ALAIN DURAND

Quatre problèmes de Mahler sur la fonction ordre d'un nombre transcendant

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 365-377

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__365_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 365-377.

QUATRE PROBLÈMES DE MAHLER SUR LA FONCTION ORDRE D'UN NOMBRE TRANSCENDANT

PAR

ALAIN DURAND

RÉSUMÉ. — En vue d'une nouvelle classification des nombres complexes, MAHLER [5] définit, sur l'ensemble **C** des nombres complexes, une relation de préordre notée $\gg$. A l'aide de ce préordre, il obtient une partition de C en mettant, dans une même classe, deux éléments θ et η tels que $\theta \gg \eta$ et $\eta \gg \theta$. Plusieurs questions sont alors posées : Existe-t-il une infinité non dénombrable de classes distinctes ? Existe-t-il une classe contenant presque tous les nombres complexes (resp. réels) ? Peut-on caractériser d'une manière non triviale la classe d'un élément $\theta \in \mathbf{C}$? D'autre part, en étendant la relation de préordre $\gg$ à l'ensemble $\mathscr{E}$ des classes d'équivalence, on obtient ainsi une relation d'ordre sur $\mathscr{E}$; muni de cette relation d'ordre, l'ensemble $\mathscr{E}$ est-il alors totalement ordonné ? Enfin, existe-t-il un plus petit élément parmi les classes des éléments transcendants ?

Cet article répond à quatre de ces questions.

1. Énoncé des problèmes

Étant donné un polynôme $P \in \mathbf{C}[x]$,

$$P(x) = p_N x^N + \ldots + p_0 \qquad \text{avec} \quad p_N \neq 0,$$

on note

$$\partial(P) = N, \qquad H(P) = \sup_{0 \leq k \leq N} |p_k| \qquad \text{et} \qquad L(P) = \textstyle\sum_{k=0}^{N} |p_k|.$$

On appelle $\partial(P)$, $H(P)$ et $L(P)$ respectivement le *degré*, la *hauteur* et la *longueur* de P. On pose en outre

$$\Lambda(P) = 2^{\partial(P)} L(P).$$

Si α est un nombre algébrique et si P est son polynôme minimal, on note $\partial(\alpha)$, $H(\alpha)$, $L(\alpha)$ et $\Lambda(\alpha)$ les quantités $\partial(P)$, $H(P)$, $L(P)$ et $\Lambda(P)$.

En vue d'une nouvelle classification des nombres complexes, MAHLER [5] associe tout d'abord à chaque élément θ de $\mathbf{C}$ une fonction positive non décroissante $O(u \mid \theta)$ de la variable entière $u \geqq 1$, appelée *fonction ordre* de θ, et définie par

$$O(u \mid \theta) = \sup \log \left\{ \frac{1}{|P(\theta)|} \right\},$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble fini des polynômes $P(x) \not\equiv 0$ à coefficients entiers rationnels et tels que

$$\Lambda(P) \leqq u, \qquad P(\theta) \neq 0.$$

Il définit ensuite une relation de préordre entre ces fonctions de la manière suivante.

Si $a(u) \geqq 0$ et $b(u) \geqq 0$ sont deux fonctions non décroissantes de $u \geqq 1$ pour lesquelles il existe trois entiers positifs c, u_0 et γ tels que

$$a(u^c) \geqq \gamma\, b(u) \qquad \text{pour} \quad u \geqq u_0,$$

alors on écrit :

$$a(u) \gg b(u) \qquad \text{ou} \qquad b(u) \ll a(u).$$

Si les relations $a(u) \gg b(u)$ et $b(u) \gg a(u)$ sont toutes deux vérifiées, on écrit :

$$a(u) > < b(u).$$

Il est clair que le signe $\gg$ définit une relation de préordre et le signe $> <$ définit une relation d'équivalence.

Si $\theta, \eta \in \mathbf{C}$, on écrit enfin :

$$\theta \gg \eta \quad \text{si} \quad O(u \mid \theta) \gg O(u \mid \eta),$$

$$\theta > < \eta \quad \text{si} \quad O(u \mid \theta) > < O(u \mid \eta).$$

MAHLER obtient alors les résultats suivants :

$O(u \mid \theta) > < \log u$ si θ est algébrique, mais non entier d'un corps quadratique imaginaire;

$O(u \mid \theta) \gg (\log u)^2$ si θ est transcendant;

$O(u \mid \theta) > < 0(u \mid \eta)$ si θ, η sont transcendants et algébriquement dépendants sur $\mathbf{Q}$.

En notant $\mathscr{T}$ l'ensemble des nombres complexes transcendants, il pose ensuite les problèmes suivants :

PROBLÈME 1. — *Existe-t-il une infinité non dénombrable de classes distinctes* (¹) *?*

PROBLÈME 2. — *Soit $a(u)$ une fonction positive non décroissante de l'entier $u \geqq 1$. Établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un nombre $\theta \in \mathscr{T}$ tel que*

$$a(u) > < O(u \mid \theta).$$

PROBLÈME 3. — *Existe-t-il des éléments θ, η dans $\mathscr{T}$ tels qu'aucune des deux relations $\theta \gg \eta$ et $\eta \gg \theta$ ne soit vérifiée ?*

PROBLÈME 4. — *Existe-t-il un nombre $\theta \in \mathscr{T}$ tel que $\eta \gg \theta$ pour tout $\eta \in \mathscr{T}$?*

PROBLÈME 5. — *Peut-on écrire :*

(i) $O(u \mid \theta) > < (\log u)^2$ *pour presque tous les nombres réels $\theta \in \mathscr{T}$ (au sens de la mesure de Lebesgue sur* **R**) *?*

(ii) $O(u \mid \theta) > < (\log u)^2$ *pour presque tous les nombres complexes $\theta \in \mathscr{T}$ (au sens de la mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}^2$) *?*

Notre but ici est de résoudre les problèmes 1, 3, 4 et 5 de MAHLER.

2. Résultats préliminaires

A l'instar de KOKSMA dans la première classification des nombres complexes proposée par Mahler, on peut considérer, à la place de la fonction $O(u \mid \theta)$, la fonction $O^*(u \mid \theta)$, définie par

$$O^*(u \mid \theta) = \sup \log \left\{ \frac{1}{|\theta - \alpha|} \right\},$$

la borne supérieure étant prise sur l'ensemble fini des nombres algébriques α tels que $\Lambda(\alpha) \leqq u$ et $\alpha \neq \theta$.

(¹) Mahler annonce dans son article que ce problème a été résolu dans le même temps par Swierczkowski dans une note non publiée.

On définit alors

$$T(\theta) = \left\{ \tau \geqq 0;\ \overline{\lim}_{u \to +\infty} \frac{O^*(u \mid \theta)}{(\log u)^\tau} = +\infty \right\}$$

et

$$\tau(\theta) = \sup\{\tau;\ \tau \in T(\theta)\}.$$

Pour comparer $O(u \mid \theta)$ et $O^*(u \mid \theta)$, on utilise le lemme suivant, dû à FEL'DMAN [3] :

LEMME 1. — *Soit*

$$P(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in \mathbf{Z}[x],$$

un polynôme de degré m, dont les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont deux à deux distinctes. Alors, pour tout $\theta \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} &|a_m| \exp(-m(2m + \log H(P))) \min_{1 \leqq i \leqq m} |\theta - \alpha_i| \\ &\quad \leqq |P(\theta)| \leqq (m+1) 4^m H(P)(1 + |\theta|)^m \min_{1 \leqq i \leqq m} |\theta - \alpha_i|. \end{aligned}$$

Pour tout $\theta \in \mathcal{T}$, on a donc, d'après la seconde inégalité,

$$O^*(u \mid \theta) \leqq c\,.\,O(u \mid \theta) \qquad \text{avec} \quad c = c(\theta) > 0.$$

D'autre part, on déduit du lemme 1 le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soient $\theta \in \mathbf{C}$, et $\tau \geqq 2$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $$\overline{\lim}_{u \to +\infty} \frac{O^*(u \mid \theta)}{(\log u)^\tau} = +\infty, \qquad \textit{i.e.}\ \tau \in T(\theta),$$

(ii) $$\overline{\lim}_{u \to +\infty} \frac{O(u \mid \theta)}{(\log u)^\tau} = +\infty.$$

Enfin, nous aurons besoin du lemme suivant, dû à R. GÜTING [4].

LEMME 3. — *Soient α et β deux nombres algébriques.*

(*a*) *Si α et β sont non conjugués, alors*

$$|\alpha - \beta| \geqq [2^{\max\{\partial(\alpha), \partial(\beta)\} - 1} L(\alpha)^{\partial(\beta)} L(\beta)^{\partial(\alpha)}]^{-1}.$$

(*b*) *Si α et β sont conjugués et distincts,*

$$|\alpha - \beta| \geqq [[4\,\partial(\alpha)]^{(\partial(\alpha)-2)/2} L(\alpha)^{(2\partial(\alpha)-1)/2}]^{-1}.$$

On en déduit donc, dans les deux cas,

$$|\alpha-\beta| \geqq \exp(-2\log\Lambda(\alpha)\log\Lambda(\beta)) \qquad si \quad \alpha \neq \beta.$$

Remarques :

1° Il est facile de voir [en utilisant par exemple le corps $\mathbf{Q}(i)$, $i^2=-1$] que l'on a

$$O^*(u\,|\,\theta) \gg \log u \quad \text{pour tout } \theta \text{ algébrique.}$$

En utilisant le lemme 3, on en déduit donc

$$O^*(u\,|\,\theta) >\,< \log u \quad \text{pour tout } \theta \text{ algébrique.}$$

2° On peut montrer que la condition $1 \in T(\theta)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que θ soit transcendant. La condition suffisante est déduite du lemme 3 et, appliquée en particulier aux séries lacunaires, permet de retrouver des résultats dus à COHN, BARON et BRAUNE, CIJSOUW et TIJDEMAN [1], etc. (*cf.* DURAND [2]).

3° Les deux problèmes suivants ne sont pas encore résolus.

— Peut-on écrire $O^*(u\,|\,\theta) \gg (\log u)^2$ pour tout $\theta \in \mathscr{T}$?

— A-t-on $O^*(u\,|\,\theta) >\,< O(u\,|\,\theta)$ pour tout $\theta \in \mathscr{T}$?

3. Solution du problème 1

Pour résoudre le problème 1, on construit une famille $(\theta_\tau)_{\tau\in T}$ de nombres transcendants telle que $\tau(\theta_\mu) > 2$ pour tout $\mu \in T$, $\tau(\theta_\mu) \neq \tau(\theta_\nu)$ si $\mu \neq \nu$ et telle que T soit non dénombrable. En effet, on déduit du lemme 2 que, si θ, ψ sont tels que $2 \in T(\theta)$ et $\tau(\theta) \neq \tau(\psi)$, alors les deux éléments θ et ψ appartiennent à des classes d'équivalence distinctes.

THÉORÈME 1. — *Pour tout* $\tau \in (3, +\infty($, *l'élément*

$$\theta_\tau = \sum_{n\geqq 1} 2^{-[2^{\tau^n}]},$$

où $[x]$ *est la partie entière de* $x \in \mathbf{R}$, *vérifie* $\tau(\theta_\tau) = \tau$.

Preuve. — Soit $\tau \in (3, +\infty($. Posons

$$\sigma_n = \sum_{1\leqq k\leqq n} 2^{-b_k}, \qquad \text{avec} \quad b_k = [2^{\tau^k}] \quad (k \geqq 1).$$

Comme $\tau \geqq 2$, la suite $(b_k)_{k \geqq 1}$ est strictement croissante. Par suite, σ_n est algébrique, de degré 1, et de hauteur 2^{b_n}. D'où

$$2^{1+b_n} \leqq \Lambda(\sigma_n) \leqq 2^{2+b_n}$$

et par conséquent

$$\frac{b_n}{2} < \log \Lambda(\sigma_n) < 2\, b_n \qquad (n \geqq 1). \tag{1.1}$$

De la définition de b_k, on déduit

$$\frac{b_n^\tau}{2} < b_{n+1} < 2^\tau\, b_n^\tau \qquad (n \geqq 1). \tag{1.2}$$

(*a*) Il vient

$$\theta_\tau - \sigma_n = \sum_{k \geqq n+1} 2^{-b_k} = 2^{-b_{n+1}} \sum_{k \geqq n+1} 2^{b_{n+1}-b_k}.$$

Comme la suite $(b_k)_{k \geqq 1}$ est strictement croissante, on a

$$b_k - b_{n+1} \geqq (k-n-1) \qquad \text{pour} \quad k \geqq n+1,$$

d'où

$$2^{-b_{n+1}} \leqq \theta_\tau - \sigma_n \leqq 2^{1-b_{n+1}}. \tag{1.3}$$

Compte tenu des relations (1.1) et (1.2), on a donc

$$\exp(-c_2 [\log \Lambda(\sigma_n)]^\tau) \leqq \theta_\tau - \sigma_n \leqq \exp(-c_1 [\log \Lambda(\sigma_n)]^\tau) \qquad (n \geqq 1), \tag{1.4}$$

avec $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$. Par suite,

$$\tau(\theta_\tau) \geqq \tau.$$

(*b*) Soit $\beta \in \overline{\mathbf{Q}}$ distinct de σ_p pour tout $p \geqq 1$. On écrit :

$$\theta_\tau - \beta = \sigma_n - \beta + \theta_\tau - \sigma_n.$$

Il vient alors, d'après le lemme 3 et la relation (1.1) :

$$|\sigma_n - \beta| \geqq \exp(-2 \log \Lambda(\beta) \log \Lambda(\sigma_n)) \geqq \exp(-4\, b_n \log \Lambda(\beta)) \qquad (n \geqq 1).$$

D'autre part, d'après la relation (1.3),

$$|\theta_\tau - \sigma_n| \leqq 2^{1-b_{n+1}} \qquad (n \geqq 1).$$

Par conséquent, si

$$b_{n+1} \geqq 9\, b_n . \log \Lambda(\beta),$$

alors on a

$$\frac{1}{2}\exp(-4\,b_n\log\Lambda(\beta)) \geqq 2^{1-b_{n+1}},$$

d'où

$$|\theta_\tau-\beta| \geqq \frac{1}{2}\exp(-4\,b_n\log\Lambda(\beta)).$$

Ainsi, d'après la relation (1.2), on en déduit que si $p\in\mathbf{N}$ vérifie

$$(1.5)\qquad b_p^{\tau-1} \geqq 18.\log\Lambda(\beta),$$

alors

$$(1.6)\qquad |\theta_\tau-\beta| \geqq \frac{1}{2}\exp(-4\,b_p\log\Lambda(\beta)),$$

Soit $p\in\mathbf{N}$ le plus petit entier vérifiant (1.5). On a donc soit $p = 1$, soit

$$b_{p-1}^{\tau-1} < 18.\log\Lambda(\beta) \leqq b_p^{\tau-1}.$$

Dans le premier cas, on a

$$b_p = b_1,$$

et dans le second cas, compte tenu de (1.2),

$$b_p \leqq 2^\tau.18^{\tau/(\tau-1)}[\log\Lambda(\beta)]^{\tau/(\tau-1)}.$$

Dans les deux cas, on obtient donc, d'après (1.6) :

$$(1.7)\qquad |\theta_\tau-\beta| \geqq \exp(-c_3[\log\Lambda(\beta)]^{1+(\tau/(\tau-1))}) \qquad \text{avec}\quad c_3>0.$$

Comme $\tau \geqq 3$, on a

$$1+\frac{\tau}{\tau-1} \leqq \tau;$$

des relations (1.4) et (1.7), on tire ainsi

$$(1.8)\quad |\theta_\tau-\beta| \geqq \exp(-c_4[\log\Lambda(\beta)]^\tau) \qquad (c_4>0)\ \text{pour tout}\ \beta\in\overline{\mathbf{Q}}.$$

Par suite,

$$\tau(\theta_\tau) \leqq \tau.$$

De (*a*) et (*b*), on déduit donc

$$\tau(\theta_\tau) = \tau.$$

Remarque. — On obtient évidemment les mêmes résultats si l'on remplace l'exposant $b_k = [2^{\tau^k}]$ par $[q^{\tau^k}]$ avec $q \in \mathbf{R}$ et $q \geqq 2$. On peut ainsi formuler les résultats obtenus sous la forme suivante.

THÉORÈME 2. — *Soient $q \in \mathbf{R}$, $q \geqq 2$ et $\tau \in (3, +\infty($. Posons*

$$\theta = \theta_\tau^{(q)} = \sum_{n \geqq 1} 2^{-[q^{\tau^n}]},$$

et soient

$$b_k = b_k(\tau, q) = [q^{\tau^k}] \qquad et \qquad \sigma_n = \sigma_n(\tau, q) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-b_k},$$

alors

(*a*) $\tau(\theta) = \tau$;

(*b*) $2^{-b_{n+1}} \leqq \theta - \sigma_n \leqq 2^{1-b_{n+1}}$ *et* $b_n/2 < \log \Lambda(\sigma_n) < 2\, b_n$;

(*c*) *Il existe $c = c(\tau, q) > 0$ telle que, pour tout $\beta \in \overline{\mathbf{Q}}$ distinct de σ_p pour tout $p \geqq 1$, on ait*

$$|\theta - \beta| \geqq \exp(-c[\log \Lambda(\beta)]^{1+(\tau/(\tau-1))}).$$

COROLLAIRE (Problème 1 de MAHLER). — *L'ensemble $\mathscr{E}$ des classes d'équivalence de $\mathbf{C}$ par la relation $> <$ contient un sous-ensemble équipotent à $(3, +\infty($. En particulier, $\mathscr{E}$ est infini non dénombrable.*

4. **Solution du problème** 3

La réponse au problème 3 est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soit $p \in \mathbf{N}$, $p \geqq 3$, et soient*

$$\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-b_n}, \qquad avec \quad b_n = 2^{p^n}$$

et

$$\psi = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-d_n} \qquad avec \quad d_n = 4^{p^{2n}}.$$

Alors les éléments σ et ψ ne vérifient ni $O^*(u \mid \sigma) \ll O^*(u \mid \psi)$, ni $O^*(u \mid \psi) \ll O^*(u \mid \sigma)$. De même, ils ne vérifient ni $O(u \mid \sigma) \ll O(u \mid \psi)$ ni $O(u \mid \psi) \ll O(u \mid \sigma)$.

Preuve. — Avec les notations du théorème 2, on a $\sigma = \theta_p^{(2)}$ et $\psi = \theta_{p^2}^{(4)}$ et par suite $\tau(\sigma) = p$ et $\tau(\psi) = p^2$. Compte tenu du lemme 2, on en déduit que les relations

$$O^*(u \mid \psi) \ll O^*(u \mid \sigma)$$

et

$$O(u\,|\,\psi) \ll O(u\,|\,\sigma)$$

sont toutes deux impossibles.

Posons

$$\sigma_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} 2^{-b_k} \qquad \text{et} \qquad \psi_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-d_k} \qquad (n \geqq 1).$$

Soit

$$u_n = \Lambda(\sigma_{2n}) \qquad (n \geqq 1).$$

Il vient alors d'après la relation (*b*) du théorème 2 :

$$(3.1) \quad O^*(u_n\,|\,\sigma) \geqq (b_{2n+1} - 1)\log 2 \geqq c_1\, b_{2n+1} \qquad (n \geqq 1;\ c_1 > 0),$$

comme

$$O(u\,|\,\sigma) \geqq c_2\, O^*(u\,|\,\sigma) \qquad (c_2 = c_2(\sigma) > 0),$$

on a donc

$$(3.2) \qquad O(u_n\,|\,\sigma) \geqq c_3\, b_{2n+1} \qquad (n \geqq 1;\ c_3 > 0).$$

D'autre part, d'après la relation (*c*) du théorème 2, il existe $c = c(p) > 0$ telle que, pour tout $\beta \in \overline{\mathbf{Q}}$ distinct de ψ_q pour tout $q \geqq 1$, on ait

$$(3.3) \qquad |\,\psi - \beta\,| \geqq \exp(-c\,[\log \Lambda(\beta)]^{1+(p^2/(p^2-1))}).$$

Soit $r \in \mathbf{N}^*$ quelconque, et soit $\beta \in \overline{\mathbf{Q}}$ tel que $\Lambda(\beta) \leqq u_n^r$; si β est l'un des ψ_q ($q \geqq 1$), comme

$$\log u_n = \log \Lambda(\sigma_{2n}) < 2\, b_{2n} \qquad \text{et} \qquad \log \Lambda(\psi_q) > \frac{d_q}{2},$$

on a donc

$$\frac{d_q}{2} < 2\, r b_{2n},$$

c'est-à-dire :

$$p^{2q} < 1 + \frac{\log r}{\log 4} + \frac{p^{2n}}{2} < p^{2n} \qquad (n \geqq n_0(r)),$$

donc

$$q \leqq n-1.$$

Comme

$$|\,\psi - \psi_q\,| \geqq \frac{1}{2^{d_{q+1}}},$$

et

$$d_{q+1} = 4^{p^{2q+2}} \leqq 4^{p^{2n}} = (b_{2n+1})^{2/p},$$

on a donc

$$(3.4) \qquad |\psi-\psi_q| \geqq \exp(-(b_{2n+1})^{2/p}).$$

Si maintenant β est distinct de ψ_q pour tout $q \geqq 1$, on a, d'après (3.3),

$$(3.5) \qquad \begin{aligned} |\psi-\beta| &\geqq \exp(-c[\log\Lambda(\beta)]^{1+(p^2/(p^2-1))}) \\ &\geqq \exp(-c[r\log u_n]^{1+(p^2/(p^2-1))}) \\ &\geqq \exp(-c[2rb_{2n}]^{1+(p^2/(p^2-1))}). \end{aligned}$$

Des relations (3.4) et (3.5), on tire donc, pour $n \geqq n_0(r)$,

$$(3.6) \qquad O^*(u_n^r\,|\,\psi) \leqq c_4(b_{2n+1})^{(1+(p^2/(p^2-1)))(1/p)} \qquad (c_4 = c_4(r) > 0).$$

Or, d'après la relation (3.1), on a

$$O^*(u_n\,|\,\sigma) \geqq c_1\, b_{2n+1} \qquad (n \geqq 1;\ c_1 > 0);$$

on en déduit donc que, quels que soient les nombres positifs r, u_0 et γ, la relation

$$O^*(u\,|\,\sigma) \leqq \gamma\, O^*(u^r\,|\,\psi) \qquad \text{pour} \quad u \geqq u_0$$

est impossible, puisque $(1+(p^2/(p^2-1)))(1/p) < 1$ $(p \geqq 3)$. Autrement dit, la relation :

$$O^*(u\,|\,\sigma) \ll O^*(u\,|\,\psi)$$

est impossible.

De même, en utilisant le lemme 1 et les relations (3.3) et (3.4) d'une part, et la relation (3.2) d'autre part, il est facile de montrer que la relation

$$O(u\,|\,\sigma) \ll O(u\,|\,\psi),$$

est, elle aussi, impossible.

5. Solutions des problèmes 4 et 5

Notons E (resp. F) l'ensemble des nombres réels θ (resp. complexes) tels que $2 \in T(\theta)$. D'après le lemme 2, on a

$$F = \left\{ \theta \in \mathbf{C};\ \overline{\lim}_{u\to+\infty} \frac{O(u\,|\,\theta)}{(\log u)^2} = +\infty \right\} \qquad \text{et} \qquad E = F \cap \mathbf{R}.$$

Comme pour tout nombre complexe θ (resp. réel) transcendant, on a

$$O(u \mid \theta) \gg (\log u)^2,$$

la relation

$$O(u \mid \theta) > < (\log u)^2$$

est équivalente à

$$\theta \notin F \qquad (\text{resp. } \theta \notin E).$$

Comme en outre l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, démontrer les assertions (i) et (ii) du problème 5 revient donc à prouver que E (resp. F) est Lebesgue-mesurable de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}^2$).

THÉORÈME 4 :

(*a*) *Les nombres réels* θ, *tels que* $2 \in T(\theta)$, *forment un ensemble* $E \subseteq \mathbf{R}$ *Lebesgue-mesurable de mesure nulle.*

(*b*) *Les nombres complexes* θ, *tels que* $2 \in T(\theta)$, *forment un ensemble* $F \subseteq \mathbf{C}$ *Lebesgue-mesurable de mesure nulle.*

Preuve. – Soit $\theta \in \mathbf{C}$ tel que $2 \in T(\theta)$. Il existe alors une suite $(\beta_n)_{n \geqq 1}$ de nombres algébriques deux à deux distincts tels que

$$|\theta - \beta_n| \leqq \exp(-n[\log \Lambda(\beta_n)]^2) \qquad (n \geqq 1).$$

La démonstration est alors analogue à celle du théorème 23 de SCHNEIDER [6].

(*a*) *Cas réel.* – Soit

$$E_n = \bigcup\nolimits_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}} [\beta - \exp(-n[\log \Lambda(\beta)]^2), \beta + \exp(-n[\log \Lambda(\beta)]^2)] \quad (n \geqq 1).$$

Par suite

$$E \subseteq \bigcap\nolimits_{n \geqq 1} E_n. \tag{4.1}$$

Soit m_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} m(E_n) &\leqq \textstyle\sum_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}} 2\exp(-n[\log \Lambda(\beta)]^2) \\ &= \textstyle\sum_{u=1}^{+\infty} (\sum_{\beta \in \bar{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R},\, 2^u \leqq \Lambda(\beta) < 2^{u+1}} 2\exp(-n[\log \Lambda(\beta)]^2)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le nombre de polynômes à coefficients entiers rationnels, de degré $d \geqq 1$ et de longueur $\leqq L$, est au plus de $(2L)(2L+1)^d$. Donc le nombre des polynômes P non constants, vérifiant $\Lambda(p) < 2^{u+1}$, est majoré par

$$\sum_{d=1}^{d=u}(2.2^{u+1-d})(2.2^{u+1-d}+1)^d \leqq 2.2^{u+1}\sum_{d=1}^{d=u}\left(\frac{3.2^{u+1-d}}{2}\right)^d$$
$$\leqq 2^{u+2}.3^u.u.2^{u^2/4}.$$

Pour n assez grand, $n \geqq n_0$, on a donc, pour tout $u \geqq 1$,

$$\sum_{\beta\in\bar{\mathbf{Q}}\cap\mathbf{R},\, 2^u\leqq\Lambda(\beta)<2^{u+1}} 2\exp(-n[\log\Lambda(\beta)]^2)$$
$$\leqq 2\exp(-n(\log 2)^2 u^2).2^{u+2}.3^u.u^2.2^{u^2/4} \leqq \exp\left(-\frac{n}{3}u^2\right).$$

D'où, d'après (4.2), pour $n \geqq n_0$:

$$m_1(E_n) \leqq \sum_{u=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{n}{3}u^2\right) < 2\exp\left(-\frac{n}{3}\right).$$

Comme la suite $(E_n)_{n\geqq 1}$ est décroissante, on a donc

(4.3) $$m_1(\bigcap_{n\geqq 1}E_n) = \lim_{n\to+\infty} m_1(E_n) = 0.$$

Des relations (4.1) et (4.3), on déduit ainsi que E est Lebesgue-mesurable de mesure nulle.

(*b*) *Cas complexe.* — On considère à présent :

$$F_n = \bigcup_{\beta\in\bar{\mathbf{Q}}}[\mathbf{R}e(\beta)-\exp(-n[\log\Lambda(\beta)]^2),\ \mathbf{R}e(\beta)+\exp(-n[\log\Lambda(\beta)]^2)]$$
$$\times[\mathscr{I}m(\beta)-\exp(-n[\log\Lambda(\beta)^2]),\ \mathscr{I}m(\beta)+\exp(-n[\log\Lambda(\beta)]^2)].$$

Soit m_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$. Il vient alors

(4.4) $$F \subseteq \bigcap_{n\geqq 1}F_n$$

et

$$m_2(F_n) \leqq \sum_{u=1}^{+\infty}(\sum_{\beta\in\bar{\mathbf{Q}},\, 2^u\leqq\Lambda(\beta)<2^{u+1}} 4\exp(-2n[\log\Lambda(\beta)]^2)).$$

Comme précédemment, on a pour $n \geqq n_0$:

$$m_2(F_n) \leqq \sum_{u=1}^{+\infty}\exp\left(-\frac{n}{3}u^2\right) < 2\exp\left(-\frac{n}{3}\right),$$

d'où

(4.5) $$m_2(\bigcap_{n\geqq 1}F_n) = 0.$$

Des relations (4.4) et (4.5), on déduit que F est Lebesgue-mesurable de mesure nulle.

COROLLAIRE 1 (Problème 5 de MAHLER) :

(i) $O(u \mid \theta) > < (\log u)^2$ *pour presque tous les nombres réels* θ (*au sens de la mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}$).

(ii) $O(u \mid \theta) > < (\log u)^2$ *pour presque tous les nombres complexes* θ (*au sens de la mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}^2$).

COROLLAIRE 2 (Problème 4 de MAHLER). — *Presque tout* $\theta \in \mathscr{T}$ *vérifie la relation*

$$\eta \gg \theta \quad \textit{pour tout } \eta \in \mathscr{T}.$$

En effet, pour presque tout $\theta \in \mathscr{T}$, on a, d'après le corollaire 1,

$$O(u \mid \theta) > < (\log u)^2.$$

Soit $\theta \in \mathscr{T}$ un tel élément. Comme pour tout $\eta \in \mathscr{T}$, on a

$$O(u \mid \eta) \gg (\log u)^2,$$

on en déduit évidemment

$$\eta \gg \theta \quad \text{pour tout } \eta \in \mathscr{T}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CIJSOUW (P. L.) et TIJDEMAN (R.). — On the transcendence of certain power series of algebraic numbers, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 23, 1973, p. 301-305.

[2] DURAND (A.). — Un critère de transcendance. *Séminaire Delange-Pisot-Poitou* : Groupe d'étude de théorie des nombres, 15e année, 1973/74, no G 11, 9 p.

[3] FEL'DMAN (N. I.). — Approximation of certain transcendental numbers, I : The approximation of logarithms of algebraic numbers, *Amer. math. Soc. Transl.*, Series 2, t. 59, 1966, p. 224-245; [en russe] *Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat.*, t. 15, 1951, p. 53-74.

[4] GÜTING (R.). — Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers, *Mich. math. J.*, t. 8, 1961, p. 149-159.

[5] MAHLER (K.). — On the order function of a transcendental number, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 18, 1971, p. 63-76.

[6] SCHNEIDER (T.). — *Enführung in die tranzendenten Zahlen.* — Berlin, Springer-Verlag, 1957 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 81).

(Texte reçu en mai 1974.)

Alain DURAND,
18, rue des Raguenets,
95210 Saint-Gratien.