbf{u}^{-1}(I')$. La catégorie $\mathbf{id}_g^{-1}(I')$ étant contractile,

$$\pi_n(\mathbf{u}^{-1}(I')) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Notons $\pi_n(\mathbf{I}; I)$ le n-ième groupe d'homotopie de $\mathbf{I}$ pointé en I, et choisissons dans $\mathbf{u}^{-1}(I')$ et $\mathbf{u}^{-1}(J')$ des points I et J. On peut construire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{n+1}(\mathbf{I}; I) & \rightarrow & \pi_{n+1}(\mathbf{I}'; I') & \rightarrow & \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) & \rightarrow & \pi_n(\mathbf{I}; I) & \rightarrow & \pi_n(\mathbf{I}'; I') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{n+1}(\mathbf{I}; J) & \rightarrow & \pi_{n+1}(\mathbf{I}'; J') & \rightarrow & \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(J')) & \rightarrow & \pi_n(\mathbf{I}; J) & \rightarrow & \pi_n(\mathbf{I}'; J') \end{array}$$

où les lignes horizontales sont exactes et où les flèches verticales, sauf *a priori* celle du milieu, sont des isomorphismes. Il suffit alors d'appliquer le lemme des 5.

5° Venons-en aux exemples de morphismes fibrés. D'après [5], (S. G. A., exposé VI.6), un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$ est un *morphisme précofibré* (*de Grothendieck*) si, pour tout I' de $\mathbf{I}'$, le foncteur

$$\mathbf{u}^{-1}(I') \rightarrow \mathbf{u}_g^{-1}(I')$$

possède un adjoint à gauche.

Pour tout morphisme $J' \xrightarrow{f'} I'$ de $\mathbf{I}'$, on définit alors

$$\mathbf{u}^{-1}(J') \xrightarrow{f'^*} \mathbf{u}^{-1}(I')$$

comme le composé

$$\mathbf{u}^{-1}(J') \rightarrow \mathbf{u}_g^{-1}(J') \rightarrow \mathbf{u}_g^{-1}(I') \rightarrow \mathbf{u}^{-1}(I').$$

Le morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$ est un *morphisme cofibré de Grothendieck* si :

(*a*) $\mathbf{u}$ est précofibré.

(*b*) Pour tout $K' \xrightarrow{g'} J' \xrightarrow{f'} I'$ de $\mathbf{I}'$, $(\mathbf{f}' \circ \mathbf{g}')^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{f}'^* \circ \mathbf{g}'^*$.

On a une notion duale évidente de morphisme fibré de Grothendieck.

On vérifie aisément (car ($\mathbf{u}$ fibré de Grothendieck) $\Rightarrow$ ($K \Lambda (\mathbf{u})$ fibré de Grothendieck)...) la proposition suivante.

PROPOSITION II.6. — *Un morphisme fibré et cofibré de Grothendieck est un morphisme fibré.*

6° Soient $\mathbf{I}$ et $\mathbf{F}$ deux petites catégories. On dit que $\mathbf{I}$ *opère sur* $\mathbf{F}$ *par automorphismes* s'il existe un homomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \xrightarrow{h} \mathrm{Aut}(\mathbf{F}).$$

On définit alors le *produit semi-direct* $\mathbf{I} \rhd \mathbf{F}$ de $\mathbf{I}$ par $\mathbf{F}$ de la façon suivante : les objets de $\mathbf{I} \rhd \mathbf{F}$ sont ceux de $\mathbf{I} \times \mathbf{F}$, les morphismes de (I, F) dans (J, G) sont les couples $(I \xrightarrow{u} J,\ F \xrightarrow{g} h(u)^{-1}(G))$ de morphismes de $\mathbf{I} \rhd \mathbf{F}$ qui se composent par la formule

$$(v, h) \circ (u, g) = (v \circ u,\ h(u)^{-1}(k) \circ g).$$

La projection naturelle $\mathbf{I} \rhd \mathbf{F} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{I}$ de fibre $\mathbf{F}$ est un morphisme fibré et cofibré de Grothendieck, donc un morphisme fibré.

III. — Le groupe $\pi_1(\mathbf{I})$

1° Pour tout ensemble E, on désigne par $\mathbf{E}^d$ la catégorie discrète associée à E ($\mathrm{Ob}(\mathbf{E}^d)) = E$, $\mathrm{Fl}(\mathbf{E}^d) = \{$ identités $\}$).

Si $\mathbf{I}$ est une petite catégorie, un *revêtement* de $\mathbf{I}$ est la donnée d'un ensemble E et d'un homomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \xrightarrow{h} \mathrm{Bij}(E) = \mathrm{Aut}(\mathbf{E}^d).$$

Cette donnée, notée (E, h), définit un fibré $\mathbf{I} \rhd \mathbf{E}^d \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{I}$ de fibre $\mathbf{E}^d$.

Un morphisme d'un revêtement (E, h) dans un autre (E', h') est un morphisme de $\mathbf{C}$: $\mathbf{I} \rhd \mathbf{E}^d \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I} \rhd \mathbf{E}'^d$ tel que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \rhd \mathbf{E}^d \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\mathbf{p}"'] & & \mathbf{I} \rhd \mathbf{E}'^d \arrow[dl, "\mathbf{p}'"] \\ & \mathbf{I} & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Un *système de coefficient locaux sur* $\mathbf{I}$ est un foncteur covariant :

$$\mathbf{I} \xrightarrow{h} \mathbf{Ens}$$

tel que $\mathbf{h}(u)$ soit une bijection pour tout u de $\mathrm{Fl}(\mathbf{I})$.

On note $\mathbf{R_I}$ et $\mathbf{L_I}$ les catégories des revêtements de $\mathbf{I}$ et des systèmes de coefficients locaux sur $\mathbf{I}$.

PROPOSITION III.1. — *Les catégories* $\mathbf{R_I}$ *et* $\mathbf{L_I}$ *sont équivalentes pour toute petite catégorie connexe* $\mathbf{I}$.

Preuve. — Tout revêtement (E, h) de $\mathbf{I}$ définit un système de coefficients locaux sur $\mathbf{I}$ par $\mathbf{h}(\mathbf{I}) = E$ et $\mathbf{h}(u) = h(u)$; d'où un foncteur

$$\mathbf{R_I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{L_I}.$$

Inversement, on choisit un point I_0 de $\mathbf{I}$ et, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, un chemin e_I de I_0 à I; tout système $\mathbf{h}$ de coefficients locaux sur $\mathbf{I}$ se prolonge à un système $\mathbf{h}'$ de coefficients locaux sur $\mathbf{I}\,(\mathrm{Fl}\,(\mathbf{I})^{-1})$, et définit un revêtement $\mathbf{v}(\mathbf{h})$ de $\mathbf{I}$ par $\mathbf{v}(\mathbf{h}) = (\mathbf{h}(I_0), h)$, où $h(I \xrightarrow{u} J) = \mathbf{h}'(e_I\, I \xrightarrow{u} J \xleftarrow{\mathrm{id}} J\, e_J^{-1})$; d'où un second foncteur

$$\mathbf{L_I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{R_I}.$$

Les vérifications habituelles se font sans difficultés.

2° On considère une petite catégorie connexe $\mathbf{I}$ pointée en I_0.

Un *revêtement galoisien* de $\mathbf{I}$ est la donnée d'un groupe G et d'un homomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \xrightarrow{h} G,$$

tel que $\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$ soit connexe (on fait opérer $\mathbf{I}$ sur $\mathbf{G}^d$ par translations à droite à l'aide de h).

On pointe $\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$ en (I_0, id_G).

A ce revêtement galoisien correspond, par la suite exacte d'un morphisme fibré, une suite exacte de groupes

$$1 \to \pi_1(\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d) \to \pi_1(\mathbf{I}) \xrightarrow{\partial_0} G \to 1,$$

où

$$\partial_0 [I_0 \xrightarrow{i_0} I_1 \xrightarrow{j_1} \bar{I}_1 \to \ldots \to I_m \xleftarrow{j_m} I_0] = h(i_0) h(j_1)^{-1} \ldots h(j_m)^{-1}$$

(on note $[\bar{I}]$ la classe dans $\pi_1(\mathbf{I})$ du lacet $\bar{I}$).

PROPOSITION III.2. — *Soit* $\mathbf{I}$ *une petite catégorie connexe :*

(*a*) *Pour tout revêtement galoisien* (G, h) *de* $\mathbf{I}$, *et tout couple de points* (I_0, x_1), (I_0, x_2) *de* $\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$, *il existe un unique endomorphisme* $\mathbf{v}$ *de* (G, h) *tel que* $\mathbf{v}(I_0, x_1) = (I_0, x_2)$.

(*b*) *Pour tout couple* (G, h), (G', h') *de revêtements galoisiens de* $\mathbf{I}$ *et tout couple* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ *de morphismes de* (G, h) *dans* (G', h'), *il existe un unique endomorphisme* $\mathbf{v}$ *de* (G', h') *tel que* $\mathbf{v} \circ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$,

Preuve. — Si $\mathbf{u}$ est un endomorphisme de (G, h), pour tout morphisme $(I, x) \xrightarrow{u} (J, y = xh(u))$ de $\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$,

$$(\mathbf{u}(I, x) = (I, x)) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{u}(J, y) = (J, y)).$$

Il en résulte que, si $\mathbf{u}(I_0, x_0) = (I_0, x_0)$ pour un certain point (I_0, x_0) de $\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$, alors $\mathbf{u} = \mathbf{id}$ ($\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$ étant connexe). Sous l'hypothèse du (*a*), on construit l'endomorphisme $\mathbf{v}$ par

$$\mathbf{v}(I, y) = (I, x_2 x_1^{-1} y)).$$

La remarque faite ci-dessus montre que $\mathbf{v}$ est unique. Sous l'hypothèse (*b*), on pose

$$\mathbf{u}_1(I_0, \mathrm{id}) = (I_0, x_1), \qquad \mathbf{u}_2(I_0, \mathrm{id}) = (I_0, x_2),$$

et le morphisme $\mathbf{v}$ qu'on vient de définir convient.

Nous dirons que deux revêtements galoisiens (G, h) et (G, h') son *équivalents* s'il existe une application

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{I}) \xrightarrow{s} G$$

telle que, pour tout $I \xrightarrow{u} J$ de $\mathbf{I}$,

$$h(u)\, s(J) = s(I)\, h'(u).$$

Les définitions qui précèdent se justifient par la proposition suivante.

PROPOSITION III.3. — *Si* $\mathbf{I}$ *est une petite catégorie connexe pointée, les sous-groupes normaux de* $\pi_1(\mathbf{I})$ *sont en correspondance biunivoque avec les classes d'équivalence des revêtements galoisiens de* $\mathbf{I}$.

Preuve. — $\mathbf{I}$ étant pointée en I_0, on choisit, pour tout I de $\mathbf{I}$, un chemin e_I de I_0 à I. A tout sous-groupe normal G' de $\pi_1(\mathbf{I})$ on fait correspondre un revêtement galoisien (G, h) de $\mathbf{I}$ de la façon suivante : G est le quotient de $\pi_1(\mathbf{I})$ par G', h est défini par

$$h(I \xrightarrow{u} J) = \text{image de } [e_I\, I \xrightarrow{u} J \xleftarrow{\text{id}} J\, e_J^{-1}] \text{ dans } G.$$

Il en résulte une application

$$G' \mapsto v(G') = (G, h).$$

On a une seconde application évidente

$$(G, h) \mapsto v'(G, h) = \pi_1(\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^a).$$

Il est clair que $v' \circ v(G') = G'$. D'autre part, $v \circ v'(G, h) = (G, h')$, où $h'(I \xrightarrow{u} J) = h(e_I)\, h(u)\, h(e_J)^{-1}$, donc (G, h) et (G, h') sont équivalents.

Au sous-groupe $\{1\}$ de $\pi_1(\mathbf{I})$ correspond le revêtement galoisien $(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$, où

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{I}) \xrightarrow{\tilde{h}} \pi_1(\mathbf{I})$$

est défini par

$$\tilde{h}(I \xrightarrow{u} J) = [e_I\, I \xrightarrow{u} J \xleftarrow{\text{id}} J\, e_J^{-1}].$$

$(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$ est le *revêtement universel de* $\mathbf{I}$ *en* I_0 relativement à la famille de chemins (e_I).

On pose :

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} \rhd \overline{\pi_1(\mathbf{I})^d}.$$

$\tilde{\mathbf{I}}$ est connexe et simplement connexe, et $\pi_n(\mathbf{I}) \xrightarrow{\sim} \pi_n(\mathbf{I})$ pour $n > 1$.

PROPOSITION III.4. — *Si* $\mathbf{I}$ *est une petite catégorie connexe pointée en* I_0, *pour tout revêtement galoisien* (G, h) *de* $\mathbf{I}$ *et tout couple* $(\tilde{x}, x)$ *d'éléments de* $\pi_1(\mathbf{I}) \times G$, *il existe un unique morphisme* $\mathbf{u}$ *de* $(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$ *dans* (G, h) *tel que* $\mathbf{u}(I_0, \tilde{x}) = (I_0, x)$.

Il suffit en effet de poser

$$\mathbf{u}(I, y) = (I, x\,\partial_0(\tilde{x}^{-1}y)\,h(e_I))$$

pour tout (I, y) de $\tilde{\mathbf{I}}$, et d'utiliser la proposition III.2.

3° Soit $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ un morphisme dans $\mathbf{C}$ de catégories connexes. Si (G, h) et (G', h') sont des revêtements galoisiens de $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$, un morphisme de (G, h) dans (G', h') est un morphisme de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}' \rhd \mathbf{G}'^d$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d & \xrightarrow{\mathbf{v}} & \mathbf{I}' \rhd \mathbf{G}'^d \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{p}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{p}'} \\ \mathbf{I} & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{I}' \end{array}$$

PROPOSITION III.5. — *Soit* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *un morphisme dans* $\mathbf{C}^*$ *de petites catégories connexes pointées en* I_0 *et* I'_0.

(*a*) *Pour tout couple* (G, h), (G', h') *de revêtements galoisiens de* $\mathbf{I}$ *et* $\mathbf{I}'$ *et tout couple* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ *de morphismes de* (G, h) *dans* (G', h') *tel que* $\mathbf{v}_1(I_0, x_0) = \mathbf{v}_2(I_0, x_0)$ *pour un élément* x_0 *quelconque de* G, *alors* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

(*b*) *Pour tout couple* $(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$, $(\pi_1(\mathbf{I}'), \tilde{h}')$ *de revêtements universels de* $\mathbf{I}$ *et* $\mathbf{I}'$, *il existe un unique morphisme* $\tilde{\mathbf{u}}$ *de* $(\pi_1(\mathbf{I}), \tilde{h})$ *dans* $(\pi_1(\mathbf{I}'), \tilde{h}')$ *tel que* $\tilde{\mathbf{u}}(I_0, \mathrm{id}) = (I'_0, \mathrm{id})$.

Preuve. — Pour tout morphisme $(I, x) \xrightarrow{u} (J, y = xh(u))$ de $\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$,

$$(\mathbf{v}_1(I, x) = \mathbf{v}_2(I, x)) \Leftrightarrow (\mathbf{v}_1(J, y) = \mathbf{v}_2(J, y)).$$

Puisque $\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$ est connexe, l'assertion (*a*) résulte de cette remarque. Pour démontrer (*b*), il suffit de poser, pour tout (I, x) de $\mathbf{I} \rhd \mathbf{G}^d$:

$$\tilde{\mathbf{u}}(I, x) = (\mathbf{u}(I), \pi_1(\mathbf{u})(x)[\mathbf{u}(e_I) f_{\mathbf{u}(I)}^{-1}]),$$

où (e_I) et $(f_{I'})$ déterminent h et h', et d'utiliser (*a*).

On obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{I}} & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{u}}} & \tilde{\mathbf{I}}' \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathbf{p}}} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathbf{p}}'} \\ \mathbf{I} & \xrightarrow{\mathbf{u}} & \mathbf{I}' \end{array}$$

et on va calculer, du moins lorsque $\pi_1(\mathbf{u})$ est surjectif, la fibre à gauche $\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x')$ pour tout (I', x') de $\tilde{\mathbf{I}}'$ lorsque $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ est non vide.

Pour tout objet $(I, \mathbf{u}(I) \xrightarrow{s'} I')$ de $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$, on choisit un élément $x_{(I, s')}$ de $\pi_1(\mathbf{I})$ tel que

$$\pi_1(\mathbf{u})(x_{(I,s')}) = x'\left[f_{I}, I' \xrightarrow{\mathrm{id}} I' \xleftarrow{s'} \mathbf{u}(I)\,\mathbf{u}(e_I^{-1})\right],$$

et on définit un homomorphisme de monoïdes

$$Fl(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{h_{I'}} \ker \pi_1(\mathbf{u})$$

par

$$h_{I'}((I, s') \xrightarrow{f} (J, t')) = x_{(I,s')}\left[e_I\, I \xrightarrow{f} J \xleftarrow{\mathrm{id}} J\, e_J^{-1}\right] x_{(J,t')}^{-1}.$$

PROPOSITION III.6. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *dans* $\mathbf{C}^*$ *de catégories connexes tel que* $\pi_1(\mathbf{u})$ *soit surjectif, et pour tout objet* (I', x') *de* $\tilde{\mathbf{I}}'$ *tel que* $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ *soit non vide*

$$\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x') \xrightarrow{\sim} \mathbf{u}_g^{-1}(I') \rhd \overline{\ker \pi_1(\mathbf{u})^d}.$$

Preuve. — Un objet de $\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x')$ est un triplet (I, x, s') où I appartient à $\mathbf{I}$, x appartient à $\pi_1(\mathbf{I})$, et $\mathbf{u}(I) \xrightarrow{s'} I'$ est un morphisme de I' tels que

$$x' = \pi_1(\mathbf{u})(x)\left[\mathbf{u}(e_I)\,\mathbf{u}(I \xrightarrow{s'} I' \xleftarrow{\mathrm{id}} I' f_{I'}^{-1}\right].$$

On définit un morphisme

$$\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x') \xrightarrow{\mathbf{u}(I', x')} \mathbf{u}_g^{-1}(I') \rhd \overline{\ker \pi_1(\mathbf{u})^d}$$

par

$$\mathbf{u}_{(I', x')}(I, x, s') = ((I, s'), x x_{(I,s')}^{-1}),$$

dont il est immédiat qu'il possède un inverse.

COROLLAIRE III.7. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *dans* $\mathbf{C}^*$ *de petites catégories connexes tel que* $\pi_1(\mathbf{u})$ *soit un isomorphisme, et pour tout* (I', x') *de* $\tilde{\mathbf{I}}'$ *tel que* $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ *soit non vide,*

$$\tilde{\mathbf{u}}_g^{-1}(I', x') \xrightarrow{\sim} \mathbf{u}_g^{-1}(I').$$

IV. — La cohomologie d'une petite catégorie

Pour tout objet $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}$, on désigne par $\hat{\mathbf{I}}$ la catégorie des foncteurs contravariants, ou préfaisceaux, de $\mathbf{I}$ dans **Ens** (ou **Gr**, ou **Ab**).

A tout morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$, on associe des foncteurs

$$\hat{\mathbf{I}}' \xrightarrow{\mathbf{u}^*} \hat{\mathbf{I}},$$

$$\hat{\mathbf{I}} \xrightarrow{\mathbf{u}_*} \hat{\mathbf{I}}',$$

définis par

$$\mathbf{u}^*(F') = F' \circ \mathbf{u},$$

$$\mathbf{u}_*(F)(I') = \varprojlim F \,|\, \mathbf{u}_g^{-1}(I').$$

Pour tout couple (F, F') de préfaisceaux sur $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$:

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{I}}'}(F', \mathbf{u}_*(F)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{I}}}(\mathbf{u}^*(F'), F),$$

autrement dit, $\mathbf{u}^*$ est adjoint à gauche de $\mathbf{u}_*$.

1° Pour tout $\mathbf{I}$ de $\mathbf{C}$ et tout préfaisceau d'ensembles F sur $\mathbf{I}$, on pose

$$H^0(\mathbf{I}; F) = \varprojlim F.$$

Donc $H^0(\mathbf{I}; F) = \mathrm{Hom}_{\hat{\mathbf{I}}}(\star, F)$, où $\star$ désigne le préfaisceau ponctuel sur $\mathbf{I}$.

Tout morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$ détermine donc une bijection

$$\mathrm{H}^0(\mathbf{I}'; \mathbf{u}_*(F)) \to \mathrm{H}^0(\mathbf{I}; F)$$

pour tout préfaisceau F sur $\mathbf{I}$.

Comme $H^0(\mathbf{I}; E) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_0(\mathbf{I}), E)$ pour tout ensemble E, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(*a*) $H^0(\mathbf{I}'; E) \to H^0(\mathbf{I}; E)$ est une bijection pour tout ensemble E;

(*b*) $\pi_0(\mathbf{I}) \to \pi_0(\mathbf{I}')$ est bijectif.

2° Lorsque F est un préfaisceau de groupes sur I, $H^0(\mathbf{I}; F)$ est un groupe, et on peut définir l'ensemble pointé $H^1(\mathbf{I}; F)$ de la façon suivante.

On pose

$$C^0(\mathbf{I}; F) = \prod_{I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{I})} F(I),$$
$$C^1(\mathbf{I}; F) = \prod_{I \xrightarrow{u} J \in \mathrm{Fl}(\mathbf{I})} F(I).$$

$Z^1(\mathbf{I}; F)$ désigne le sous-ensemble de $C^1(\mathbf{I}; F)$ formé des éléments (x_u) tels que $x_{v \circ u} = x_u F(u)(x_v)$. pour tout $I \xrightarrow{u} J \xrightarrow{v} K$ de $\mathbf{I}$.

$H^1(\mathbf{I}; F)$ est le quotient de $Z^1(\mathbf{I}; F)$ par la relation d'équivalence suivante :

$$((x_u) \sim (y_u)) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{Il existe } (s_I) \text{ appartenant à } C^0(\mathbf{I}; F) \text{ tel que}$$
$$x_u = s_I^{-1} y_u F(u)(s_J) \text{ pour tout } I \xrightarrow{u} J \text{ de } \mathrm{Fl}(\mathbf{I})).$$

Interprétons $H^1(\mathbf{I}; G)$ lorsque $\mathbf{I}$ est une petite catégorie connexe pointée et G est un groupe. Pour cela, on choisit pour tout I de $\mathbf{I}$ un chemin e_I de I_0 à I, et on définit une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}), G) \xrightarrow{\varphi} Z^1(\mathbf{I}; G),$$

par

$$[\varphi(f)]_{I \xrightarrow{u} J} = f[e_I \, I \xrightarrow{u} J \xleftarrow{\mathrm{id}} J \, e_J^{-1}].$$

G opère sur $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbf{I}), G)$ par $(gf)(x) = g^{-1} f(x) g$, et on désigne par $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbf{I}), G)_G$ le quotient de $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbf{I}), G)$ par G.

L'application φ détermine par passage aux quotients une application

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}), G)_G \xrightarrow{\theta} H^1(\mathbf{I}; G).$$

D'autre part, l'application

$$Z^1(\mathbf{I}; G) \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}), G).$$

définie par

$$\varphi'((x_u))[I_0 \xrightarrow{i_0} I_1 \xleftarrow{j_1} \bar{I}_1 \to \ldots \to I_m \xleftarrow{j_m} I_0] = x_{i_0} x_{j_1}^{-1} \ldots x_{j_m}^{-1}$$

passe également aux quotients, et détermine une application

$$H^1(\mathbf{I}; G) \xrightarrow{\theta'} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}), G)_G$$

inverse de θ. On a donc montré le résultat suivant.

PROPOSITION IV.1. — *Pour toute petite catégorie connexe pointée et pour tout groupe G,*

$$H^1(\mathbf{I};\ G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(\pi_1(\mathbf{I}),\ G)_G.$$

On en déduit une proposition nouvelle.

PROPOSITION IV.2. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de petites catégories connexes pointées, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) $H^1(\mathbf{I}',\ G) \to H^1(\mathbf{I};\ G)$ *est une bijection pour tout groupe G.*

(*b*) $\pi_1(\mathbf{I}) \to \pi_1(\mathbf{I}')$ *est un isomorphisme.*

Preuve. — Il suffit de montrer que tout homomorphisme de groupes $H \xrightarrow{f} K$, tel que

$$\mathrm{Hom}(K,\ G)_G \to \mathrm{Hom}(H,\ G)_G$$

soit une bijection pour tout groupe G, est un isomorphisme.

Or, $\mathrm{Hom}(K,\ G) \to \mathrm{Hom}(H,\ G)$ est surjectif car, si $H \xrightarrow{u} G$ est un homomorphisme, il existe un homomorphisme $K \xrightarrow{v} G$ et un élément g de G tel que $v \circ f(x) = g^{-1}\, u(x)\, g$ pour tout x de H. L'application $K \xrightarrow{w} G$, définie par $w(x) = g\, v(x)\, g^{-1}$, est un homomorphisme dont l'image est u.

Faisant $G = H$, on peut donc trouver un homomorphisme $K \xrightarrow{h} H$ tel que $h \circ f = \mathrm{id}$. En particulier, f est injectif, et le composé

$$\mathrm{Hom}(H,\ G)_G \to \mathrm{Hom}(K,\ G)_G \to \mathrm{Hom}(H,\ G)_G$$

est l'identité; $\mathrm{Hom}(H,\ G)_G \to \mathrm{Hom}(K,\ G)_G$ est donc une bijection, et par suite h est injectif. Il en résulte que f est un isomorphisme.

Pour tout morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$ et tout préfaisceau de groupes F sur $\mathbf{I}$, l'application

$$Z^1(\mathbf{I}';\ \mathbf{u}_*(F)) \xrightarrow{i'} Z^1(\mathbf{I};\ F),$$
$$\left[i'\left[(x'_{u'})\right]\right]_{I \xrightarrow{u} J} = \left[x'_{\mathbf{u}(u)}\right]_{(I,\ \mathbf{u}(I) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbf{u}(I))}$$

définit une application

$$H^1(\mathbf{I}';\ \mathbf{u}_*(F)) \xrightarrow{i} H^1(\mathbf{I};\ F).$$

On construit, d'autre part, une application

$$Z^1(\mathbf{I};\ F) \xrightarrow{j'} \textstyle\prod_{I' \in \mathbf{I}'} Z^1(\mathbf{u}_g^{-1}(I');\ F))$$

par

$$[j'[(x_u)]]_{I'} = (x_u)_{(I,s')\overset{u}{\to}(J,t')}$$

et par suite une application

$$H^1(\mathbf{I};\, F) \xrightarrow{j} H^0(\mathbf{I}';\, H^1(\mathbf{u}_g^{-1}(I');\, F)).$$

PROPOSITION IV.3. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}$ *et tout préfaisceau de groupes* F *sur* $\mathbf{I}$, *la suite d'ensembles pointés*

$$\star \to H^1(\mathbf{I}';\, \mathbf{u}_*(F)) \xrightarrow{i} H^1(\mathbf{I};\, F) \xrightarrow{j} H^0(\mathbf{I}';\, H^1(\mathbf{u}_g^{-1}(I');\, F))$$

est exacte.

La démonstration consiste en des vérifications assez longues, mais faciles.

Lorsque A est un groupe, tout groupe G sur lequel A opère à gauche définit un préfaisceau de groupes sur la catégorie $\mathbf{A}$ associée à A. Si on note G_A ce préfaisceau

$$H^i(\mathbf{A};\, G_A) = H^i(A;\, G) \qquad \text{pour} \quad i = 0,1.$$

3° Lorsque F est un préfaisceau de groupes abéliens sur une petite catégorie $\mathbf{I}$, on désigne par $H^*(\mathbf{I};\, F)$ les foncteurs dérivés à droite du foncteur $F \mapsto \underset{\longleftarrow}{\lim}\, F$.

Pour calculer ces groupes, on procède comme ceci : on construit canoniquement une résolution de F :

$$0 \to F \xrightarrow{i} F^0 \xrightarrow{d^0} F^1 \xrightarrow{d^1} F^2 \to \dots,$$

où

(*a*) F^p est le préfaisceau sur $\mathbf{I}$ défini par

$$F^p(I) = \prod\nolimits_{I_0 \to I_1 \to \dots \to I_p \to I \in N_{p+1}(\mathbf{I})} F(I_0);$$

(*b*) $[[d^p(I)](x)]_{u \in N_{p+2}(\mathbf{I})} = \sum_{i=0}^{p+2} (-1)^i\, x_{d_i(u)}$.

Il est clair que

$$\underset{\longrightarrow}{\lim}\, F^p = \prod\nolimits_{I_0 \to I_1 \to \dots \to I_p} F(I_0).$$

On en déduit donc :

(*a*) Pour tout préfaisceau F de groupes abéliens sur $\mathbf{I}$ et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$H^n(\mathbf{I};\, F) = H^n(N_*(\mathbf{I});\, F).$$

(*b*) Pour tout groupe A, tout A-module à gauche M, et tout entier $n \geqslant 0$,

$$H^n(\mathbf{A}; M_A) = H^n(A; M),$$

où M_A désigne le préfaisceau sur $\mathbf{A}$ défini par M.

Le résultat suivant se démontre par une méthode classique.

PROPOSITION IV.4. — *Soient* $\mathbf{I}$ *une petite catégorie et* F *un préfaisceau de groupes abéliens sur* $\mathbf{I}$:

(*a*) *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$, *il existe une suite spectrale*

$$(E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{I}'; H^q(\mathbf{u}_g^{-1}(\ \ ); F)) \Rightarrow (H^*(\mathbf{I}; F)).$$

(*b*) *Si* $\mathbf{I}$ *est connexe et pointée, il existe une suite spectrale*

$$(E_2^{p,q} = H^p(\pi_1(\mathbf{I}); H^q(\tilde{\mathbf{I}}; \tilde{\mathbf{p}}^*(F)))) \Rightarrow (H^*(\mathbf{I}; F)).$$

Lorsque $\mathbf{I}$ est connexe et pointée, pour tout préfaisceau F de groupes abéliens sur $\tilde{\mathbf{I}}$ et tout entier n,

$$H^n(\mathbf{I}; \tilde{\mathbf{p}}_*(F)) \xrightarrow{\sim} H^n(\tilde{\mathbf{I}}; F).$$

Un calcul facile montre que

$$[\tilde{\mathbf{p}}_*(F)](I) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}(\pi_1(\mathbf{I})); F(I))$$

pour tout I de $\mathbf{I}$.

PROPOSITION IV.5. — *Soit* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *un morphisme de petites catégories connexes pointées tel que* $\pi_1(\mathbf{u})$ *soit un isomorphisme. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Pour tout système local de groupes abéliens* F' *sur* $\mathbf{I}'$ *et tout* $n \geqslant 0$,

$$H^n(\mathbf{I}'; F') \to H^n(\mathbf{I}; \mathbf{u}^*(F'))$$

est un isomorphisme.

(*b*) *Pour tout* $n \geqslant 0$,

$$\pi_n(\mathbf{I}) \to \pi_n(\mathbf{I}')$$

est un isomorphisme.

Preuve. — Avec les notations du paragraphe III, pour tout I de $\mathbf{I}$, le morphisme

$$\tilde{\mathbf{p}}_g^{-1}(I) \to \tilde{\mathbf{p}}_g'^{-1}(\mathbf{u}(I))$$

induit, pour tout préfaisceau F' sur $\tilde{\mathbf{I}}'$, un isomorphisme de groupes

$$\varprojlim F' \mid \tilde{\mathbf{p}}_g'^{-1}(\mathbf{u}(I)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim \tilde{\mathbf{u}}^*(F') \mid \tilde{\mathbf{p}}_g^{-1}(I),$$

d'où un isomorphisme

$$\mathbf{u}^* \circ \tilde{\mathbf{p}}'_* \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbf{p}}_* \circ \tilde{\mathbf{u}}^*.$$

On en déduit, pour tout $n \geqslant 0$, un diagramme commutatif dont les flèches horizontales sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} H^n(\mathbf{I};\, \mathbf{u}^* \circ \tilde{\mathbf{p}}'_*(F')) & \rightarrow & H^n(\tilde{\mathbf{I}};\, \tilde{\mathbf{u}}^*(F')) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^n(\mathbf{I}';\, \tilde{\mathbf{p}}'_*(F')) & \longrightarrow & H^n(\tilde{\mathbf{I}}';\, F') \end{array}$$

Si la propriété (a) est vérifiée,

$$H^n(\tilde{\mathbf{I}}';\, \mathbf{Z}) \rightarrow H^n(\tilde{\mathbf{I}};\, \mathbf{Z})$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$, donc

$$\pi_n(\mathbf{I}) \rightarrow \pi_n(\mathbf{I}')$$

est un isomorphisme.

Réciproquement, si (b) est vrai, pour tout système local F' sur $\mathbf{I}'$,

$$H^n(\tilde{\mathbf{I}}';\, \tilde{\mathbf{p}}'^*(F')) \rightarrow H^n(\tilde{\mathbf{I}};\, \tilde{\mathbf{u}}^* \circ \tilde{\mathbf{p}}'^*(F'))$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$.

La proposition IV.4 (b) entraîne que

$$H^n(\mathbf{I}';\, F') \rightarrow H^n(\mathbf{I};\, \mathbf{u}^*(F'))$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$.

En joignant la proposition IV.2 à celle-ci, on obtient ainsi une autre formulation commode et plus générale du théorème de Whitehead.

V. — Les théorèmes A et B de Quillen

Dans ce paragraphe, nous dirons qu'un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$ est une *équivalence d'homotopie* si $\pi_n(\mathbf{u})$ est un isomorphisme pour tout $n \geqslant 0$.

1° *Le théorème* A *de* QUILLEN.

THÉORÈME A. — *Soit* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *un morphisme de petites catégories pointées tel que* $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ *soit non vide et homotopiquement trivial pour tout* I' *de* $\mathbf{I}'$. *Alors,* $\mathbf{u}$ *est une équivalence d'homotopie.*

Preuve. — On sait, d'après IV.1, que $\pi_0(\mathbf{u})$ est une bijection. On peut donc supposer $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$ connexes. Les propositions IV.3 et IV.2 entraînent que $\pi_1(\mathbf{u})$ est un isomorphisme. Il en résulte (corollaire III.7) que $\tilde{\mathbf{u}}$ vérifie les mêmes hypothèses que $\mathbf{u}$. Mais la suite spectrale de Leray (proposition IV.4 (*a*)) montre que $H^n(\tilde{\mathbf{u}})$ est un isomorphisme pour tout n. Il en est de même de $\pi_n(\tilde{\mathbf{u}})$, et par suite de $\pi_n(\mathbf{u})$.

Application. — Soit $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ un morphisme de $\mathbf{C}$. On désigne par $\mathbf{I}_0$ et $\mathbf{I}'_0$ les catégories obtenues à partir de $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$ en adjoignant des objets initiaux I_0 et I'_0, et par $\mathbf{I}_0 \xrightarrow{\mathbf{u}_0} \mathbf{I}'_0$ le morphisme correspondant. On construit une petite catégorie $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ de la façon suivante : ses objets sont les triples $(I, I', \mathbf{u}_0(I) \xrightarrow{s'} I')$ de $\mathbf{I}_0 \times \mathbf{I}' \times \mathrm{Fl}(\mathbf{I}'_0)$; les morphismes de (I, I', S') dans (J, J', t') sont les couples $I \xrightarrow{f} J$, $I' \xrightarrow{f'} J'$ de morphismes de $\mathbf{I}_0$ et $\mathbf{I}'$ tels que $t' \circ \mathbf{u}_0(f) = f' \circ s'$.

On définit des morphismes $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{M}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{I}' \xrightarrow{\mathbf{q}} \mathbf{M}(\mathbf{u})$ par $\mathbf{p}(I) = (I, \mathbf{u}(I), \mathrm{id})$ $\mathbf{q}(I') = (I_0, I', I'_0 \to I')$. Le théorème A montre que $\mathbf{q}$ est une équivalence d'homotopie. Il est clair que $\mathbf{I}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{M}(\mathbf{u})$ et que $\mathbf{q} \circ \mathbf{u}$ est homotope à $\mathbf{p}$.

On a donc montré le résultat suivant.

PROPOSITION V.1. — *Pour tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de* $\mathbf{C}$, *on peut construire un diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \arrow[rr, "\mathbf{u}"] \arrow[dr, "\mathbf{p}"'] & & \mathbf{I}' \arrow[dl, "\mathbf{q}"] \\ & \mathbf{M}(\mathbf{u}) & \end{tikzcd}$$

tel que $\mathbf{q} \circ \mathbf{u}$ *soit homotope à* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ *soit une équivalence d'homotopie et* $\mathbf{p}$ *fasse de* $\mathbf{I}$ *une sous-catégorie pleine de* $\mathbf{M}(\mathbf{u})$.

2° On va construire dans ce paragraphe, le début de la factorisation de Postnikov d'un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}^*$ formé de catégories connexes et simplement connexes.

(*a*) A tout foncteur contravariant

$$\mathbf{I}' \xrightarrow{F} \mathbf{C},$$

on associe la catégorie $\mathbf{I}'(F)$ formée des couples (I', U) avec $I' \in \mathbf{I}'$ et $U \in F(I')$, et dont les morphismes de (I', U) dans (J', V) sont les couples $I' \xrightarrow{f'} J'$, $U \xrightarrow{u} F(f')(V)$ de morphismes de $\mathbf{I}'$ et $F(I')$.

Ce foncteur définit un morphisme de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{I}'(F) \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbf{I}'$$

par $\mathbf{f}(I', U) = I'$, $\mathbf{f}(f', u) = f'$.

(*b*) Le morphisme $\mathbf{u}$ ci-dessus définit un foncteur contravariant

$$\mathbf{I}' \xrightarrow{K} \mathbf{C}$$

par $K(I') = \overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))}$, donc un morphisme de $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{I}'(K) \xrightarrow{\mathbf{k}} \mathbf{I}'$$

pour lequel

$$\mathbf{k}_h^{-1}(I') \simeq \overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))} \times \Lambda(\mathbf{I}'; \mathbf{I}', I').$$

Il en résulte donc que $\mathbf{I}'(K)$ est connexe et simplement connexe, que $\pi_n(\mathbf{k})$ est injectif pour $n = 2$, et bijectif pour $n > 2$.

(*c*) On va construire un morphisme $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{v}} \mathbf{I}'(K)$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \arrow[rr, "\mathbf{u}"] \arrow[dr, "\mathbf{v}"'] & & \mathbf{I}' \\ & \mathbf{I}'(K) \arrow[ur, "\mathbf{k}"'] & \end{tikzcd}$$

Pour tout I de $\mathbf{I}$, on désigne par I_k l'objet $(I, \mathbf{u}(I))$ de $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$, et par $\mathbf{p}_I$ la projection de $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$ sur I. On choisit, de plus, un chemin e_I, dans $\mathbf{I}$, de I_0 à I et pour tout objet K' de $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$ un chemin $g_{K'}$, dans $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$, de I_k à K' tel que $\Lambda(\mathbf{p}_I)(g_{K'}) \equiv e_I^{-1} e_{\mathbf{p}_I(K')}$.

Pour tout $I \xrightarrow{u} J$ de $\mathbf{I}$, on désigne par I_u le point $(J, \mathbf{u}(J) \to \mathbf{u}(J) \leftarrow \mathbf{u}(I))$ de $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$ et par q_u la classe dans $H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{u}(I))$ du lacet

$$(g_{I_u} I_u \to I_u \leftarrow I_k).$$

On définit alors le morphisme $\mathbf{v}$ par

$$\mathbf{v}(I) = (\mathbf{u}(I), \star),$$
$$\mathbf{v}(I \xrightarrow{u} J) = (\mathbf{u}(u), q_u).$$

L'égalité $\mathbf{k} \circ \mathbf{v} = \mathbf{u}$ est immédiate. De plus, ce morphisme possède les propriétés suivantes :

(i) Pour tout I' de $\mathbf{I}'$, $\mathbf{v}_h^{-1}(I')$ est homotopiquement équivalent à $\mathbf{u}_h^{-1}(I')$.

(ii) Pour tout I' de $\mathbf{I}'$, on fait opérer $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ sur $\overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))^d}$ à l'aide de l'homomorphisme de monoïdes

$$\mathrm{Fl}(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \xrightarrow{h_{I'}} H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))$$

défini par

$$h_{I'}((I, s') \xrightarrow{u} (J, t')) = \text{image inverse par } s' \text{ de } q_u \text{ dans } H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I')).$$

Dans ces conditions,

$$\mathbf{v}_g^{-1}(I', \star) \xrightarrow{\sim} \mathbf{u}_g^{-1}(I') \rhd \overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))^d}.$$

On a ainsi montré la proposition suivante.

PROPOSITION V.2. — *Tout morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *dans* $\mathbf{C}^*$ *de catégories connexes et simplement connexes de factorise suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \arrow[rr, "\mathbf{u}"] \arrow[dr, "\mathbf{v}"'] & & \mathbf{I}' \\ & \mathbf{J} \arrow[ur, "\mathbf{k}"'] & \end{tikzcd}$$

où :

(*a*) $\mathbf{J}$ *est connexe et simplement connexe.*

(*b*) $\pi_n(\mathbf{k})$ *est injectif pour* $n = 2$ *et bijectif pour* $n > 2$.

(*c*) $\pi_2(\mathbf{v})$ *est surjectif.*

(*d*) *Pour tout* J *de* $\mathbf{J}$, $\mathbf{v}_h^{-1}(J)$ *est homotopiquement équivalent à* $\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{k}(J))$ *et* $\mathbf{v}_g^{-1}(J)$ *est isomorphe à* $\mathbf{u}_g^{-1}(\mathbf{k}(J)) \rhd \overline{H_1(\mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{k}(J)))^d}$

3° *Le théorème* B *de* QUILLEN.

THÉORÈME B. — *Soit un morphisme* $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ *de catégories connexes de* $\mathbf{C}^*$ *tel que :*

(*a*) *Pour tout* I' *de* $\mathbf{I}'$, $\mathbf{u}_g^{-1}(I')$ *est non vide et connexe.*

(*b*) *Pour tout* $I' \xrightarrow{u'} J'$ *de* $\mathbf{I}'$, $\mathbf{u}_g^{-1}(I') \to \mathbf{u}_g^{-1}(J')$ *est une équivalence d'homotopie.*

Alors, pour tout I' *de* $\mathbf{I}'$ $\mathbf{u}_g^{-1}(I') \to \mathbf{u}_h^{-1}(\mathbf{I}')$ *est une équivalence d'homotopie.*

En particulier, il existe une suite exacte

$$\to \pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0)) \to \pi_n(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_n(\mathbf{u})} \pi_n(\mathbf{I}') \to \pi_{n-1}(\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0)) \to \ldots \to \pi_0(\mathbf{I}) \xrightarrow{\pi_0(\mathbf{u})} \pi_0(\mathbf{I}').$$

Preuve. — Pour tout $\mathbf{I} \xrightarrow{\mathbf{u}} \mathbf{I}'$ de $\mathbf{C}$, on peut construire le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \arrow[r, "\mathbf{u}"] \arrow[d, "\mathbf{t}"] & \mathbf{I}' \arrow[d, "\mathbf{id}"] \\ \mathbf{I}_h \arrow[r, "\mathbf{u}_h"] & \mathbf{I}' \end{tikzcd}$$

où $\mathbf{t}$ est défini par

$$\mathbf{t}(I) = (I, \mathbf{u}(I)),$$

$$\mathbf{t}(I \xrightarrow{f} J) = (f, \mathbf{u}(f)).$$

Comme $\mathbf{p}' \circ \mathbf{t} = \mathbf{id}$ (notations de II.4), $\mathbf{t}$ est une équivalence d'homotopie.

(*a*) Pour tout ensemble E, $\mathbf{t}$ induit une bijection

$$H^0(\mathbf{I}'; \mathbf{u}_{h*}(E)) \to H^0(\mathbf{I}'; \mathbf{u}_*(E)).$$

Il en résulte (IV.2) que, pour tout I' de $\mathbf{I}'$,

$$\pi_0(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \to \pi_0(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))$$

est bijectif.

En particulier, $\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)$ est connexe, et $\pi_1(\mathbf{u})$ est surjectif. On peut donc supposer (proposition III.6) que $\mathbf{I}$ et $\mathbf{I}'$ sont simplement connexes.

De plus, compte tenu de la proposition V.2, il suffit de démontrer ce théorème lorsque $\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0)$ est simplement connexe.

(*b*) Pour tout groupe G, on vérifie que

$$H^1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0); G) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbf{I}'; H^1(\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0); G)).$$

On en déduit (proposition IV.2) que

$$\pi_1(\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0)) \to \pi_1(\mathbf{u}_h^{-1}(I'_0))$$

est bijectif, et par suite que $\mathbf{u}_g^{-1}(I'_0)$ est simplement connexe.

(c) Le théorème de comparaison de Zeeman, appliqué au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{I}'; H^q(\mathbf{u}_g^{-1}(I'); \mathbf{Z})) & \rightarrow & H^*(\mathbf{I}; \mathbf{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ E_2^{p,q} = H^p(\mathbf{I}'; H^q(\mathbf{u}_h^{-1}(I'); \mathbf{Z})) & \rightarrow & H^*(\mathbf{I}_h; \mathbf{Z}) \end{array}$$

entraîne que

$$H^q(\mathbf{u}_h^{-1}(I'); \mathbf{Z}) \rightarrow H^q(\mathbf{u}_g^{-1}(I'); \mathbf{Z})$$

est un isomorphisme pour tout q et tout I' de $\mathbf{I}'$.

Donc,

$$\pi_n(\mathbf{u}_g^{-1}(I')) \rightarrow \pi_n(\mathbf{u}_h^{-1}(I'))$$

est un isomorphisme pour tout n.

Le reste du théorème est une conséquence de la proposition II.4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EVRARD (M.). — *Homotopie d'un espace topologique relativement à un recouvrement. Applications à l'homotopie des préschémas*, Thèse Sc. math. Paris VII, 1973.

[2] GABRIEL (P.) and ZISMAN (M.). — *Calculus of fractions and homotopy theory.* — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Ergebnisse der Mathematik*, 35).

[3] QUILLEN (D.). — Higher algebraic K-theory, I., « *Algebraic K-theory.* Proceedings of the conference held at Seattle, 1972 », p. 85-147. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 341).

[4] SEGAL (G.). — *Classifying spaces and spectral sequences.* — Paris, Presses universitaires de France, 1968 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 34, p. 105-112).

[5] *Séminaire de géométrie algébrique*, 1960-1961, SGA 1 : *Revêtements étales et groupe fondamental.* Dirigé par A. Grothendieck. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 224).

(Texte reçu le 1er juillet 1974.)

Marcel EVRARD,
Mathématiques,
Tour 55,
Université de Paris VII,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.