BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL FLIESS

Sur divers produits de séries formelles

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 181-191
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__181_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 181-191.

SUR DIVERS PRODUITS DE SÉRIES FORMELLES

PAR

MICHEL FLIESS

In memoriam Jean G. RICHARD
(1946-1971)

RÉSUMÉ. — Diverses propriétés relatives aux produits d'Hadamard, de Hurwitz, et à la diagonalisation des développements de Taylor de fonctions rationnelles et algébriques en une ou plusieurs indéterminées commutatives, peuvent être obtenues par passage aux séries formelles en indéterminées non commutatives.

1. Introduction

Les séries formelles rationnelles et algébriques en indéterminées non commutatives ont été introduites, en 1959, par M. P. SCHÜTZENBERGER en liaison avec la théorie des automates et des langages (*cf.* [4], [9] et [15]). Nous les utilisons ici pour aborder diverses questions issues de la théorie classique des fonctions analytiques. Plus précisément, les produits d'Hadamard et de Hurwitz ont un analogue en indéterminées non commutatives bien plus aisément manipulable que celui que l'on a introduit dans le cas de plusieurs indéterminées commutatives. Qui plus est, des résultats relatifs aux développements de Taylor de fonctions rationnelles et algébriques sont obtenus par passage aux indéterminées non commutatives. La diagonalisation est aussi, grâce au produit d'Hadamard, justifiable d'un tel traitement.

La plupart des résultats ont été présentés dans la thèse [9] de l'auteur et dans [6] et [7].

2. Rappels sur les séries formelles rationnelles et algébriques

Soient X un ensemble fini non vide, X^* le monoïde libre engendré par X, « 1 » son élément neutre, appelé *mot vide*. Soient A un anneau commutatif unitaire, $A \langle X \rangle$ et $A \langle\langle X \rangle\rangle$ les anneaux des polynômes et des séries formels, à coefficients dans A, en les indéterminées associatives non commutatives $x \in X$. Un élément $s \in A \langle\langle X \rangle\rangle$ est noté

$$s = \sum \{ (s, f) f ; f \in X^* \}, \qquad \text{où} \quad (s, f) \in A.$$

Comme dans le cas commutatif, s est inversible si, et seulement si, son terme constant $(s, 1)$ l'est dans A. Un sous-anneau R de $A \langle\langle X \rangle\rangle$ est dit *rationnellement clos* si, et seulement si, l'inverse de tout élément inversible de R appartient encore à R. L'anneau $A \langle (X) \rangle$ des séries *rationnelles* est le plus petit sous-anneau de $A \langle\langle X \rangle\rangle$, qui contienne $A \langle X \rangle$ et qui soit rationnellement clos (SCHÜTZENBERGER [16], [17]).

Soit $A^{N \times N}$ l'anneau des matrices carrées d'ordre N. Une *représentation* $\mu : X^* \to A^{N \times N}$ est un homomorphisme de X^* dans le monoïde multiplicatif sous-jacent de $A^{N \times N}$. SCHÜTZENBERGER [16] a montré que, pour qu'une série $r \in A \langle\langle X \rangle\rangle$ soit rationnelle, il faut et il suffit qu'il existe un entier $N \geqq 1$, une représentation $\mu : X^* \to A^{N \times N}$, une matrice $p \in A^{N \times N}$, tels que

$$r = \sum \{ (\operatorname{Tr} p \mu f) f ; f \in X^* \}, \tag{1}$$

où $\operatorname{Tr} p \mu f$ désigne la trace de la matrice $p \mu f$.

Soit $\Xi = \{ \xi_1, \ldots, \xi_M \}$ un ensemble de M inconnues. Considérons un système d'équations $\xi_i = p_i \, (i = 1, \ldots, M)$ où p_i est un polynôme de $A \langle X \cup \Xi \rangle$ de terme constant nul et tel que, pour tout $j = 1, \ldots, M$, le coefficient de ξ_j dans p_i soit nul. Suivant une méthode classique d'approximations successives, qui remonte à CAUCHY, un tel système, dit *algébrique constructif*, admet un M-uplet solution et un seul, formé de séries de $A \langle\langle X \rangle\rangle$ de terme constant nul (SCHÜTZENBERGER [17]). On appelle série *algébrique constructible* toute série qui est la somme d'une série composante de l'uplet solution d'un tel système et d'un terme constant, éventuellement nul. On vérifie aisément que l'ensemble des séries algébriques constructibles de $A \langle\langle X \rangle\rangle$ constitue un sous-anneau rationnellement clos, noté $A^{\text{alg-c}} \langle\langle X \rangle\rangle$, qui contient strictement $A \langle (X) \rangle$ (*cf.* [4], [9], [15], [17]).

Soient $A[X]$ et $A[[X]]$ les anneaux des polynômes et des séries formels en les indéterminées associatives commutatives $x \in X$ et à coefficients dans A. On définit les anneaux $A[(X)]$ et $A^{\text{alg-c}}[[X]]$ des séries rationnelles et algébriques constructibles en indéterminées commutatives de même que dans le cas non commutatif.

Lorsque A est un corps K, un élément de $K[(X)]$ n'est autre que le développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle P/Q, où $P, Q \in K[X]$, $Q(0, \ldots, 0) \neq 0$. Une série de $K[[X]]$ est dite *algébrique* si, et seulement si, elle est solution d'une équation en l'inconnue ξ de la forme

$$a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0, \ldots, a_n \in K[X]).$$

L'anneau des séries algébriques de $K[[X]]$ est l'*hensélisé* de $K[X]$ (*cf.* [18]). Il est clair que toute série algébrique constructible de $K[[X]]$ est algébrique. La réciproque fait problème (*cf.* proposition 7).

Dans le cas où X est réduit à une seule lettre x, il vient

$$A\langle x \rangle = A[x], \qquad A\langle\langle x \rangle\rangle = A[[x]],$$
$$A\langle (x) \rangle = A[(x)], \qquad A^{\text{alg-c}}\langle\langle x \rangle\rangle = A^{\text{alg-c}}[[x]].$$

Soit α l'épimorphisme canonique de $A\langle\langle X \rangle\rangle$ sur $A[[X]]$; pour tout $s \in A\langle\langle X \rangle\rangle$, αs est dite *image commutative* de s. Il est clair que la restriction de α à $A\langle (X) \rangle$ (resp. $A^{\text{alg-c}}\langle\langle X \rangle\rangle$) est un épimorphisme de $A\langle (X) \rangle$ (resp. $A^{\text{alg-c}}\langle\langle X \rangle\rangle$) sur $A[(X)]$ (resp. $A^{\text{alg-c}}[[X]]$).

3. **Produits d'Hadamard, de Hurwitz et de Lamperti**

Le *produit d'Hadamard* de deux séries s_1, $s_2 \in A\langle\langle X \rangle\rangle$ est la série, notée $s_1 \odot s_2$, définie par

$$s_1 \odot s_2 = \sum \{ (s_1, f)(s_2, f) f ; f \in X^* \}.$$

Ce produit est associatif, commutatif et distributif par rapport à l'addition; on obtient un nouvel anneau, qui n'est pas intègre : $x \odot x^2 = 0$. Dans la théorie classique des fonctions analytiques en une indéterminée, cette opération avait été introduite par HADAMARD en raison des propriétés remarquables de la fonction produit : les singularités de celle-ci sont, *grosso modo*, les produits de celles des facteurs (pour une étude précise, *voir* BIEBERBACH [1]).

La proposition suivante, due à SCHÜTZENBERGER [17], avait déjà été démontrée dans le cas des fonctions analytiques en une indéterminée, par Émile BOREL et JUNGEN [13] (*cf.* BIEBERBACH [1]).

PROPOSITION 1. — *Le produit d'Hadamard d'une série rationnelle et d'une série algébrique constructible* (*resp. rationnelle*) *de* $A\langle\langle X \rangle\rangle$ *est une série algébrique constructible* (*resp. rationnelle*).

Le produit d'Hadamard de deux séries algébriques sur un corps de caractéristique nulle n'est pas nécessairement algébrique. L'exemple suivant est dû à JUNGEN [13] : **C** désignant le corps des complexes, x une indéterminée, soit

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = (1-4x)^{-1/2}$$

une série algébrique de $\mathbf{C}[[X]]$. Le produit d'Hadamard de a par elle-même est la série transcendante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^2 x^n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1-4x\sin^2\theta)^{1/2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{((1-t^2)(1-4xt^2))^{1/2}}.$$

FURSTENBERG [10] a montré (1) le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *Le produit d'Hadamard de deux séries algébriques en une intéderminée sur un corps parfait de caractéristique non nulle est une série algébrique.*

On appelle *produit de Hurwitz* de deux mots f, g de X^*, et on note $f \sqcup\!\sqcup g$, le polynôme homogène de $A\langle X\rangle$, défini par

$$f \sqcup\!\sqcup g = \sum \{ f_1 g_1 \ldots f_k g_k ; f = f_1 \ldots f_k, g = g_1 \ldots g_k, k \geqq 1 \}.$$

Il vérifie les relations

$$1 \sqcup\!\sqcup 1 = 1, \qquad \forall_X x : \quad 1 \sqcup\!\sqcup x = x \sqcup\!\sqcup 1 = x,$$

$$\forall_X x, y : \quad fx \sqcup\!\sqcup gy = (f \sqcup\!\sqcup gy)x + (fx \sqcup\!\sqcup g)y.$$

Par linéarité, on le prolonge à $A\langle X\rangle$ et $A\langle\langle X\rangle\rangle$:

$$s_1 \sqcup\!\sqcup s_2 = \sum \{ (s_1, f)(s_2, g) f \sqcup\!\sqcup g ; f, g \in X^* \}.$$

Ce produit est associatif, commutatif et distributif par rapport à l'addition; on obtient ainsi un nouvel anneau qui est intègre si, et seulement si, A l'est. Dans la littérature de langue anglaise, on le rencontre sous le nom de *shuffle product*; il intervient dans l'étude des algèbres de Hopf (*cf.* SWEEDLER [19], chap. 12).

(1) FURSTENBERG le fait pour un corps fini, mais n'utilise que la propriété suivante des corps parfaits de caractéristique non nulle : l'existence pour tout élément d'une racine d'ordre égale à la caractéristique.

Le nom *produit de Hurwitz* a pour origine une opération sur les séries en une indéterminée définie par HURWITZ [12] et PINCHERLE (*cf.* BIEBERBACH [1]) :

$$a = \sum_{n \geqq 0} \frac{a_n}{z^{n+1}}, \qquad b = \sum_{n \geqq 0} \frac{b_n}{z^{n+1}},$$

$$c = a \sqcup\!\sqcup\, b = \sum_{n \geqq 0} \frac{c_n}{z^{n+1}}, \qquad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k\, b_{n-k}$$

$\left[\text{Il est clair, en effet, que } x^k \sqcup\!\sqcup\, x^{n-k} = \binom{n}{k} x^n\right]$.

LAMPERTI [14] a généralisé (²) les produits d'Hadamard et de Hurwitz de la manière suivante : soient α, β, γ trois éléments de A, le *produit de Lamperti* de f, $g \in X^*$, relativement à α, β, γ, est le polynôme de $A \langle X \rangle$:

$$f \mathscr{L}_{\alpha,\beta,\gamma}\, g = \sum \alpha^{n_1} \beta^{n_2} \gamma^{n_3} f_1 g_1 h_1 \ldots f_k g_k h_k,$$

où

$$f = f_1 h_1 \ldots f_k h_k, \qquad g = g_1 h_1 \ldots g_k h_k,$$

$$n_1 = |f_1 \ldots f_k|, \qquad n_2 = |g_1 \ldots g_k|, \qquad n_3 = |h_1 \ldots h_k|$$

($|f|$ désigne la longueur du mot $f \in X^*$), $k \geqq 1$. Lorsque $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, on obtient le produit d'Hadamard; lorsque $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$, on obtient le produit de Hurwitz.

Le produit de Lamperti des séries

$$a = \sum_{n \geqq 0} \frac{a_n}{z^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad b = \sum_{n \geqq 0} \frac{b_n}{z^{n+1}}$$

est la série

$$c = \sum_{n \geqq 0} \frac{c_n}{z^{n+1}}, \qquad \text{où} \quad c_n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!\,j!\,k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k a_{i+k}\, b_{j+k}.$$

(²) LAMPERTI l'a fait pour une indéterminée. Pour plusieurs indéterminées, l'idée est due à SCHÜTZENBERGER.

Lorsque A est le corps $\mathbf{C}$ et lorsque a et b représentent des fonctions analytiques au voisinage de l'infini, on vérifie la formule suivante ([3]) :

$$\begin{aligned} a\,\mathscr{L}_{\alpha,\beta,\gamma}\,b(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(\Gamma)} a(t)\,b\left(\frac{1-\alpha t}{\beta+\gamma t}\right)\frac{dt}{\beta+\gamma t} \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{(\Gamma')} a\left(\frac{1-\beta t}{\alpha+\gamma t}\right)b(t)\frac{dt}{\alpha+\gamma t}, \end{aligned}$$

où (Γ) et (Γ') sont des courbes simples entourant un cercle centré à l'origine de rayon suffisamment grand. On généralise les formules classiques suivantes :

— *produit d'Hadamard :*

$$a\odot b(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\Gamma)} a(z)\,b\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\Gamma')} a\left(\frac{z}{t}\right)b(t)\,dt;$$

— *produit de Hurwitz :*

$$a\,ш\,b(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\Gamma)} a(t)\,b(z-t)\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{(\Gamma')} a(z-t)\,b(t)\,dt.$$

PROPOSITION 3. — *Le produit de Lamperti, donc de Hurwitz, d'une série rationnelle et d'une série algébrique constructible (resp. rationnelle) de* $A\langle\langle X\rangle\rangle$ *est une série algébrique constructible (resp. rationnelle).*

Preuve. — La méthode est inspirée de GINSBURG et E. H. SPANIER (*voir* GINSBURG [11], p. 108). Introduisons

$$\bar{X} = \{\bar{x};\ x\in X\},\qquad \bar{\bar{X}} = \{\bar{\bar{x}};\ x\in X\}$$

tels que $X\cap\bar{X} = \bar{X}\cap\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{X}}\cap X = \emptyset$. Substituons, dans les séries $s_1, s_2\in A\langle\langle X\rangle\rangle$ à tout $x\in X$, respectivement les séries rationnelles

$$\begin{aligned} \alpha x(\textstyle\sum\{\bar{\bar{f}};\ \bar{\bar{f}}\in\bar{\bar{X}}^*\})+\gamma\bar{x} &= \alpha x(1-\textstyle\sum_{x\in X}\bar{\bar{x}})^{-1}+\gamma\bar{x}, \\ \beta(\textstyle\sum\{f;\ f\in X^*\})\bar{\bar{x}}+\bar{x} &= (1-\textstyle\sum_{x\in X}x)^{-1}\bar{\bar{x}}+\bar{x}. \end{aligned}$$

On obtient des séries $s'_1, s'_2\in A\langle\langle X\cup\bar{X}\cup\bar{\bar{X}}\rangle\rangle$, dont on vérifie aisément qu'elles sont rationnelles ou algébriques constructibles si s_1 et s_2 le sont.

([3]) Communication personnelle de RICHARD.

Soit $\varphi : A \langle\langle X \cup \overline{X} \cup \overline{\overline{X}} \rangle\rangle \to A \langle\langle X \rangle\rangle$ l'épimorphisme défini par $\varphi x = \varphi \overline{x} = \varphi \overline{\overline{x}} = x$. Il vient

$$s_1 \mathscr{L}_{\alpha, \beta, \gamma} s_2 = \varphi(s_1' \odot s_2').$$

Remarque. — Supposons $r_1, r_2 \in A \langle (X) \rangle$ données, comme en (1), par $N_1, \mu_1, p_1, N_2\ \mu_2, p_2$. Soient $1_{N_i} : X^* \to A^{N_i \times N_i}$ $(i = 1, 2)$ la représentation qui, à tout $f \in X^*$, fait correspondre la matrice identité, $\nu : X^* \to A^{N_1 N_2 \times N_1 N_2}$ la représentation définie, pour tout $x \in X$, par

$$\nu x = (\alpha(\mu_1 \otimes_A 1_{N_2}) + \beta(1_{N_1} \otimes_A \mu_2) + \gamma(\mu_1 \otimes_A \mu_2))x.$$

Il vient

$$r_1 \mathscr{L}_{\alpha, \beta, \gamma} r_2 = \sum \{(\operatorname{Tr} p_1 \otimes_A p_2 \nu f) f ; f \in X^*\}.$$

$\otimes_A$ désigne le produit tensoriel sur l'anneau A de matrices ou de représentations.

Dans le cas particulier du produit de Hurwitz, on a :

$$\nu x = (\mu_1 \otimes_A 1_{N_2} + 1_{N_1} \otimes_A \mu_2)x.$$

Pour le produit d'Hadamard, rappelons que l'on a (*cf.* [16], [17]) :

$$r_1 \odot r_2 = \sum \{(\operatorname{Tr} p_1 \otimes_A p_2 \mu_1 \otimes_A \mu_2 f) f ; f \in X^*\}.$$

4. **Application aux indéterminées commutatives**

Quelques auteurs ont cherché à généraliser, au cas de plusieurs indéterminées commutatives, les propriétés remarquables des produits d'Hadamard et de Hurwitz obtenues pour une seule indéterminée. Ainsi, BOCHNER et MARTIN [2] définissent dans $A [[X]]$ les produits suivants, où a_n et b_n sont des polynômes homogènes de degré n de $A [X]$, tels que $a = \sum_{n \geqq 0} a_n$, $b = \sum_{n \geqq 0} b_n$:

$$a\, H\, b = \sum_{n \geqq 0} a_n b_n \quad \text{(produit d'Hadamard-Bochner-Martin)},$$

$$a \mathscr{H} b = \sum_{n \geqq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \quad \text{(produit de Hurwitz-Bochner-Martin)}$$

PROPOSITION 4. — *Le produit d'Hadamard-Bochner-Martin ou de Hurwitz-Bochner-Martin d'une série rationnelle et d'une série algébrique constructible (resp. rationnelle) de $A [[X]]$ est une série algébrique constructible (resp. rationnelle).*

Preuve. — Faisons-la, par exemple, pour le produit d'Hadamard. Soient s_1, $s_2 \in A[[X]]$, $s'_1, s'_2 \in A\langle\langle X\rangle\rangle$ d'images commutatives s_1, $s_2 . s'_1$ et s'_2 peuvent être choisies rationnelles ou algébriques constructibles si s_1, s_2 le sont. Soit $\bar{X} = \{\bar{x}; x \in X\}$ tel que $X \cap \bar{X} = \emptyset$. Les séries s''_1, s''_2 de $A\langle\langle X \cup \bar{X}\rangle\rangle$, obtenues en substituant dans s'_1, s'_2, à tout $x \in X$, respectivement $x(\sum_{y\in X}\bar{y})$, $(\sum_{y\in X} y)\bar{x}$, sont de même nature. Soit $\psi : A\langle\langle X \cup \bar{X}\rangle\rangle \to A[[X]]$ l'épimorphisme défini par $\psi x = \psi \bar{x} = x$. Il vient $s_1 H s_2 = \psi(s''_1 \odot s''_2)$.

Remarque. — Dans $A[[x_1 \ldots, x_n]]$, on aurait pu définir le produit d'Hadamard suivant :

$$\begin{aligned}(\textstyle\sum_{k_1,\ldots,k_n\geqq 0} s_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}) \odot (\sum_{k_1,\ldots,k_n\geqq 0} s'_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n})\\ = \textstyle\sum_{k_1,\ldots,k_n\geqq 0} s_{k_1,\ldots,k_n} s'_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}.\end{aligned}$$

Un exemple, dû à HURWITZ [12], montre qu'il ne conserve pas la rationalité. Soient $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers

$$r_1 = \textstyle\sum_{k_1,k_2\geqq 0}\binom{k_1+k_2}{k_1} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = [1-(x_1+x_2)]^{-1},$$

$$r_2 = \textstyle\sum_{k\geqq 0} x_1^k x_2^k = (1-x_1 x_2)^{-1}$$

des séries de $\mathbf{Z}[(x_1, x_2)]$. Il vient

$$r_1 \odot r_2 = \textstyle\sum_{k\geqq 0}\binom{2k}{k} x_1^k x_2^k = (1-4x_1x_2)^{-1/2}.$$

Le paradoxe apparent qui existe avec le cas non commutatif est levé par l'introduction du concept de série *reconnaissable* (*cf.* [8], [9]).

5. **Diagonalisation**

La *diagonale* de

$$s = \textstyle\sum_{k_1,\ldots,k_n\geqq 0} s_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} \in A[[x_1,\ldots,x_n]]$$

est la série $\mathscr{D} s$ de $A[[t]]$, où t est une nouvelle indéterminée, définie par

$$\mathscr{D} s = \textstyle\sum_{k\geqq 0} s_{k,\ldots,k}\, t^k.$$

Lorsque $A = \mathbf{C}$, les singularités de la fonction analytique, définie par $\mathscr{D} s$, ont été étudiées, connaissant celles de s, par CAMERON et MARTIN [3].

PROPOSITION 5. — *La diagonale d'une série rationnelle en deux indéterminées commutatives est une série algébrique constructible.*

Preuve. — Soient $r \in A[(x_1, x_2)]$, $r' \in A\langle(x_1, x_2)\rangle$ d'image commutative r. Rappelons (*cf.* NIVAT [15]) que le langage sur X :

$$\{f; f \in X^*, |f|_{x_1} = |f|_{x_2}\},$$

où $|f|_{x_1}, |f|_{x_2}$ désignent les nombres d'occurrences de x_1, x_2 dans f, est *algébrique non ambigu* (4). Par conséquent, la série caractéristique

$$d = \sum \{f; f \in X^*, |f|_{x_1} = |f|_{x_2}\}$$

est algébrique constructible dans $A\langle\langle x_1, x_2\rangle\rangle$. Soit

$$\eta : A\langle\langle x_1, x_2\rangle\rangle \to A[[t]],$$

l'épimorphisme défini par $\eta\, x_1 = t$, $\eta\, x_2 = 1$. Il vient $\mathscr{D}\, r = \eta\,(r' \odot d)$. En vertu de la forme du système algébrique constructif donnant d (*cf.* [15]) : il y a, dans les monômes, autant d'occurrences de x_1 que de x_2, on déduit, de la démonstration de la proposition 1, que, en dépit du fait que $\eta\, x_2 = 1$, $\mathscr{D}\, r$ est algébrique constructible.

Lorsque $A = \mathbf{C}$, l'algébricité de la diagonale $\mathscr{D}\, F$ du développement de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle F en deux indéterminées peut être prouvée par la formule des résidus :

$$\mathscr{D}\, F(t) = \frac{1}{2\, i\, \pi} \int_{(\Gamma)} F\left(\zeta, \frac{t}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

où (Γ) est une courbe simple, suffisamment « petite », entourant l'origine, Pour plus de deux indéterminées, un exemple, dû à FURSTENBERG [10]. montre que la diagonale peut être transcendante.

Lorsque A est un corps de caractéristique non nulle, FURSTENBERG [10] a prouvé que, quel que soit le nombre d'indéterminées, la diagonale est algébrique.

Généralisant FURSTENBERG [10], qui l'a prouvé pour les corps parfaits de caractéristique non nulle, CHRISTOL [5] a démontré le résultat suivant :

PROPOSITION 6. — *Toute série algébrique en une indéterminée sur un corps parfait de caractéristique quelconque est diagonale d'une série rationnelle en deux indéterminées.*

---

(4) Un langage *algébrique* n'est autre qu'un *context-free language* au sens de N. CHOMSKY (*cf.* [4], [11] et [15]). Pour la notion d'*ambiguïté*, *voir* [4] et [11]. Le langage considéré ci-dessus est le plus simple des *langages de Dyck* (*cf.* [4], [15]).

Des deux propositions précédentes, on déduit :

PROPOSITION 7. — *Toute série algébrique en une indéterminée sur un corps parfait de caractéristique quelconque est algébrique constructible.*

Remarque. — En utilisant, comme CHRISTOL [5], les éléments de Pisot-Vijayaraghavan, on aurait pu obtenir directement ce dernier résultat.

On peut énoncer, sur le produit de Hurwitz, un résultat analogue à celui de FURSTENBERG [10] sur le produit d'Hadamard (prop. 2).

PROPOSITION 8. — *Le produit de Hurwitz de deux séries algébriques en une indéterminée sur un corps parfait de caractéristique non nulle est une série algébrique.*

Preuve. — K étant un corps parfait de caractéristique non nulle, soient a_1, a_2 deux séries algébriques de $K[[x]]$, diagonales des séries rationnelles r_1 de $K[[u, v]]$ et r_2 de $K[[u', v']]$. Dans $K[[u, u', v, v']]$, effectuons le produit de Hurwitz-Bochner-Martin de r_1 et r_2. D'après la proposition 4, on obtient une série rationnelle

$$r = \sum_{m, m', n, n' \geqq 0} r_{m, m', n, n'} u^m u'^{m'} v^n v'^{n'}.$$

Il vient

$$a_1 \sqcup\!\sqcup\, a_2 = \sum_{m, n \geqq 0} r_{m, m, n, n} x^{m+n}.$$

On démontre l'algébricité de cette série de la même manière que FURSTENBERG [10] le fait pour la diagonale d'une série rationnelle en plusieurs indéterminées sur un corps de caractéristique non nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIEBERRACH (L.). — *Analytische Fortsetzung.* — Berlin, Springer-Verlag, 1955 (*Ergebnisse der Mathematik*, Neue Folge, 3).

[2] BOCHNER (S.) et MARTIN (W. T.). — Singularities of composite functions in several variables, *Annals of Math.*, t. 38, 1937, p. 293-302.

[3] CAMERON (R. H.) et MARTIN (W. T.). — Analytic continuations of diagonals, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 44, 1938, p. 1-7.

[4] CHOMSKY (N.) et SCHÜTZENBERGER (M. P.). — The algebraic theory of context-free languages, « *Computer programming and formal systems* », (P. Braffort et D. Hirschberg, éd.), p. 118-161. — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1963 (*Studies in Logic*); en traduction française dans « *Langages* » (Paris, Larousse), n° 9, 1968, p. 77-118.

[5] CHRISTOL (G.). — Sur une opération analogue à l'opération de Cartier en caractéristique nulle, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, série A, 1970, p. 1-3.

[6] FLIESS (M.). — Du produit de Hurwitz de deux séries formelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 268, série A, 1969, p. 535-537.

[7] FLIESS (M.). — Application des variables non commutatives à divers produits de séries formelles, *Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres*, 11^e année, n° 21, 1969/1970, p. 10.

[8] FLIESS (M.). — Séries reconnaissables, rationnelles et algébriques, *Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 94, 1970, p. 231-239.

[9] FLIESS (M.). — *Sur certaines familles de séries formelles*, Thèse Sc. math. Univ. Paris-VII, 1972.

[10] FURSTENBERG (H). — Algebraic functions over finite fields, *J. of Algebra*, t. 7, 1967, p. 271-277.

[11] GINSBURG (S.). — *The mathematical theory of context-free languages*. — New York, Mc Graw-Hill Book Company, 1966.

[12] HURWITZ (A.). — Sur un théorème de M. Hadamard, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 128, 1899, p. 350-353; et « *Mathematische Werke* », Band 1, p. 482-484. — Basel, Birkhäuser, 1932.

[13] JUNGEN (R.). — Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence, *Comment. Math. Helvet.*, t. 3, 1931, p. 266-306.

[14] LAMPERTI (J.). — On the coefficients of reciprocal power series, *Amer. math. Monthly*, t. 65, 1965, p. 90-94.

[15] NIVAT (M.). — Transductions des langages de Chomsky, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 18, fasc. 1, 1968, p. 339-455.

[16] SCHÜTZENBERGER (M. P.). — On the definition of a family of automata, *Inform. and Contr.*, t. 4, 1961, p. 245-270.

[17] SCHÜTZENBERGER (M. P.). — On a theorem of R. Jungen, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 13, 1962, p. 885-890.

[18] SEYDI (H.). — Sur les anneaux de séries formelles algébriques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, série A, 1971, p. 1169-1172.

[19] SWEEDLER (M. E.). — *Hopf algebras*. — New York, W. A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).

(Texte reçu le 25 mars 1973.)

Michel FLIESS,
50, rue de Charonne,
75011 Paris.