BULLETIN DE LA S. M. F.

THIERRY VUST

Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 317-333
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__317_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 317-333.

OPÉRATION DE GROUPES RÉDUCTIFS DANS UN TYPE DE CÔNES PRESQUE HOMOGÈNES

PAR

THIERRY VUST

Université de Grenoble

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe algébrique réductif connexe, K le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme involutif de G, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. Via l'étude de l'opération de K dans certains cônes presque homogènes pour G, on détermine l'ensemble des types de G-modules rationnels irréductibles de dimension finie possédant des invariants non nuls par K.

Soient G un groupe algébrique réductif connexe, σ un automorphisme involutif du groupe algébrique G ($\sigma \neq \mathrm{id}$), et soit K le sous-groupe de G des points fixes de σ, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. Ce travail est consacré à l'étude de l'opération de K dans les cônes des G-modules rationnels irréductibles de dimension finie; il s'agit de l'adhérence de l'ensemble des éléments primitifs du G-module considéré (*cf.* [3], § 12) ou des HV-variétés de [8].

Soit M un G-module rationnel irréductible de dimension finie; on note $C(M)$ le cône de M. La variété des droites de $C(M)$ est G-isomorphe à G/P, où P est un sous-groupe parabolique de G. On commence par l'étude de l'opération de K dans G/P (§ 1). Cela conduit à l'introduction de certaines classes de tores (resp. de sous-groupes paraboliques) de G, ceux qu'on appellera σ-anisotropes; on prouve essentiellement qu'ils sont conjugués par les éléments de K lorsqu'ils sont maximaux (resp. minimaux) et que la variété G/P est presque homogène pour l'opération de K. Ainsi l'orbite $K.p$ d'un point p en position générale dans $C(M)$ est de codimension $\leqq 1$ dans $C(M)$. Les résultats du paragraphe 1 sont pour la plupart connus, et sont conséquences de la théorie des algèbres de Lie réductives involutives (*cf.* [5], par exemple).

Le critère de Hilbert-Mumford permet ensuite de préciser l'allure des orbites de K dans $C(M)$ (§ 2). Il apparaît que l'orbite $K.p$ est soit ouverte,

soit fermée et de codimension 1 dans $C(M)$, et que les orbites adhérentes à 0 sont toutes des cônes.

Le paragraphe 3 est consacré à une application : la détermination, en fonction de leur poids dominant, des types de G-modules rationnels irréductibles de dimension finie M tels que $M^K \neq (0)$. Le lien avec les résultats précédents est dû à la connaissance de la structure de G-module de l'algèbre des fonctions régulières sur $C(M)$ (*cf.* [8]), et réside dans l'interprétation géométrique que voici : pour que $M^K \neq (0)$, il faut et il suffit que l'orbite $K.p$ d'un point p en position générale dans $C(M)$ ne rencontre qu'une fois la droite de M passant par p. La description obtenue « des représentations de classe 1 » est connue, et serait attribuée à SUGIURA (?); la démonstration seule fait défaut semble-t-il.

La référence générale concernant les groupes algébriques réductifs, leurs sous-groupes paraboliques, les ensembles de racines par rapport à un tore, etc., est le travail de BOREL-TITS [3]. C'est un certain « parallélisme » avec la théorie des groupes algébriques définis sur $\mathbf{R}$ qui est à la base de la terminologie utilisée au paragraphe 1 (*cf.* [3], § 4 et 14).

L'auteur tient enfin à remercier AYEL de lui avoir signalé l'existence du problème de la description « des représentations de classe 1 ».

1. L'opération de K dans G/P.

1.0. Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Dans tout ce travail, on désigne par G un groupe algébrique réductif connexe, par σ un automorphisme involutif (différent de l'application identique) du groupe algébrique G et, par K l'ensemble des $s \in G$ tels que $\sigma(s) = s$.

Il est bien connu que K est un sous-groupe réductif de G. Cela peut se voir en considérant le produit semi-direct G' de $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ et de G correspondant à l'opération de $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ dans G décrite par $-1.s = \sigma(s)$, $s \in G$. Le sous-groupe K et le centralisateur de $(e, -1)$ dans G' ont alors la même composante neutre; puisque la classe de conjugaison de $(e, -1)$ dans G' est fermée (*cf.* [3], § 10), il résulte d'un théorème, dû à MATSUSHIMA (*cf.* [(1], [6]) que K est réductif.

Soit H un groupe linéaire algébrique; on note H° la composante neutre de H, $R(H^0)$ [resp. $R_u(H^0)$] le radical [resp. unipotent] de H^0. De plus, pour toute partie de E de H, on note $Z_H(E)$ le centralisateur de E dans H.

1.1. Soit B un sous-groupe de Borel de G. Puisque $B \cap \sigma(B)$ contient un tore maximal de G, il résulte de STEINBERG ([10], § 7), que $B \cap \sigma(B)$ contient un tore maximal de G invariant par σ. Par suite, pour tout sous-groupe parabolique P de G, $P \cap \sigma(P)$ contient un tore maximal de G invariant par σ.

On dira qu'un tore S de G est *σ-anisotrope* si S n'est pas réduit à $\{e\}$, et si $\sigma(s) = s^{-1}$ pour tout $s \in S$. Il est clair que le conjugué par un élément de K d'un tore σ-anisotrope de G est aussi σ-anisotrope.

PROPOSITION 1. — *L'ensemble des tores σ-anisotropes de G est non vide.*

Preuve. — On suppose que G ne contient pas de tores σ-anisotropes. Cela signifie que la restriction de σ à tout tore de G invariant par σ est l'identité. Soit alors B un sous-groupe de Borel de G; puisque B contient un tore maximal de G invariant par σ, on a $\sigma(B) = B$. Soit enfin T un tore maximal de G, B_+ et B_- deux sous-groupes de Borel opposés contenant T. D'après ce qui précède, B_+ et B_- sont invariants par σ; il en est donc de même de $B_+ \cap B_- = T$. Ainsi, $\sigma(s) = s$ pour tout élément semi-simple s de G, d'où σ est l'application identique.

PROPOSITION 2. — *Soit S un tore σ-anisotrope maximal de G. Alors :*

(i) *S est l'unique tore σ-anisotrope maximal de $Z_G(S)$;*

(ii) *le sous-groupe dérivé de $Z_G(S)$ est contenu dans K;*

(iii) *$Z_G(S)$ est produit presque direct de $(Z_G(S) \cap K)^0$ et de S;*

(iv) *tout tore maximal de G contenant S est invariant par σ.*

Preuve. — La première affirmation provient du fait que tout tore σ-anisotrope de $Z_G(S)$ est contenu dans S.

Si la restriction de σ au sous-groupe dérivé de $Z_G(S)$ n'était pas l'application identique, ce sous-groupe contiendrait un tore σ-anisotrope S' (prop. 1); or, d'après (i), $S' \subset S$, ce qui est absurde. La deuxième affirmation est donc prouvée.

On désigne par Z la composante neutre du centre de $Z_G(S)$. Il est clair que Z est produit presque direct de $(Z \cap K)^0$ et de S; comme $Z_G(S)$ est produit presque direct de son sous-groupe dérivé et de Z, (iii) provient de (ii).

Soit enfin T un tore maximal de G contenant S, et soit $g \in T$. On écrit

$$g = ks, \qquad k \in (Z_G(S) \cap K)^0, \qquad s \in S,$$

suivant (iii). On a alors $\sigma(g)\,g^{-1} = s^{-2} \in S$; par suite $\sigma(g) = s^{-2}\,g \in T$, d'où (iv).

1.2. Soit H un groupe linéaire algébrique. On note $X^*(H)$ (resp. $X_*(H)$) l'ensemble des caractères de H [resp. l'ensemble des sous-groupes (multiplicatifs) à un paramètre de H]. Si H est un tore, on note $\langle \lambda, \chi \rangle$ l'entier q tel que $(\chi \circ \lambda)(t) = t^q$, $\lambda \in X_*(H)$, $\chi \in X^*(H)$, $t \in k^*$; on obtient ainsi une forme bilinéaire qui met $X_*(H)$ et $X^*(H)$ en dualité.

Soit T un tore de G; on note $\Phi(T, G)$ l'ensemble des racines de G par rapport à T. Lorsqu'on parlera de chambres, facettes, ... de $X(T)_* \otimes \mathbf{R}$, il est sous-entendu qu'il s'agit de chambres, facettes, ... de $X(T)_* \otimes \mathbf{R}$ relativement à la famille d'hyperplans $\operatorname{Ker}(\alpha)$, $\alpha \in \Phi(T, G)$.

Soit $\lambda \in X_*(G)$; on note $Z_G(\lambda) = Z_G(\lambda(k^*))$. On désigne enfin par $P(\lambda)$ l'ensemble des $s \in G$ tels que $\lim_{t \to 0} \lambda(t)\, s\, \lambda(t)^{-1}$ existe : on entend par là que l'image de l'homomorphisme $k[G] \to k[t, t^{-1}]$, correspondant à $t \mapsto \lambda(t)\, s\, \lambda(t)^{-1}$, est contenue dans $k[t]$. Alors $P(\lambda)$ est un sous-groupe parabolique de G (*cf.* [7], chap. 2, § 2); en fait on a le résultat que voici :

PROPOSITION 3. — *Soit T un tore maximal de G tel que $\lambda \in X_*(T)$; alors $P(\lambda)$ est le sous-groupe parabolique de G contenant T correspondant à $\{\alpha \in \Phi(T, G); \langle \lambda, \alpha \rangle \geqq 0\}$. En particulier, $\lambda \in X_*(R(P(\lambda)))$, et $Z_G(\lambda)$ est un sous-groupe réductif maximal de $P(\lambda)$.*

Preuve. — Il est évident que $T \subset P(\lambda)$. Soient alors $\alpha \in \Phi(T, G)$, U_α le sous-groupe radiciel à un paramètre associé, et $\theta_\alpha : k \to U_\alpha$ l'isomorphisme vérifiant

$$\operatorname{ad}(s)\,\theta_\alpha(x) = \theta_\alpha(\alpha(s)\,x), \qquad s \in T, \quad x \in k.$$

On a en particulier

$$\operatorname{ad}(\lambda(t))\,\theta_\alpha(x) = \theta_\alpha(t^{\langle \alpha, \lambda \rangle} x), \qquad t \in k^*, \quad x \in k.$$

Ainsi, pour que U_α soit contenu dans $P(\lambda)$, il faut et il suffit que $\langle \lambda, \alpha \rangle$ soit $\geqq 0$. Les affirmations de la proposition sont dès lors claires.

REMARQUE 1. — La proposition 3 signifie que $P(\lambda)$ est le sous-groupe parabolique de G associé à la facette de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ contenant λ. Comme les sous-groupes paraboliques de G contenant T sont en correspondance bijective avec les facettes de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est une application surjective de $X_*(T)$ dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant T.

PROPOSITION 4. — *Soient P un sous-groupe parabolique de G tel que P et $\sigma(P)$ soient opposés*, et *S un tore σ-anisotrope maximal de $R(P \cap \sigma(P))$. Alors il existe $\lambda \in X_*(S)$ tel que $P = P(\lambda)$ et $Z_G(\lambda) = Z_G(S) = P \cap \sigma(P)$.*

Preuve. — (*a*) Puisque $Z_G(S) \cap P$ est un sous-groupe parabolique de $Z_G(S)$, il existe un tore maximal T de P invariant par σ et contenant S. Soit alors $\mu \in X_*(T)$ tel que $P = P(\mu)$. On désigne par F la facette de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ contenant μ. Si P et $\sigma(P)$ sont opposés, alors $\sigma(F) = -F$; en particulier, $-\sigma(\mu) \in F$. Comme F est un cône convexe, $\lambda = \mu - \sigma(\mu)$ appartient aussi à F; par suite, $P = P(\lambda)$ avec $\sigma(\lambda) = -\lambda$. Il est alors évident que $P \cap \sigma(P) = Z_G(\lambda)$.

(*b*) Puisque $\lambda \in X_*(R(P \cap \sigma(P)))$ (prop. 3), et puisque $S \subset T$, par maximalité de S, on a $\lambda \in X_*(S)$.

(*c*) De (*b*) résulte que $P \cap \sigma(P) = Z_G(\lambda) \supset Z_G(S)$. Comme d'autre part $S \subset R(P)$, $Z_G(S)$ contient un sous-groupe réductif maximal de P; on a donc

$$P \cap \sigma(P) = Z_G(\lambda) = Z_G(S),$$

ce qui achève la démonstration.

On dira des sous-groupes paraboliques P de G, tels que P et $\sigma(P)$ sont opposés, que ce sont des sous-groupes paraboliques *σ-anisotropes*; d'après la proposition 4, ils sont tous de la forme $P = P(\lambda)$, où $\sigma(\lambda) = -\lambda$. Enfin, de la proposition 1, résulte qu'il en existe. Il est clair que le conjugué par un élément de K d'un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G est aussi σ-anisotrope.

COROLLAIRE. — *Soit P un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *P est minimal*;

(ii) *$R(P \cap \sigma(P))$ contient un tore σ-anisotrope maximal de G*;

(iii) *$P \cap \sigma(P)$ est le centralisateur dans G d'un tore σ-anisotrope maximal de G.*

Preuve. — (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient S un tore σ-anisotrope maximal de $R(P \cap \sigma(P))$, et S' un tore σ-anisotrope maximal de G contenant S. On sait que $P = P(\lambda)$ pour un $\lambda \in X_*(S)$. Soit alors C une chambre de $X_*(S') \otimes \mathbf{R}$ telle que $\lambda \in \overline{C}$. Si $\lambda' \in C$; alors $P(\lambda')$ est un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G contenu dans $P(\lambda)$ et admettant $Z_G(S')$

comme sous-groupe réductif maximal. Comme $P = P(\lambda)$ est minimal, on a donc $P = P(\lambda')$, d'où $S' \subset R(P \cap \sigma(P))$, et enfin, $S = S'$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Cela provient immédiatement de la proposition 4.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit P' un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G contenu dans P. On a alors

$$Z_G(S') = P' \cap \sigma(P') \subset P \cap \sigma(P) = Z_G(S),$$

où S' (resp. S) est un tore σ-anisotrope maximal de $R(P' \cap \sigma(P'))$ (resp. de G). D'après la proposition 2 (i), on a $S' \subset S$, d'où $Z_G(S') \supset Z_G(S)$. Ainsi P et P' ont un sous-groupe réductif maximal commun : ils coïncident donc (*cf.* [3], 4.4).

1.3. THÉORÈME 1. — *Soit P un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G. Alors l'ensemble $K^0 P$ est ouvert dans G.*

Preuve. — On désigne par $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}$ les algèbres de Lie de K^0, P, G respectivement. Puisque $K^0 P$ est l'orbite de e pour l'opération naturelle de $K^0 \times P$ dans G, il suffit de vérifier que $\mathfrak{k} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$. Puisque P et $\sigma(P)$ sont opposés, tout élément $a \in \mathfrak{g}$ peut se mettre sous la forme $a = b + (d\sigma)_e(c)$ où b, $c \in \mathfrak{p}$; mais alors a s'écrit aussi $a = (b-c) + (c + (d\sigma)_e(c))$, d'où la conclusion.

COROLLAIRE. — *Soient S un tore σ-anisotrope maximal de G, et $\lambda \in X_*(S)$ tel que $Z_G(\lambda) = Z_G(S)$. Alors le sous-groupe $SR_u(P(\lambda))$ est résoluble, et $K^0 SR_u(P(\lambda))$ est ouvert dans G.*

Preuve. — La première affirmation est banale. D'après les propositions 2 et 3, on a

$$K^0 P(\lambda) = K^0 Z_G(\lambda) R_u(P(\lambda)) = K^0 Z_G(S) R_u(P(\lambda)) = K^0 SR_u(P(\lambda)).$$

La seconde affirmation provient donc immédiatement du théorème 1.

Le corollaire précédent affirme en particulier l'existence de sous-groupes de Borel B de G tels que $K^0 B$ soit ouvert dans G : on dira de ces sous-groupes qu'ils sont *opposés* de K. Les sous-groupes de Borel de G opposés de K forment un ouvert de la variété des sous-groupes de Borel de G et sont conjugués deux à deux par les éléments de K^0; ils contiennent un tore σ-anisotrope maximal de G. D'un autre côté, tout sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G contient un sous-groupe de Borel opposé de K; en effet, d'après la proposition 4 et son corollaire, tout sous-groupe parabolique σ-anisotrope minimal P de G est de la forme $P = P(\lambda)$, où λ

est un sous-groupe à un paramètre d'un tore σ-anisotrope maximal S de G contenu dans P; par suite, tout sous-groupe de Borel de P contenant $SR_u(P)$ (donc tout sous-groupe de Borel de P) est opposé de K.

LEMME 1. — *Soit T un tore maximal de G; soit $\lambda_1, \lambda_2 \in X_*(T)$. On suppose qu'il existe une chambre C de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ telle que $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{C}$. Alors $P(\lambda_1) \cap P(\lambda_2) = P(\lambda_1+\lambda_2)$.*

Preuve. — Soient F et F' deux facettes de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$, $P(F)$ et $P(F')$ les sous-groupes paraboliques de G contenant T et associés à F et F' respectivement; on rappelle que, pour que $P(F)$ soit contenu dans $P(F')$, il faut et il suffit que F' soit contenu dans l'adhérence $\overline{F}$ de F. Ainsi, pour que $P(F)$ soit contenu dans $P(\lambda_1) \cap P(\lambda_2)$, il faut et il suffit que $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{F}$. Comme $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{C}$, $P(\lambda_1) \cap P(\lambda_2)$ est alors le sous-groupe parabolique associé à la plus petite facette F' de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ telle que $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{F'}$. Il est alors facile de vérifier que F' est la facette de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ contenant $\lambda_1+\lambda_2$.

PROPOSITION 5. — *Le groupe K^0 opère transitivement dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques σ-anisotropes minimaux de G.*

Preuve. — Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques σ-anisotropes de G, B et B' deux sous-groupes de Borel de G opposés de K et contenus dans P et P' respectivement. Il existe alors $g \in K^0$ tel que $g B' g^{-1} = B$. Soient encore S un tore σ-anisotrope maximal de G contenu dans B, et T un tore maximal de B contenant S; on a $\sigma(T) = T$ (prop. 2 (iv)). La construction donnée dans la partie (*a*) de la preuve de la proposition 4 montre qu'il existe λ et $\lambda' \in X_*(S)$ tels que $P = P(\lambda)$ et $g P' g^{-1} = P(\lambda')$. Enfin, d'après le lemme 1,

$$P \cap gP'g^{-1} = P(\lambda+\lambda')$$

est un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G. Ainsi, si P est minimal, on a $P \subset gP'g^{-1}$, d'où la conclusion.

COROLLAIRE. — *Le groupe K^0 opère transitivement dans l'ensemble des tores σ-anisotropes maximaux de G.*

Preuve. — Soient S et S' deux tores σ-anisotropes maximaux de G. On choisit $\lambda \in X_*(S)$ (resp. $\lambda' \in X_*(S')$) tel que $Z_G(\lambda) = Z_G(S)$ (resp. $Z_G(\lambda') = Z_G(S')$). Du corollaire de la proposition 4 résulte que $P(\lambda)$ et $P(\lambda')$ sont des sous-groupes paraboliques σ-anisotropes minimaux

de G; il existe donc $g \in K^0$ tel que $gP(\lambda)g^{-1} = P(\lambda')$. On a donc aussi

$$g(P(\lambda) \cap \sigma(P(\lambda)))g^{-1} = P(\lambda') \cap \sigma(P(\lambda')),$$

c'est-à-dire $g(Z_G(S))g^{-1} = Z_G(S')$. Enfin, puisque S (resp. S') est l'unique tore σ-anisotrope maximal de $Z_G(S)$ (resp. $Z_G(S')$) (prop. 2), on a $gSg^{-1} = S'$.

On dira qu'un couple (B, T), où B est un sous-groupe de Borel de G, et T un tore maximal de B, est *opposé* de K, si B est opposé de K et si T contient un tore σ-anisotrope maximal de G. L'existence de couples (B, T) opposés de K provient du corollaire du théorème 1. On remarque encore que si (B, T) est opposé de K, alors $\sigma(T) = T$ (prop. 2).

PROPOSITION 6. — *Le groupe K^0 opère transitivement dans l'ensemble des couples (B, T) opposés de K.*

Preuve. — Puisque les sous-groupes de Borel de G opposés de K sont conjugués par les éléments de K^0, il suffit de montrer que si (B, T) et (B, T') sont opposés de K, alors il existe $g \in K^0 \cap B$ tel que $gTg^{-1} = T'$. En conservant les notations du corollaire du théorème 1, on peut encore supposer que B est produit semi-direct d'un sous-groupe de Borel B' de $Z_G(S)$ par $R_u(P(\lambda))$: d'après BOREL-TITS ([3], 4.4), on sait que les sous-groupes de Borel de $P(\lambda)$ sont de ce type et, d'après le corollaire du théorème 1, qu'ils sont opposés de K. Alors, puisqu'ils sont invariants par σ, T et T' sont contenus dans B'; par suite, ils sont conjugués par un élément de l'intersection de B' avec le sous-groupe dérivé de $Z_G(S)$. La conclusion résulte alors de la proposition 2.

PROPOSITION 7. — *Soit S un tore σ-anisotrope maximal de G. Alors $K = K^0(S \cap K)$.*

Preuve. — Soit $\lambda \in X_*(S)$ tel que $Z_G(\lambda) = Z_G(S)$. D'après le théorème 1, l'orbite par K de $\{P(\lambda)\} \in G/P(\lambda)$ est ouverte, donc connexe; cela signifie que $K/K \cap P(\lambda)$ est connexe. Or

$$K \cap P(\lambda) = K \cap (P(\lambda) \cap \sigma(P(\lambda))) = K \cap Z_G(S).$$

Ainsi $K/K \cap Z_G(S)$ est connexe.

Vu ce qui précède, pour démontrer la proposition 7, il suffit de prouver que toute composante de $K \cap Z_G(S)$ rencontre $S \cap K$, ce qui provient immédiatement de la proposition 2 (iii).

REMARQUE 2. — La proposition 7 est démontrée dans [5] par des méthodes transcendantes.

2. L'opération de K dans $C(M)$.

2.0. On conserve les notations précédentes. Soit X une variété algébrique affine dans laquelle G opère (morphiquement); on note $k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X, $k[X]^G$ la sous-algèbre de $k[X]$ formée des fonctions régulières invariantes par G, $G.x$ l'orbite du point $x \in X$ et G_x le sous-groupe d'isotropie en x. On dira que X est presque homogène s'il existe $x \in X$ tel que $G.x$ soit ouverte et dense dans X.

Lorsqu'on parle de G-module (sans autre précision), il est sous-entendu qu'il s'agit de G-module rationnel de dimension finie.

Soit N un espace vectoriel; par cône de N on entend un sous-ensemble de N stable par les homothéties de N.

Dans toute la suite de ce travail, M désigne un G-module irréductible.

On note $M^{(n)}$ le sous-G-module irréductible de $\otimes^n M$ de plus grand poids dominant, $M^{(0)}$ le G-module trivial de dimension 1, et M' le dual de M. Si M est de poids dominant ϖ (relativement à un sous-groupe de Borel B de G), $M^{(n)}$ est de poids dominant $n\varpi$ (relat. B).

On note $C(M)$ l'adhérence dans M de l'orbite d'un élément primitif de M; le groupe G n'a que deux orbites dans $C(M)$, l'ensemble des éléments primitifs de M et $\{0\}$ (*cf.* [3], § 12, et [8]). La sous-variété $C(M)$ de M est un cône; on pourra donc parler de fonctions régulières homogènes sur $C(M)$, et on notera $k[C(M)]_n$ la composante homogène de degré n de $k[C(M)]$.

2.1. PROPOSITION 8.

(i) *La variété $C(M)$ est normale*;

(ii) $k[C(M)]_n$ *est* G-*isomorphe à* $(M')^{(n)}$.

Il s'agit des théorèmes 2 et 3 de [8].

LEMME 2. — *Soient H un groupe algébrique réductif, N un H-module, et $V \subset N$ un cône fermé invariant par H. On suppose que V est normal, et que l'algèbre $k[V]^H$ est de dimension* 1. *Alors $k[V]^H$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée.*

Preuve. — On note V/H la variété algébrique affine définie par $k[V/H] = k[V]^H$. L'opération du groupe k^* dans N par homothéties induit une opération non triviale de k^* dans V/H. La variété V/H étant irréductible de dimension 1, il existe $x \in V/H$ tel que le morphisme $t \mapsto t.x$ de k^* dans V/H soit dominant; l'image du morphisme $k[V]^H \mapsto k[t, t^{-1}]$ correspondant est contenue dans $k[t]$. La conclusion résulte alors facilement de ce que, $k[V]$ étant intégralement clos, $k[V]^H$ l'est aussi.

PROPOSITION 9. — *On désigne par p un vecteur primitif de M relatif à un sous-groupe de Borel de G opposé de K. Alors :*

(i) *si l'orbite $K.p$ est un cône, cette orbite est ouverte dans $C(M)$;*

(ii) *si l'orbite $K.p$ n'est pas un cône, cette orbite est de codimension* 1 *dans $C(M)$.*

Preuve. — On note D la droite de M passant par p. La variété projective des droites de $C(M)$ est G-isomorphe à G/P, où P est le sous-groupe parabolique de G qui stabilise D. L'hypothèse sur p signifie que l'orbite de D par K est ouverte, d'où les affirmations de la proposition.

COROLLAIRE. — *On conserve les notations de la proposition* 9. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{K.p} \not\ni 0$;

(ii) $k[C(M)]^K$ *est une algèbre de polynômes à une indéterminée*;

(iii) $k[C(M)]^K \neq$ Cte.

Preuve. — Si $\overline{K.p} \not\ni 0$, alors $k[C(M)]^K \neq$ Cte (les invariants séparent les fermés invariants disjoints) et par suite, la fibre contenant tp, $t \in k^*$, du morphisme $C(M) \to C(M)/K$ correspondant à l'injection canonique $k[C(M)]^K \to k[C(M)]$ est de codimension 1 (*cf.* prop. 9); il résulte de là que l'algèbre $k[C(M)]^K$ est de dimension 1. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) provient donc de la proposition 8 et du lemme 2.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est banale. Enfin, si $\overline{K.p} \ni 0$, l'ensemble des homothétiques de $K.p$ est un ouvert de $C(M)$ formé d'orbites adhérentes à 0; par suite $k[C(M)]^K$ est réduit aux constantes. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est donc démontrée.

2.2. LEMME 3. — *Soient T un tore maximal de G, N un G-module, et $x \in N^T - (0)$. Alors $\overline{G.x} \not\ni 0$.*

Ce résultat est démontré dans KOSTANT ([4], rem. 11); la démonstration donnée ici est due à D. LUNA (*voir* aussi BIRKES [2]).

Preuve. — On raisonne par l'absurde en supposant que $\overline{G.x} \ni 0$. D'après le critère de Hilbert-Mumford (*cf.* [7], chap. 2, § 1), il existe $\lambda \in X_*(G)$ tel que $\lim_{t\to 0} \lambda(t).x = 0$. Il est clair que, pour tout $s \in P(\lambda)$, on a aussi $\lim_{t\to 0} (\mathrm{ad}(s) \circ \lambda)(t).x = 0$. Soit alors B un sous-groupe de Borel de G contenant T. Puisque B contient un tore maximal de $P(\lambda)$, il existe $s \in P(\lambda)$ tel que $\mathrm{ad}(s).\lambda \in X_*(B)$; par suite $0 \in \overline{B.x}$. D'un autre côté, on a

$$\overline{B.x} = \overline{R_u(B)\,T.x} = \overline{R_u(B).x} = R_u(B).x = R_u(B)\,T.x = B.x$$

(les orbites de $R_u(B)$ dans N sont fermées, *cf.* [9], [2]). On a donc $x = 0$, ce qui est absurde.

THÉORÈME 2. — *Soient B un sous-groupe de Borel de G, et $\varpi \in X^*(B)$ le poids d'un vecteur primitif p de M correspondant. Soit T un tore maximal de B tel que $\sigma(T) = T$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{K.p} \ni 0$;

(ii) $\sigma(\varpi|_T) \neq -\varpi|_T$.

Preuve. — Si $\sigma(\varpi|_T) \neq -\varpi|_T$, alors il existe $\mu \in X_*(T)$ tel que $\langle \mu, \sigma(\varpi|_T) + \varpi|_T \rangle$ soit strictement positif, autrement dit, tel que $\langle \mu + \sigma(\mu), \varpi|_T \rangle$ soit strictement positif. L'image de $\lambda = \mu + \sigma(\mu)$ est contenue dans K, et on a

$$\lambda(t).p = t^{\langle \lambda, \varpi \rangle} p.$$

Par conséquent, $K.p$ est adhérente à 0, et on a démontré que (ii) implique (i).

On note M_σ l'espace vectoriel M muni de la structure de G-module définie par $s_* x = \sigma(s).x$, $x \in M$, $s \in G$. Soient $s \in T$, *et* $p \otimes p \in M \otimes M_\sigma$; on a

$$(\star) \qquad s.(p \otimes p) = s.\,p \otimes s_* p = \varpi(s)\,p \otimes \varpi(\sigma(s))\,p = (\varpi + \sigma(\varpi))(s)\,p.$$

Si $K.p$ est adhérente à 0, alors, utilisant le critère de Hilbert-Mumford, il est immédiat de vérifier que l'orbite par K (et par conséquent par G) de $p \otimes p \in M \otimes M_\sigma$ est aussi adhérente à 0. Du lemme 3 résulte alors que $p \otimes p \notin (M \otimes M_\sigma)^T$, ce qui signifie, vu $(\star)$, que $\varpi|_T + \sigma(\varpi|_T)$ est différent de zéro. On a donc démontré que (i) implique (ii).

REMARQUE 3. — On conserve les notations du théorème 2, et on note P le sous-groupe parabolique de G qui stabilise la droite D de M passant par p; le groupe P opère dans D par un caractère qu'on désigne encore par ϖ.

(*a*) Puisque $P \cap \sigma(P)$ est connexe (*cf.* [3], 4.5), et T un tore maximal de $P \cap \sigma(P)$, le morphisme de restriction $X^*(P \cap \sigma(P)) \to X^*(T)$ est injectif; de plus, il commute aux opérations de σ. La condition (ii) du théorème 2 est donc équivalente à

$$\sigma(\varpi|_{P\cap\sigma(P)}) \neq -\varpi|_{P\cap\sigma(P)}.$$

(*b*) La condition $\sigma(\varpi|_{P\cap\sigma(P)}) = -\varpi|_{P\cap\sigma(P)}$ est équivalente à $\varpi|_{(P\cap K)^0}=0$. En effet, si

$$s \in (P \cap K)^0 = (P \cap \sigma(P) \cap K)^0$$

et si

$$\sigma(\varpi|_{P\cap\sigma(P)}) = -\varpi|_{P\cap\sigma(P)},$$

on a

$$\varpi(s) = \varpi(\sigma(s)) = \sigma(\varpi)(s) = \varpi^{-1}(s).$$

De l'autre côté, si $\sigma(\varpi|_{P\cap\sigma(P)} \neq -\varpi|_{P\cap\sigma(P)}$, on a aussi $\sigma(\varpi|_T) \neq -\varpi|_T$; il existe donc $\mu \in X_*(T)$ tel que

$$\langle \mu, \varpi+\sigma(\varpi)\rangle = \langle \mu+\sigma(\mu), \varpi\rangle$$

soit différent de zéro. Le caractère ϖ est donc non nul sur $\mu+\sigma(\mu)$ dont l'image est contenue dans $(T \cap K)^0 \subset (P \cap K)^0$.

(*c*) On désigne par $(\ ,\ )$ un produit scalaire sur $X(T)^* \otimes \mathbf{R}$ invariant par le groupe des automorphismes de $\Phi(T, G)$.

On sait alors que P est le sous-groupe parabolique de G contenant T associé à $\{\alpha \in \Phi(T, G);\ (\alpha, \varpi) \geqq 0\}$. La condition $\sigma(\varpi|_T) = -\varpi|_T$ implique donc que P est σ-anisotrope.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $p \in C(M)$:

(i) *Si* 0 *est adhérent à l'orbite* $K.p$, *alors cette orbite est un cône.*

(ii) *Si* 0 *n'est pas adhérent à l'orbite* $K.p$, *alors cette orbite est fermée et de codimension* 1 *dans* $C(M)$.

Preuve. — On conserve les notations du théorème 2. La première affirmation résulte directement du théorème 2 : on y a en fait démontré que la condition $\sigma(\varpi|_T) \neq -\varpi|_T$ entraîne que l'orbite $K.p$ est un cône.

On note D la droite de M passant par p, et P le stabilisateur de D. Si l'orbite $K.p$ n'est pas adhérente à 0, le théorème 2 implique que P est σ-anisotrope (*cf.* remarque 3 (*c*)); l'orbite de D par K est donc ouverte (*cf.* th. 1), et par suite $K.p$ est de codimension 1 dans $C(M)$. Il résulte de cela que $K.p$ est fermée : sinon $\overline{K.p}$ contiendrait une orbite fermée (non réduite à (0)) de codimension strictement plus grande que 1.

COROLLAIRE 2. — *On désigne par p un vecteur primitif de M relatif à un sous-groupe de Borel opposé de K. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *$K.p$ est fermée et de codimension* 1 *dans* $C(M)$;

(ii) *$k[C(M)]^K$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée*;

(iii) $k[C(M)]^K \neq$ Cte.

Cela provient immédiatement du corollaire de la proposition 9 et du corollaire précédent.

COROLLAIRE 3. — *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *La variété $C(M)$ est presque homogène pour l'opération de K*;

(ii) $k[C(M)]^K =$ Cte.

Preuve. — Il est clair que (i) entraîne (ii). Soit p un vecteur primitif de M relatif à un sous-groupe de Borel de G opposé de K. Si (ii) est vérifié, alors $K.p$ est adhérente à 0; du corollaire 1 résulte alors que cette orbite est un cône, et par suite est ouverte dans $C(M)$ (prop. 9). On a donc aussi (ii) entraîne (i).

3. Application : la structure de G-module de $k[G/K]$.

3.0. On conserve les notations des paragraphes précédents; en particulier, M désigne un G-module irréductible. En outre, on note (B, T) un couple opposé de K, et $S \subset T$ un tore σ-anisotrope maximal de G.

On utilise les résultats précédents pour expliciter la structure de G-module de $k[G]^K \simeq k[G/K]$; via le théorème de réciprocité de Frobenius, cela revient à calculer $\dim M^K$ pour tout M.

3.1. LEMME 4. — *Soient H un groupe algébrique réductif, N un H-module, et $V \subset N$ un cône fermé invariant par H. On suppose que $k[V]^H = k[f]$*

est la sous-algèbre engendrée par un élément f homogène de degré $r \geqq 1$. Alors, pour tout $x \in V - (0)$ tel que $H.x$ est fermée, l'orbite $H.x$ coupe r-fois la droite de V passant par x.

Preuve. — Si $t \in k^*$ vérifie $t^r = 1$, on a $f(x) = f(tx)$, d'où

$$f(H.x) = f(H.tx),$$

et enfin $H.x = H.tx$ (les invariants, donc f, séparent les fermés invariants disjoints). Réciproquement, s'il existe $h \in H$ et $t \in k^*$ tels que $h.x = tx$, on a $f(x) = f(tx)$, d'où $t^r = 1$ (puisque $x \neq 0$ et $H.x$ est fermée).

THÉORÈME 3 :

(i) *On a* $\dim M^K \leqq 1$;

(ii) *si* $\varpi \in X^*(B)$ *désigne le poids dominant de M relativement à B, alors, pour que $M^K \neq (0)$, il faut et il suffit que ϖ vérifie les deux conditions suivantes :*

1° $\sigma(\varpi|_T) = -\varpi|_T$;

2° $\varpi|_S \in 2X^*(S)$.

Preuve. — On remarque pour commencer que, puisque K est réductif, $\dim N^K = \dim (N')^K$, pour tout G-module N.

(*a*) On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des types de G-modules irréductibles M tels qu'il existe un entier $n \geqq 1$ tel que $(M^{(n)})^K \neq (0)$. Puisque $k[C(M)]$ est G-isomorphe à $\oplus_{n \geqq 0} (M')^{(n)}$ (prop. 8), $\mathscr{F}$ est aussi l'ensemble des types de G-modules irréductibles M tels que $k[(C(M)]^K \neq$ Cte. D'après le théorème 2 et son deuxième corollaire, pour que M « appartienne » à $\mathscr{F}$, il faut et il suffit que $\sigma(\varpi|_T) = -\varpi|_T$.

(*b*) On note p un vecteur primitif de M relatif à B, et P le stabilisateur de la droite D de M passant par p. Le groupe P opère dans D par un caractère qu'on désigne encore par ϖ. D'après les remarques 3 (*a*) et (*b*), pour que M « appartienne » à $\mathscr{F}$, il faut et il suffit que la restriction de ϖ à $(P \cap K)^0 = (P \cap \sigma(P) \cap K)^0$ soit identiquement nulle.

(*c*) On désigne par $\mathscr{K}$ l'ensemble des types de G-modules irréductibles M tels que $M^K \neq (0)$; c'est donc l'ensemble des types de G-modules irréductibles M tels que $k[C(M)]^K$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée engendrée par un élément homogène de degré 1 (*cf.* cor. de la

proposition 9). Si M « appartient » à $\mathscr{K}$, on a donc

$$\dim (M')^K = \dim k[C(M)]_1^K = 1,$$

d'où (i). D'autre part, du corollaire 1 du théorème 2 et du lemme 4 résulte que, pour que M « appartienne » à $\mathscr{K}$, il faut et il suffit que l'orbite $K.p$ ne rencontre qu'une fois D, c'est-à-dire que $K \cap P = K_p$, ou encore que la restriction de ϖ à $K \cap P = K \cap P \cap \sigma(P)$ soit identiquement nulle.

(*d*) On suppose que M « appartient » à $\mathscr{F}$. Les sous-groupes P et $\sigma(P)$ sont alors opposés (*cf.* rem. 3 (*c*)). Dans ce cas,

$$P \cap \sigma(P) \cap K = (P \cap \sigma(P) \cap K)^0 (S \cap K)$$

puisque $P \cap \sigma(P)$ est connexe (*cf.* [3], 4.5) et puisque S est un tore σ-anisotrope maximal de $P \cap \sigma(P)$ (*cf.* prop. 7). Ainsi, pour que M « appartienne » à $\mathscr{K}$, il faut et il suffit que la restriction de ϖ à $(P \cap \sigma(P) \cap K)^0$ et à $(S \cap K)$ soit identiquement nulle, autrement dit, vu (*a*) et (*b*), que

$$\sigma(\varpi|_T) = -\varpi|_T \qquad \text{et} \qquad \varpi|_{S \cap K} = 0.$$

Enfin, comme $S \cap K$ est le sous-groupe de S formé des éléments d'ordre 2, la dernière condition est équivalente à $\varpi|_S \in 2X^*(S)$. Le théorème est donc démontré.

REMARQUE 4. — La première affirmation du théorème est banale et peut se démontrer plus directement en utilisant le résultat que voici : soit H un sous-groupe réductif de G tel que la variété G/B soit presque homogène pour l'opération naturelle de H (B désigne un sous-groupe de Borel de G); alors G-module $k[G]^H$ est sans multiplicité. En effet, si la multiplicité dans $k[G]^H$ d'un G-module irréductible était strictement plus grande que 1, on pourrait trouver dans $k[G]^H \simeq k[G/H]$ deux vecteurs primitifs f_1 et f_2 non proportionnels et de même poids relativement à B. Le quotient f_1/f_2 fournirait alors une fonction rationnelle sur la variété G/H, invariante par B et non constante. Or l'hypothèse implique que G/H est presque homogène pour l'opération naturelle de B, d'où la contradiction.

3.2. EXEMPLE 1. — On note $e_1, \ldots, e_{2n}$ la base canonique de k^{2n}, $(e_r, \ldots, e_s)$ le sous-espace de k^{2n} engendré par $(e_i)_{i=r,\ldots,s}$, et on identifie $G = GL(2n, k)$ avec l'ensemble des matrices inversibles de format $2n \times 2n$.

On prend l'automorphisme $\sigma : s \mapsto J^t s^{-1} J^{-1}$, où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe K est le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(n, k)$. Le tore S formé des matrices diagonales

$$\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_n)$$

est σ-anisotrope maximal dans G; le stabilisateur B du drapeau.

$$(0) \subset (e_1) \subset (e_1, e_{n+1}) \subset (e_1, e_{n+1}, e_2) \subset (e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}) \subset \ldots \subset k^{2n}$$

est un sous-groupe de Borel opposé de K. On désigne par T le tore maximal de G formé des matrices diagonales; le couple (B, T) est opposé de K. Si χ_i, $i = 1, \ldots, 2n$ sont les caractères de T définis par

$$\chi_i(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})) = a_i,$$

les poids fondamentaux relatifs à B et T sont

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \chi_1, \\
\varpi_2 &= \chi_1 + \chi_{n+1}, \\
&\vdots \\
\varpi_{2i} &= \chi_1 + \chi_{n+1} + \ldots + \chi_i + \chi_{n+i}, \\
\varpi_{2i+1} &= \chi_1 + \chi_{n+1} + \ldots + \chi_i + \chi_{n+i} + \chi_{i+1}, \\
&\vdots \\
\varpi_{2n} &= \chi_1 + \chi_{n+1} + \ldots + \chi_n + \chi_{2n}.
\end{aligned}$$

Comme enfin $\sigma(\chi_i) = -\chi_{n+i}$, $i = 1, \ldots, n$, d'après le théorème 3, pour que le $GL(2n, k)$-module irréductible M de poids dominant $\varpi = \sum_{i=1}^{2n} a_i \varpi_i$ possède des invariants non triviaux par $Sp(n, k)$, il faut et il suffit que $a_{2i+1} = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$.

EXEMPLE 2. — Soient $G = GL(n, k)$ (qu'on identifie à l'ensemble des matrices inversibles de format $n \times n$), et σ l'automorphisme $s \mapsto {}^t s^{-1}$. Le groupe K est alors le groupe orthogonal $O(n, k)$. Le tore maximal S de G formé des matrices diagonales est σ-anisotrope maximal. D'après le théorème 3, pour que le $GL(n, k)$-module irréductible M de poids dominant ϖ possède des invariants non triviaux par $O(n, k)$, il faut et il suffit que $\varpi \in 2\,\mathrm{X}^*(S)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIALYNICKI-BIRULA (A.). — On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups, *Amer. J. Math.*, t. 85, 1963, p. 577-582.

[2] BIRKES (D.). — Orbits of linear algebraic groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 93, 1971, p. 459-475.

[3] BOREL (A.) et TITS (J.). — *Groupes réductifs.* — Paris, Presses Universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques*, 27, p. 55-152).

[4] KOSTANT (B.). — Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, t. 86, 1963, p. 327-402.

[5] KOSTANT (B.) and RALLIS (S.). — Orbits and representations associated with symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, t. 93, 1971, p. 753-809.

[6] MATSUSHIMA (Y.). — Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, *Nagoya math. J.*, t. 16, 1950, p. 205-218.

[7] MUMFORD (D.). — *Geometric invariant theory.* — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1965 (*Ergebnisse der Mathematik*, 34).

[8] POPOV (V. L.) et VINBERG (E. B.). — Sur une classe de variétés affines presque homogènes [en russe], *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat., t. 36, 1972, p. 749-764.

[9] ROSENLICHT (M.). — On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 101, 1961, p. 211-223.

[10] STEINBERG (R.). — *Endomorphisms of linear algebraic groups.* — Providence, American mathematical Society, 1968 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 80).

(Texte reçu le 18 février 1974.)

Thierry VUST,
Institut de Mathématiques pures,
B. P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères.
et Université de Genève,
Section de Mathématiques,
2-4, rue du Lièvre,
Case postale 124,
CH-1211 Genève (Suisse).