ADOLF VAN DEN HOMBERGH

Sur des suites de racines dont la somme des termes est nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 353-364
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__353_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 353-364.

SUR DES SUITES DE RACINES DONT LA SOMME DES TERMES EST NULLE

PAR

ADOLF VAN DEN HOMBERGH
[Nijmegen]

RÉSUMÉ. — Dans un article récent, J. DIXMIER a posé une conjecture sur des systèmes de racines. On montrera ici que cette conjecture est vraie seulement pour les systèmes de racines de type A_m ($m \in \mathbf{N}$), B_2, B_3, D_4, D_5, E_6 et G_2.

Pour le cas A_m ($m \in \mathbf{N}$), on en déduit la vérité d'une autre conjecture de DIXMIER, posée dans le même article.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et E l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Notons H l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{k}$, et H' le commutant de $\mathfrak{k}$ dans E. Soit $\mathfrak{k}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{k}$, et soit $R \subset \mathfrak{k}^*$ le système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{k}$. Si $B = \{ \beta_1, \ldots, \beta_m \}$ est une base de R, on pose

$$x = \sum_{i=1}^{m} m_{\beta_i}(x)\, \beta_i, \qquad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{k}^*.$$

Si $B' \subset B$, nous notons

$$R(B') = \{ \alpha \in R;\ m_{\beta_i}(\alpha) = 0 \ \text{si} \ \beta_i \notin B' \}.$$

Nous notons W le groupe de Weyl de R, et $W(B')$ le sous-groupe de Weyl de W correspondant à $R(B')$, où $B' \subset B$. Pour $\alpha \in R$, soit s_α la réflexion correspondant à α. Si C est une chambre de Weyl de R, h_C sera l'homomorphisme d'Harish-Chandra correspondant de l'algèbre H' sur l'algèbre H. Sa construction est la suivante. Soient $\mathfrak{n}_+$ la sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$ correspondante à C ; $\mathfrak{n}_-$ la sous-algèbre nilpotente opposée de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$; alors

$$(\mathfrak{n}_-\, E) \cap H' = (E\, \mathfrak{n}_+) \cap H'$$

est un idéal bilatère I_C de H', supplémentaire de H dans H', et h_C est le projecteur de H' sur H défini par ce supplémentaire. Pour tout $\alpha \in R$, choisissons la coracine H_α dans $\mathfrak{k}^*$ telle que $\alpha(H_\alpha) = 2$ et X_α dans le sous-espace radiciel correspondant à α tel que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. (Pour plus de détails, *cf.* [3].)

Dans [3], DIXMIER a posé les conjectures suivantes :

(D'_1) *On suppose* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ *telle que :*

(i) $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$;

(ii) si $\varnothing \subsetneq J \subsetneq \{1, \ldots, n\}$, *on a* $\sum_{j \in J} \alpha_j \neq 0$,

alors il existe une chambre de Weyl C telle que $n-1$ *termes de la suite* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *soient positifs relativement à C.*

(D_2) *Soit C une chambre de Weyl, et soit* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ *telle que* (i) *et* (ii) *soient satisfaites. Alors* $h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_n})$ *est proportionnel à une coracine* H_α.

Nous montrons que (D'_1) est valable pour les systèmes de racines de type A_m ($m \in \mathbf{N}$), B_2, B_3, D_4, D_5, E_6 et G_2, et que (D'_1) n'est pas valable pour tous autres systèmes de racines irréductibles et réduits.

De plus, nous montrons que (D_2) est valable quand $\mathfrak{g}$ est de type A_m ($m \in \mathbf{N}$).

Si B est une base fixe dans R, nous avons une relation d'ordre dans R, définie par B ([1], chap. VI, n° 1.6). Soit $R_\pm = \{\alpha \in R; \pm\alpha > 0\}$. Alors la conjecture ($D'_1$) est équivalente à la suivante.

(D_1) *Supposons que* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ *satisfait à* (i) *et* (ii). *Alors il existe* $w \in W$ *tel que* $n-1$ *termes de* $(w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n))$ *soient positifs.*

LEMME 1. — *Soient R un système de racines, et B une base de R. Soient* $B' \subset B$, *et* $R(B')$ *un système de racines de type* A_m ($m \in \mathbf{N}$); *supposons* $B' = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, *telle que* $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ *pour* $i = 1, \ldots, m-1$. *Soit* $T \subset R_+$, *tel que* $s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_j}(T) \not\subset R_+$ *pour* $j = 1, \ldots, m$. *Alors, pour tout* $j \in \{1, \ldots, m\}$, *il existe* $T_j \subset T$ *tel que*

$$\sum_{\gamma \in T_j} \gamma = \beta_1 + \ldots + \beta_j.$$

Démonstration. — Nous prouvons le lemme par récurrence sur j.

Si $j = 1$, $s_{\beta_1}(T) \not\subset R_+$ donne que $\beta_1 \in T$. On prend $T_1 = \{\beta_1\}$. Si $j > 1$, il existe $p \in \{1, \ldots, j\}$ tel que $\beta_p + \ldots + \beta_j \in T$, parce que

$$(s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_j})^{-1}(R_-) \cap R_+ = \{\textstyle\sum_{p=i}^j \beta_p;\ i = 1, \ldots, j\},$$

(*cf.* [1], chap. VI, § 1.6, cor. 2 de la prop. 17).

On prend $T_j = T_{p-1} \cup \{\beta_p + \ldots + \beta_j\}$.

Proposition 1. — *Soient R un système de racines, et B une base de R. Supposons que* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ *satisfait à* (i) *et* (ii) *et qu'il existe* $B' \subset B$ *tel que* $R(B')$ *est de type* A_m $(m \in \mathbf{N})$ *et*

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cap R(B') \cap R_- \neq \varnothing.$$

Si l'on a $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$, $i_1 \neq i_2$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \in R_-$, *alors il existe* $\alpha_j \in R_- \cap R(B')$ *et* $w \in W(B')$ *tels que*

$$w((\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cap R_+) \cup \{\alpha_j\}) \subset R_+.$$

De plus, si l'on a

$$(\alpha_k \in R_-) \Rightarrow (k \in \{i_1, i_2\}),$$

il existe $w \in W$, *tel que* $n-1$ *termes de* $(w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n))$ *sont positifs.*

Démonstration. — On prend α_j dans $R_- \cap R(B')$, telle que $\sum_{\beta \in B'} -m_\beta(\alpha_j)$ est minimale. Nous prouvons la proposition par récurrence sur $-\sum_{\beta \in B'} m_\beta(\alpha_j)$.

Il est permis de supposer que $B' = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ telle que $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ pour $i = 1, \ldots, m-1$, et que $\alpha_j = -(\beta_1 + \ldots + \beta_m)$. Soit

$$T = R_+ \cap \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Si $s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_i}(T) \not\subset R_+$ pour $i = 1, \ldots, m$, il existe $T_m \subset T$ tel que

$$\textstyle\sum_{\gamma \in T_m} = (\beta_1 + \ldots + \beta_m),$$

et alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ne vérifie pas (ii).

Alors il existe $p \in \{1, \ldots, m\}$, tel que $s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_p}(T) \subset R_+$.

Mais $s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_p}(\alpha_j)$ est positive (si $p = m$) ou

$$-\textstyle\sum_{\beta \in B'} m_\beta (s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_p})(-\beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_m) = m-1,$$

et l'on applique l'hypothèse de récurrence.

Corollaire 1. — (D_1) *est valable dans un système de racines de type* A_m $(m \in \mathbf{N})$.

Lemme 2. — *Soient R un système de racines de type* A_m $(m \in \mathbf{N})$, *et* $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ *une base de R telle que* $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ *pour* $i = 1, \ldots, m-1$. *Supposons que* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ *satisfait à* (i) *et* (ii). *Alors* $m > n-1$, *et il existe* $w \in W$, *tel que*

$$\{w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n)\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, -(\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1})\}.$$

Démonstration. — Utilisons le corollaire 1; il existe $w \in W$, tel que $(w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n))$ a $n-1$ termes positifs. Supposons

$$w(\alpha_n) = -(\beta_p + \ldots + \beta_q) \qquad (p \leqq q).$$

En appliquant, quand nécessaire, $s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_{p-1}}$, on peut supposer que $p = 1$. Si $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \{ w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n) \}$, on a $n = q+1$, et la démonstration est terminée. Autrement, il existe $i \in \{ 1, \ldots, q-1 \}$ tel que $\beta_i \notin \{ w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n) \}$.

Soit $i_0 - 1$ le plus petit entier avec cette propriété, alors

$$s_{\beta_q} s_{\beta_{q-1}} \ldots s_{\beta_{i_0}} . w(\beta_j) \in R_+ \qquad \text{pour} \quad j < n$$

et

$$s_{\beta_q} s_{\beta_{q-1}} \ldots s_{\beta_{i_0}} . w(\alpha_n) = -(\beta_1 + \ldots + \beta_{q-1}).$$

Il suffit donc d'appliquer une hypothèse de récurrence sur q.

COROLLAIRE 2. — *Soient R un système de racines de type A_m $(m \in \mathbf{N})$, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ telle que* (i) *et* (ii) *sont vérifiées. Alors on a, pour tout $i \in \{ 1, \ldots, n \}$ exactement deux éléments $i(1)$, $i(2)$ dans $\{ 1, \ldots, n \}$ tels que $\alpha_i + \alpha_{i(1)}$ et $\alpha_i + \alpha_{i(2)}$ sont des racines.*

LEMME 3. — *Soit C une chambre de Weyl. On suppose que $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in R^n$ vérifie* (i) *et* (ii), *et, pour tout $i \in \{ 1, \ldots, n \}$, on a deux indices $i(1)$ et $i(2)$ au plus, tels que $\alpha_i + \alpha_{i(1)}$ et $\alpha_i + \alpha_{i(2)}$ sont des racines. Alors il existe une racine α_0 telle que*

$$h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_n}) = \mu H_{\alpha_0}, \qquad \textit{où} \quad \mu \in \mathbf{C}.$$

Si l'on a choisi $\{ X_\alpha ; \alpha \in R \}$ tel que, pour $\alpha, \beta \in R$ avec $\alpha + \beta \in R$, $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathbf{Z}.X_{\alpha+\beta}$, alors $\mu \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. — Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R_n$ vérifie les conditions du lemme, alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_i + \alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$ les vérifie aussi quand $\alpha_i + \alpha_j \in R$. Nous prouvons le lemme par récurrence sur n. Le cas où $n = 2$ est trivial, et il est exclu dans ce qui suit. C définit une relation d'ordre dans $R : R = R_+ \cup R_-$. Supposons $\alpha_i \in R_+$. S'il n'existe pas un indice $j > i$ avec $\alpha_i + \alpha_j \in R$, alors

$$h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_n}) = h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_{i-1}} X_{\alpha_{i+1}} \ldots X_{\alpha_n} X_{\alpha_i}) = 0.$$

Si l'on a exactement un indice $j > i$ avec $\alpha_i + \alpha_j \in R$, alors

$$h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_n}) = h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_{i-1}} X_{\alpha_{i+1}} \ldots X_{\alpha_{j-1}} [X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] X_{\alpha_{j+1}} \ldots X_{\alpha_n})$$
$$= \mu\, h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_{i-1}} X_{\alpha_{i+1}} \ldots X_{\alpha_{j-1}} X_{\alpha_i + \alpha_j} X_{\alpha_{j+1}} \ldots X_{\alpha_n}),$$

où $\mu \in \mathbf{C}$.

Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Si $\alpha_i \in R_+$, on peut donc supposer qu'il existe des indices $i(1)$, $i(2)$, avec $i(1) \neq i(2)$, et $i(1), i(2) > i$, de sorte que $\alpha_i + \alpha_{i(1)}$ et $\alpha_i + \alpha_{i(2)} \in R$. Par un raisonnement analogue, on peut supposer que si $\alpha_i \in R_-$, on a des indices $i(1)$ et $i(2) < i$ avec $\alpha_i + \alpha_{i(1)}$ et $\alpha_i + \alpha_{i(2)} \in R$. Alors on peut supposer que $\alpha_{i(1)}$ et $\alpha_{i(2)}$ sont négatives si α_i est positive, et que $\alpha_{i(1)}$ et $\alpha_{i(2)}$ sont positives si α_i est négative. Après adaptation de l'indexation, nous pouvons nous restreindre au cas où $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in R_+$, $\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \in R_-$, et si $\alpha_p + \alpha_q \in R$, où $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, il s'en suit que $p \leqq j$, $q > j$. On suppose $\alpha_1 + \alpha_n \in R$, $\alpha_1 + \alpha_{n-1} \in R$ et $\alpha_2 + \alpha_n \in R$. Si $\alpha_1 + \alpha_n \in R_+$,

$$\begin{aligned} & h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_n}) \\ & = h_C(X_{\alpha_2} \ldots X_{\alpha_{n-1}} [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_{n-1}}] X_{\alpha_n}) + h_C(X_{\alpha_2} \ldots X_{\alpha_{n-1}} [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_n}]) \\ & = \mu_1\, h_C(X_{\alpha_2} \ldots X_{\alpha_{n-1}} X_{\alpha_1 + \alpha_{n-1}} X_{\alpha_n}), \qquad \text{où} \quad \mu_1 \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_n \in R_-$,

$$\begin{aligned} & h_C(X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_n}) \\ & = h_C(X_{\alpha_1} [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_n}] X_{\alpha_3} \ldots X_{\alpha_{n-1}}) + h_C([X_{\alpha_1}, X_{\alpha_n}] X_{\alpha_2} \ldots X_{\alpha_{n-1}}) \\ & = \mu_2\, h_C(X_{\alpha_1} X_{\alpha_2 + \alpha_n} X_{\alpha_3} \ldots X_{\alpha_{n-1}}), \qquad \text{où} \quad \mu_2 \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

PROPOSITION 2. — (D_2) *est valable dans une algèbre de Lie de type* A_m $(m \in \mathbf{N})$.

Démonstration. — Soit R un système de racines de type A_m. Selon le corollaire 2, une suite $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, qui vérifie (i) et (ii), vérifie aussi les conditions du lemme 3.

PROPOSITION 3. — (D_1) *est valable dans un système de racines de type* B_2, G_2, B_3, D_4, D_5, E_6.

Démonstration. — Soient R un système de racines, et B une base. Supposons que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ vérifie (i) et (ii). Nous prouvons la proposition par récurrence sur n.

$$0 = (\alpha_1, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n) = \textstyle\sum_{j>1} (\alpha_1, \alpha_j) + (\alpha_1, \alpha_1).$$

Donc il existe $j \in \{2, \ldots, n\}$ tel que $(\alpha_1, \alpha_j) < 0$, disons $j = 2$. Alors $\alpha_1 + \alpha_2 \in R$. $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \in R^{n-1}$ vérifie (i) et (ii), donc, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut supposer qu'il existe $w \in W$ tel que $n-2$ termes de $(w(\alpha_1 + \alpha_2), w(\alpha_3), \ldots, w(\alpha_n))$ sont positifs. Supposons que $w = 1$. Il y a deux possibilités.

1° $\alpha_1 + \alpha_2 \in R_-$. Si α_1 ou α_2 est positive, on a fini, donc on suppose $\alpha_1, \alpha_2 \in R_-$.

2° $\alpha_1 + \alpha_2 \in R_+$. Si α_1 et α_2 sont positives, on a fini, donc on suppose $\alpha_1 \in R_+$, $\alpha_2 \in R_-$. Disons que α_3 est aussi négative en ce cas.

Avec ces restrictions, on n'a pas de difficultés de prouver (D_1) aux cas où R est de rang 2.

Soient R de type B_3, et $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ une base de R, telle que $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ pour $i = 1, 2$, et $(\beta_1, \beta_1) = (\beta_2, \beta_2) = 2(\beta_3, \beta_3)$. On a $s_{\beta_1+\beta_2+\beta_3}(\beta_i) = \beta_i$ pour $i = 2, 3$, et $s_{\beta_1+\beta_2+\beta_3}(\beta_1) = -(\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3)$. Supposons que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ vérifie (i) et (ii), et limitons-nous aux cas des 1° et 2°. Dans ce qui suit, supposons que la proposition 1 n'est pas applicable. Dans le cas du 1°, on a alors

$$\alpha_1 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \qquad \alpha_2 = -(\beta_2 + \beta_3).$$

Si $\beta_2 \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, on peut appliquer $s_{\beta_3} s_{\beta_2}$. Si $\beta_2 \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $s_{\beta_3} s_{\beta_2} s_{\beta_3}$ est applicable, sinon $\beta_2 + 2\beta_3 \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. La seule suite possible, sauf pour la succession, est alors

$$(\beta_1, \beta_2 + 2\beta_3, \beta_2, -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), -(\beta_2 + \beta_3)).$$

Appliquons $-1 . s_{\beta_1+\beta_2}$ (-1 est un élément de W).

Maintenant, supposons que nous sommes au cas du 2°. Si $m_{\beta_1}(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$, nous sommes, avec $(s_{\beta_1+\beta_2+\beta_3}(\alpha_1), \ldots, s_{\beta_1+\beta_2+\beta_3}(\alpha_n))$, encore dans le premier cas. Si $m_{\beta_1}(\alpha_1) \neq 0$ et $m_{\beta_1}(\alpha_2) \neq 0$, on a $m_{\beta_3}(\alpha_1) = 2$, parce que $m_{\beta_3}(\alpha_2) \neq 0$. Alors

$$(s_{\beta_1+\beta_2+\beta_3}(\alpha_1), \ldots, s_{\beta_1+\beta_2+\beta_3}(\alpha_n))$$

a deux termes négatifs, l'un d'eux étant

$$s_{\beta_1+\beta_2+\beta_3}(\alpha_1) \in R(\{\beta_1, \beta_2\}).$$

Donc la proposition 1 est applicable. La seule autre possibilité est

$$\alpha_1 = \beta_2 + 2\beta_3, \; \alpha_2 = -(\beta_2 + \beta_3).$$

Si $m_{\beta_1}(\alpha_3) = 0$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une suite dans un système de racines de rang 2, donc on suppose $m_{\beta_1}(\alpha_3) = -1$, et il suit que $\alpha_3 \leqq -(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$. Comme plus haut, on peut se limiter aux cas où $\beta_2 \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Si $\beta_1 \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, nous sommes avec $(s_{\beta_1}(\alpha_1), \ldots, s_{\beta_1}(\alpha_n))$ dans un cas antérieur, et si $\beta_1 \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, on a $\alpha_3 = -(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$. Alors la seule suite possible est

$$(\beta_2+2\beta_3, -(\beta_2+\beta_3),\ -(\beta_1+\beta_2+\beta_3),\ \beta_1,\ \beta_2).$$

Appliquons $-1.s_{\beta_1+\beta_2}$:

Soient R un système de racines de type D_m $(m \in \mathbf{N})$, et $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ une base de R telle que $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ pour $i = 1, \ldots, m-2$ et $(\beta_{m-2}, \beta_m) < 0$. Désignons

$$w_0 = s_{\beta_1+\ldots+\beta_{m-2}+\beta_{m-1}} \cdot s_{\beta_1+\ldots+\beta_{m-2}+\beta_m}.$$

Alors

$$w_0(\beta_j) = \beta_j \qquad \text{pour} \quad j = 2, \ldots, m-2,$$
$$w_0(\beta_{m-1}) = \beta_m, \qquad w_0(\beta_m) = \beta_{m-1}$$

et

$$w_0(\beta_1) = -(\beta_1+2\beta_2+\ldots+2\beta_{m-2}+\beta_{m-1}+\beta_m).$$

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, et supposons que (i) et (ii) sont satisfaites. Nous nous limitons aux cas du 1° et du 2°. Si on est dans le cas du 1^0, $m_{\beta_m}(\alpha_1) = 0$ ou $m_{\beta_m}(\alpha_2) = 0$, alors la proposition 1 est applicable. Supposons que nous sommes dans le cas du 2°, et de plus que la proposition 1 n'est pas applicable. Si $m_{\beta_1}(\alpha_1+\alpha_2) \neq 0$, nous sommes, avec $(w_0(\alpha_1), \ldots, w_0(\alpha_n))$, encore dans le cas du 1^0 :

$$m_{\beta_{m-1}}(\alpha_2) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad m_{\beta_m}(\alpha_2) \neq 0,$$

et, parce que $\alpha_1+\alpha_2 \in R_+$, on a $m_{\beta_{m-1}}(\alpha_1)$ et $m_{\beta_m}(\alpha_1) \neq 0$. Alors $(w_0(\alpha_1), \ldots, w_0(\alpha_n))$ est une suite avec deux termes négatifs, l'un d'eux étant $w_0(\alpha_1) \in R(\{\beta_1, \ldots, \beta_{m-2}\})$. Donc on peut appliquer la proposition 1 à $(w_0(\alpha_1), \ldots, w_0(\alpha_n))$. Alors on peut se restreindre au cas où $m_{\beta_1}(\alpha_1) = m_{\beta_1}(\alpha_2) = 0$. Si $m = 4$, on a $\alpha_2 \in R(\{\beta_2, \beta_3, \beta_4\})$, alors la proposition 1 est applicable. Si $m = 5$, et on ne peut pas appliquer la proposition 1, $\alpha_2 = -(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5)$. Alors $\alpha_1 = \beta_2+2\beta_3+\beta_4+\beta_5$. Si $\beta_1 \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, nous sommes, avec $(s_{\beta_1}(\alpha_1), \ldots, s_{\beta_1}(\alpha_n))$, dans un cas antérieur, et nous avons fini. Si, disons, $\alpha_4 = \beta_1$, on a

$$\alpha_3 \neq -(\beta_1+2\beta_2+2\beta_3+\beta_4+\beta_5),$$

autrement $\sum_{j>4} \alpha_j = 2\,\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5$, donc $\beta_2 \in \{\alpha_4, \ldots, \alpha_n\}$, mais alors $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\beta_2 = 0$, et c'est une contradiction. Alors

$$\alpha_3+\alpha_4 \in R(\{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}).$$

[Nous avons supposé que $m_{\beta_1}(\alpha_3) \neq 0$], et $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n)$ est une suite dans $R(\{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\})$, qui est de type D_4. Donc il existe $w \in W(\{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\})$ tel que

$$(w(\alpha_1), w(\alpha_2), w(\alpha_3+\alpha_4), w(\alpha_5), \ldots, w(\alpha_n))$$

a $n-2$ termes positifs : $w(\alpha_3) \in R_-$ et $w(\alpha_4) \in R_+$, alors on a terminé [quand $w(\alpha_3+\alpha_4) \in R_-$], ou on est dans un cas antérieur.

Soient R un système de racines de type E_6, et $\{\beta_1, \ldots, \beta_6\}$ une base telle que $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $(\beta_3, \beta_6) < 0$. Désignons $\alpha_0 = \beta_1+2\,\beta_2+3\,\beta_3+2\,\beta_4+\beta_5+2\,\beta_6$ la plus grande racine de R, et w_0 l'élément de W de longueur maximale. Comme dans [3], nous désignons w_β l'élément de longueur maximale de $W(B\setminus\{\beta\})$. En utilisant le lemme A_3 (iii) de [3], on calcule que

$$\begin{aligned} w_0\, w_{\beta_1}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{6} m_i\,\beta_i\right) = {} & (m_5-m_1)\,\beta_1+(m_4-2\,m_1)\,\beta_2+(m_3-3\,m_1)\,\beta_3 \\ & +(m_6-2\,m_1)\,\beta_4-m_1\,\beta_5+(m_2-2\,m_1)\,\beta_6 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w_0\, w_{\beta_2}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{6} m_i\,\beta_i\right) = {} & (m_6-m_2)\,\beta_1+(m_3-2\,m_2)\,\beta_2 \\ & +(m_4-2\,m_2)\,\beta_3-m_2\,\beta_4+(m_1-m_2)\,\beta_5+(m_5-m_2)\,\beta_6. \end{aligned}$$

Des expressions analogues sont obtenues en remplaçant 1 par 5, ou 2 par 4. Supposons que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in R^n$ vérifie les conditions (i) et (ii), et que nous sommes dans le cas du 1° ou du 2°.

Si

(*a*) il existe $B' \subset B$ de type A_k $(k \in \mathbf{N})$, telle que

$$R_- \cap R(B') \cap \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \neq \varnothing,$$

ou

(*b*) il existe α_k avec $m_{\beta_j}(\alpha_k) = 2$ pour $j = 2$, 4 ou 6,

ou

(*c*) $\sum_{\alpha_i \in R_+} m_{\beta_j}(\alpha_i) \leqq 2$ pour $j = 2$ ou 4, et il existe α_l avec $m_{\beta_3}(\alpha_l) = 2$, on a terminé, car dans le cas (*a*), on peut appliquer la proposition 1; dans le cas (*b*), on peut appliquer la proposition 1 à $(w_0\, w_{\beta_i}(\alpha_1), \ldots, w_0\, w_{\beta_i}(\alpha_n))$, où $i = 1$ ou 5, dépendant de $m_{\beta_1}(\alpha_k) \neq 0$ ou $m_{\beta_5}(\alpha_k) \neq 0$; dans le cas (*c*), on peut appliquer la proposition 1 à $(w_0\, w_{\beta_j}(\alpha_1), \ldots, w_0\, w_{\beta_j}(\alpha_n))$, qui a deux termes négatifs, l'un d'eux étant un élément de $R(B \setminus \{ B_{\beta_j} \})$ [Dans ce dernier cas, on a supposé que l'on n'a pas le cas (a)].

Supposons que nous sommes dans le cas du 1°. Si (a) n'est pas vérifiée, $\alpha_1+\alpha_2 = \alpha_0$, et disons

$$-(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6) \leqq \alpha_1 \leqq -(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_6).$$

Si (c) n'est pas vérifiée, on a $m_{\beta_3}(\alpha_k) < 2$ pour tout $k \in \{ 1, \ldots, n \}$, car

$$\textstyle\sum_{\alpha_i \in R_+} m_{\beta_2}(\alpha_i) = m_{\beta_2}(\alpha_0) = 2.$$

Donc il existe α_{k_0} avec $m_{\beta_3}(\alpha_{k_0}) = 1$ et $m_{\beta_1}(\alpha_{k_0}) = m_{\beta_5}(\alpha_{k_0}) = 0$.

Si $\alpha_1 = -(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_6)$, il existe alors $j \in \{ 2, 4, 6 \}$ avec $\beta_j \notin \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \}$. Alors $(s_{\beta_j}(\alpha_1), \ldots, s_{\beta_j}(\alpha_n))$ vérifie (a). De manière analogue, on montre que si

$$\alpha_1 = -(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_6) \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = -(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6),$$

il existe $j \in \{ 1, 4, 6 \}$ ou $j \in \{ 4, 5, 6 \}$ tel que $\beta_j \notin \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \}$. Alors nous sommes ramenés, avec $(s_{\beta_j}(\alpha_1), \ldots, s_{\beta_j}(\alpha_n))$, au cas précédent ou au cas (a). Si $\alpha_1 = -(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6)$, il existe $j \in \{ 1, 5, 6 \}$, tel que $\beta_j \notin \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \}$. Alors nous sommes ramenés, avec

$$(s_{\beta_j}(\alpha_1), \ldots, s_{\beta_j}(\alpha_n)),$$

au cas précédent ou au cas (a) (si $j = 6$).

Maintenant, supposons que nous sommes dans le cas du 2°. Si $m_{\beta_j}(\alpha_1+\alpha_2) \neq 0$ pour $j = 1$ ou 5, $(w_0\, w_{\beta_j}(\alpha_1), \ldots, w_0\, w_{\beta_j}(\alpha_n))$ vérifie le 1°. Si $m_{\beta_1}(\alpha_1+\alpha_2) = m_{\beta_5}(\alpha_1+\alpha_2) = 0$ et que (a) et (b) ne sont pas vérifiées, il faut que

$$\alpha_1+\alpha_2 = \beta_3$$

et

$$-(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6) \leqq \alpha_2 \leqq -(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_6).$$

Si (c) n'est pas vérifiée non plus, il faut que

$$m_{\beta_2}(\alpha_2)+m_{\beta_2}(\alpha_3) < -2 \quad \text{et} \quad m_{\beta_4}(\alpha_2)+m_{\beta_4}(\alpha_3) < -2.$$

Alors

$$\alpha_3 \in \{ -\alpha_0,\ -\alpha_0+\beta_6,\ -\alpha_0+\beta_3+\beta_6 \}.$$

Parce que

$$w_0 w_{\beta_1}(-\alpha_0) = \beta_5, \qquad w_0 w_{\beta_1}(-\alpha_0+\alpha_6) = \beta_4+\beta_5,$$
$$w_0 w_{\beta_1}(-\alpha_0+\beta_3+\beta_6) = \beta_3+\beta_4+\beta_5, \qquad (w_0 w_{\beta_1})^2(-\alpha_0) = \beta_1,$$
$$(w_0 w_{\beta_1})^2(-\alpha_0+\beta_6) = \beta_1+\beta_2, \qquad (w_0 w_{\beta_1})^2(-\alpha_0+\beta_3+\beta_6) = \beta_1+\beta_2+\beta_3$$

et parce que $w_0 w_{\beta_1}(\alpha_1+\alpha_2) = \alpha_1+\alpha_2$, on peut supposer que

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cap \{\beta_1, \beta_1+\beta_2, \beta_1+\beta_2+\beta_3\}$$

n'est pas vide, et que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \cap \{\beta_3+\beta_4+\beta_5, \beta_4+\beta_5, \beta_5\}$ n'est pas vide non plus. Si $\alpha_3 = -\alpha_0+\beta_6$, on peut supposer que

$$\{\beta_1, \beta_1+\beta_2\} \cap \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{et} \quad \{\beta_4+\beta_5, \beta_5\} \cap \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

ne sont pas vides, et si $\alpha_3 = -\alpha_0$ que $\{\beta_1, \beta_5\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Parce que $m_{\beta_3}(\alpha_2) = -1$, on peut supposer que $\beta_6 \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, autrement on peut appliquer la proposition 1 à $(s_{\beta_6}(\alpha_1), \ldots, s_{\beta_6}(\alpha_n))$, et parce que $w_0 w_{\beta_1}(\beta_6) = \beta_4$ et $(w_0 w_{\beta_1})^2(\beta_6) = \beta_2$, on peut supposer que $\{\beta_2, \beta_4, \beta_6\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Si l'on a un indice $k \neq 1$, tel que $m_{\beta_3}(\alpha_k) = 2$, trois termes de $(w_0 w_{\beta_2}(\alpha_1), \ldots, w_0 w_{\beta_2}(\alpha_n))$ sont négatifs, parmi lesquels $w_0 w_{\beta_2}(\alpha_1)$ et $w_0 w_{\beta_2}(\alpha_k)$, qui sont des éléments de $R(\{\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\})$. Alors on a fini en appliquant la proposition 1 deux fois. Les seules autres suites possibles sont :

$$a_0 = (\beta_2+2\beta_3+\beta_4+\beta_6, -(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_6),$$
$$-(\beta_1+2\beta_2+2\beta_3+2\beta_4+\beta_5+\beta_6), \beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_1+\beta_2, \beta_3+\beta_4+\beta_5);$$
$$s_{\beta_1}(a_0); \quad -w_0(a_0);$$
$$b_0 = (\beta_2+2\beta_3+\beta_4+\beta_6, -(\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_6),$$
$$-(\beta_1+2\beta_2+2\beta_3+2\beta_4+\beta_5+\beta_6), \beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_3+\beta_4+\beta_5, \beta_1, \beta_2),$$

$-w_0(b_0).s_{\beta_4} s_{\beta_5}(a_0)$ a deux termes négatifs, et $\sum_{\alpha_i \in R_+} m_{\beta_4}(s_{\beta_4} s_{\beta_5}(\alpha_i)) = 2$. De plus, $m_{\beta_3}(s_{\beta_4} s_{\beta_5}(\alpha_1)) = 2$. Alors $s_{\beta_4} s_{\beta_5}(a_0)$ vérifie (*b*), et il existe $w \in W$, tel que $w(a_0)$ a seulement un terme négatif. Le même raisonnement est valable pour b_0.

PROPOSITION 4. — *Soient R un système de racines, et B une base de R. Supposons que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (R(B'))^n$ vérifie* (i) *et* (ii), *où $B' \subset B$. S'il n'existe pas $w \in W(B')$, tel que $n-1$ termes de $(w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n))$ sont positifs, il n'existe pas non plus $w \in W$, tel que $n-1$ termes de $(w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_n))$ sont positifs.*

Démonstration. – Selon [2] ou [4], il existe un système de représentants D de $W/W(B')$ de sorte que $d(\beta) \in R_+$ pour tout $d \in D$, $\beta \in B'$. Supposons $\alpha \in R(B')$, $w \in W$. Il existe $w' \in W(B')$, et $\mathrm{d} \in D$ avec $w = dw'$. Alors

$$(w(\alpha) \in R_+) \Leftrightarrow (w'(\alpha) \in R_+),$$

et la proposition est claire.

Il résulte de la proposition 4, que pour démontrer que (D_1) n'est pas valable aux cas où R est de type B_n $(n \geqq 4)$, C_n $(n \geqq 3)$, D_n $(n \geqq 6)$, E_7, E_8, F_4, il suffit de donner des contre-exemples aux cas où R est de type B_4, C_3, D_6.

Contre-exemples. – Soient R un système de racines, et B une base de R. Pour $\alpha \in R$, $\sum_{\beta \in B} m_\beta(\alpha)$ est l'ordre de α.

1° Soient R un système de racines de type C_3, et $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ une base de R, telle que $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ pour $i = 1, 2$ et

$$(\beta_1, \beta_1) = (\beta_2, \beta_2) = \frac{1}{2}(\beta_3, \beta_3).$$

Posons

$$\begin{aligned}&(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)\\ &\quad = (\beta_1, \beta_3, 2\beta_2+\beta_3, -(\beta_2+\beta_3), -(2\beta_1+2\beta_2+\beta_3), \beta_1+\beta_2).\end{aligned}$$

Alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$ satisfait à (i) et (ii). Supposons qu'il existe $w \in W$, tel que 5 termes de $(w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_6))$ sont positifs. L'ordre de la plus grande racine dans R est 5. Donc les 5 racines positives parmi $w(\alpha_1), \ldots, w(\alpha_6)$ sont d'ordre 1, donc certaines doivent être égales. C'est une contradiction.

2° Soient R un système de racines de type B_4, et $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ une base de R telle que $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et $(\beta_3, \beta_3) = 2(\beta_4, \beta_4)$. Posons

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \ldots, \alpha_7) = (&\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_3+2\beta_4, \beta_2+\beta_3+\beta_4,\\ &-(\beta_3+\beta_4), -(\beta_1+2\beta_2+2\beta_3+2\beta_4)).\end{aligned}$$

Alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$ satisfait à (i) et (ii).

3° Soient R un système de racines de type D_6, et $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$ une base de R telle que $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $(\beta_4, \beta_6) < 0$.

Posons

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_9) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \beta_2+\beta_3+\beta_4, \beta_3+2\beta_4+\beta_5+\beta_6,$$
$$-(\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6), -(\beta_1+2\beta_2+2\beta_3+2\beta_4+\beta_5+\beta_6)).$$

On vérifie que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_9)$ satisfait à (i) et (ii).

On raisonne comme dans le 1° pour démontrer qu'on a des contre-exemples pour (D_1) dans le 2° et le 3°. (L'ordre de la plus grande racine est 7 dans un système de racines de type B_4, et 9 dans un système de racines de type D_6.)

Je remercie Jacques DIXMIER de ses remarques, qui ont fait mes contre-exemples plus courts.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. IV, V et VI. — Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1337; Bourbaki, 34).

[2] CARTER (R. W.). — Weyl groups and finite Chevalley groups, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 67, 1970, p. 269-276.

[3] DIXMIER (J.). — Sur les homomorphismes d'Harish-Chandra, *Inventiones Math.*, t. 17, 1972, p. 167-176.

[4] SOLOMON (L.). — The orders of the finite Chevalley groups, *J. of Algebra*, t. 3, 1966, p. 376-393.

(Texte reçu le 31 août 1973.)

A. van den HOMBERGH (*),
Mathematisch Instituut,
Katholieke Universiteit,
Nijmegen, Pays-Bas.

(*) Ce travail était supporté par l'Organisation néerlandaise pour le développement de la recherche scientifique (Z. W. O.).